arXiv:2305.02238v1 [physics.optics] 3 May 2023

驱动-耗散光子分子中弗洛凯合成维度里的量子化拓扑能量泵浦与外尔点

Sashank Kaushik Sridhar,[1] Sayan Ghosh,[2] 和 Avik Dutt[1,3]

[1]*Department of Mechanical Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*
[2]*Department of Physical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata,Mohanpur, West Bengal 741246, India*[3]*Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*（日期：2023年5月4日）

拓扑效应在广泛的物理系统中均有体现，例如固体晶体、声波、光子材料和冷原子。这些效应由通常取整数值的“拓扑不变量”表征，并能在空间、时间及其他自由度中产生稳健的量子化输运通道。尤其是时间通道，通过以多个非公度频率驱动系统，可以实现更高维的拓扑效应。然而，耗散通常会对这类拓扑效应产生不利影响，尤其是在系统由量子自旋或量子比特构成时。在此，我们提出一种光子分子，它受到多个射频/光学驱动并存在耗散，是观测沿弗洛凯合成维度的量子化输运的理想候选系统。我们平台的驱动-耗散特性增强了非公度调制光子分子中的拓扑能量泵浦。此外，我们还提出了一条实现外尔点并测量源自这些倒易空间（k-空间）磁单极子的贝里曲率的途径，展示了该平台在高维拓扑哈密顿量模拟方面的能力。我们的方法可直接在 k-空间中设计多种哈密顿量，所用调制带宽远低于集成光子腔的自由光谱范围（FSR）。

量子化输运是拓扑绝缘体（TIs）的标志性特征。最初，人们在凝聚态系统中研究电子输运（即量子化霍尔电导 [1, 2], 如今，支持非平庸拓扑的哈密顿量已在多种系统中得到实验模拟，例如超冷原子 [3, 4], 光子学 [5], 声学 [6, 7] 和拓扑电路 [8]。在这类模拟器中，通常通过控制实空间晶格位点之间的耦合来构造哈密顿量；这些位点例如可由大型原子阵列、光子谐振腔或光子波导实现 [9–11]。实验已在这些实空间模拟器中观测到稳健的单向边缘态 [9, 12, 13]，但关于光子拓扑绝缘体中量子化拓扑输运的理论和实验证据仍然有限——尤其与电子量子霍尔系统中近乎完美的量子化电导相比 [2]，后者的精度达到一亿分之一 10^9, ，并随后被用于定义电阻标准 [14]。造成这一状况的一个主要原因是，对于原子或光子这类中性粒子，很难定义输运性质及其电导类比量，因为它们不会自然地响应电磁场。实空间模拟器实现理想输运量子化的其他障碍，还包括不可避免的耗散和外部驱动 [15]。

近年来，合成维度的概念应运而生，其通过将原子和光子的内部自由度重新用作额外维度，从而在紧凑的低维物理结构中实现高维拓扑现象 [16, 17]。合成维度使得晶格哈密顿量具备易于实现的可重构性和可调谐性、长程耦合以及人工磁规范场，从而实现.....

中性粒子，通过精确控制由频率、时间模式、轨道角动量、自旋和横向空间模式等自由度标记的模式间耦合 [18–30]。光子合成频率 维度尤其成功展示了厄米与非厄米拓扑、电磁规范场、单向边缘态、布洛赫振荡，以及体态和边界现象 [16, 18, 22, 31–37]。然而，实空间光子模拟器中量子化 拓扑输运面临的上述限制——中性粒子在电磁场中的输运，以及耗散和驱动的存在——同样适用于合成空间系统。

在这里，我们展示了如何利用一对调制腔中的 Floquet 合成维度这一概念，使多个驱动与耗散的效应能够支持光子的量子化拓扑输运。我们的系统由两个相同且耦合的光子腔组成，通常称为“光子分子” [38, 39], , 它们经过调制，以诱导对称超模与反对称超模之间的跃迁。调制本身由两个或更多具有非公度频率的驱动驱动，每个驱动都实现一个正交的合成维度。我们将每个非公度驱动所产生的晶格位点称为沿着一个“Floquet”合成维度分布。通过实现 Martin、Refael 和 Halperin [40] 提出的保守协议的驱动耗散类比，我们明确构造了一个能够呈现量子化拓扑能量泵浦的二维陈绝缘体。能量泵浦速率不仅不受外部激光驱动影响，还会因有限耗散的存在而得到促进。此外，我们系统的驱动耗散特性俺去也

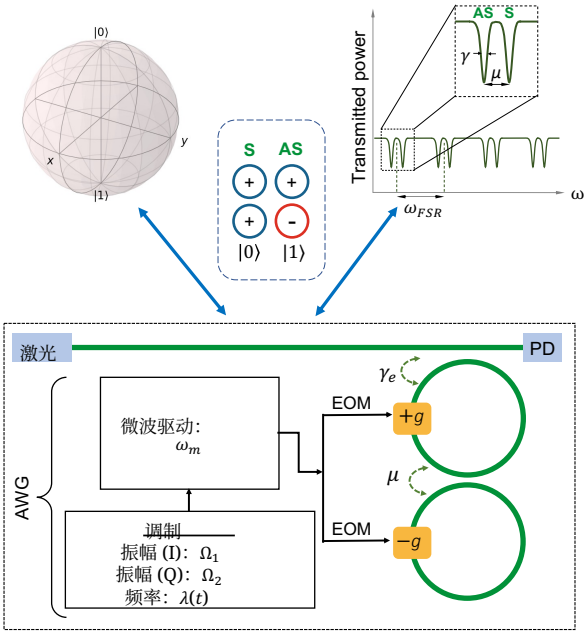

图 1. 所提出的系统示意图。由耦合速率分隔的非简并本征模 μ 属于光子分子中的对称（S）和反对称（AS）超模，即处于同相（S）或 π反相（AS）的单环方位模式。单对共振模式子空间中的相干演化可等效为布洛赫球上的运动，该运动通过使用接近共振频率的射频信号驱动电光调制器（EOM）来控制。右上方显示了光电探测器（PD）处的透射功率，此时光子分子的 EOM 未施加任何射频驱动。由于有限的共振线宽，模式振幅的对称衰减表示为 γ。我们可以使用任意波形发生器（AWG）生成具有幅度 I-Q 和频率调制的射频信号，如式5所定义，从而能够在弗洛凯晶格上实现半 BHZ 哈密顿量[式（1）]。

该方案避免了其他平台 [41, 42], 中有限量子比特相干时间和复杂态初始化所带来的限制，彰显了二维陈拓扑绝缘体卓越的拓扑鲁棒性。

请注意，我们使用“弗洛凯维度”这一术语，是为了将其与合成频率维度区分开来，尽管两者都需要调制光子腔：前者的调制频率远低于后者所需的自由光谱范围（FSR）调制频率。这样一来，通过降低低损耗电光调制所需的苛刻带宽要求，我们的方法便更容易在集成光子学中实现片上集成。对于高维模型的光子实现，这种降低尤其有益，因为在合成频率维度的情形下，这类模型需要以 10-100×FSR 的频率进行调制。

作为高维拓扑的一个示例，我们利用有效的零维系统构建了一个三维（3D）拓扑哈密顿量，该哈密顿量支持外尔点，它们在弗洛凯晶格 [43] 的倒易（k）空间中充当磁单极子。要观察这种磁单极子行为，我们需要重建围绕这些外尔点测得的贝里曲率“场”线。最后，我们展示如何通过实验测量任意一般双能带哈密顿量的各个能带中的贝里曲率。

更一般地说，利用弗洛凯合成维度，可以借助简单、紧凑的几何结构，以及实验上可实现的激发与测量方案，在高维空间中直接进行 k-空间哈密顿量设计。

光子分子中的半 BHZ 模型与拓扑能量泵浦

为说明弗洛凯合成维度中时间调制系统所表现出的类似拓扑行为，我们考虑齐—吴—张模型的布洛赫形式 [44–46]（等价地说，即半—贝里维格—休斯—张（半 BHZ）模型）。在弗洛凯晶格上，通过两个不相称（频率比为无理数）的频率驱动自旋（或二能级系统）来实现时 [40], , 哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \Omega_R[&\sin(\Omega_1 t+\phi_1)\sigma_x + \sin(\Omega_2 t+\phi_2)\sigma_y \\ &+\{m-\cos(\Omega_1 t+\phi_1)-\cos(\Omega_2 t+\phi_2)\}\sigma_z] \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\Omega_1 t+\phi_1 \to k_x$ 和 $\Omega_2 t+\phi_2 \to k_y$ 给出了半 BHZ 模型在真实晶格 [47]上的k空间表象。驱动相位与布洛赫准动量 $\mathbf{k}$ 之间的这种对偶性还意味着，相位随时间线性演化，模拟了电荷在二维晶格中受电场作用而运动的效应。半 BHZ 哈密顿量打破了时间反演对称性和手征对称性，但具有粒子-空穴对称性 $\hat{}\,\hat{}$，其中 $C=\sigma_x K$，以及反演对称性，其中 $P=\sigma_z$，$\hat{}C\mathcal{H}(k)\,\hat{}C^{-1}=-\mathcal{H}(-k)$ 和 $\hat{}\,P\mathcal{H}(k)\,\hat{}P^{-1}=\mathcal{H}(-k)$。因此$\mathcal{H}(k)$属于 Altland-Zirnbauer 十重分类中的 D 类拓扑绝缘体，并支持手征输运[48–50]。它描述了陈数为（C）的二维陈绝缘体的行为，陈数由 m的值决定；当 $|m|>2$ （平庸相）时，$C=0$；当 $|m|<2$ （拓扑相）时，$C=1$。这些陈绝缘体会产生与 C成正比的反常电流，且电流的流动方向垂直于施加的电场 Ω。

在弗洛凯合成维度中，量子化手征输运特别适合用于探测，因为有效电场在此自然产生 [40], ；而其他由中性粒子构成的实空间和合成空间系统则需要显式引入有效电场。在弗洛凯晶格上，这会产生由 C量子化的拓扑能量泵浦，因此我们预期能够观察到能量从一个非公度驱动向另一个驱动的量子化传输。尽管用量子比特 [41, 42]实现这一哈密顿量能够产生奇异现象，例如

作为工程化猫态 [51] 和量子态增强手段[52], 它们在展示长时间尺度上的拓扑泵浦时会受到限制，因为退相干会造成影响。不过，除量子测量外，该哈密顿量可以由经典系统模拟，例如处于时变磁场中的磁性纳米颗粒，这使得拓扑能量泵浦的演示不受量子比特相干时间的限制。现在我们来看看，由两个非公度频率驱动的光子分子如何实现式（1）所概括的相同物理过程。

光子分子由两个相同的光学环形谐振腔组成，它们以 μ的速率通过倏逝场耦合。[38, 39]如图所示，分子的本征模是不同方位角阶数下的对称（S）和反对称（AS）超模。1。每个环形谐振腔都配有一个电光相位调制器（EOM），当以接近模态分裂的频率进行驱动时，它会耦合本征模，即 $\omega_m \simeq \mu$，且射频（RF）驱动信号 $V(t)$ 的极性相反。我们选取一对本征模作为二能级系统，并在单光子子空间中进行研究。令两个环形谐振腔中未耦合模式的玻色湮灭算符分别为 a_1 和 a_2 ，定义 S 和 AS 本征模的湮灭算符为$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2)$ 和 $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2)$，由此得到哈密顿量:

$$\mathcal{H} = \omega_+ c_1^\dagger c_1 + \omega_- c_2^\dagger c_2 + gV(t)(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1) \quad (2)$$

其中 g 是电光耦合强度。将所有频率均相对于未耦合的环腔共振频率 ω_0 测量，我们设定 $\omega_\pm = \pm\frac{\mu}{2}$。在这个单光子超模子空间中，泡利算符按通常方式定义：$\sigma_x = c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1,\ i\sigma_y = c_1^\dagger c_2 - c_2^\dagger c_1,\ \sigma_z = c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2$ ，由此得到哈密顿量

$$\mathcal{H} = -\sigma_z\,\mu/2 + \sigma_x\,gV(t) \quad (3)$$

我们现在考虑 $V(t)$ 的一种特定形式，将其作为频率为 ω_m 的射频载波，分别施加 I-Q 幅度调制（AM） $V_x(t)$ 和 $V_y(t)$, 以及频率调制（FM）$\lambda(t) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t[\Delta(t)]$, , 从而得到,

$$\mathcal{H} = \sigma_z\mu/2 + \sigma_x g\mathrm{Re}\left[\{V_x - iV_y\} \times \exp\{i\omega_m t + i\Delta(t)\}\right]$$

其中 $\Delta(t) = \int^t \lambda(t')\mathrm{d}t'$。在 $|gV(t)| \ll \mu\,\forall\,t$ （弱驱动）下采用相互作用绘景，旋波近似下的有效哈密顿量为（补充材料 I），

$$\mathcal{H} = -\frac{\delta + \lambda(t)}{2}\sigma_z + \frac{gV_x(t)}{2}\sigma_x + \frac{gV_y(t)}{2}\sigma_y \quad (4)$$

其中 $\delta = \omega_m - \mu$。与方程（1）比较可得出需要施加的振幅和频率调制信号

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= -gV_0\{\cos(\Omega_1 t + \phi_1) + \cos(\Omega_2 t + \phi_2)\}\\ V_x(t) &= V_0\sin(\Omega_1 t + \phi_1)\\ V_y(t) &= V_0\sin(\Omega_2 t + \phi_2)\end{aligned} \quad (5)$$

可调拓扑参数 $m = \delta/(2gV_0)$ 现在是 RF 驱动 ω_m 相对于二能级系统共振频率的归一化失谐量，并对应于方程（σ_z中的静态 1）系数。因此， ω_m 可以轻松地从 $0 < m < 2$ 调控至 $m > 2$，从而引发拓扑相变。I-Q 振幅调制对应于 σ_x和 σ_y 分量，而频率调制对应于 σ_z 分量。

我们注意到，通过相应地选择调制的频率尺度，可以使该系统绝热演化，即 $\Omega_1,\Omega_2 \ll gV_0$。我们还强调，我们所提出实现方案中的所有频率尺度都远低于环的自由光谱范围（$\Omega_1,\Omega_2 \ll \mu \ll \omega_{\mathrm{FSR}}$），从而降低了对集成光子调制器带宽的要求。因此，我们展示了如何在光子分子这一有效的零维系统中，通过适当设计的驱动和失谐，实现二维半 BHZ 哈密顿量，但此时系统仍是保守系统。在引入耗散和外部驱动之前，我们先简要总结 [40] 中介绍的量子化拓扑能量泵浦现象。将哈密顿量分解为相应的 Ω_1 和 Ω_2 驱动贡献:

$$\mathcal{H} = h_1(t) + h_2(t) + \sigma_z\,\delta/2, \quad (6)$$

每个驱动在时间 T 内所做的功 $i = 1,\ 2$ 为

$$W_i(T) = \int_0^T dt\left\langle\frac{dh_i}{dt}\right\rangle \quad (7)$$

当 Ω_1/Ω_2 为无理数时，系统会遍历整个布里渊区，从而实现量子化能量泵浦:

$$W_1 = -W_2 = C\frac{\Omega_1\Omega_2 T}{2\pi} \quad (8)$$

其中 C 是陈数。

光子分子中的驱动耗散量子化泵浦

接下来，我们将探究加入外部激光驱动和腔耗散，如何在准稳态区域实现量子化拓扑能量泵浦，而无需对分子态的初始化提出严格要求。耗散是自然存在的，因为所有光学环形谐振腔都有有限的 Q 因子，它们决定了系统的光子衰减速率γ 。然而，这种衰减对两种模式的影响是对称的，因此可以对它们进行重归一化，以考察二能级子空间内的动力学。这是光子系统所具有的独特优势，也促使我们验证加入外部光学驱动后拓扑泵浦能否持续存在。 c_1 和 c_2 的驱动耗散运动方程为

$$\dot{c}_{1,2} = i[\mathcal{H}, c_{1,2}] - \gamma c_{1,2} + \sqrt{\gamma_e}s_{in}(t)e^{\pm i((\mu+\delta)t + \Delta(t))/2} \quad (9)$$

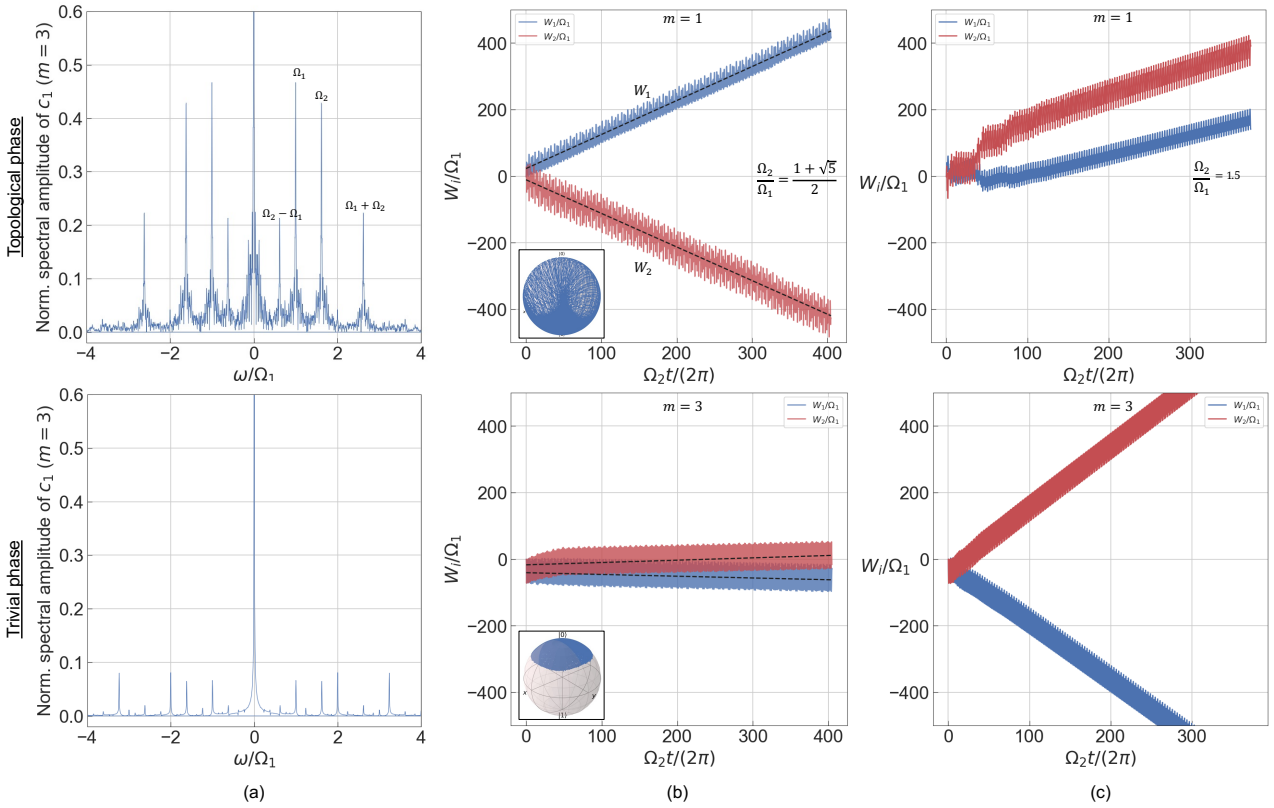

图 2. 存在光学驱动和耗散时拓扑动力学的光谱与时间特征。(a) 对称超模 c_1 的归一化光谱振幅。在拓扑区域（$m=1$）中，我们看到稠密光谱呈现连续底噪，表明动力学非周期且高度离域，其特征是非公度驱动的谐波 Ω_1 和 Ω_2。在平庸区域（$m=3$）中，光谱为离散的尖峰，表明存在周期轨道，且动力学局域于布洛赫球上。(b) 拓扑区域（$m=1$）和平庸区域（$m=3$）中，驱动 Ω_1 和 Ω_2 所做功的归一化值。W_1 和 W_2 分别显示，在拓扑区域经过 ~ 5 个光子寿命后，斜率为 1.022 和 -1.010；而在平庸区域几乎没有泵浦（W_1 和 W_2 的斜率分别为 -0.053 和 0.070），清楚地展现了其与陈数 C 的线性关系。插图显示了布洛赫球上的轨迹。(c) 对于公度驱动（$\Omega_2/\Omega_1=1.5$），动力学不呈现量子化，且平庸区域中可能出现更高的泵浦速率（见正文）。

其中 γ_e 是耦合至总线波导的耦合速率，而$s_{in}(t)$ 是外部激光驱动（请注意，从本文此处起，我们将哈密顿量驱动 Ω_1 和 Ω_2 与外部光学/激光驱动 $s_{in}(t)$ 区分开来）。我们根据式（4）中哈密顿量的本征谱随 m绝热变化的特性，对所选激光频率作出物理上的解释。

时间与光谱动力学中的拓扑特征

即使加入驱动和耗散，该系统仍展现出多种拓扑特征[图 2], ，进一步彰显了保守半 BHZ 模型拓扑性质的显著稳健性。在图 2（a）中，可以清楚地看到其中一个超模（记作 c_1）的谱振幅存在定性差异：拓扑区域的特征是具有连续底部的致密谱，这表明系统经历了非周期演化，而平庸区域则显示出若干离散峰，代表动力学中的周期性局域化。我们的数值模拟再现了对初始态 [53]取平均的保守系统中计算得到的结果。需要注意的是，我们的模型无需对初始态进行此类平均，因为所呈现的特征来自长时间准稳态模拟；它们基本不受初始态瞬态的影响，而这些瞬态在长时间演化中已经衰减。

如前所述，这个哈密顿量的标志性特征是存在量子化拓扑泵浦，而平庸区域中则没有这种现象。在图 2(b) 中，我们看到，Ω_1 驱动（W_1）所做的功以式（8）所述的量子化速率增加，而 Ω_2 驱动（W_2）则相应减少，这反映了能量正从一个驱动转移到另一个驱动。线性斜率进一步印证了陈数所决定的量子化C，泵浦速率在 W_1 时为 1.022 和 -1.010

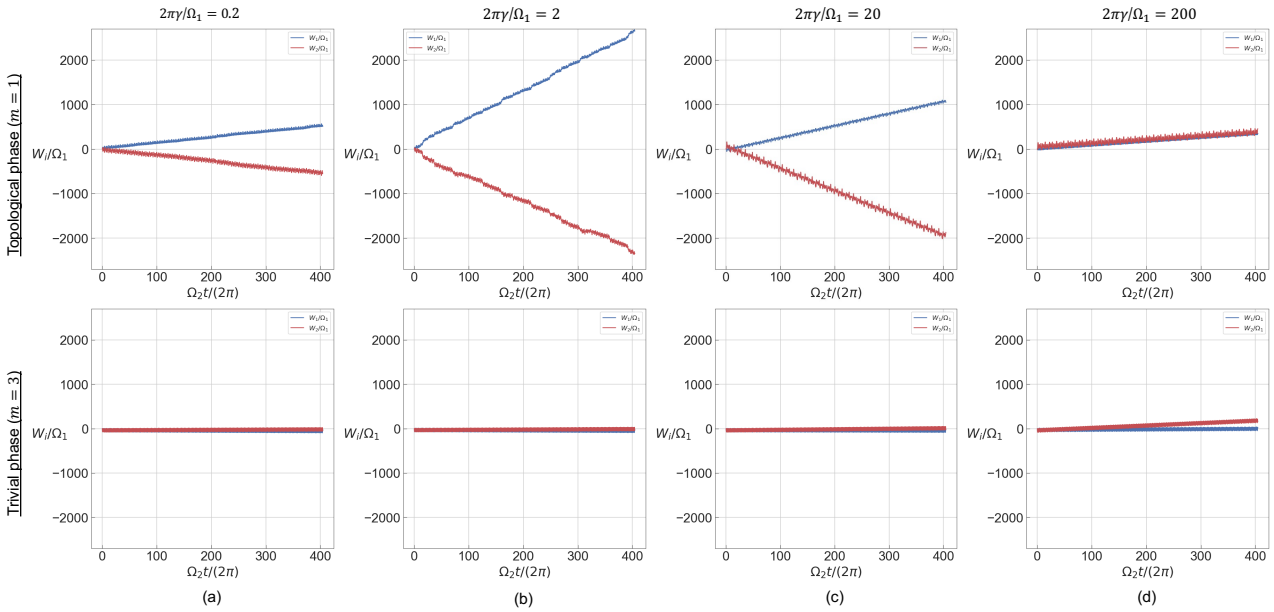

图 3. 驱动所做的功，模拟结果如下： $\gamma = $ (a) $0.1\Omega_1/\pi$, (b) Ω_1/π, (c) $10\Omega_1/\pi$, and (d)$100\Omega_1/\pi$。在 (a) 中，我们观察到接近量子化泵浦的现象，其斜率分别为 1.261 和 -1.342，对应于 W_1 和 W_2 ；在 (b) 和 (c) 中，这一现象增强后开始消失。(d) 中几乎观察不到相变行为，这是由于振子的动力学处于过阻尼状态。然而，斜率的增加并非异常，因为未归一化的实际做功取决于 $|c_1|^2 + |c_2|^2$，其会降低数个数量级，从而抵消斜率增加的效果（补充图 S3）。

而 W_2 在拓扑相（上图）中分别为此数值；在平庸相（下图）中，相应数值为 -0.053 和 0.070。布洛赫球图（图 2(b) 插图、补充信息视频 1 和补充信息视频 2）展现了系统在拓扑区域中的遍历行为，而平庸区域中的动力学则仍局域在 $|0\rangle$态附近。值得注意的是，我们不受光子寿命（$\tau_p = 1/\gamma$，其中 $\gamma \approx 0.01\Omega_1/\pi$）的限制，并且在 ~ 5 个光子寿命内持续观察到泵浦现象，其中 $m = 1$。在平庸区域中， $m = 3$ 时几乎观察不到泵浦。这里一个重要的细节是，由于驱动和耗散的作用，泵浦是在准稳态条件下观测到的，因此无需像以往方案那样复杂地初始化 Floquet 本征态 [41, 42] ，也使我们能够从两个谐振腔中的真空态开始。

验证哈密顿量驱动频率的非公度性必要性的一种方法，是观察 $\Omega_1/\Omega_2 = p/q$、 p、 $q \in \mathbb{Z}$ 取有理值时的动力学行为。在这种情况下，我们看到跃迁消失了，因为半 BHZ 模型实际上变成了具有长程耦合 [18, 54, 55]的一维紧束缚哈密顿量。泵浦速率不再取决于陈数C，而取决于布里渊区中特定周期轨迹上的贝里曲率积分。因此，我们还会在布洛赫球上看到周期轨道（补充信息视频 3 和补充信息视频 4）。

耗散对拓扑泵浦的影响

我们系统的一个独特特征，是动力学与耗散之间的相互作用。我们在图 3中展示，随着 γ取值增大，拓扑泵浦会失去量子化特征，但拓扑区域与平庸区域之间显著的定性差异仍会持续到 $\gamma > \Omega_1$,Ω_2。尽管归一化泵浦速率似乎有所增加，但在新的准稳态下，总功率 $|c_1|^2 + |c_2|^2$ 平均而言会降低，从而导致泵浦功率净减少。对于超过某一 $\gamma \gg 10\Omega_1/\pi$后泵浦损失的直观解释是，耦合振子系统变得过阻尼，拓扑动力学和泵浦效应因而被冲淡。

扩展到更高维度：外尔点

现在我们来探讨可扩展性问题。弗洛凯合成维度的关键优势在于，能够构建更高维的哈密顿量；只需对当前的光子分子装置进行相对简单的扩展即可实现。只需在调制中加入第三个不相干频率，我们就能构造出具有三维非平庸拓扑的体系统，从而产生外尔点等现象 [43]。这些点因其所引发的本质上独特的现象而在学界引起了极大兴趣，例如费米弧表面态[56], ，它们还有望应用于下一代

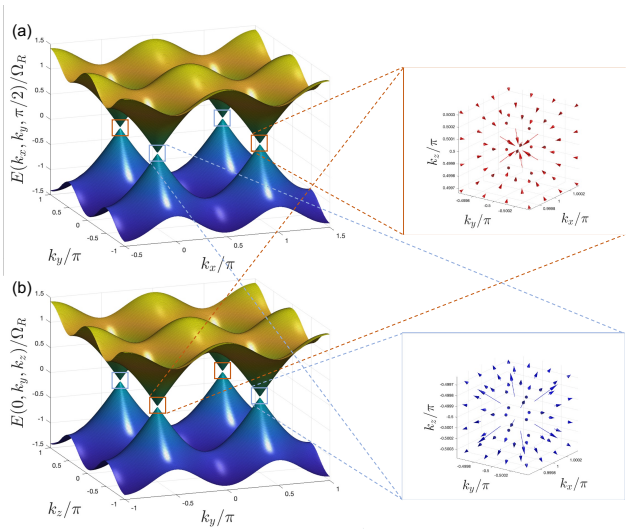

图4. 外尔点哈密顿量沿 (a) k_xk_y 平面和 (b) k_yk_z 平面的能带结构。能带接触处的外尔点在其附近呈现各向同性线性色散，其拓扑鲁棒性可通过外尔点附近某一曲面法向的贝里曲率通量量子化来量化。相邻外尔点的量子化通量符号相反，如插图所示；插图展示了三维贝里曲率场线。这种行为表明，合成磁场线从一个外尔点发出并汇聚于相邻外尔点，因此外尔点可视为合成磁场的磁单极子。

代电子设备 [57, 58]。

此外，外尔点表现为贝里曲率的磁单极子（类似于动量空间中的磁场），而此前尚未通过实验测量外尔点周围的贝里曲率。利用光子分子，有两种途径可以增加系统的维度并获得外尔点：引入第三个非公度频率，或通过以自由光谱范围[22, 31]为频率调制环的频率合成维度。虽然以 ω_{FSR} 调制能够在频率晶格 [37, 59–61]上形成边界，但引入第三个非公度频率可直接得到k空间哈密顿量。这使我们能够模拟外尔哈密顿量，例如 [62]:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \Omega_R\{\sin(k_x)\sigma_x + \cos(k_y)\sigma_y + \cos(k_z)\sigma_z\} \quad (10)$$

该哈密顿量的能带结构如图4所示。可以看到，在位于 $(0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ 和 $(\pi, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ 的能带接触点附近，三个方向上均呈现线性色散。

我们的方法尤其强大之处在于，现在可以通过追踪光子分子中编码的人工自旋动力学，实验测绘任意给定的双能带哈密顿量 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$各能带中的贝里曲率。这使我们能够生成类似于图4 插图所示的数据，展示每个外尔点附近的贝里曲率，从而验证它们具有合成单极子特性。为进一步支持这一论断，我们以规范不变的方式计算 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$，结果为 [63]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \sum_{m\neq n} \mathrm{Im}\left[\frac{\langle n(\mathbf{k})|\{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k})\}|m(\mathbf{k})\rangle \times \langle m(\mathbf{k})|\{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k})\}|n(\mathbf{k})\rangle}{(E_m - E_n)^2}\right] \quad (11)$$

其中，$|m(\mathbf{k})\rangle$ 和 $|n(\mathbf{k})\rangle$ 是 $\mathcal{H}(\mathbf{k})$的本征矢量，E_m 和 E_n 是相应的本征值。求解 2×2哈密顿量的一般本征值和本征矢量（补充材料 II）后，可将其简化为

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{\Omega_R^2}{4E_m^2}\Big[&\hat{k}_x \sin(k_y)\sin(k_z)\left(\langle n|\sigma_x|n\rangle - \frac{\Omega_R\sin(k_x)}{E_m}\right)\\ &- \hat{k}_y \cos(k_x)\sin(k_z)\left(\langle n|\sigma_y|n\rangle - \frac{\Omega_R\cos(k_y)}{E_m}\right)\\ &- \hat{k}_z \cos(k_x)\sin(k_y)\left(\langle n|\sigma_z|n\rangle - \frac{\Omega_R\cos(k_z)}{E_m}\right)\Big]\end{aligned} \quad (12)$$

在光子分子的弗洛凯合成维度中，我们可以设想以下方案：针对给定的初始相位，将系统初始化为本征态 $|n\rangle$，并以三个不相称的频率进行绝热驱动，同时测量所有 k 的自旋期望值。

除了外尔点之外。在这里，本征态由于能带接触而发生翻转，贝里曲率发散，因此我们可以对这项测量进行阈值处理，并在多个初始相位下累积实验运行，以重构图中的插图。4因此，光子分子可以为拓扑弗洛凯系统的贝里曲率提供一种新颖的实验探测手段。

讨论

总之，我们提出了一种新的候选系统，可在二维 Floquet 合成晶格中构造拓扑哈密顿量，并证明该系统在多个参数区域内，即使存在耗散和外部驱动，仍能展现拓扑能量泵浦。这种泵浦可持续多个光子寿命，并在归一化的——

自旋子空间中保持量子化。此外，只需加入一个额外的非公度频率，该系统便可扩展为模拟更高维哈密顿量。举例来说，我们研究了外尔点，并提出了在光子分子中观测外尔点的可行方案。合成维度通过避免构建类似材料系统的复杂性（例如冷原子实验中的复杂性），带来了诸多优势 [62], 但这种复杂性自然会转移到控制信号的射频工程要求上。此外，要测量拓扑特征，还需要获取复振幅 c_1 和 c_2的信息，这就需要采用动态调谐频率的相敏探测方案。不过，采用最先进的电子设备驱动、品质因数高达 10^6, 的片上电光调制环形谐振器，已经已展示 [39, 64]。一个关键优势在于我们调制的频率，因为 $\omega_m \ll \omega_{FSR}$ 对于弗洛凯合成维度而言，这有助于降低驱动片上器件所需电子设备的规格要求。因此，可以设想一种全集成器件，能够在这一框架下长时间实现高维哈密顿量的模拟模拟。

致谢

这项工作得到了诺斯罗普·格鲁曼种子基金，以及IonQ与马里兰大学联合提供的国家Q-Lab种子基金的支持。

[1] K. v. Klitzing、G. Dorda 和 M. Pepper，《基于量子化霍尔电阻高精度测定精细结构常数的新方法》，Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980)。[2] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale 和 M. den Nijs，《二维周期势中的量子化霍尔电导》，Phys. Rev. Lett. 49, 405 (1982)。[3] H. Miyake、G. A. Siviloglou、C. J. Kennedy、W. C. Burton 和 W. Ketterle，《在光学晶格中利用激光辅助隧穿实现Harper哈密顿量》，Phys. Rev. Lett. 111, 185302 (2013)。[4] M. Aidelsburger、M. Atala、M. Lohse、J. T. Barreiro、B. Paredes 和 I. Bloch，《在光学晶格中利用超冷原子实现Hofstadter哈密顿量》，Phys. Rev. Lett. 111, 185301 (2013)。[5] H. Price、Y. Chong、A. Khanikaev、H. Schomerus、L. J. Maczewsky、M. Kremer、M. Heinrich、A. Szameit、O. Zil- berberg、Y. Yang、B. Zhang、A. Al`u、R. Thomale、I. Carusotto、P. St-Jean、A. Amo、A. Dutt、L. Yuan、S. Fan、X. Yin、C. Peng、T. Ozawa 和 A. Blanco-Redondo，《拓扑光子学路线图》，J. Phys. Photonics 4, 032501 (2022)。[6] A. B. Khanikaev、R. Fleury、S. H. Mousavi 和 A. Alu，《角动量偏置类石墨烯谐振器晶格中的拓扑稳健声传播》，Nature communications 6, 8260 (2015)。[7] G. Ma、M. Xiao 和 C. T. Chan，《声学和机械系统中的拓扑相》，Nature Reviews Physics 1, 281 (2019)。[8] S. Imhof、C. Berger、F. Bayer、J. Brehm、L. W. Molenkamp、T. Kiessling、F. Schindler、C. H. Lee、M. Greiter、T. Neupert 和 R. Thomale，《拓扑角态的拓扑电路实现》，《自然物理》14, 925 (2018)。[9] M. Hafezi、S. Mittal、J. Fan、A. Migdall 和 J. M. Taylor，《硅光子学中的拓扑边缘态成像》，Nature Photonics 7, 1001 (2013)。[10] M. C. Rechtsman、J. M. Zeuner、Y. Plotnik、Y. Lumer、D. Podolsky、F. Dreisow、S. Nolte、M. Segev 和 A. Szameit，《光子Floquet拓扑绝缘体》，《自然》496, 196 (2013)。[11] M. Aidelsburger、M. Lohse、C. Schweizer、M. Atala、J. T. Barreiro、S. Nascimb`ene、N. R. Cooper、I. Bloch 和 N. Goldman，《利用超冷玻色原子测量霍夫施塔特能带的陈数》，《自然物理》11，162（2015）。[12] Z. Wang、Y. Chong、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c，《单向无背向散射拓扑电磁态的观测》，《自然》461，772（2009）。[13] M. Atala、M. Aidelsburger、M. Lohse、J. T. Barreiro、B. Paredes 和 I. Bloch，《在玻色梯子中利用超冷原子观测手性电流》，《自然物理》10，588（2014）。[14] K. v. Klitzing、G. Dorda 和 M. Pepper，《基于量子化霍尔电阻高精度测定精细结构常数的新方法》，Phys. Rev. Lett. 45，494（1980）。[15] T. Ozawa 和 I. Carusotto，《有损光子晶格中的反常霍尔效应和量子霍尔效应》，Phys. Rev. Lett. 112，133902（2014）。[16] L. Yuan、A. Dutt 和 S. Fan，《动态调制环形谐振器中的合成频率维度》，APL Photonics 6，071102（2021）。[17] T. Ozawa 和 H. M. Price，《合成维度中的拓扑量子物质》，Nature Reviews Physics 1，349（2019）。[18] A. Dutt、M. Minkov、Q. Lin、L. Yuan、D. A. B. Miller 和 S. Fan，《非绝热调制光子腔中动态输入隔离的实验演示》，《ACS光子学》6，162（2019）。[19] C. Leef mans、A. Dutt、J. Williams、L. Yuan、M. Parto、F. Nori、S. Fan 和 A. Marandi，《时分复用光子谐振器网络中的拓扑耗散》，Nat. Phys. 18，442（2022）。[20] B. Bartlett、A. Dutt 和 S. Fan，《合成时间维度中的确定性光子量子计算》，Optica 8，1515（2021）。[21] E. Lustig、S. Weimann、Y. Plotnik、Y. Lumer、M. A. Bandres、A. Szameit 和 M. Segev，《合成维度中的光子拓扑绝缘体》，《自然》567, 356（2019）。

[22] A. Dutt、Q. Lin、L. Yuan、M. Minkov、M. Xiao 和 S. Fan，《具有两个独立物理合成维度的单个光子腔》，Science 367，59（2020）。[23] O. Boada、A. Celi、J. I. Latorre 和 M. Lewenstein，《额外维度的量子模拟》，Phys. Rev. Lett. 108，133001（2012）。[24] B. K. Stuhl、H.-I. Lu、L. M. Aycock、D. Genkina 和 I. B. Spielman，《利用量子霍尔区域中的原子玻色气体可视化边缘态》，Science 349，1514（2015）。[25] M. Mancini、G. Pagano、G. Cappellini、L. Livi、M. Rider、J. Catani、C. Sias、P. Zoller、M. Inguscio、M. Dalmonte 和 L. Fallani，《在合成霍尔条带中利用中性费米子观测手性边缘态》，Science 349，1510（2015）。[26] B. Sundar、B. Gadway 和 K. R. A. Hazzard，《超冷极性分子中的合成维度》，Scientific Reports 8，3422（2018）。[27] X.-W. Luo、X. Zhou、C.-F. Li、J.-S. Xu、G.-C. Guo 和 Z.-W. Zhou，《在一维光学腔阵列中模拟二维拓扑物理》，Nature Communications 6，7704（2015）。[28] S. K. Kanungo、J. D. Whalen、Y. Lu、M. Yuan、S. Dasgupta、F. B. Dunning、K. R. A. Hazzard 和 T. C. Killian，《利用里德堡原子合成维度实现拓扑边缘态》，Nat Commun 13，972（2022）。[29] M. Yang、H.-Q. Zhang、Y.-W. Liao、Z.-H. Liu、Z.-W. Zhou、X.-X. Zhou、J.-S. Xu、Y.-J. Han、C.-F. Li 和 G.-C. Guo，《在合成轨道角动量维度中实现例外点》，Science Advances 9，eabp8943（2023）。[30] Y. Hu、C. Reimer、A. Shams-Ansari、M. Zhang 和 M. Loncar，《在电光微梳中实现高维频率晶体》，Optica 7，1189（2020）。[31] L. Yuan、Y. Shi 和 S. Fan，《具有合成频率维度的系统中的光子规范势》，Opt. Lett. 41，741（2016）。[32] L. Yuan 和 S. Fan，《动态调制环形谐振器中的布洛赫振荡与频率单向平移》，Optica 3，1014（2016）。[33] K. Wang、A. Dutt、K. Y. Yang、C. C. Wojcik、J. Vuˇckovi´c 和 S. Fan，《生成非厄米能带的任意拓扑绕数》，Science 371，1240（2021）。[34] K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik 和 S. Fan，《非厄米能带的拓扑复能量编织》，《自然》598，59（2021）。[35] J. Wang、S. Paesani、Y. Ding、R. Santagati、P. Skrzypczyk、A. Salavrakos、J. Tura、R. Augusiak、L. Manˇcinska、D. Bacco、D. Bonneau、J. W. Silverstone、Q. Gong、A. Ac´ın、K. Rottwitt、L. K. Oxenløwe、J. L. O'Brien、A. Laing 和 M. G. Thompson，《利用大规模集成光学实现多维量子纠缠》，Science 360，285（2018）。[36] A. Dutt、L. Yuan、K. Y. Yang、K. Wang、S. Buddhiraju、J. Vuˇckovi´c 和 S. Fan，《沿合成频率维度创建边界》，Nat Commun 13，3377（2022）。[37] X. Lu、A. Rao、G. Moille、D. A. Westly 和 K. Srinivasan，《微腔非线性光学的通用频率工程工具：对回音壁共振的多重选择性模式分裂》，Photon. Res., PRJ 8，1676（2020）。[38] R. J. C. Spreeuw、N. J. van Druten、M. W. Beijersbergen、E. R. Eliel 和 J. P. Woerdman，《强驱动二能级系统的经典实现》，Phys. Rev. Lett. 65, 2642（1990）。[39] M. Zhang、C. Wang、Y. Hu、A. Shams-Ansari、T. Ren、S. Fan 和 M. Lonˇcar，《电子可编程光子分子》，《自然·光子学》13, 36（2018）。[40] I. Martin、G. Refael 和 B. Halperin，《强驱动量子系统中的拓扑频率转换》，Phys. Rev. X 7, 041008（2017）。[41] E. Boyers、P. J. D. Crowley、A. Chandran 和 A. O. Sushkov，《利用准周期驱动量子比特探索二维合成量子霍尔物理》，Phys. Rev. Lett. 125, 160505（2020）。[42] D. Malz 和 A. Smith，《单个超导量子比特上的拓扑二维 Floquet 晶格》，Phys. Rev. Lett. 126, 163602（2021）。[43] H. Weyl，Z. Physik 56, 330（1929）。[44] X.-L. Qi、Y.-S. Wu 和 S.-C. Zhang，《二维顺磁半导体中自旋霍尔效应的拓扑量子化》，Phys. Rev. B 74, 085308（2006）。[45] Y. Che、C. Gneiting、T. Liu 和 F. Nori，《通过无监督机器学习找回拓扑量子相变》，Phys. Rev. B 102, 134213（2020）。[46] M.-C. Liang、Y.-D. Wei、L. Zhang、X.-J. Wang、H. Zhang、W.-W. Wang、W. Qi、X.-J. Liu 和 X. Zhang，《自旋轨道耦合超冷费米子中齐—吴—张模型的实现》，Phys. Rev. Res. 5, L012006（2023）。[47] B. A. Bernevig、T. L. Hughes 和 S.-C. Zhang，《HgTe 量子阱中的量子自旋霍尔效应与拓扑相变》，Science 314, 1757（2006）。[48] A. P. Schnyder、S. Ryu、A. Furusaki 和 A. W. W. Ludwig，《三维空间中拓扑绝缘体和超导体的分类》，Phys. Rev. B 78, 195125（2008）。[49] A. Altland 和 M. R. Zirnbauer，《介观常态—超导混合结构中的非标准对称性类别》，Phys. Rev. B 55, 1142（1997）。[50] A. Kitaev，《拓扑绝缘体与超导体的周期表》，AIP Conference Proceedings 1134, 22（2009）。[51] F. Nathan、I. Martin 和 G. Refael，《驱动耗散量子腔中的拓扑频率转换》，Phys. Rev. B 99, 094311（2019）。[52] D. M. Long、P. J. Crowley、A. J. Koll´ar 和 A. Chandran，《利用 Floquet 驱动增强腔的量子态》，Physical Review Letters 128, 183602（2022）。[53] P. J. D. Crowley、I. Martin 和 A. Chandran，《准周期驱动量子系统的拓扑分类》，Physical Review B 99, 10.1103/phys-revb.99.064306（2019）。[54] B. A. Bell、K. Wang、A. S. Solntsev、D. N. Neshev、A. A. Sukhorukov 和 B. J. Eggleton，《具有复杂长程耦合的光谱光子晶格》，Optica 4, 1433（2017）。[55] K. Wang、B. A. Bell、A. S. Solntsev、D. N. Neshev、B. J. Eggleton 和 A. A. Sukhorukov，《通过非线性频率转换实现多维合成手性管状晶格》，Light: Science & Applications 9, 132（2020）。[56] A. M. Turner、A. Vishwanath 和 C. O. Head，《超越能带绝缘体：半金属与相互作用相的拓扑》，Topological Insulators 6, 293（2013）。[57] S.-Y. Xu、I. Belopolski、N. Alidoust、M. Neupane、G. Bian，C. Zhang，R. Sankar，G. Chang，Z. Yuan，C.-C.

Lee, *et al.*, 《外尔费米子半金属与拓扑费米弧的发现》, 《科学》349，613（2015）。[58] G. B. Osterhoudt, L. K. Diebel, M. J. Gray, X. Yang, J. Stanco, X. Huang, B. Shen, N. Ni, P. J. Moll, Y. Ran, *et al.*, I 型外尔半金属中的巨大中红外体光伏效应, 《自然材料》18，471（2019）。[59] A. Dutt, L. Yuan, K. Y. Yang, K. Wang, S. Buddhiraju, J. Vuˇckovi´c, and S. Fan, 《在合成频率维度上创建边界》, 《自然通讯》13，3377（2022）。[60] L. Yuan, Q. Lin, A. Zhang, M. Xiao, X. Chen, and S. Fan, 《单个腔中的光子规范势：合成频率和轨道角动量维度》, 《物理评论快报》122, 083903（2019）。[61] S. Buddhiraju, A. Dutt, M. Minkov, I. A. D. Williamson, and S. Fan, 《频率合成维度中光子的任意线性变换》, 《自然通讯》12，2401（2021）。[62] T. Dubˇcek, C. J. Kennedy, L. Lu, W. Ketterle, M. Soljaˇci´c, and H. Buljan, 《三维光学晶格中的外尔点：动量空间中的合成磁单极子》, Phys. Rev. Lett. 114, 225301 2015( )。[63] B. A. Bernevig, 《拓扑绝缘体与拓扑超导体》, 载于 *Topological Insulators and Topological Superconductors* 2013

（普林斯顿大学出版社, ）。[64] M. Zhang, C. Wang, R. Cheng, A. Shams-Ansari, and M. Lonˇc ar, 《单片式超高 Q 铌酸锂微环谐振器》, 《光学》4，1536（2017）。

补充材料：驱动-耗散光子分子中弗洛凯合成维度里的量子化拓扑能量泵浦与外尔点

I. 光子分子的半 BHZ 哈密顿量

考虑一个具有如下哈密顿量的双谐振器系统

$$H = \omega_0 \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \frac{\mu}{2}\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + gV(t)(a_1^\dagger a_1 - a_2 a_2^\dagger) \tag{S1}$$

其中， a_1 和 a_2 分别是各个环形谐振器模式在共振频率 ω_0处的玻色湮灭算符，耦合速率为 μ，电光耦合系数为 g。对与时间无关的项进行对角化后，哈密顿量变为

$$H = \omega_+ c_1^\dagger c_1 + \omega_- c_2^\dagger c_2 + gV(t)(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1) \tag{S2}$$

其中， $\omega_\pm = \omega_0 \pm \frac{\mu}{2}$和 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2)$ $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2)$。通过变量替换，我们可以消去$\omega_0 \left(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2\right)$项（在单光子子空间内），并考虑 $\omega_\pm = \pm\frac{\mu}{2}$。我们指定 $V(t)$ 具有载波音调 ω_m ，并施加相互独立的 I-Q 调制和频率调制，从而得到

$$H = \omega_+ c_1^\dagger c_1 + \omega_- c_2^\dagger c_2 + g\left[V_x(t)\cos\left(\omega_m t + \Delta(t)\right) + V_y(t)\sin\left(\omega_m t + \Delta(t)\right)\right]\left(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1\right) \tag{S3}$$

我们可以将自旋矩阵定义为

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \left(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1\right) \\
\sigma_y &= -i\left(c_1^\dagger c_2 - c_2^\dagger c_1\right) \\
\sigma_z &= \left(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2\right)
\end{aligned}$$

在单光子子空间中。这些算符现在构成一个泡利群，并遵循相同的对易关系。用这些新的自旋算符表示，哈密顿量为

$$H = \frac{\mu}{2}\sigma_z + gV(t)\sigma_x = \frac{\mu}{2}\sigma_z + g\left[V_x(t)\cos\left\{\omega_m t + \Delta(t)\right\} + V_y(t)\sin\left\{\omega_m t + \Delta(t)\right\}\right]\sigma_x \tag{S4}$$

在相互作用绘景 中，我们可以考虑 $U = \exp\left[i\sigma_z\{\omega_m t + \Delta(t)\}/2\right]$，动态哈密顿量变为 mes

$$V_I(t) = \exp\left[i\sigma_z\{\omega_m t + \Delta(t)\}/2\right]\left(gV(t)\sigma_x\right)\exp\left[-i\sigma_z\{\omega_m t + \Delta(t)\}/2\right] = gV(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\omega_m t + \Delta(t))^k}{2^k k!}\left[\sigma_z, \sigma_x\right]_{(k)} \tag{S5}$$

其中

$$\begin{aligned}
[A,B]_0 &= B \\
[A,B]_1 &= [A,B] \\
[A,B]_2 &= [A,[A,B]] \\
[A,B]_3 &= [A,[A,[A,B]]]
\end{aligned}$$

等等。由于 $[\sigma_z,\sigma_x] = 2i\sigma_y$， $[\sigma_z,\sigma_y] = -2i\sigma_x$，

$$\begin{aligned}
V_I(t) &= gV(t)\left[-\sum_k \frac{(-1)^k(\omega_m t + \Delta(t))^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\sigma_y + \sum_k \frac{(-1)^k(\omega_m t + \Delta(t))^{2k}}{(2k)!}\sigma_x\right] \\
&= gV(t)\left[-\sin\{\omega_m t + \Delta(t)\}\sigma_y + \cos\{\omega_m t + \Delta(t)\}\sigma_x\right] \\
&= g\left[V_x(t)\cos\left\{\omega_m t + \Delta(t)\right\} + V_y(t)\sin\left\{\omega_m t + \Delta(t)\right\}\right]\left[-\sin\{\omega_m t + \Delta(t)\}\sigma_y + \cos\{\omega_m t + \Delta(t)\}\sigma_x\right]
\end{aligned} \tag{S6}$$

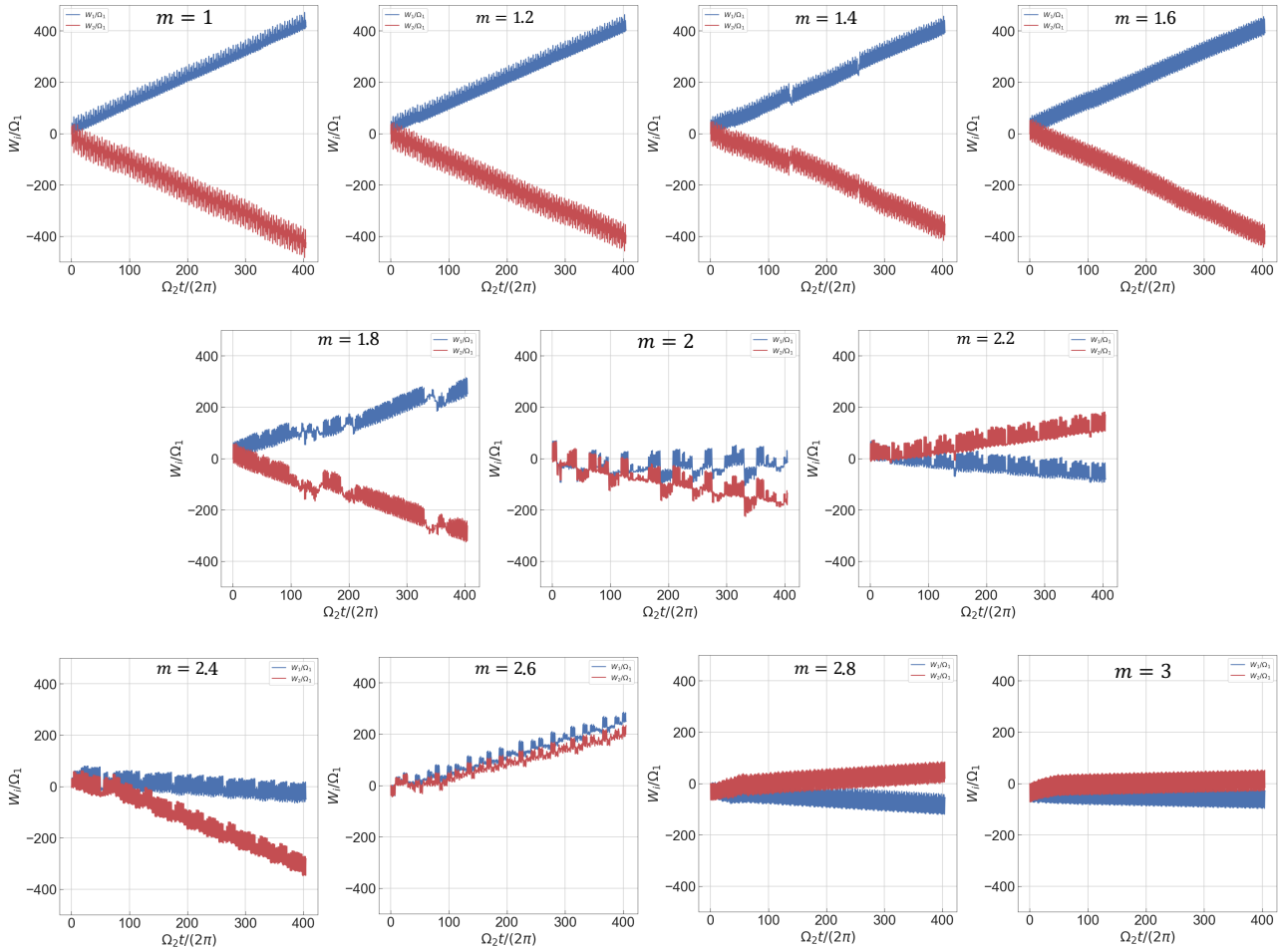

图 S1. $\Omega_2/\Omega_1 = (1+\sqrt{5})/2$的拓扑能量泵浦。在 $m = 2$附近，我们观察到行为发生了定性变化，这表明发生了拓扑相变。我们使用 $gV_0 = 40\Omega_1$ 和 $\gamma = 0.01\Omega_1/\pi$进行模拟。

对于 $|gV_x(t)|$, $|gV_y(t)| \ll \omega_m$，我们可以展开并对 V_I 应用旋转波近似，只保留缓慢旋转的项。

$$\begin{aligned} V_I(t) &= g\left(e^{i(\omega_m t+\Delta(t))}\left(V_x(t)-iV_y(t)\right)+c.c.\right)\left(e^{i(\omega_m t+\Delta(t))}(\sigma_x+i\sigma_y)/2+h.c.\right) \\ &\approx \frac{gV_x(t)}{2}\sigma_x+\frac{gV_y(t)}{2}\sigma_y \end{aligned} \tag{S7}$$

在这个旋转参考系中，哈密顿量变为：

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= UHU^\dagger + i\frac{\partial U}{\partial t}U^\dagger \\ &= -\frac{\delta+\lambda(t)}{2}\sigma_z+\frac{gV_x(t)}{2}\sigma_x+\frac{gV_y(t)}{2}\sigma_y \end{aligned} \tag{S8}$$

II. 弗洛凯合成维度中的外尔点

弗洛凯合成维度能够通过模拟非公度驱动相位下的演化，直接模拟 k空间哈密顿量。因此，我们可以实现如下哈密顿量：

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \Omega_R\{\sin(k_x)\sigma_x+\cos(k_y)\sigma_y+\cos(k_z)\sigma_z\} \tag{S9}$$

只需执行替换即可：$\Omega_1 t+\phi_1 \to k_x$、$\Omega_2 t+\phi_2 \to k_y$ 和 $\Omega_3 t+\phi_3 \to k_z$。这些相位的线性演化也模拟了合成电场的作用，使我们能够自然地研究电荷输运。

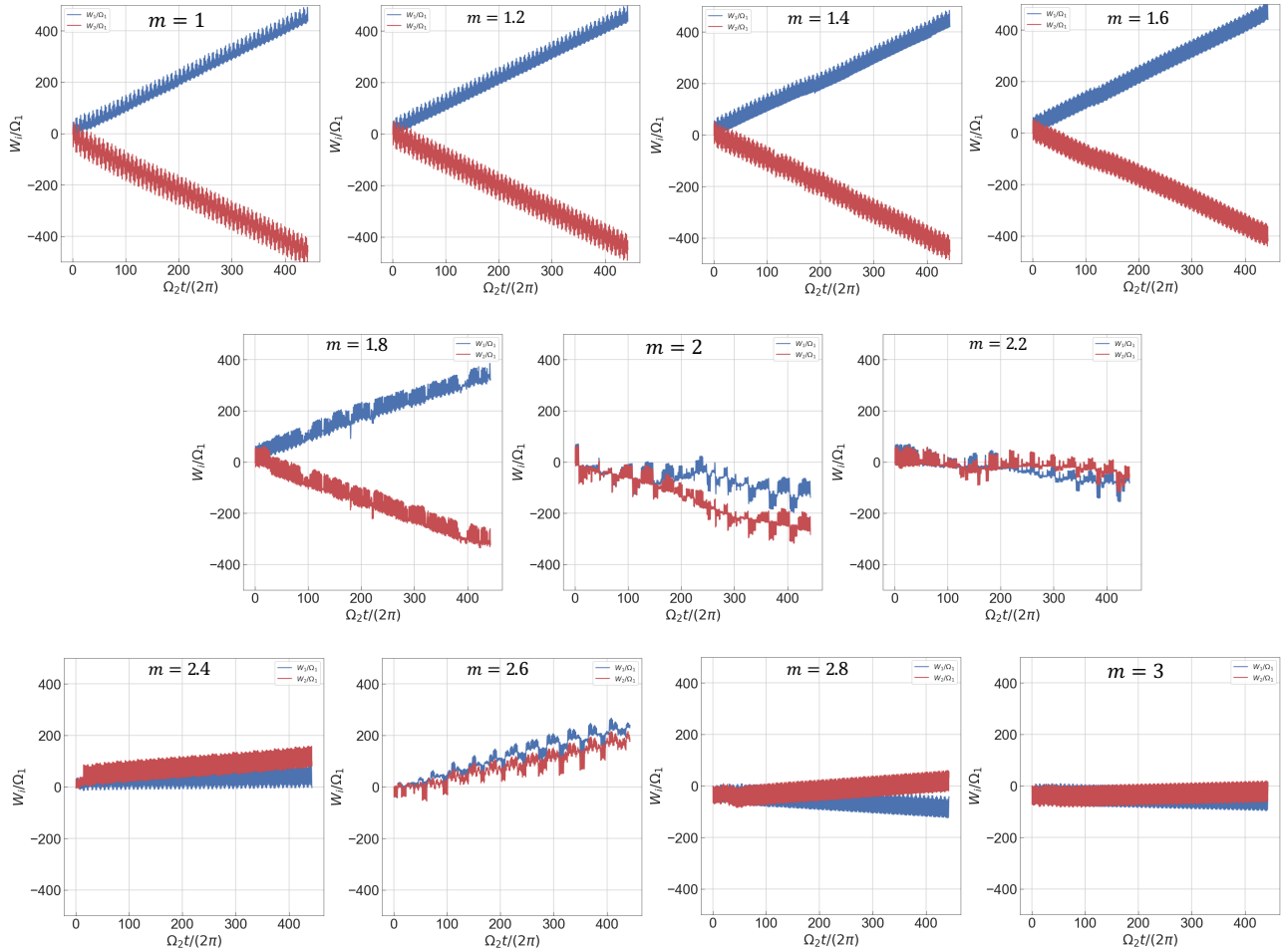

图 S2. $\Omega_2/\Omega_1 = \sqrt{\pi}$时的拓扑能量泵浦。即使选择不同的无理数比值，该跃迁依然存在。我们通过 $gV_0 = 40\Omega_1$ 和 $\gamma = 0.01\Omega_1/\pi$对此进行模拟。

这些系统中的效应。现在，我们详细研究这个哈密顿量及其拓扑效应。该系统的规范不变贝里曲率可写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathrm{Im}\left[\frac{\langle n(\mathbf{k})|\{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k})\}|m(\mathbf{k})\rangle \times \langle m(\mathbf{k})|\{\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k})\}|n(\mathbf{k})\rangle}{(E_m - E_n)^2}\right] \tag{S10}$$

我们计算 $\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k})$，结果为

$$\nabla_{\mathbf{k}}\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \Omega_R[\hat{k}_x \cos(k_x)\sigma_x - \hat{k}_y \sin(k_y)\sigma_y - \hat{k}_z \sin(k_z)\sigma_z]$$

其中，$k_i (i = x,\ y,\ z)$ 是弗洛凯动量空间中的单位矢量。需要计算的另一个重要量是哈密顿量关于$\mathbf{k}$的本征值和本征矢量。利用自旋1/2哈密顿量的性质，可得

$$\begin{aligned} E_m &= \Omega_R\sqrt{\sin^2 k_x + \cos^2 k_y + \cos^2 k_z} = -E_n = E \\ \rho_m &= |m\rangle\langle m| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \frac{\mathcal{H}(\mathbf{k})}{E}\right) \\ \rho_n &= |n\rangle\langle n| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} - \frac{\mathcal{H}(\mathbf{k})}{E}\right) \end{aligned} \tag{S11}$$

将这些结果代入公式S10 并利用泡利矩阵的性质，

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{k}) &= \frac{\Omega_R^2}{4E^2}\mathrm{Im}\big[\hat{k}_x \sin(k_y)\sin(k_z)\langle n|\sigma_y\rho_m\sigma_z - \sigma_z\rho_m\sigma_y|n\rangle - \hat{k}_y\cos(k_x)\sin(k_z)\langle n|\sigma_z\rho_m\sigma_x - \sigma_x\rho_m\sigma_z|n\rangle \\
&\quad -\hat{k}_z\cos(k_x)\sin(k_y)\langle n|\sigma_x\rho_m\sigma_y - \sigma_y\rho_m\sigma_x|n\rangle\big] \\
&= \frac{\Omega_R^2}{8E^2}\mathrm{Im}\Bigg[\hat{k}_x\sin(k_y)\sin(k_z)\langle n|\left([\sigma_y,\sigma_z] - 2i\sin(k_x)\frac{\Omega_R\mathbb{I}}{E}\right)|n\rangle \\
&\quad -\hat{k}_y\cos(k_x)\sin(k_z)\langle n|\left([\sigma_z,\sigma_x] - 2i\cos(k_y)\frac{\Omega_R\mathbb{I}}{E}\right)|n\rangle \\
&\quad -\hat{k}_z\cos(k_x)\sin(k_y)\langle n|\left([\sigma_x,\sigma_y] - 2i\cos(k_z)\frac{\Omega_R\mathbb{I}}{E}\right)|n\rangle\Bigg] \\
&= \frac{\Omega_R^2}{4E^2}\Bigg[\hat{k}_x\sin(k_y)\sin(k_z)\left(\langle n|\sigma_x|n\rangle - \frac{\Omega_R\sin(k_x)}{E}\right) - \hat{k}_y\cos(k_x)\sin(k_z)\left(\langle n|\sigma_y|n\rangle - \frac{\Omega_R\cos(k_y)}{E}\right) \\
&\quad -\hat{k}_z\cos(k_x)\sin(k_y)\left(\langle n|\sigma_z|n\rangle - \frac{\Omega_R\cos(k_z)}{E}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{S12}$$

这是方程11，位于正文中；当保持绝热性时，可以通过实验测量这种形式的贝里曲率。进一步简化后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{k}) &= \frac{\Omega_R^2}{4E^2}\Bigg[\hat{k}_x\sin(k_y)\sin(k_z)\left(\mathrm{Tr}\{\rho_n\sigma_x\} - \frac{\Omega_R\sin(k_x)}{E}\right) - \hat{k}_y\cos(k_x)\sin(k_z)\left(\mathrm{Tr}\{\rho_n\sigma_y\} - \frac{\Omega_R\cos(k_y)}{E}\right) \\
&\quad -\hat{k}_z\cos(k_x)\sin(k_y)\left(\mathrm{Tr}\{\rho_n\sigma_z\} - \frac{\Omega_R\cos(k_z)}{E}\right)\Bigg] \\
&= \frac{-\hat{k}_x\sin(k_x)\sin(k_y)\sin(k_z)\sigma_x + \hat{k}_y\cos(k_x)\cos(k_y)\sin(k_z)\sigma_y + \hat{k}_z\cos(k_x)\sin(k_y)\cos(k_z)\sigma_z}{2\left(\sin^2 k_x + \cos^2 k_y + \cos^2 k_z\right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{S13}$$

贝里曲率的最终闭式表达式由代入方程S11（其中包含 ρ_n的表达式）得到。随后我们在正文中绘制该结果，以观察外尔点的磁单极子行为。外尔点处的曲率发散，而对这一奇点进行积分会得到量子化的陈数，该陈数刻画了此系统的拓扑效应。

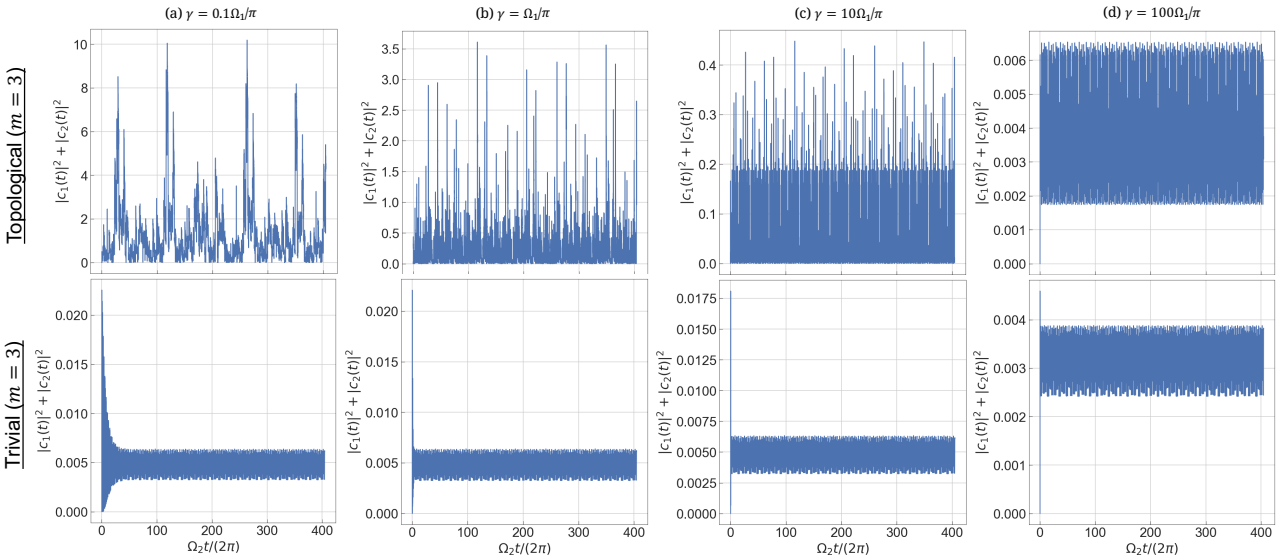

图 S3. 不同光子损耗率下光子分子中的总功率。驱动耗散系统达到准稳态，腔内功率呈现振荡，但不会完全衰减或发散。