arXiv:2305.02245v1 [physics.flu-dyn] 3 May 2023

最优值下的双流体平面泊肃叶流或轴对称泊肃叶流

（准）解析研究

Ivan Fedioun
奥尔良理工学院，达·芬奇街 8 号，45072 奥尔良
邮政信箱 2，法国ivan.fedioun@univ-orleans.fr

2023年4月

双流体平面或轴对称泊肃叶流的解通过解析方法推导得出。随后，根据流体体积分数分析了黏度最大的流体达到最大流量的条件。轴对称情形完全可以解析求解，而平面情形则不能。在轴对称情形中，只有当黏度最大的流体（液体）位于内侧、黏度较小的流体（气体）位于外侧时，才能找到最优值。在平面情形中，当“气体”的黏度趋近于零时，“液体”的最大流量可达到经典泊肃叶流流量的 4 倍。

目录

1 研究内 研究背景
1 2 经典泊肃叶流：回顾 2 3 轴

对称双流体泊肃叶流 2
3.1 通解.2 3.2 最优值搜索.4 3.3 速度分布.5

4 平面双流体泊肃叶流 **6**
4.1 通解.6 4.2 最优值搜索.7 4.3 速度分布.9

5 结论 结论与展望 1 **0**

1 研究背景

这项工作源于奥尔良理工学院工程专业学生的一项毕业设计，旨在优化医用内窥镜的抽吸功能。制造商发现，回路中设有进气口时，抽吸体液的流量会达到最大值。然而，如果进气口过大，设备的性能就会下降。气液两相流非常复杂 [1] ，本研究无意全面探讨这一问题。我们提出了一项基于轴对称或平面泊肃叶流模型的简单解析研究，该模型在一定程度上能够解释

这一观察到的现象。有关两相泊肃叶流的文献并不多，因此这项研究颇具原创性。

2 经典泊肃叶流：回顾

平面或轴对称泊肃叶流是纳维–斯托克斯方程为数不多的解析解之一，也是每位流体力学学生都会做的经典练习 [2]。在假设不可压缩流体作定常平行流（ρ =cste）的条件下，需要求解的问题是

$$\frac{dp}{dx} = \mu \Delta u = K < 0 \tag{1}$$

$$\Delta u = \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dy^2} & : \text{plane} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right) & : \text{axisymmetric} \end{cases} \tag{2}$$

• 在轴对称情形下 $(0 \le r \le R)$，方程（1）的通解为

$$u(r) = \frac{K}{\mu}\left[\frac{r^2}{4} + A\ln r + B\right] \tag{3}$$

轴上的有限速度（$r = 0$）要求 $A = 0$，而无滑移条件$u(\pm R) = 0$ 给出 $B = -R^2/4$。因此，解为

$$\boxed{u(r) = U\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} \tag{4}$$

$$\boxed{U = -\frac{K}{\mu}\frac{R^2}{4} > 0} \tag{5}$$

其中，$U = 2U_{ave}$ 是沿管道轴向的最大速度。体积流量为

$$Q_{\text{axi}}^{\text{POIS}} = \pi R^2 U_{ave} = -2\pi\frac{K}{\mu}\frac{R^4}{16} \tag{6}$$

•在平面情形下 $(-H \le y \le H)$，式 (1) 的通解为

$$u(y) = \frac{K}{\mu}\left[\frac{y^2}{2} + Ay + B\right] \tag{7}$$

对称平面上的最大速度（$y = 0$）要求 $A = 0$，而无滑移条件 $u(\pm H) = 0$给出 $B = -H^2/2$。因此，解为

$$\boxed{u(y) = U\left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right]} \tag{8}$$

$$\boxed{U = -\frac{K}{\mu}\frac{H^2}{2} > 0} \tag{9}$$

其中 $U = \frac{3}{2}U_{ave}$ 是对称平面上的速度。体积流量（每 m）为

$$Q_{\text{plane}}^{\text{POIS}} = 2HU_{ave} = -\frac{2}{3}\frac{K}{\mu}H^3 \tag{10}$$

3 轴对称两流体泊肃叶流

3.1 通解

考虑一种两流体轴对称构型：流体 1 位于管道中心，流体 2 以环形构型包围流体 1（图1）。因此，流体 1 不受壁面无滑移条件的约束。假设两种流体互不相溶，$0 \le R_{12} \le R$ 为两流体的界面半径。

在管道的横截面上，两种流体的压力相同。问题表述如下：

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu_1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_1}{dr}\right) = \frac{\mu_2}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_2}{dr}\right) = K < 0 \tag{11}$$

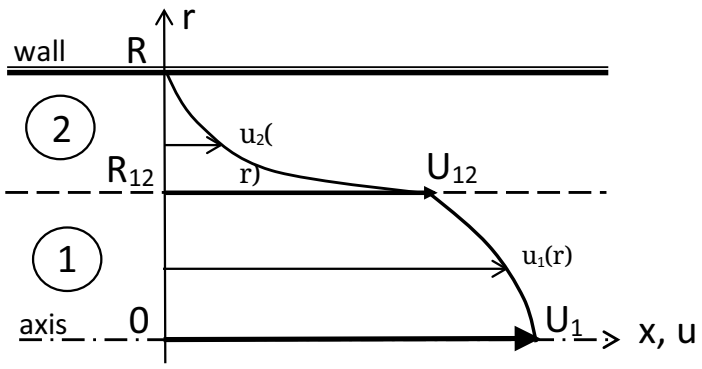

图1：双流体轴对称泊肃叶流动构型。

通解为

$$u_\alpha(r) = \frac{K}{\mu_\alpha}\left[\frac{r^2}{4} + A_\alpha \ln r + B_\alpha\right] \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \tag{12}$$

边界条件为:

$$r = 0 \quad : \quad \frac{du_1}{dr} = 0 \tag{13}$$

$$r = R_{12} \quad : \quad u_1(R_{12}) = u_2(R_{12}) = U_{12} \tag{14}$$

$$\mu_1 \frac{du_1}{dr} = \mu_2 \frac{du_2}{dr} \tag{15}$$

$$r = \pm R \quad : \quad u_2(\pm R) = 0 \tag{16}$$

我们推导出这些常数:

$$A_1 = A_2 = 0 \quad ; \quad B_1 = -\left(\frac{R^2 - R_{12}^2}{4\eta}\right) - \frac{R_{12}^2}{4} \quad ; \quad B_2 = -\frac{R^2}{4}$$

其中

$$\boxed{\eta = \frac{\mu_2}{\mu_1} > 0} \tag{17}$$

是该问题的第一个物理参数。如果 $\eta < 1$，黏度最大的流体（“液体”）位于中心，即侧 1；反之亦然。速度分布为:

$$\boxed{u_1(r) = -\frac{K}{\mu_1}\left(\frac{R_{12}^2 - r^2}{4} + \frac{R^2 - R_{12}^2}{4\eta}\right) \quad ; \quad 0 \le r \le R_{12}} \tag{18}$$

$$\boxed{u_2(r) = -\frac{K}{\mu_2}\left(\frac{R^2 - r^2}{4}\right) \quad ; \quad R_{12} \le r \le R} \tag{19}$$

流体 1 和流体 2 的体积流率是 R_{12} 的函数，可由下式得到

$$Q_1(R_{12}) = 2\pi \int_0^{R_{12}} u_1(r)\, r dr \quad ; \quad Q_2(R_{12}) = 2\pi \int_{R_{12}}^{R} u_2(r)\, r dr \tag{20}$$

$$\boxed{Q_1(R_{12}) = -2\pi \frac{K}{\mu_1}\left[\frac{R_{12}^4}{16} + \frac{R_{12}^2}{8\eta}\left(R^2 - R_{12}^2\right)\right]} \tag{21}$$

$$\boxed{Q_2(R_{12}) = -2\pi \frac{K}{\mu_2}\left[\frac{R^4 + R_{12}^4}{16} - \frac{R^2 R_{12}^2}{8}\right]} \tag{22}$$

在 $\eta = 1$ 的情况下，可以验证 $Q_1 + Q_2 = Q_{\rm axi}^{\rm POIS}$，其中 $Q_{\rm axi}^{\rm POIS}$ 是经典轴对称泊肃叶流的流量 (6)；如果 $R_{12} = R$ （分别为 $R_{12} = 0$），则 $Q_1 = Q_{1\ {\rm axi}}^{\rm POIS}$（分别为 $Q_2 = Q_2^{\rm POIS}{}_{\text{轴对称}}$）。

3.2 寻找最优值

问题是，给定黏度比 η，求半径 R_{12}（如果存在），使黏度最大的流体的流量达到最大；也就是说，当 $\eta < 1$ 时，使流量 Q_1 最大；或者当 $\eta > 1$ 时，使流量 Q_2 最大。流量 Q_2 (22) 不依赖于 η。因此，只有在 $\eta \leq 1$，即 Q_1 时，寻找最优值才有意义。遗憾的是，最有可能出现的物理情形是 $\eta >> 1$: 壁面上的液膜被中心处速度更快、黏度更低的气体排流。

定义如下:

$$\begin{aligned}
r &= R\,\overline{r} \quad ; \quad 0 \leq \overline{r} \leq 1 && (23)\\
R_{12} &= R\,\rho \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq 1 && (24)\\
Q_\alpha(R_{12}) &= Q_\alpha^{\rm POIS}\,\overline{Q}_\alpha(\rho) \quad ; \quad \alpha = 1,2 && (25)\\
u_\alpha(r) &= U_1\,\overline{u}_\alpha(\overline{r}) && (26)
\end{aligned}$$

两种流动的参考速度必须相同。我们选取黏度最大的内部流体的最大速度 U_1 (5)。流量以各自泊肃叶流的流量进行归一化（6）。因此有:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1(\overline{r}) &= \rho^2 - \overline{r}^2 + \frac{1}{\eta}(1-\rho^2) \quad ; \quad 0 \leq \overline{r} \leq \rho < 1 && (27)\\
\overline{u}_2(\overline{r}) &= \left(1 - \overline{r}^2\right)/\eta \quad ; \quad 0 < \rho \leq \overline{r} \leq 1 && (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_1(\rho) &= \frac{2}{\eta}\rho^2(1-\rho^2) + \rho^4 && (29)\\
\overline{Q}_2(\rho) &= 1 - 2\rho^2 + \rho^4 && (30)
\end{aligned}$$

可以看出，问题所依赖的第二个物理参数，或者更确切地说几何参数，是

$$\boxed{\rho = \frac{R_{12}}{R}} \tag{31}$$

由此可以直接得到两种流体的体积分数:

$$X_1 = \rho^2 \quad ; \quad X_2 = 1 - \rho^2 \tag{32}$$

归一化流量 $\overline{Q}_1(\rho)$ 和 $\overline{Q}_2(\rho)$ 如图 2 所示。事实上，流量 $\overline{Q}_1(\rho)$ 存在一个最大值，该最大值会随着 η 的减小而从 $\rho = 1$ 移至 $\rho \approx 0.7$ 。这一发现与引言中描述的实验观察结果一致。

为了求出最大流量，可写出 $\dfrac{d\overline{Q}_1}{d\rho} = 0$，从而得到

$$\begin{aligned}
\rho &= 0 \quad ; && \overline{Q}_1 = 0 \quad \text{trivial minimum}\\
1 - (2-\eta)\rho^2 &= 0 \quad ; \quad \boxed{\rho_{\rm OPT} = \frac{1}{\sqrt{2-\eta}}} && \overline{Q}_1 \text{ maximum sought} \qquad (33)
\end{aligned}$$

当 $\eta \to 0$ 时， $1/\sqrt{2} \approx 0.707\cdots$，此时最优值下的流量为

$$\boxed{\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}} = \frac{1}{\eta(2-\eta)}} \quad ; \quad \boxed{\overline{Q}_2 = \left(\frac{1-\eta}{2-\eta}\right)^2} \tag{34}$$

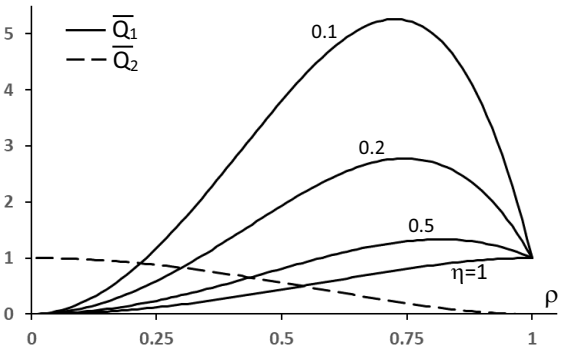

图 2：归一化流量 $\overline{Q}_1(\rho)$ (29) 和 $\overline{Q}_2(\rho)$ (30)。

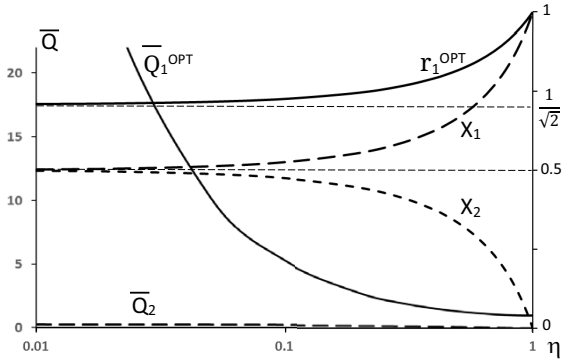

图 3：最优归一化半径 (33)、流量 (34) 和体积分数。

可以看出，黏度比为 4 ($\eta \le 0.25$) 时，最内层黏度最大的流体的流量增加了一倍以上。所有这些结果都是解析得出的。

3.3 速度分布

速度分布如图 4 所示。可以看出，由于环状气体流的卷吸作用，“液体”的速度可以达到远高于经典泊肃叶流的数值。沿轴的最大速度为

$$\overline{u}_1(0) = \frac{1}{\eta(2-\eta)} = \overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}}$$

并且在极限 $\eta \to 0$ 下理论上可以达到无穷大。

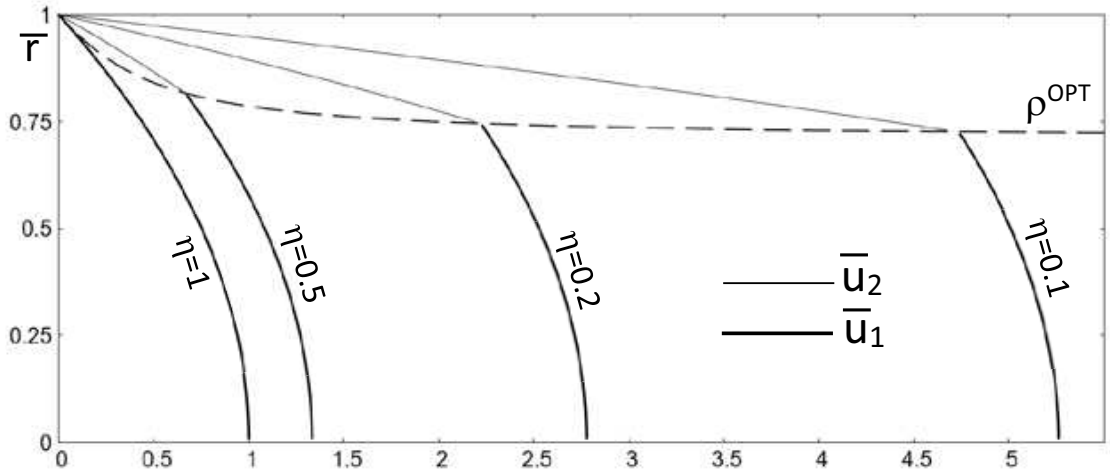

图 4：使体积流量 Q_1 ($\eta < 1$) 最大化的速度分布

4 双流体平面泊肃叶流

4.1 通解

现在考虑一个平面双流体构型，其中流体 1 位于通道底部，流体 2 位于顶部（图5），两种不互溶流体之间的分界面高度为 $-H \leq H_{12} \leq +H$ 。与轴对称情形不同，现在两种流体都受到壁面处无滑移条件的约束。因此，当黏度比为 $\eta \leftrightarrow(1/\eta)$ 时，存在一种关于顶部 $\leftrightarrow$ 底部 的对称性。若$\eta < 1$，黏度最大的流体位于底部，反之亦然。

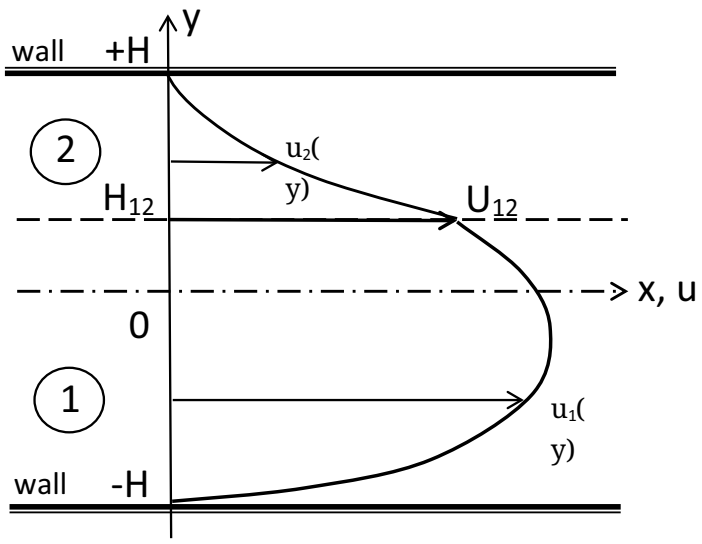

图5：双流体平面泊肃叶流配置。

问题表述如下:

$$\frac{dp}{dx} = \mu_1 \frac{d^2u_1}{dy^2} = \mu_2 \frac{d^2u_2}{dy^2} = K < 0 \tag{35}$$

通解为

$$u_\alpha(y) = \frac{K}{\mu_\alpha}\left[\frac{y^2}{2} + A_\alpha y + B_\alpha\right] \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \tag{36}$$

边界条件为:

$$y = -H \quad : \quad u_1(-H) = 0 \tag{37}$$

$$y = H_{12} \quad : \quad u_1(H_{12}) = u_2(H_{12}) = U_{12} \tag{38}$$

$$\mu_1 \frac{du_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} \tag{39}$$

$$y = +H \quad : \quad u_2(+H) = 0 \tag{40}$$

我们推导出这些常数:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = \frac{(\eta - 1)(H^2 - H_{12}^2)}{2\left[(\eta + 1)H + (\eta - 1)H_{12}\right]} \tag{41}$$

$$B_1 = \frac{H}{2}(A - H) \quad ; \quad B_2 = -\frac{H}{2}(A + H)$$

与 Vincent 等人 [3],给出的解相匹配的速度分布为:

$$\boxed{u_1(y) = -\frac{K}{\mu_1}\left[\frac{H^2-y^2}{2} - \frac{A}{2}(H+y)\right] \quad ; \quad -H \le y \le H_{12}} \tag{42}$$

$$\boxed{u_2(y) = -\frac{K}{\mu_2}\left[\frac{H^2-y^2}{2} + \frac{A}{2}(H-y)\right] \quad ; \quad H_{12} \le y \le H} \tag{43}$$

流体 1 和流体 2 的体积流量作为 H_{12} 的函数，可由以下方式获得

$$Q_1(H_{12}) = \int_{-H}^{H_{12}} u_1(y)dy \quad ; \quad Q_2(H_{12}) = \int_{H_{12}}^{H} u_2(y)dy \tag{44}$$

$$\boxed{Q_1(H_{12}) = -\frac{K}{\mu_1}\left[\frac{H^2(H+H_{12})}{2} - \frac{H^3+H_{12}^3}{6} - \frac{A}{2}\left(H(H+H_{12}) - \frac{H^2-H_{12}^2}{2}\right)\right]} \tag{45}$$

$$\boxed{Q_2(H_{12}) = -\frac{K}{\mu_2}\left[\frac{H^2(H+H_{12})}{2} - \frac{H^3-H_{12}^3}{6} + \frac{A}{2}\left(H(H-H_{12}) - \frac{H^2-H_{12}^2}{2}\right)\right]} \tag{46}$$

4.2 搜索最优值

再次给定一个值 $0 < \eta \le 1$，我们希望找到使黏度最大的流体的流量Q_1 达到最大的高度 H_{12}（该问题具有对称性）。

我们定义:

$$\begin{aligned}
y &= H\,\overline{y} && ; \quad -1 \le \overline{y} \le 1 && (47)\\
H_{12} &= H\,\rho && ; \quad -1 \le \rho \le 1 && (48)\\
Q_\alpha(H_{12}) &= Q_\alpha^{\mathrm{POIS}}\,\overline{Q}_\alpha(\rho) && ; \quad \alpha = 1,2 && (49)\\
u_\alpha(y) &= U_1\,\overline{u}_\alpha(\overline{y}) && && (50)
\end{aligned}$$

参考速度是黏度最大的流体的最大速度 U_1 (9)。流量以各自泊肃叶流（10）的流量进行归一化。由此可得:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1(\overline{y}) &= 1-\overline{y}^2 - \overline{A}(1+\overline{y}) && ; \quad -1 \le \overline{y} \le \rho < 1 && (51)\\
\overline{u}_2(\overline{r}) &= \left[1-\overline{y}^2 + \overline{A}(1-\overline{y})\right]/\eta && ; \quad -1 < \rho \le \overline{y} \le 1 && (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_1(\rho) &= \frac{3}{4}\left[1+\rho - \frac{1}{3}(1+\rho^3) - \frac{\overline{A}}{2}(1+\rho)^2\right] && (53)\\
\overline{Q}_2(\rho) &= \frac{3}{4}\left[1-\rho - \frac{1}{3}(1-\rho^3) + \frac{\overline{A}}{2}(1-\rho)^2\right] && (54)
\end{aligned}$$

with

$$\overline{A}(\rho) = \frac{(\eta-1)(1-\rho^2)}{\eta+1+(\eta-1)\rho} \tag{55}$$

两种流体的体积分数为

$$X_1 = \frac{1}{2}(1+\rho) \quad ; \quad X_2 = \frac{1}{2}(1-\rho) \tag{56}$$

函数 $\overline{A}(\rho)$（参数为 η）如图 6 所示，其解与经典泊肃叶流的解不同。当 $\eta \to 0$趋于 $\overline{A}_{\eta\to 0}(\rho)$ 时，其极限为 $= -(1+\rho)$，对于

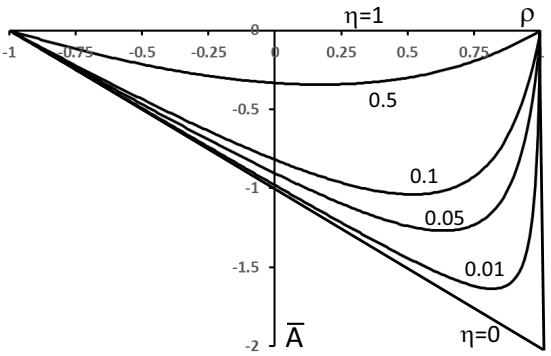

图 6：函数 $\overline{A}$，公式 (55)。

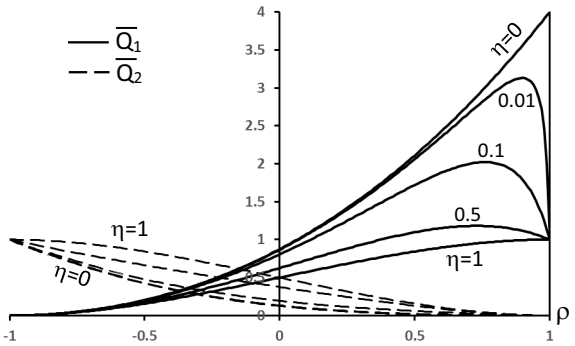

图 7：流量 $\overline{Q}_1(\rho)$ 和 $\overline{Q}_2(\rho)$。

$-1 \le \rho < 1$ 和 $\overline{A}_{\eta\to 0}(1) = 0$。归一化流量 $\overline{Q}_1(\rho)$ 和 $\overline{Q}_2(\rho)$ 如图 7 所示。流量 $Q_1(\rho)$ 呈现一个最大值，该最大值会随着 η 减小而移动，但这种变化并非单调，与轴对称情形不同（图 2 和图 3）。

最优流量 1 由 $\dfrac{d\overline{Q}_1}{d\rho} = 0$ 得出，这将导致

$$\begin{aligned} \rho = -1 \quad &; \quad \overline{Q}_1 = 0 \quad \text{trivial minimum} \\ \boxed{1 - \rho - \overline{A} - \frac{\overline{A}'}{2}(1+\rho) = 0 = f_1(\rho)} \quad &; \quad \overline{Q}_1 \text{ maximum sought} \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $\overline{A}'(\rho)$ 是 (55) 对 ρ 的导数。类似地，对于流量 2，我们得到：

$$\begin{aligned} \rho = +1 \quad &; \quad \overline{Q}_2 = 0 \quad \text{trivial minimum} \\ \boxed{1 + \rho + \overline{A} - \frac{\overline{A}'}{2}(1-\rho) = 0 = f_2(\rho)} \quad &; \quad \overline{Q}_2 \text{ maximum sought} \end{aligned} \tag{58}$$

对于不同的 η 值，优化函数 $f_1(\rho)$ 如图 8 所示。其根 $\rho_1^{\mathrm{OPT}}(\eta)$ 无法通过解析方法求得，而是使用牛顿-拉夫逊方法计算得到（绝对收敛于 10^{-12}）。计算结果绘于图 9，部分数值列于附录中的表 2。

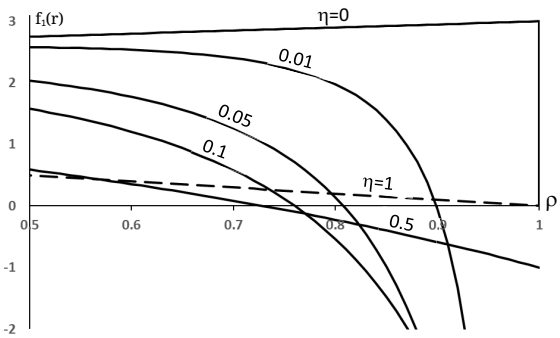

图 8：优化函数（57）。

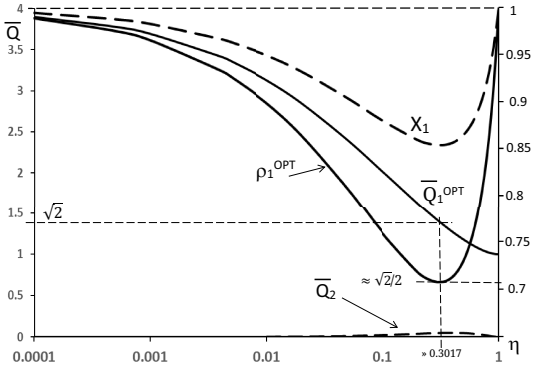

图 9：最优归一化高度、体积流量和体积分数。

值得注意的是，在图 9 中， ρ_1^{OPT} 取最小值的特定点处，最优流量为 $\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}} \approx \sqrt{2}$ 和 $\rho_1^{\mathrm{OPT}} \approx \sqrt{2}/2$ 。若接受这些数值，经过一些代数运算，可得相应的理论黏度比 η 和流量 $\overline{Q}_2$:

$$\eta = \frac{1}{5}\left(\frac{47-24\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}\right) \approx 0.30170023 \quad ; \quad \overline{Q}_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right) \approx 0.04415588$$

取 η 这一理论值时，牛顿-拉夫逊法收敛于 ρ_1^{OPT} $=0.70721664\cdots \approx \sqrt{2}/2$，误差在 $1.1\,10^{-4}$ 以内（-0.015%）；收敛于 $\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}} \approx \sqrt{2}$，误差在 $3.8\,10^{-8}$ 以内（-0.0000027%）；以及 $\overline{Q}_2 = 0.044128\cdots$，后者再次非常接近理论值。我们无法进一步通过解析或数值方法探究这一问题，但这一特定点让我们想起轴对称情形最优半径 (33) 的渐近极限 $\sqrt{2}/2$。不同变量在 η 取极限值时的渐近行为汇总于表 1。

η	$0 \quad (-1 \le \rho < 1)$	1	$+\infty \quad (-1 < \rho \le 1)$
A	$-(1+\rho)$	0	$1-\rho$
A'	-1	0	-1
$f_1(\rho)$	$2+(1+\rho)/2$	$1-\rho$	$(1+\rho)/2$
$f_2(\rho)$	$(1-\rho)/2$	$1+\rho$	$2+(1-\rho)/2$
ρ_1^{OPT}	1	1	—
$\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}}$	4	1	—

表 1：解的极限行为。

4.3 速度分布

速度分布如图10所示。与轴对称情形一样，可以看到，被黏度较低的气体排出的“液体”达到的速度高于经典泊肃叶流的速度。最大速度在 $\eta \to 0$ 时取得:

$$\overline{u}_{1,\eta\to 0}(\overline{y}) = (1+\overline{y})(3-\overline{y}) \quad \text{with} \quad \overline{u}_{1,\eta\to 0}(1) = 4 = \overline{Q}_{1,\eta\to 0}^{\mathrm{OPT}}$$

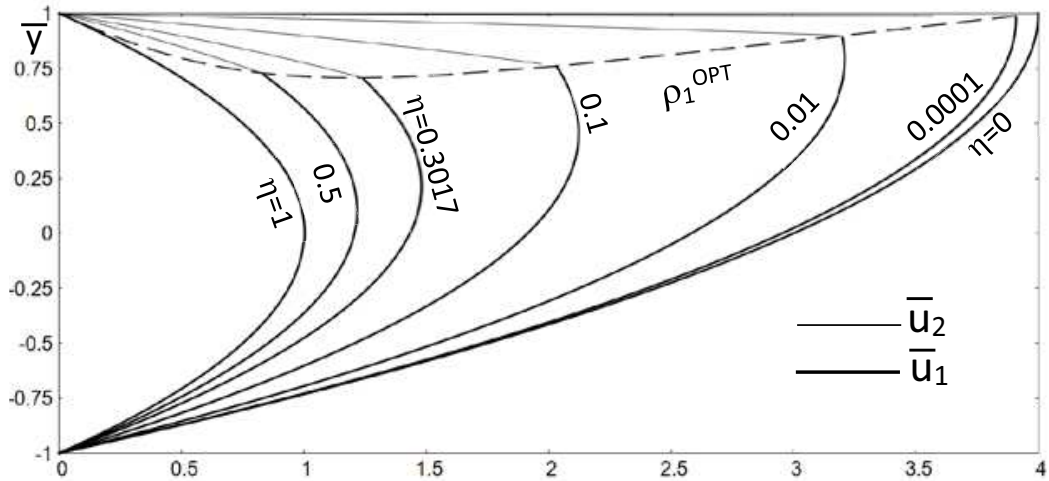

图10：使体积流量 Q_1 ($\eta < 1$) 最大化的速度分布。

5 结论与展望

当然，这项分析研究非常示意化，并不声称能够呈现管道中两相流的全部复杂性。不过，它使我们得以找出一种能够解释实验观察的机制。为了完善这项研究，可以引入液气界面处的表面张力。

遗憾的是，轴对称情形仅在 $\eta < 1$ 时达到最优（液体位于中心，气体环绕其周围）。若能对 $\eta > 1$ 情形（气体位于中心，液体贴近壁面）进行优化，则对工业应用更有意义。然而，在极限 $\eta \to 0$ 下，中心液体的流量理论上可以无限大。

平面情形不再具有解析解。在极限 $\eta \to 0$ 下，可达到的最大流量是经典泊肃叶流的 4 倍。特定点 $\rho_1^{\mathrm{OPT}} = \sqrt{2}/2, \overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}} = \sqrt{2}$ 虽然引人注目，但并非精确的最优值。

对于两相“段塞”流，气体长气泡在管道中心排出，随后坍塌并再次分裂；可通过交替采用 $\eta > 1 \leftrightarrow \eta < 1$ 并设置一个间歇因子来对其建模，该因子可在一定程度上依据经验设计，以重现实验中的最优值。当然，问题在于对于给定的黏度比 η，如何实现这一最优值，也就是如何在管道中具体实现进气（沿壁面、沿轴向……），以及如何校准其流量——若不依赖操作者的经验判断，又该如何做到?

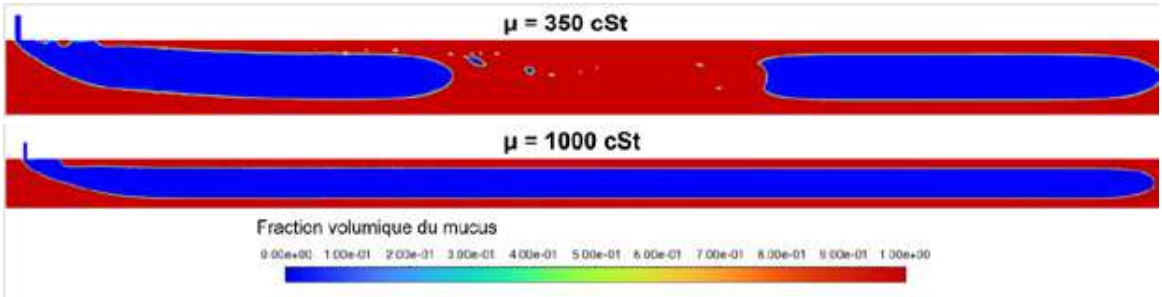

图11：VOF ANSYS/Fluent® 对平面（2D）“弹状”流的模拟（Delavault A. / Maberi-Grodet M.，学生项目，奥尔良理工学院，2023）

参考文献

[1] J.M. Fitremann。《气液两相流》。技术报告 A722 V1，工程技术，1983。

[2] H. Schlichting。《边界层理论，第6版》。机械工程。麦格劳-希尔，1968。

[3] S. Vincent、J.P. Caltagirone 和 O. Lebaigue。测试案例第14号：泊肃叶两相流（pa）。多相科学与技术，16(1-3)：97–100，2004。

附录

η	ρ_1^{OPT}	$\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}}$	$\overline{Q}_2^{\mathrm{OPT}}$	X_1	X_2
0	1	4	0	1	0
0.0001	0.988607239	3.898045090	0.000001856	0.99430362	0.00569638
0.0005	0.974943430	3.777271089	0.000019820	0.987471714	0.012528286
0.001	0.988607239	3.898045090	0.000054198	0.994303619	0.005696380
0.005	0.925693963	3.354808198	0.000526320	0.962846981	0.037153019
0.01	0.898894644	3.132626433	0.001341430	0.949447322	0.050552678
0.02	0.864583746	2.854801700	0.003280031	0.932291873	0.067708127
0.05	0.807820625	2.405606500	0.009748029	0.903910312	0.096089688
0.1	0.759984915	2.021779694	0.020006793	0.879992457	0.120007543
0.2	0.718661678	1.631679570	0.035428058	0.859330839	0.140669161
0.25	0.710431818	1.511426731	0.040530850	0.855215909	0.144784091
0.3	0.707250263	1.417070415	0.044035615	0.853625132	0.146374868
0.30170023	**0.707216642**	**1.414213601**	**0.044128111**	**0.853608321**	**0.146391679**
0.35	0.708055811	1.340840836	0.046059677	0.854027905	0.145972095
0.4	0.712221090	1.278007399	0.046714672	0.856110545	0.143889455
0.45	0.719368769	1.225491404	0.046106818	0.859684385	0.140315615
0.5	0.729281773	1.181191183	0.044340018	0.864640887	0.135359113
0.55	0.741856425	1.143621618	0.041520381	0.870928213	0.129071787
0.6	0.757077754	1.111707824	0.037761984	0.878538877	0.121461123
0.65	0.775007768	1.084660856	0.033194269	0.887503884	0.112496116
0.7	0.795782520	1.061900134	0.027971887	0.897891260	0.102108740
0.75	0.819616365	1.043004186	0.022288332	0.909808182	0.090191818
0.8	0.846813471	1.027679729	0.016395568	0.923406736	0.076593264
0.85	0.877788146	1.015743714	0.010633270	0.938894073	0.061105927
0.9	0.913097411	1.007115719	0.005473940	0.956548705	0.043451295
0.95	0.953492312	1.001820172	0.001595138	0.976746156	0.023253844
1	1	1	0	1	0

表 2：方程 (57) 的数值根及其对应的最优值解。粗体表示显著点处的数值解，非常接近 $\rho_1^{\mathrm{OPT}} = \sqrt{2}/2$、$\overline{Q}_1^{\mathrm{OPT}} = \sqrt{2}$。