arXiv:2305.02250v1 [math.CO] 3 May 2023

关于 ALT ν-Tamari 格中的线性区间

CESAR CEBALLOS$^{\diamond}$ 和 CL´EMENT CHENEVI`ERE*

Abstract. 给定一条格路径 ν， ν-Tamari 格和 ν-Dyck 格是格路径集合上的两种自然偏序结构实例，这些格路径均弱高于 ν。本文引入一个更一般的格族，称为 alt ν-Tamari 格，它将这两个实例包含为特殊情形。出人意料的是，我们证明所有这些格的线性区间数目相同。

1. Introduction

经典 Tamari 格是定义在 Catalan 对象上的一种偏序结构，在诸多数学领域激发了大量研究 [MHPS12]。近年来备受关注的一个研究方向，是探究其区间数目 [Cha07], ; 据猜想，该数目等于研究三元对角调和多项式时某个 $\mathfrak{S}_n$-模的交错分量维数 [Hai94]。受这一引人入胜的联系启发，Bergeron 引入了 Tamari 格的一种推广，称为 m-Tamari 格，并猜想其区间数目也等于更高阶三元对角调和多项式中某个 $\mathfrak{S}_n$-模的交错分量维数 [BPR12]。关于这些格的计数公式及其与表示论的联系，见 [BMCPR13, BMFPR11]。Tamari 格的进一步推广还包括m-Tamari 格；Pr´eville-Ratelle 和 Viennot 引入了这种 ν-Tamari 格 [PRV17]。这些格以一条格路径 ν为索引，其区间数目与不可分平面图的计数有关，如 [FPR17]所示。

受经典 Tamari 格及其推广中区间计数研究的启发，并在计算机实验的指引下，Chapoton 提出研究更简单的一类线性区间（即链）的计数问题。这促成了第二位作者在 [Che22],中的工作：他给出了经典 Tamari 格中线性区间数量的一个明确而简洁的公式，并证明其计数结果与 Dyck 格中线性区间的计数相同。Dyck 格有时也称为 Stanley 格，或许是 Dyck 路径上最自然的偏序集，其定义为：若 $P \leq Q$ 在 Q 上方（允许相等） P。在 [Che22], 中，作者还定义了一类称为 alt Tamari 偏序集的新偏序集，其中经典 Tamari 格和 Dyck 格都是其特例。他证明，所有 alt Tamari 偏序集中任意给定长度的线性区间数量都相同。

本文通过引入一类称为 altν-Tamari 偏序集的新偏序集，将 [Che22] 中的结果加以推广。我们证明它们都是格，并且任意给定长度的线性区间数量都相同。图 1 和图 2 展示了 $\nu = ENEENN$ 时三种不同的 alt ν-Tamari 格。每种情况下，长度为 k 的线性区间数量为 ℓ_k，其中$\ell = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ $= (16, 24, 16, 3)$。例如，16 表示长度为 0 的平凡区间，也就是每个偏序集中的元素；长度为 1 的线性区间有 24 个，对应覆盖关系（图中的边）；长度为 2 的线性区间有 16 个，长度为 3 的线性区间有 3 个。这些数目竟然相同，多少令人意外，因为这些偏序集看起来截然不同。作为热身，读者不妨找出每幅图中长度为 3 的 3 个线性区间。图 3 展示了 $\nu = ENEEN$ 时三种不同的 alt ν-Tamari 格。

如图所示，alt ν-Tamari 格具有丰富的底层几何结构，这种结构似乎可以在某个欧几里得空间中实现为多胞复形。已有研究证明，对于 ν-Tamari 格，这一点确实成立；在 [CPS19], 中给出了由某些热带超平面编排诱导的多胞复形实现

Date: 2023年5月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 06A07、06B05、05A19。本项目获得了 ANR-FWF 国际合作项目 PAGCAP 的支持，该项目由 ANR 项目 ANR-21-CE48-0020 和 FWF 项目 I 5788 资助。Cesar Ceballos 还获得了奥地利科学基金 FWF 项目 P 33278 的支持。

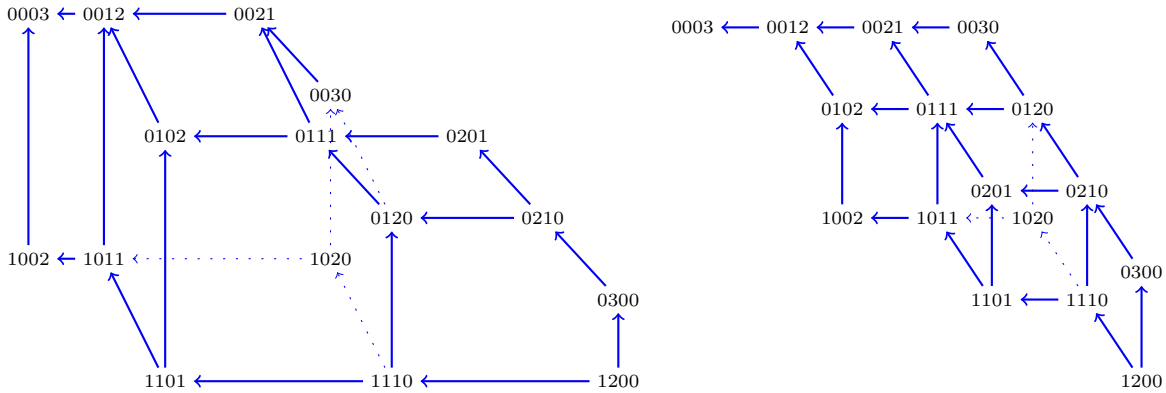

FIGURE 1. $\nu = ENEENN$的 ν-Tamari 格和 ν-Dyck 格。它们分别是 $\delta = (2, 0, 0)$ 和 $\delta = (0, 0, 0)$ 的 alt ν-Tamari 格 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$。

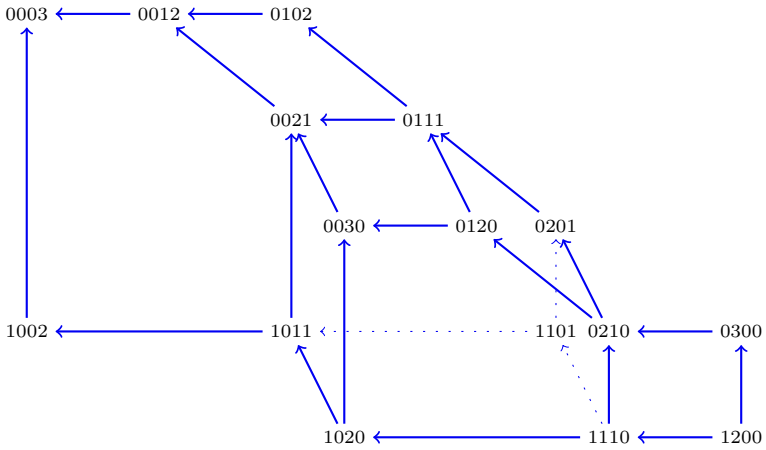

FIGURE 2. $\nu = ENEENN$和 $\delta = (1, 0, 0)$ 的 alt ν-Tamari 格 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$。

。在这一一般背景下，针对 alt ν- Tamari 格的类似几何实现将在后续工作中给出 [Ceb]。

2. THE ν-DYCK LATTICE

设 ν为平面上从 (0，0) 到 (m, n) 的一条格路径，由有限个北向和东向单位步组成。我们也可以将路径 ν 表示为由字母 E 和 N 组成的单词，分别表示东向步和北向步。我们同样可以将 ν表示为非负整数序列 $(\nu_0, \nu_1, \ldots\ldots, \nu_n)$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 是 ν的北向步数， ν_0 是初始东向步数，而 $\nu_i \geq 0$ 是紧接在 i 个北向步之后的连续东向步数。特别地，$m = \nu_0 + \cdots + \nu_n$是东向步的总数。例如，路径 $ENEENNENEEE$对应于序列 (1，2，0，1，3)，而 $ENEENN$对应于 (1,2,0,0)。

一个 ν-路径 μ 是由北步和东步组成、端点与 ν 相同且弱位于 ν 之上的格路径。或者， $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ 是一个 ν- 路径，当且仅当 $\sum_{i=0}^{j} \mu_i \leq \sum_{i=0}^{j} \nu_i$ 对所有 $0 \leq j \leq n$ 都成立，且当 $j = n$ 时取等号。图 1 和图 2 中偏序集的元素以 ν-路径作为标记，采用这种表示时，为简便起见省略逗号和括号。例如，标记 1200 是最小路径 $(1,2,0,0)$，它对应于 $\nu = ENEENN$。

定义 2.1。 *ν-Dyck* 格 Dyck_ν 是定义在 ν-路径上的偏序集，其中 $P \leq Q$ 当且仅当 Q 弱位于 P 之上。

图 ν 的 $\nu = ENEEN$-Dyck 格的一个例子见图 3 左侧。

注 2.2. 当 ν 为 $(NE)^n$ 时，它与大小为 n 的 Dyck 路径上的经典Dyck格重合。

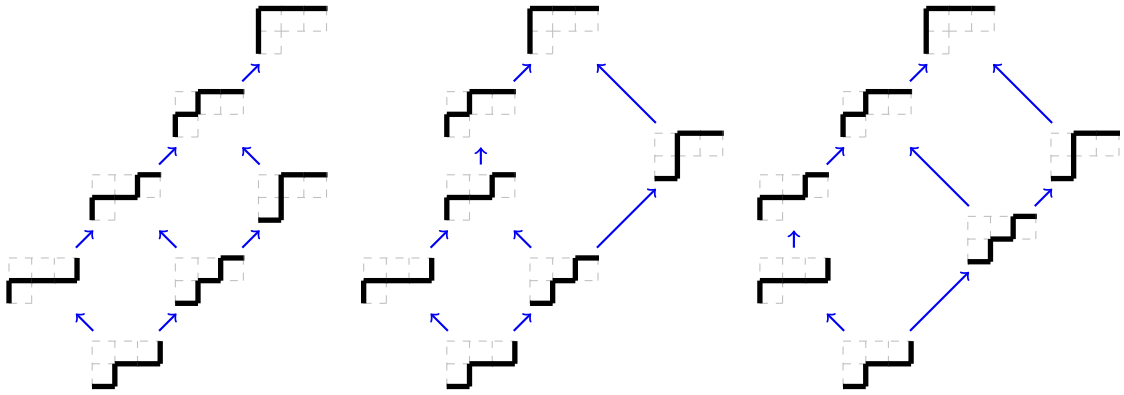

FIGURE 3. alt ν-Tamari 格 Tam$_\nu(\delta)$ 的示例，其中 $\nu = ENEEN = (1, 2, 0)$。左： $\delta = (0, 0)$ 对应的 ν-Dyck 格。中： $\delta = (1, 0)$ 对应的格。右： $\delta = (2, 0)$ 对应的 ν-Tamari 格。

在每种情况下，长度为 k 的线性区间数量由 ℓ_k 给出，其中$\ell = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3) = (7, 8, 4, 1)$。例如，7 表示长度为 0 的平凡区间，它们就是各个偏序集的元素；长度为 1 的线性区间有 8 个，对应于边；长度为 2 的线性区间有 4 个，长度为 3 的线性区间有 1 个。

注 2.3。 ν-Dyck 格中的覆盖关系 $P \lessdot Q$ 包括将某条 ν-路径 P上的一个谷 EN 变为峰 NE。

2.1. **-Dyck 格中的左区间和右区间**。 我们重点研究偏序集中特殊的一类线性区间。若区间 $[P, Q]$ 是全序的，或者等价地说，是形如 $P = P_0 < P_1 < \cdots < P_\ell = Q$的链，则称其为线性的。此类线性区间的长度定义为 ℓ。长度为零（仅包含一个元素）的线性区间称为平凡。根据定义，长度为一的线性区间是一种覆盖关系，因为它包含两个元素。 ν-Dyck 格的非平凡线性区间可以很容易地分为两类。

定义 2.4. Dyck$_\nu$ 中的一个区间 $[P, Q]$ 称为左区间，如果 Q 可以通过将某个 $\ell \geq 1$ 对应的子路径 $E^\ell N$ 变换为 NE^ℓ，从 P 得到。如果 Q 可以通过将某个 $\ell \geq 1$ 对应的子路径 EN^ℓ变换为 $N^\ell E$，从 P 得到，则称其为右区间 。

引理 2.5. 长度为2 的线性区间要么是左区间，要么是右区间。

证明。 设 $P \lessdot Q \lessdot R$是一个长度为 2 的线性区间。覆盖关系 $P \lessdot Q$将 P的一个谷EN变为一个峰 NE。如果下一个覆盖关系 $Q \lessdot R$发生在 Q 的一个谷处，而该位置同时也是 P的一个谷，那么 $[P, R]$就是一个正方形。因此，第二个覆盖关系必须使用 Q中形成的峰 NE 的两条边之一。□

命题 2.6。 前一定义中的左区间和右区间是长度为 ℓ 的线性区间。此外，Dyck$_\nu$ 中的所有非平凡线性区间要么是左区间，要么是右区间。

证明。 若 $[P, Q]$ 是这种形式的区间，且 $\ell \geq 1$，则从 P 到 Q 仅存在一条极大链。事实上， P 中有且仅有一个谷不是 Q 的谷，因此，从 P 到 Q 的任意极大链都始于这个谷。于是我们得到一个形式相同的区间，但 ℓ 减少了 1，因此由归纳法可得结论。

引理 2.5证明，所有高度为 $k = 2$ 的线性区间要么是左区间，要么是右区间。设 $[P, Q]$ 是高度为 $k + 1 \geq 3$ 的线性区间。它是线性的，因此 Q 在 $[P, Q]$ 中仅有一个下覆盖 Q' 。于是 $[P, Q']$ 是高度为 k 的线性区间，因此由归纳法可知，它具有指定的形式。

假设 Q' 由 P 通过将子路径 $E^k N$ 变为 NE^k而得到，这会在 Q'中形成该峰 NE，其后紧跟 $k-1$个东向步。于是，引理 2.5保证覆盖关系 $Q' \lessdot Q$必须使用该峰的北步 N，因此， Q 由 P通过将子路径 $E^{k+1}N$变为 NE^{k+1}而得到。

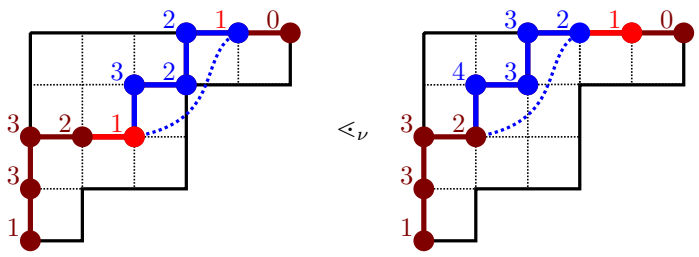

FIGURE 4. 一条 ν-路径的旋转操作。每个节点都标注了其 ν-高度 .

现在假设 Q'是由 P通过将子路径 EN^k变换为 N^kE得到的。同样，引理2.5 保证了 $Q' \lessdot Q$ 必须使用该峰的东步 E，而且 Q 是由 P 通过将子路径 EN^{k+1}变换为 $N^{k+1}E$得到的。□

推论 2.7. 长度为 ℓ 的 Dyck$_\nu$ 左区间与在一个北步处标记、且该步前有 ℓ 个东向步的 ν-路径构成双射。长度为 ℓ 的 Dyck$_\nu$ 右区间与在一个东步处标记、且该步后有 ℓ 个北向步的 ν-路径构成双射。

3. THE ν-TAMARI LATTICE

The ν-Tamari 格是 Tamari 格的一种推广。它们由 Prν-路径定义，提出者是´eville-Ratelle 和 Viennot，见 [PRV17]。关于 ν-树的另一种描述见 [CPS20]。

3.1. 关于 ν-路径。对于 ν-路径 μ 上的格点 p，将其 ν-高度 alt$_\nu(p)$ 定义为：在不穿过 ν 的前提下，最多可以在 p 右侧添加的水平步数。给定 μ 的一个谷 EN，令 p 为东步与北步之间的格点。令 q 为 μ 上满足 alt$_\nu(q)$ =alt$_\nu(p)$ 的下一个格点，并令 $\mu_{[p,q]}$ 为 μ 中从 p 出发、到 q 结束的子路径。令 μ' 为从 μ 得到的路径：将$\mu_{[p,q]}$ 与其前面的东步 E 互换。在谷 p 处对 μ 进行的 ν-旋转定义为 $\mu \lessdot_\nu \mu'$。图 4 展示了一个示例。

定义 3.1。 ν-Tamari 偏序集 Tam$_\nu$ 是 ν-路径上 ν-旋转的自反传递闭包。

一个 ν-Tamari 偏序集的示例，取 $\nu = ENEEN$，如图3右侧所示。

定理 3.2 ([PRV17，定理 1])。 该 *ν-Tamari* 偏序集是一个格。该 ν-旋转恰好是其覆盖关系。

定义 ν-Tamari 格的另一种方法，是将子路径的 ν-高度 定义为其终点与起点之间的 ν-高度之差。因此，对于东步 E，我们记作 elev$_\nu(E) = -1$；若 N_i 是 ν-路径 μ的第 i 个北步，则记作 elev$_\nu(N_i) = \nu_i$。对于 μ的任意子路径 A，我们有 elev$_\nu(A) = \sum_{a\in A}$elev$_\nu(a)$，即为 A 各步的 ν-高度之和。

ν-游程 是指一条 ν-路径上的北步 N 的最短子路径 A，它从该 N 开始，并满足 elev$_\nu(A) = 0$。根据 ν-游程的定义，将谷中的东步 E 与紧随其后的 ν-游程交换，恰好就是 Tam$_\nu$中的一种覆盖关系。

3.2. **关于 ν-树 木**。 还可以在 ν-树上定义一个偏序，它与 ν-Tamari 格同构 .

我们用 F_ν 表示在包含 ν 的最小矩形中弱位于 ν 上方的费雷尔图。令 L_ν 表示 F_ν 内格点的集合。若 p、$q \in L_\nu$ 中的 p 严格位于 q 的西南方或东北方，且包含 p 和 q 的最小矩形完全位于 F_ν 中，则称这两个点为 ν-不相容。否则，称 p 和 q 为 ν-相容。 ν-树是 L_ν 中两两 ν-相容元素构成的极大集合。特别地， F_ν 左上角的顶点与其他所有顶点都 ν-相容，并且属于每一棵 ν-树。将同一行或列中相邻的两个元素（它们之间的距离不必为 1）连接起来，可以将 ν-树可视化为经典的有根二叉树 [CPS20]。 F_ν 左上角的顶点始终是根。图 5 展示了一个 ν-树，以及我们接下来要描述的旋转操作。

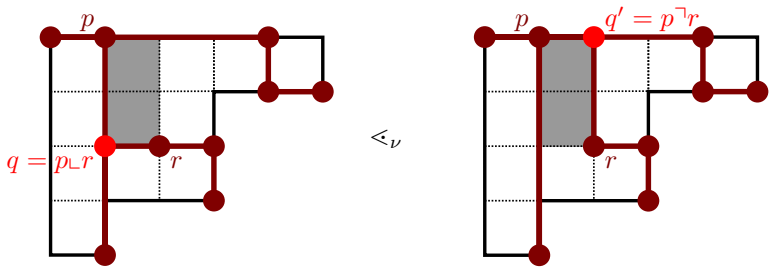

FIGURE 5. ν-树的旋转操作。

设 T 是一个 ν-树，p，$r \in T$ 是两个不处于同一行或同一列的元素。我们用 $p\square r$ 表示包含 p 和 r 的最小矩形，并用 $p\llcorner r$ （分别用 $p\urcorner r$ ）表示 $p\square r$ 的左下角（分别为右上角）。

设 $p,q,r \in T$ 满足 $q = p\llcorner r$，且除 p,q,r 外，没有其他元素位于 $p\square r$ 中。T 在 q 处的 ν-旋转定义为集合 $T' = (T \setminus \{q\}) \cup \{q'\}$，其中 $q' = p\urcorner r$，记作 $T \lessdot_\nu T'$。正如 [CPS20 引理 2.10], 所证明的，ν-树旋转后仍是 ν-树。

定义 3.3。 ν-树的 $\overset{tr}{\nu}$Tam旋转偏序 是 ν-旋转的自反传递闭包。

-树的旋转偏序的一个例子，针对 $\nu = ENEEN$，见图 6右侧。

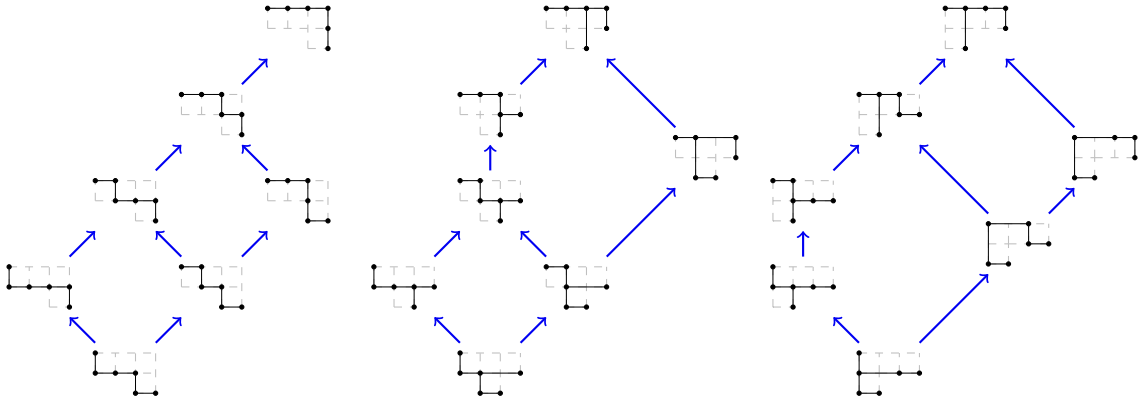

FIGURE 6. (δ,ν) 树的旋转格示例，$\nu = ENEEN$。左：$\delta = (0,0)$ 的ν-Dyck 格。中：$\delta = (1,0)$ 的格。右：$\delta = (2,0)$ 的 ν-Tamari 格。

定理 3.4 ([CPS20])。 *ν-Tamari* 格同构于 ν-树的旋转偏序：

$$\mathrm{Tam}_\nu \cong \mathrm{Tam}_\nu^{tr}.$$

特别地，ν-树的旋转偏序是一个格。

这两个偏序集之间的双射由 *right flushing* 双射 flush$_\nu$ 引入于 [CPS20]。该双射将一个 ν-路径 $\mu = (\mu_0,\dots,\mu_n)$ 映射为唯一的 ν-树，其中在高度 $\mu_i + 1$ 处有节点 i。该树可以通过从下到上、从右到左添加 $\mu_i + 1$ 高度为 i 的节点递归得到，同时避开禁用位置。禁用位置是指位于某个节点上方、且该节点不是某一行中最左侧节点的位置（这些位置来自路径中东向步的初始点 μ）。在图 7中，禁用位置就是属于波浪线的位置。注意，每一行中节点的顺序是反向的。

右冲刷双射的逆冲刷$_\nu^{-1}$称为左冲刷双射，其描述方式类似：从左到右、从下到上添加点，同时避开波浪线所标示的禁用位置。换言之，一棵 ν-树的左冲刷双射是与该树每行节点数相同的 ν-路径。

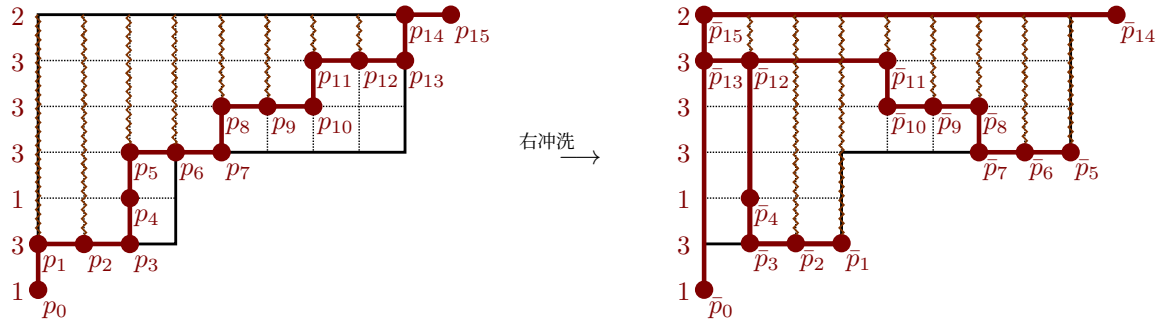

FIGURE 7. 从 ν-路径到 ν-树的右冲洗双射。

3.3. **ν-Tamari 格中的左区间和右区间。** ν-Tamari 格在ν-树上的描述，使其线性区间的描述变得简单。

定义 3.5。Tam_ν^{tr} 中的区间 $[T, T']$ 若满足以下条件，则称为左区间： T' 可由 T 通过对同一行中连续序列 $q_0, \ldots, q_{\ell-1}, q_\ell$ 的前 ℓ 个节点从左到右依次进行 $\ell > 0$ 次旋转得到。例如，在图 7（右图）中，对序列 $\bar{p}_{13}, \bar{p}_{12}, \bar{p}_{11}$ 的前两个节点进行两次旋转。若 T' 可由 T 通过对同一列中连续序列 $q_0, \ldots, q_{\ell-1}, q_\ell$ 的前 ℓ 个节点从下到上依次进行 ℓ 次旋转得到，则称其为右区间。例如，在图 7 （右图）中，对序列 $\bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{p}_{12}$ 的前两个节点进行两次旋转。

命题 3.6。 前一定义中的左区间和右区间都是长度为 ℓ 的线性区间。此外， ν 树上的旋转格中所有非平凡的线性区间要么是左区间，要么是右区间。

证明。左（分别为右）区间 $[T, T']$ 确实是线性的，因为从 T到 T'只有一条极大链，而 ℓ就是其长度。实际上，区间中每个不同于 T'的元素都只有一个低于 T'的上覆盖。

反向结论通过归纳法证明，与命题中较简单的 Dyck 格情形类似，2.6。

长度为 1 的区间都是覆盖关系，因此既是左区间也是右区间。
包含极大链 $T_0 \lessdot T_1 \lessdot T_2$ 的区间可以是：

- 当 $T_1 \lessdot T_2$是与 $T_0 \lessdot T_1$位于同一行且紧邻其右侧的旋转时，称为左区间，
- 当 $T_1 \lessdot T_2$ 是同一列中紧邻 $T_0 \lessdot T_1$上方的旋转时，为右区间，
- 当 $T_1 \lessdot T_2$ 是同一列中紧邻 $T_0 \lessdot T_1$下方的旋转时，为五边形，
- 否则为正方形。

特别 是，这证明长度为 2 的所有线性区间恰好都是左区间或右区间 s.
长度为 $k \geq 3$的线性区间 $[T, T']$必定包含一个长度为 $k-1$的线性区间 $[T, T'']$。根据归纳法， $[T, T'']$必定是左区间，在这种情况下 $[T, T']$也是左区间；或者是右区间，在这种情况下 $[T, T']$也是右区间。□

注 3.7. ν-树的旋转格上的左区间的左冲刷，会在 Tam$_\nu$中生成一个 ν-路径的左区间 $[P, Q]$ ，其中 P 的形式为 AE^kBC ，带有某个 ν-往返路径 B ，而 Q 的形式为 ABE^kC。换言之， P 是一个 ν-路径，其中有一个谷，其前面有 k 个东向步。

对 ν树的旋转格上的一个右区间进行左冲刷，会在 Tam$_\nu$ 中产生一个 ν路径的右区间$[P, Q]$，其中 P的形式为 $AEB_1 \ldots B_kC$，其 $B_1, \ldots, B_k$为 k个连续的ν-游程，而 Q的形式为 $AB_1 \ldots B_kEC$。

4. THE ALT ν-TAMARI LATTICE

给定一条固定路径 ν， ν-Dyck 格和 ν-Tamari 格是定义在 ν-路径上的两个偏序集，其覆盖关系十分相似。在这两种情况下，覆盖关系都由交换谷的东步与其后接的一条子路径构成。事实上，我们可以定义一整族以类似方式描述的偏序集，并称其为 alt ν-Tamari 偏序集。“alt”一词代表“高度”，我们借助这一概念来定义这些偏序集。我们证明所得的偏序集都是格，并研究其线性区间。

4.1. 关于 ν-路径。 令 $\nu = (\nu_0, \ldots\ldots, \nu_n)$ 为一条固定路径。我们称 $\delta = (\delta_1, \ldots\ldots, \delta_n) \in \mathbb{N}^n$ 为关于 ν 的增量向量，当且仅当对所有 $1 \le i \le n$ 都有 $\delta_i \le \nu_i$。

与 ν-高度类似，我们引入 δ-高度的概念。对于 ν-路径 μ上的格点 p，定义其 δ-高度 $\mathrm{alt}_\delta(p)$ 如下。我们将 μ 的初始格点的 δ-高度设为零，并规定 μ 的第 i个北步使 δ-高度增加 δ_i，而一个东步使 δ-高度减少 1。

给定 μ的一个谷 EN，令 p 为东步与北步之间的格点。令 q 为 μ 的下一个格点，使得 $\mathrm{alt}_\delta(q) = \mathrm{alt}_\delta(p)$，并令$\mu_{[p,q]}$ 为 μ 中从 p 开始、到 q结束的子路径。令 μ' 为通过将 μ 中的$\mu_{[p,q]}$ 与其前面的东步 E 互换而得到的路径。定义 μ 在谷 p 处的 δ-旋转为 $\mu \lessdot_\delta \mu'$。图 8 展示了一个例子。

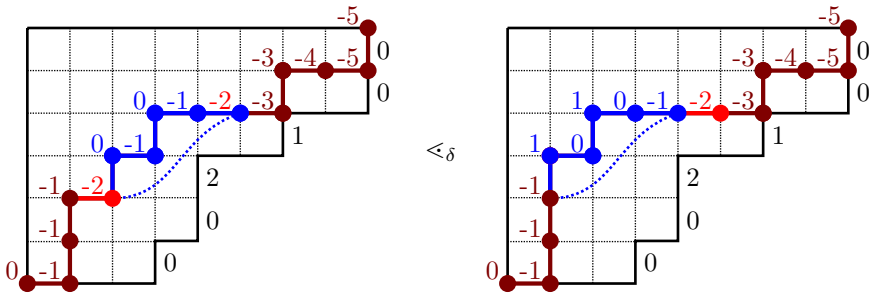

FIGURE 8. δ旋转操作作用于 $\delta = (0, 0, 2, 1, 0, 0)$上的 ν路径。每个节点 i s 标注其 δ高度。

注意，δ旋转会增加路径下方方格的数量，因此其自反传递闭包在 ν路径集合上诱导出一个偏序结构。

定义 4.1。 设 δ 是相对于 ν的一个增量向量。*alt ν-Tamari* 偏序集 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$是 ν路径集合上 δ旋转的自反传递闭包。

图 ν-Tamari 偏序集的三个例子，其中 $\nu = ENEEN = (1, 2, 0)$，如图 3所示。

注 4.2。 对于固定路径 ν，增量向量 δ有两种极端选择。若对所有 $1 \le i \le n$都有 $\delta_i = \nu_i$，则 alt ν-Tamari 格与 ν-Tamari 格重合。若对所有 $1 \le i \le n$都有 $\delta_i = 0$，则 alt ν-Tamari 格与 ν-Dyck 格重合。我们分别用 $\delta^{\max}$ 和 $\delta^{\min}$表示这两种情况。

定义 alt ν-Tamari 偏序集的另一种方法是引入子路径 δ-高度差 的概念，即其终点与起点之间的 δ-高度之差。因此，对于一个东步 E，我们记 $\mathrm{elev}_\delta(E) = -1$；若 N_i 是 ν-路径 μ的第 i个北步，则记 $\mathrm{elev}_\delta(N_i) = \delta_i$。于是，对于 μ的任意子路径 A，我们有 $\mathrm{elev}_\delta(A) = \sum_{a \in A} \mathrm{elev}_\delta(a)$，它等于 A各步的 δ-高度差之和。

δ-游历的北步 N 在 ν-路径 μ 中的定义是：从该 N 开始且满足 $\mathrm{elev}_\delta(A) = 0$的最短子路径 A （属于 μ ）。根据 δ-游历的定义，将谷中的东步 E 与紧随其后的 δ-游历交换，恰好是 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 中的一个覆盖关系。

注4.3。 注意，对于 $\delta = \delta^{\max}$，δ-高度是将 ν-高度向上平移 $-\nu_0$ 后得到的，但 δ-海拔与 ν-海拔相等。

对于相对于 ν的一般增量向量 δ，$\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 是一个格这一点并非显然。这是以下命题的推论。

命题4.4。 设 $\check{\nu}_0 = \sum_{i=0}^{n} \nu_i - \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ *with* $\delta_i \le \nu_i$。则 $\check{\nu} = (\check{\nu}_0, \check{\nu}_1, \ldots\ldots, \check{\nu}_n) = (\check{\nu}_0, \delta_1, \ldots\ldots, \delta_n)$ 是位于 ν 下方的一条路径，其端点与 ν 相同。此外，以下性质成立：

（1） δ-路径的旋转与 $\check{\nu}$ 的 μ-旋转一致。（2）*alt ν-Tamari* 偏序 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 是 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 在弱于 ν 的路径子集上的限制。（3）$\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 的覆盖关系恰好是 δ-旋转。（4）*alt ν-Tamari* 偏序 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 是 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 中的区间 $[\nu, 1^\nu]$。

这里，$1^\nu = N^n E^m$ 表示位于 ν和$\check{\nu}$上方的顶路径，其中 $m = \nu_0 + \cdots + \nu_n = \check{\nu}_0 + \cdots + \check{\nu}_n$。

证明。命题的第一部分由 $\sum_{i=0}^{j} \check{\nu}_i - \sum_{i=0}^{j} \nu_i = \sum_{i=j+1}^{n} (\nu_i - \delta_i) \geq 0$，得出，其中当 $j = n$时等号成立。

注意，ν-路径 μ 也是一条 $\check{\nu}$-路径，而对于子路径 A，我们有 μ 的 $\mathrm{elev}_\delta(A) = \mathrm{elev}_{\check{\nu}}(A)$。由于 δ-旋转（分别是 $\check{\nu}$-旋转）由 δ-elevation（分别是 $\check{\nu}$-elevation）确定，因此结论（1）成立。结论（2）和（3）由结论（1）推出。

对于结论（4），我们需要证明，将 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 限制在弱于 ν 的路径子集上，所得结果是 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$中的区间 $[\nu, 1^\nu]$。换言之，我们需要证明每条 ν-路径 μ 都满足 $\nu \leq_{\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}} \mu$。请注意，这一性质对任意一条位于 ν 之下的路径 $\check{\nu}$ 并不成立；但对于我们特定的选择，这等价于证明 $\nu \leq_{\mathrm{Tam}_\nu(\delta)} \mu$（根据结论（1））。这是成立的，因为我们可以通过依次应用一系列 δ-旋转，从而到达任意一条 ν-路径 μ：从下到上、从右到左，一次添加位于 ν 和 μ 之间的方格。每一步都对应一次 δ-旋转，因为 $\delta_i \leq \nu_i$。□

推论 4.5。*alt ν-Tamari 偏序集是一个格。*

证明。根据命题 4.4 (4)，alt ν-Tamari 偏序 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 同构于 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$中的区间。由于格中的区间也是格，我们推得 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 是一个格。□

注 4.6。如果我们选择任何其他弱于 ν 的路径 ν，但它不满足 $\nu_i \leq \nu_i$，对所有 $i > 0$，那么 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 在 ν- 路径子集上的限制就不是一个格。它是一个上集，但有多个极小元素。本文其余部分关于线性区间数量的结果，在这个较弱条件下也不成立（见注 6.2）。

本文中我们不会用到以下命题，但这是一个有趣的性质，我们想特别强调。

命题 4.7. 设 δ 和 δ' 是相对于 ν 的两个增量向量，满足对所有 i都有 $\delta_i \leq \delta'_i$。若 $P < Q$ 属于 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta')$，则 $P < Q$ 属于 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$。

换言之，只要 $\delta \leq \delta'$，偏序集 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 就是偏序集 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta')$ 的一种扩张，也就是说，它可以通过在 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta')$ 中添加若干关系得到。

证明。只需证明该结论对 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta')$ 中的覆盖关系成立；也就是说，若 $P \lessdot_{\delta'} Q$，则 $P < Q$ 属于 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$。

对于某个 δ'- excursion B，我们可以写成 $P = AEBC$ 和 $Q = ABEC$。注意，对于 B中的任意北步 N，N 的 δ' excursion 是 B 的一个子词；并且，由于 $\delta \leq \delta'$，任意北步的 δ-excursion 都是其 δ'-excursion 的前缀。因此，我们可以通过交换东步 E 与后续的 δ-excursions（若其后紧跟一个北步），或与其后的东步（否则），从 P 到 Q 构造一串 δ-旋转；后一种交换不会改变路径。□

4.2. 关于(δ, ν)-树。 alt ν-Tamari 格 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 是 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 中的区间 $[\nu, 1^\nu]$。因此，它可以描述为：由位于与 $\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 中 ν 对应的 $\check{\nu}$-树 T_ν 上方的 $\check{\nu}$-树构成的旋转格。这些树可以描述为形状 $F_{\delta,\nu}$ 中两两兼容元素的极大集合，下面我们将介绍这种形状。这种观点有助于证明，所有 alt ν-Tamari 格在任意长度下的线性区间数量都相同。

设 δ, ν 以及 $\check{\nu}$ 如命题 4.4所述。设 $F_{\check{\nu}}$ 为位于 $\check{\nu}$上方（允许相切）的费雷尔图。我们考虑格路径 $\hat{\nu}$，它从 $F_{\check{\nu}}$ 最右下角出发ν_0，（该点的坐标为 $(\check{\nu}_0, 0)$），由一系列向西步和北步组成

$$W^{\nu_0} N W^{\gamma_1} N W^{\gamma_2} \dots N W^{\gamma_n}, \qquad \text{for } \gamma_i = \nu_i - \delta_i. \tag{1}$$

我们定义 $F_{\delta,\,\nu}$ 为 $F_{\check{\nu}}$ 中由位于 $\hat{\nu}$上方或边界处的方格组成的子集，并将 $L_{\delta,\,\nu}$ 的格点集合记为其格点集。一个（δ，ν）-树是 ν中两两 $\check{\nu}L_{\delta,\,\nu}$-相容元素的极大集合。图 9的右侧给出了一个例子。

引理 4.8。（$\delta\,\nu$）-树恰好是包含在 $L_{\delta,\,\nu}$ 中的 $\check{\nu}$-树。

证明。包含在 $L_{\delta,\,\nu}$ 中的 $\check{\nu}$-树根据定义自动是一个（δ，ν）-树。因此，我们只需验证（δ，ν）-树是 $\check{\nu}$-树。根据定义，一个（δ，ν）-树是 $L_{\delta,\,\nu}$ 中两两 $\check{\nu}$-相容元素的极大集合。由于 $L_{\delta,\,\nu} \subseteq L_{\check{\nu}}$，我们要证明在 $L_{\delta,\,\nu}$ 中的极大性蕴含在 $L_{\check{\nu}}$ 中的极大性。

回想一下，路径 ν和 $\check{\nu}$具有相同的起点 (0，0) 和相同的终点 $(m,\ n)$，并且每棵 ν-树和每棵 $\check{\nu}$-树恰好有 $m + n + 1$ 个节点（等于 ν 和 $\check{\nu}$中的格点数量）。此外，形状 $F_{\delta,\,\nu}$ 可以放入顶角为

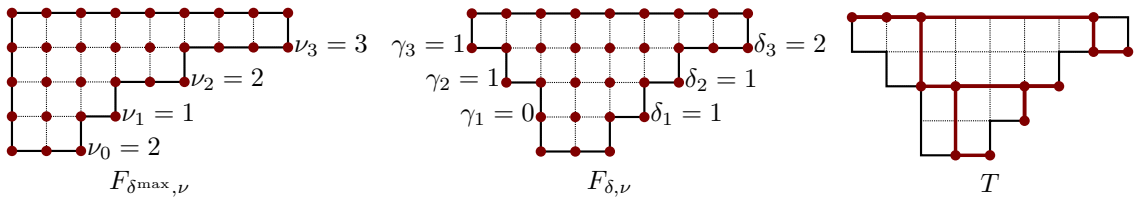

FIGURE 9.左：费雷尔图 $F_{\delta^{\max},\nu}$ 及其对应的格点 $L_{\delta^{\max},\nu}$，对应于 $\nu = EENENEENEEEN$ =(2，1，2，3，0) 和 $\delta^{\max}$ =(1，2，3，0)。中：费雷尔图$F_{\delta,\nu}$ 及其对应的格点 $L_{\delta,\nu}$ ，对应于相同的 ν 和 δ =(1，1，2，0)；路径 $\check{}\nu = EEEENENENEEN$ 和 $\hat{}\nu$ =$WWNNWNWN$。右：一个 (δ，ν)- 树。

(0，n) 和 (m，n)。在图 21中，$m = 11$ 和 $n = 7$。图中所示的 ν-树和 (δ，ν)-树都有 $m + n + 1 = 19$ 个节点。我们要证明每棵 (δ，ν)-树恰好有 $m + n + 1$ 个元素。

设 T 为一个 (δ，ν)-树。从底部到顶部、从右到左为其各元素标记 p_0，p_1，.....，p_r。我们将证明 $r = m + n$，这意味着 T 具有所需的 $m + n + 1$ 个元素。

让我们通过依次逐个添加元素 p_0、p_1、.....、p_r 来递归地重构 T。注意，如果 p_i 不是其所在行中最靠左的元素，那么在接下来的步骤中，p_i 上方的所有格点都被禁用，因为它们与同一行中位于 p_i 左侧的元素 $p_j \in T$ 不相容。

现在，在重构 T的过程中添加元素 p_j 时，p_j 必定位于其所在行中未被此前任何元素禁用的最靠右位置。否则，令 $p_j \in T$为不满足该性质的标签最小的节点，并令 q 为同一行中未被任何满足 $i < j$的元素 p_i 禁用的最靠右格点。特别地，根据假设，q 位于 p_j 右侧，且 q 与所有满足 $i < j$的 p_i 相容。此外，q 也与满足 $k > j$的 $p_k \in T$相容，否则 p_k、p_j 将不相容。因此，我们可以将元素 q添加到 T中，从而创建一个新的相容集，这与 T的极大性矛盾。

此外，以下关系成立 ，

$$j = \mathrm{forb}(p_j) + \mathrm{height}(p_j)$$

其中，height(p_j) 是 $p_j \in T$ 的高度，而 forb(p_j) 是满足以下条件的 $p_i \in T$ 的数量：$i < j$，且 p_i 不是其所在行中 T 的最左侧节点。也就是说，forb(p_j) 是 p_j 之前那些禁用其上方位置的节点数量。该公式显然成立，因为出现在 p_j 之前的 j 个节点 $p_0, \ldots, p_{j-1}$ 要么禁用其上方的位置（不是其所在行的最左侧节点），要么使高度增加一（是其所在行的最左侧节点）。

如果将此公式应用于最后一个节点 p_r，并假设 $r < m + n$，那么

$$\mathrm{forb}(p_r) + \mathrm{height}(p_r) < m + n.$$

我们可以假设 height(p_r) = n （最大可能高度），否则就可以将 $F_{\delta,\nu}$ 的左上角添加到 T 中，从而构造出一个更大的相容集，这与 T 的极大性相矛盾。这意味着 forb(p_r) $< m$，也就是说，顶行上仍有一些未被禁用的格点。添加其中一个格点会与 T 的极大性相矛盾。因此，我们证明了 $r = m + n$，正如所要证明的那样。□

我们将（δ，ν）-右侧推移flush$_{\delta,\nu}$ 定义为右侧推移双射 flush$_{\check{\nu}}$（相对于 $\check{}\nu$）在 ν-路径集合上的限制（将该集合视为 $\check{}\nu$-路径中位于 ν 上方的子集）。

命题 4.9。映射 flush$_{\delta,\nu}$ 是 ν-路径集合与（δ, ν）-树集合之间的双射。此外，两个 ν-路径通过 δ-旋转 $\mu \lessdot_\delta \mu'$ 相关，当且仅当相应的树通过 $\check{}\nu$-旋转 $T \lessdot_{\check{\nu}} T'$相关。

证明。根据命题4.4，δ-路径 μ 的 ν-旋转与 μ的 $\check{}\nu$-旋转相同，而右侧冲刷双射 flush$_{\check{\nu}}$ 将路径上的 $\check{}\nu$-旋转换为对应树上的 $\check{}\nu$-旋转。因此，命题的第二部分显然成立。剩下需要证明，μ 是 ν-路径，当且仅当 flush$_{\check{\nu}}(\mu)$ 是一个 (δ，ν)-树，或者等价地，是一个包含于$L_{\delta,\nu}$中的 $\check{}\nu$-树。

我们先证明正向蕴含。首先注意，底部路径 T_ν =flush$_{\check{\nu}}$(ν)的像包含于$L_{\delta,\ \nu}$中。更具体地说，形状$F_{\delta,\ \nu}$的边界上在高度k处有 ν_k 个东步。对于 $k>0$，其中一些东步（恰好 $\nu_k-\delta_k$个）位于左边界，另一些（恰好 δ_k个）位于右边界。 T_ν 在高度 k 处的 ν_k+1 个节点由左边界上的 $\nu_k-\delta_k+1$ 个点以及右边界东步的 δ_k 个端点组成。在高度 $k=0$处， T的 ν_0+1 个节点是$F_{\delta,\ \nu}$底部的所有格点。这说明 T_ν 包含于$L_{\delta,\ \nu}$中。

现在，每条 ν-路径 μ 都可以通过对底部路径 ν应用一系列 $\check{}\nu$-旋转得到。其图像 flush$_{\check{\nu}}$(μ) 是一棵 $\check{}\nu$-树，可以通过对树 T_ν应用相应的一系列 $\check{}\nu$-旋转得到。由于 T_ν 包含于 $L_{\delta,\ \nu}$ 且此类旋转保持这一性质，因此 flush$_{\check{\nu}}$(μ) 也包含于 $L_{\delta,\ \nu}$。至此，正向的证明完成。

反向等价于以下陈述：如果 T 是一棵包含于 $L_{\delta,\ \nu}$中的 $\check{}\nu$-树，那么 $\mu=\text{flush}_{\check{\nu}}^{-1}(T)$ 位于 ν的弱上方。这等价于证明， T 中高度小于或等于 k 的节点数至多为 $\nu_0+\cdots+\nu_k+k+1$。

对于 $0\le k\le n$，令 L_k （分别地， F_k）表示将 $L_{\delta,\ \nu}$ （分别地，$F_{\delta,\ \nu}$）限制到高度小于或等于 k的格点所得的结果。 F_k 的宽度等于 $\nu_0+\cdots+\nu_k$。 L_k 内部相容格点的最大数量等于 $\nu_0+\cdots+\nu_k+k+1$。将 T限制到 L_k 所得的是一个相容集（不一定是极大的）。结论成立。□

从 ν-路径到 (δ,ν)-树的 (δ,ν)-右向填充双射，描述方式与第 3.2 节完全相同：我们按照从右到左、从下到上的顺序，在形状 $F_{\delta,\nu}$ 内递归地向树中添加 μ_i+1 节点，同时避开位于某个节点上方、且该节点不是行中最左侧节点的禁用位置。图 21 展示了路径 $\mu=(1,0,1,1,3,2,1,2)$ 的像：左图对应 $\delta^{max}=(1,0,2,2,0,3,0)$，右图对应 $\delta=(0,0,1,2,0,1,0)$，其基路径为 $\nu=(3,1,0,2,2,0,3,0)$。

定义 4.10。 (δ,ν)-树的 Tam$_\nu^{tr}$(δ) 是在 (δ,ν)-树上的 $\check{}\nu$-旋转所生成的自反传递闭包。

(δ,ν)-树旋转偏序的三个例子（取 $\nu=ENEEN=(1,2,0)$）见图 6。

定理 4.11。 *alt ν-Tamari* 格与(δ,ν)-树的旋转偏序同构：

$$\text{Tam}_\nu(\delta)\cong\text{Tam}_\nu^{tr}(\delta).$$

特别地，(δ,ν)-树的旋转偏序是一个格。

证明。 alt ν-Tamari 格是以 ν-路径为元素、覆盖关系由 δ-旋转给出的偏序。$(,\nu)$-树的旋转偏序是以 (δ,ν)-树为元素、覆盖关系由 $\check{}\nu$-旋转给出的偏序。因此该结论由命题 4.9 推出。alt ν-Tamari 格的格性质已在推论 4.5 中证明。□

5. Left and right intervals in the alt ν-Tamari lattice

由于 Tam$_\nu$(δ) 是 Tam$_{\check{\nu}}$ 中的一个区间，其线性区间也是 Tam$_{\check{\nu}}$ 中的线性区间。用树来表述，这给出了以下简单的刻画。

定义 5.1. Tam$_\nu^{tr}$(δ) 中的一个区间 $[T,T']$，若 $[T,T']$ 是 Tam$_\nu^{tr}$ 中的左区间（分别为右区间），则称其为左区间（分别为右区间）。

命题 5.2. $\text{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 中的非平凡线性区间要么是左区间，要么是右区间 .

证明。 这直接由命题3.6得出。□

本节旨在将左区间和右区间刻画为与（δ， ν）-树相关的某些行向量和（约化）列向量。这将在第6节中使用，以证明 alt ν-Tamari 格 Tam$_\nu$（δ）中线性区间的数量与 δ的选择无关。

5.1. 行向量与左区间。

（δ， ν）-树 T 的行向量是向量

$$r(T)=(r_0,\dots,r_n),$$

其中， r_i+1 表示 T 在高度 i处的节点数。

命题 5.3. 一个(δ,ν)-树 T完全由其行向量刻画。此外，$(r_0,\dots,r_n)$是某个(δ,ν)-树的行向量，当且仅当

(1) 对所有 i， $r_i \geq 0$ (2) 对所有 j，
$\sum_{i=0}^{j} r_i \leq \sum_{i=0}^{j} \nu_i$，并且(3)
$\sum_{i=0}^{n} r_i = \sum_{i=0}^{n} \nu_i$。

证明。 根据命题 4.9，映射 $\mathrm{flush}_{\delta,\ \nu}$ 是 ν-路径集合与 $(\delta,\ \nu)$-树集合之间的双射。此外，该映射保持每个高度上的点数，因此也保持行向量。由于 ν-路径由其行向量刻画，因此 $(\delta,\ \nu)$-树也由其行向量刻画。

此外，通过映射 $\mathrm{flush}_{\delta,\ \nu}$，刻画 $(\delta,\ \nu)$-树的行向量，等价于刻画 ν-路径的行向量。条件 (1) 表示每条 ν-路径 μ 在每个高度上至少有一个格点。条件 (2) 表示 μ 弱于 ν，而条件 (3) 表示 μ 和 ν 具有相同的终点。 □

给定一棵 (δ,ν)-树 T，我们称有序集合 $L = \{p, q_0, q_1, \ldots, q_\ell\} \subseteq T$为 T的一个水平 L，若 L 是将 T 限制在网格的一个矩形 R 上所得的部分，且 p 是 R的左上角，q_0、q_1、……、q_ℓ 按此顺序出现在 R的底边上，其中 q_0 是其左下角，q_ℓ是其右下角。注意，T 中没有其他元素属于 R。我们称 L 的长度等于 ℓ。我们用 $T + L$ 表示从 T出发，按 T 中的顺序旋转节点 q_0、q_1、……、$q_{\ell-1}$后得到的 $(\delta,\ \nu)$-树。图 10 展示了这些概念的一个示例。

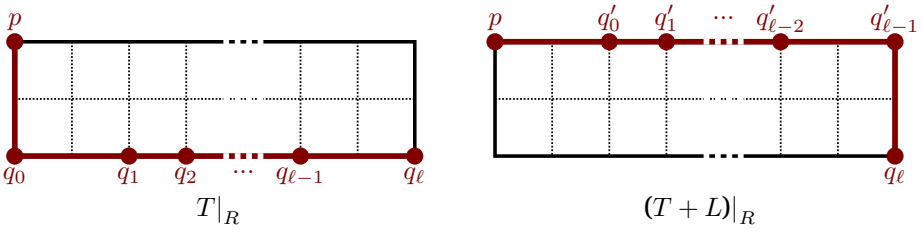

FIGURE 10. L 的水平 L 及树 $T + L$的示意图。

引理 5.4. 设 L 是一个长度为 ℓ 的 δ,ν)-树 T的水平 L。那么，$[T, T + L]$ 是 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$中长度为 ℓ 的左区间。此外，$\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 中以底元素 T 为端点的每个左区间都具有这种形式。

证明。 这由左区间的定义直接得出。 □

命题 5.5. 设 T是一个 δ,ν)-树，其行向量为 $r(T) = (r_0, \ldots, r_n)$。在 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 中，以 T 为底元素的长度为 ℓ 的左区间数量等于

$$|\{0 \leq i \leq n-1 :\ r_i \geq \ell\}|.$$

证明。 由5.4引理可知，长度为 ℓ 且以 T为底元素的左区间具有以下形式：$[T, T + L]$其中，L 是 T的一个长度为 ℓ 的水平 L。对于每个满足 $0 \leq i \leq n-1$的 $r_i \geq \ell$，都有一个这样的 L，其中 $q_0, \ldots, q_\ell$ 是 T在高度 i 处最左边的 $\ell + 1$ 节点，且 p 是 T中 q_0 的父节点。 □

前两个结果，即引理 5.4 和命题5.5，根据 $(\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta,\delta)$-树的行向量，刻画了 $\mathrm{Tam}\,\nu)$ 中的左区间。我们的下一个目标是针对某些列向量，对右区间给出类似的刻画。正如我们将要看到的，仅凭列向量不足以完成这种刻画，因此我们还需要考虑约化列向量这一概念。在讨论这一点之前，我们先引入列向量，并介绍它们的一些性质。

5.2. **列向量**。 给定一条从 (0,0) 到 (m, n) 的路径 ν，其反向路径 $\overleftarrow{\nu}$是从 (0,0) 到 (n, m) 的路径，它通过从右向左读取 ν，并将东步替换为北步、反之亦然而得到。等价地，$\overleftarrow{\nu} = (\overleftarrow{\nu}_0, \ldots, \overleftarrow{\nu}_m)$，其中 $\overleftarrow{\nu}_i$ 是路径 ν在列 $m - i$中的北步数。例如，如果 $\nu = ENEEN = (1,2,0)$，那么 $\overleftarrow{\nu} = ENNEN = (1, 0,1,0)$。这一概念便于刻画列向量。

为了定义一个（δ，ν）-树的列向量，方便起见，我们将顺序 $j_0 \prec_\delta \cdots \prec_\delta j_m$赋予 $L_{\delta,\ \nu}$的各列，按从右向左、从最短到最长的顺序读取这些列，如图 11 （左）所示。另请参见图 12中的三个示例。

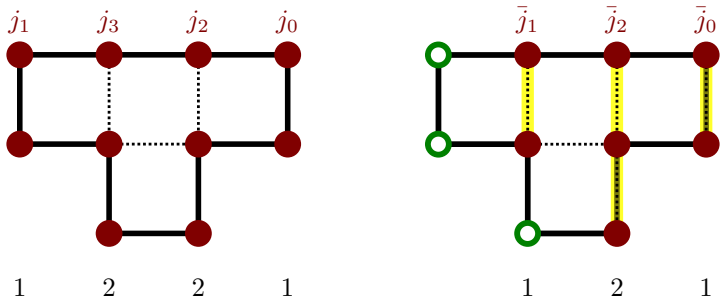

FIGURE 11. 左： $L_{\delta,\nu}$的列 j_0、 j_1、 j_2、 j_3，其长度分别为 1、1、2、2。右： $L_{\delta,\nu}$的约化列 j_0、 j_1、 j_2，其长度分别为 1、1、2，其中相关点填充为棕色，不相关点未填充而显示为绿色。在这两种情况下，列均按照从短到长、从右到左的顺序读取。

（δ， ν）-树的列向量 T 是向量

$$c_\delta(T) = (c_0, \ldots, c_m),$$

其中， $c_i + 1$ 是 T 在第 j_i列中的节点数。例如，图12中的三个（δ， ν）-树（对应 δ的三种取值）的列向量均为（0，1，0，1）。这意味着，在每种情况下，树在第 j_0列中有 $0+1$ 个节点，在第 j_1列中有 $1+1$ 个节点，在第 j_2列中有 $0+1$ 个节点，以及在第 j_3列中有 $1+1$ 个节点。等价地， c_i 统计了 T 在第 j_i列中的边数。

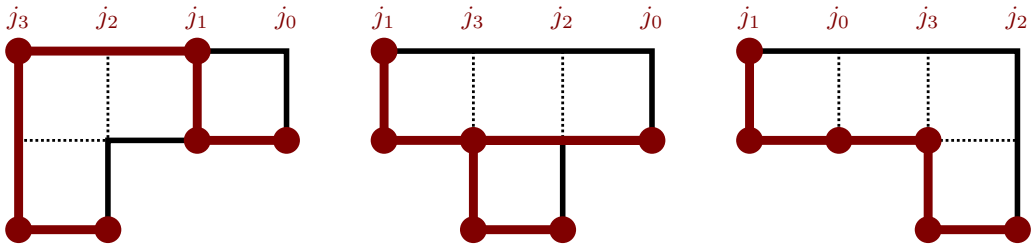

FIGURE 12. 列 j_0， j_1， j_2， j_3 的 $L_{\delta,\ \nu}$ 对于 $\nu = ENEEN$ 以及 $\delta =$ 的三种可能取值 (2，0)，(1，0) 和 (0，0)。列按长度从短到长、从右向左读取。图中所示树的列向量在这三种情况下均为 $c_\delta(T) =$ (0，1，0，1)。

命题 5.6。 A (δ,ν)-树 T 完全由其列向量确定。此外，$(c_0, \ldots, c_m)$是某个 (δ,ν)-树的列向量，当且仅当

(1) $c_i \geq 0$ 对所有 i成立，(2) $\sum_{i=0}^{j} c_i \leq \sum_{i=0}^{j} \overleftarrow{\nu}_i$ 对所有 j成立，并且 (3) $\sum_{i=0}^{m} c_i = \sum_{i=0}^{m} \overleftarrow{\nu}_i$。

我们分几个步骤证明这个命题。

引理 5.7。 一个(δ,ν)-树 T 可以从其列向量重构。

证明。设 T是一个（δ， ν）-树。按照图 p_0， p_1..... p_r 所示，从右到左、从下到上为树的元素编号13。

我们通过递归方式重构 T，依次一次添加一个元素 p_0， p_1， ..... p_r。注意，如果 p_i 不是其列中最顶端的元素，那么在接下来的步骤中， p_i 左侧的所有格点都将被禁用，因为它们与同一列中位于 p_i 上方的元素 $p_j \in T$ 不兼容。

现在，当我们在重构 T 的过程中加入元素 p_j 时， p_j 必定位于其所在列中最靠下、且未被此前任何元素禁用的位置。否则，设 $p_j \in T$ 为不满足该性质且标签最小的节点，并设 q 为同一列中最靠下、且未被任何满足 $i < j$ 的元素 p_i 禁用的格点。特别地， q 是

根据假设，p_j 位于 q 下方，而 q 与每个满足 $i<j$ 的 p_i 都相容。此外，q 也与满足 $k>j$ 的 $p_k \in T$ 相容，否则 p_k，p_j 就会不相容。因此，我们可以将元素 q 加入 T，从而构造出一个新的相容集，这与 T 的极大性矛盾。

因此，可以通过从右到左、从下到上添加节点来构造树 T，同时避开禁置位置。禁置位置是指位于某列中非最顶端节点左侧的位置。每列中的点数由列向量决定。□

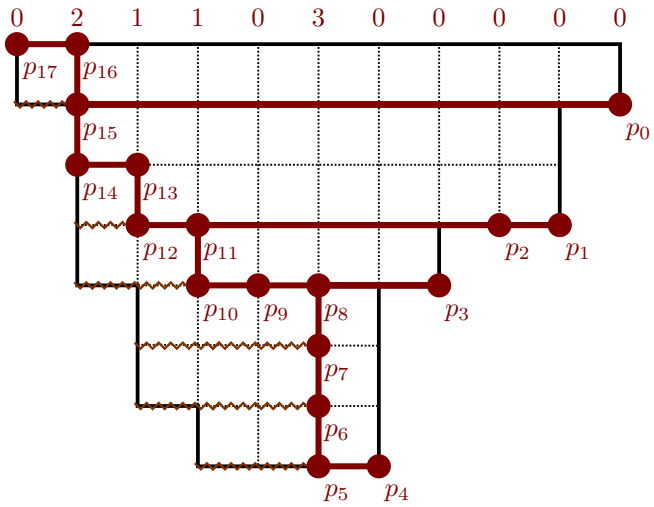

FIGURE 13. 向下冲洗算法。

我们将前一个证明中描述的算法称为向下冲洗算法。其输入是一个有效的列向量 $(c_0,\dots,c_m)$（或每列的节点数），输出则是唯一的 (δ,ν) 树，使得 $c_\delta(T)=(c_0,\dots,c_m)$。图 13 展示了一个例子，其中顶部的标签表示每列的节点数减 1，而禁置位置是那些位于波浪线上的位置。

引理 5.8。设 δ,δ' 是相对于 ν 的两个增量向量，并且 δ' 是通过将 δ 的一个条目加 *1* 或减 *1* 得到的。对于每棵 (δ,ν)-树 T，存在唯一一棵 (δ',ν)-树 T'，使得

$$c_\delta(T)=c_{\delta'}(T').$$

证明。由引理 5.7可知唯一性成立，因此我们只需证明存在性。

设 T是一个 (δ,ν)-树，其列向量为 $c_\delta(T)=(c_0,\dots,c_m)$，并假设 δ' 是通过从非零项 δ_a 中减去 1 得到的 δ。此操作会对 $L_{\delta\text{的列}\nu}$进行一次小变换。所有长度大于 $n-a$ 的列都向右移动一步，而其后的一列（长度为 $n-a$）则向左移动一步。其他列保持不变。由此得到新的集合 $L_{\delta',\ \nu}$。示例见图 15。

按照之前的方法，从右向左、由最短到最长读取列，对 $L_{\delta,\nu}$（以及 $L_{\delta',\nu}$ 的列）进行标记，得到 $j_0,\dots,j_m$。假设 j_{i_1} 是小变换中向左移动的列的标签，该小变换将 δ变为 δ'。我们还考虑列 $j_{i_2},\dots,j_{i_k}$：这些列是从右向左排列的 $L_{\delta,\nu}$ 的列，长度大于 $n-a$，且包含至少一个高度大于或等于 a 的 T 节点。树 T在高度大于或等于 a的节点上的限制，位于列 $j_{i_1},\dots,j_{i_k}$中，在图14和图15左侧标为粗体红色路径。它是树中从列 j_{i_1} 到树根的唯一路径的一个子路径。我们将描述对 T 进行的一次小变换，由此得到一个与 T具有相同列向量的 (δ',ν)-树 T'。变换结果见图14和图15右侧，并会影响树中红色标记节点。¯ ¯列中、介于 j_{i_k} 和 j_{i_1} 之间的棕色点也会连同其所在列一起向右移动一步。

注意，列 $j_{i_2},\dots,j_{i_k}$的 $L_{\delta',\nu}$位于列 $j_{i_2},\dots,j_{i_k}$的 $L_{\delta,\nu}$右侧一格，而列 j_1 则被移到了左侧的某个位置，见图 14 和 15。

令 A 为包含标记的粗红路径 T 中至少一个节点的行集合。我们对 T 应用以下变换。对于列 j_{i_b} 中的每个节点 T，若 $2\le b\le k$，且

属于 A，我们就在 T' 的第 j_{i_b} 列中绘制一个节点，但向下移 $c_{j_{i_1}}$ 个位置，位于 A内。$c_{j_{i_1}}+1$ 第 j_{i_1} 列中的节点会被移至 A的顶行。 T 中的其他所有节点仍留在各自的列中。图 14展示了这一变换的示意图，图 15给出了一个具体示例。

结果是一个（δ'，ν）-树 T'，其列向量与 T 相同： $c_\delta(T) = c_{\delta'}(T')$。该过程之所以有效，可由对向下冲洗算法的直接分析加以保证。此外，我们还可以通过反向的类似变换，从 T' 恢复 T。□

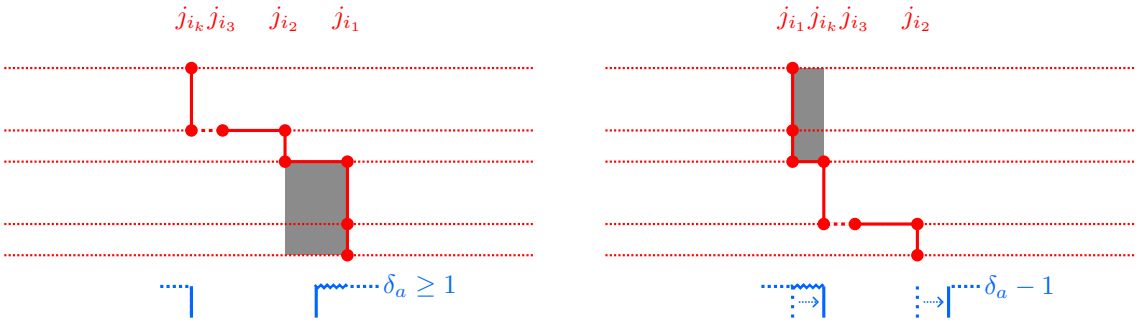

FIGURE 14. 引理 5.8证明中的变换示意图。

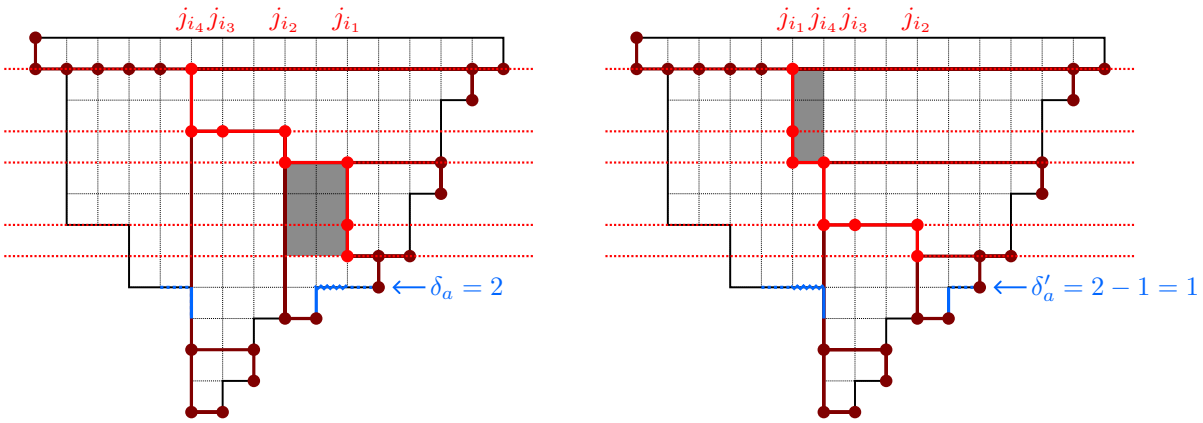

FIGURE 15. 引理 5.8证明中的变换示例。

引理 5.9。 设 δ, δ' 是相对于 ν 的两个增量向量。对于任意 (δ, ν)-树 T，存在唯一的 (δ', ν)-树 T'，使得

$$c_\delta(T) = c_{\delta'}(T').$$

证明。 相对于 ν 的任意两个增量向量，都可以通过一列增量向量相连，使得每个向量都由前一个向量的某个分量加 1 或减 1 得到。由引理5.8，结论随即成立。□

命题 *5.6* 的证明。 一个 (δ, ν)-树 T由引理 5.7可知，完全由其列向量确定。此外，根据引理 5.9，(δ, ν)-树的列向量的刻画与增量向量 δ的选择无关。因此，我们只需针对某个特定的 δ选择，证明命题的三个条件。我们选择极端情形 $\delta = \delta^{\max}$，其中 $\delta_i = \nu_{i_0}$。在这种情况下，(δ, ν)-树就是经典的 ν-树。

将 ν-树的列向量分类，与将 $\overleftarrow{\nu}$-树的行向量分类是相同的，因为反转路径会将列向量变为行向量，反之亦然。因此，该命题的三个条件等价于命题 5.3 (极大情形 δ）。□

5.3. **约化列向量**。 我们称格点$p \in L_{\delta,\,\nu}$ 为不相关，如果它是 $L_{\delta,\,\nu}$ 中某一行最左端的点。所有其他位于$L_{\delta,\,\nu}$ 中的点称为相关。图11 （右图）展示了一个例子，其中相关点以棕色填充，不相关点以绿色空心表示。

这些约化列是L_{δ}中的相关点的列$_{\nu}$。它们在图11 （右）中以黄色显示。图 $\nu = ENEEN$ 的三个示例以及 δ 的所有可能选择如图16所示。这里同样将约化列标为黄色，以便于观察。

为了定义一个（δ，ν）-树的约化列向量，方便起见，我们为$j_0 \prec_\delta \cdots \prec_\delta j_{m-1}$ 的约化列指定一个顺序$F_{\delta,\,\nu}$即按照从最短到最长、从右到左的顺序读取约化列，如图11 （右）所示。另请参见图16中的三个示例。

（δ，ν）-树的约化列向量 T 是向量

$$\bar{c}_\delta(T) = (\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_{m-1}),$$

其中，$\bar{c}_i + 1$ 是 T在约化列 j_i中的节点数。例如，图δ16中三个（ν，δ）-树（对应的三种选择）的约化列向量均为（0，1，0）。这意味着，在每种情况下，树在约化列中都有个节点，在约化列中有个节点，在约化列中有个节点。请注意，绿色节点是不相关的，不属于约化列，因此不计入其中。

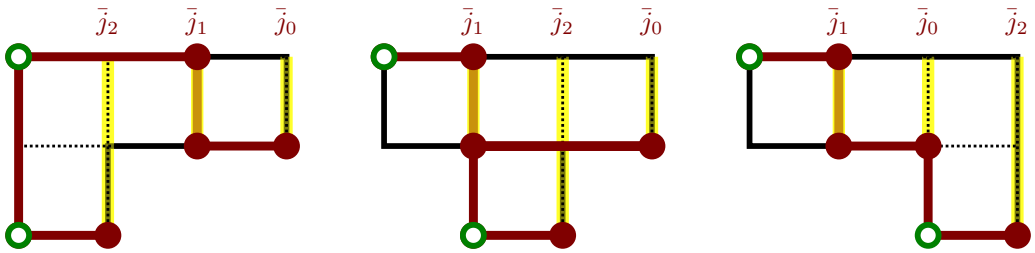

FIGURE 16. 约化列的排序 $\bar{j}_0 \prec_\delta \cdots \prec_\delta \bar{j}_2$ $L_{\delta,\,\nu}$对于$\nu = ENEEN$以及 δ =的三种可能选择（2，0）、（1，0）和（0，0）。约化列（以黄色标示）从最短到最长、从右到左读取。所示树的约化列向量在三种情况下均为c_δ（T） =（0，1，0）。

命题 5.10。 一个(δ, ν)-树 T 完全由其约化列向量刻画。此外，$(c_0, \ldots, c_{m-1})$ 是某个(δ, ν)-树的约化列向量，当且仅当

(1) $\bar{c}_i \geq 0$ 对所有 i，(2)

$\sum_{i=0}^{j} c_i \leq \sum_{i=0}^{j} \overleftarrow{\nu}_i$ 对所有 j。

这个命题的证明与命题 5.6 中列向量的证明步骤相同。为使论述完整，我们写出所有（略有重复的）细节。

引理 5.11。 一个(δ, ν)-树 T 可以从其约化列向量重构。

证明。 我们采用与引理 5.7的证明类似的方法，唯一需要注意的是如何处理非相关位置，因为约化列向量不会对这些位置进行计数。

令 $\bar{c}_\delta(T)$ =($\bar{c}_0$，……，$\bar{c}_{m-1}$) 为 T 的约化列向量。与之前类似，树 T 可以通过从右向左、从下向上添加节点来重建，同时避开那些位于所在列中非最顶端节点左侧的禁置位置。棘手的部分来了。当我们要在列 j_i 中添加节点时，有两种可能的情况：

(1) 如果列 $\bar{j}_i$ 中存在一些非相关位置，在此过程中此前添加的任何节点都没有将其禁用，那么这些非相关位置就自动与树 T 中的所有节点兼容（包括已添加的节点和之后将添加的节点）。因此，列 j_i 中所有未被此前添加的任何节点禁用的非相关节点，都应添加到 T。之后，我们按从下到上的顺序，将 $\bar{c}_i + 1$ 节点添加到列 j_i中未被禁用的位置。

（2）如果列 $\bar{j}_i$ 中的所有非相关位置都被禁用，那么我们只需在该列未被禁用的位置从下到上依次添加 $\bar{c}_i + 1$个节点。

此过程可重构树 T，且仅取决于约化列向量。

图 17展示了一个例子。注意，未填充的绿色点 p_{14} 与相关点无关；由于它未被任何先前添加的节点禁用，因此必须将其添加到 T 中p_1、……、p_{13}。在过程的这一步中，接下来将该列中的 1+1 相关点 p_{15}，p_{16} 依次添加，其数量等于约化列向量中对应项的值加一。□

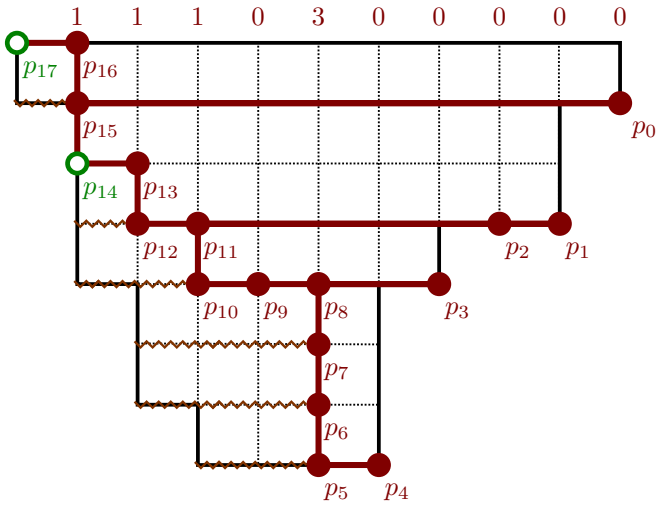

FIGURE 17. 约化向下冲洗算法。

我们将前一个证明中描述的算法称为约化向下冲洗算法。其输入是一个有效的约化列向量（c_0、……、c_{m-1}）（或每列中的相关节点数），输出则是唯一的（δ，ν）-树，使得 $c_\delta(T) = (c_0$、……、$c_{m-1})$。

引理 5.12。设 δ、δ' 是相对于 ν的两个增量向量，其中 δ' 由将 δ的某一项加 *1* 或减 *1* 得到。对于任意 (δ, ν)-树 T，存在唯一的 (δ', ν)-树 T'，使得

$$\bar{c}_\delta(T) = \bar{c}_{\delta'}(T').$$

此外，T 和 T' 的无关节点的高度相同。

证明。由引理 5.11可知唯一性成立，因此我们只需证明存在性。

设 T是一个（δ，ν）-树，其约化列向量为 $\bar{c}_\delta(T) = (\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_{m-1})$，并假设 δ'是通过将一个非零项减去 1 得到的 δ_a，该项属于 δ。这一操作会对 L_δ的约化列进行一个小变换ν（这与引理 5.8证明中的变换略有不同）。所有长度大于 $n-a$ 的约化列向右移动一步，而其后续的约化列（长度为 $n-a$）向左移动一步。其余各列保持不变。示例如图 19所示。这里我们选择了与图 15相同的例子，以突出它与引理 5.8证明中所述变换的区别。

考虑对 $L_{\delta,\nu}$ 的约化列（以及对 $L_{\delta',\nu}$ 的约化列）进行如下标记：按长度从短到长、从右向左读取约化列，并依次标为 $\bar{j}_0, \ldots, \bar{j}_{m-1}$，与之前一样。假设 j_{i_1} 是在将 δ 变换为 δ' 的小型变换中向左移动的约化列的标记。我们还考虑列 $j_{i_2}, \ldots, j_{i_k}$：它们由 $L_{\delta,\nu}$ 的约化列组成，按从右向左的顺序排列，长度大于 $n-a$，且至少包含一个高度大于或等于 a 的 T 节点。树 T 在约化列 $j_{i_1}, \ldots, j_{i_k}$ 中高度大于或等于 a 的节点上的限制，在图 18 和图 19 的左侧以一条粗红色路径标出。它是从列 j_{i_1} 到树根的唯一树路径的一个子路径。

请注意，图 j_{i_4}中的列长度大于 $n-a$ 15，现在是长度为 $n-a$的约化列。这就是为什么在图 j_{i_4} 的示例中没有19。

我们将描述一种小型变换，将 T变为一个具有相同约化列向量的 δ'，ν)-树 T'，其约化列向量与 T相同。结果如图 18 和 19右侧所示，并会影响树上的红色标记节点。列 j_{i_k} 和 j_{i_1} 之间的棕色和绿色点也会向右移动一步。

请注意，j_{i_2}、……、j_{i_k}的列 $L_{\delta',\nu}$位于列 j_{i_2}、……、j_{i_k}的右侧一步，$L_{\delta,\nu}$而列 j_1 被移到了左侧的某个位置，见图 18 和 19。

令 A 为包含标记的粗红路径中至少一个节点的行集合。我们对 T应用以下变换。对于约化列 j_{i_b}中的每个节点 T，对于属于 A的 $2 \le b \le k$，我们在约化列 j_{i_b} 中的 T' 处绘制一个节点，但在 A内向下移 $\bar{c}_{j_{i_1}}$ 个位置。约化列 j_{i_1} 中的 $\bar{c}_{j_{i_1}}+1$ 个节点被移至 A的顶行。T 中的所有其他相关节点均保留在其约化列中，无关节点则保留在其“未约化”列中。图18展示了这一变换的示意图，图19给出了一个具体示例。

结果是一个 (δ',ν)-树 T'，它与 T 具有相同的约化列向量：$\bar{c}_\delta(T)=\bar{c}_{\delta'}(T')$，并且无关节点的高度保持不变。该过程有效的原因由对约化向下冲洗算法的直接分析所保证。此外，我们也可以通过类似的逆向变换，从 T' 恢复 T。□

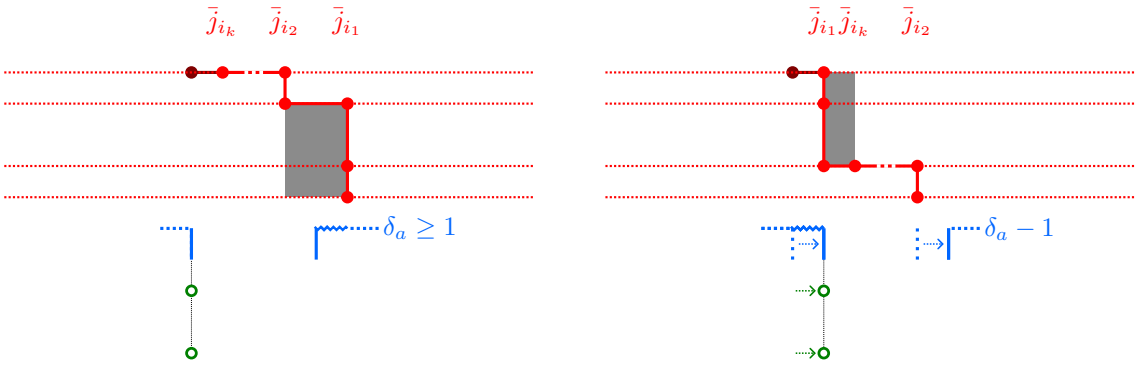

FIGURE 18. 引理 5.8证明中变换的示意图

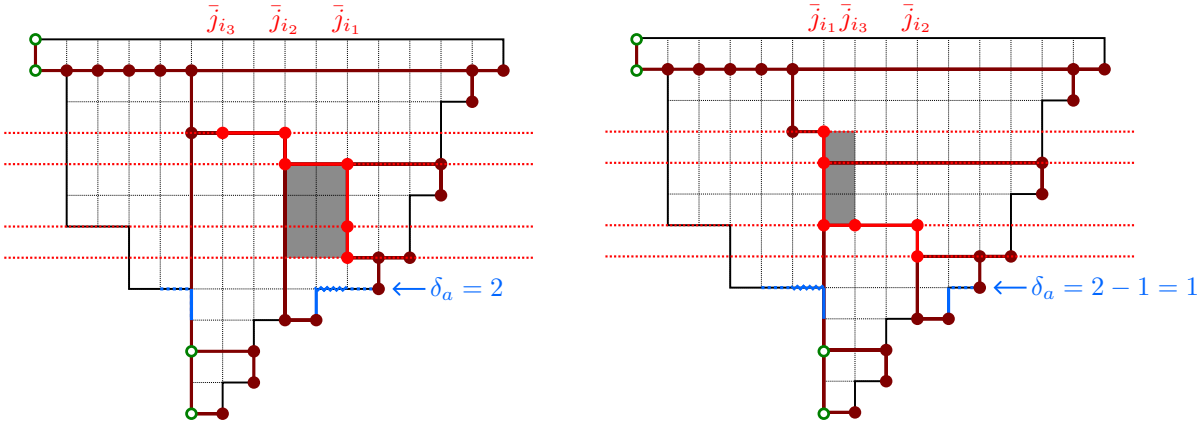

FIGURE 19. 引理 5.8证明中变换的示例。

引理 5.13。 设 δ、δ' 是关于 ν 的两个增量向量。对于每个 $(\delta$、$\nu)$-树 T，存在唯一的 $(\delta'$、$\nu)$-树 T'，使得

$$\bar{c}_\delta(T)=\bar{c}_{\delta'}(T').$$

此外，T 和 T' 的无关节点的高度相同。

证明。关于 ν 的任意两个增量向量，都可以通过一系列增量向量连接起来，使得每个向量都由前一个向量通过对其中一个条目加上或减去 1 得到。根据引理5.12，结论随即成立。□

命题的证明 *5.10*。 一个 (δ,ν)-树 T 由其约化列向量完全刻画，见引理 5.11。此外，(δ,ν)-树的约化列向量刻画不依赖于增量向量 δ的选择，见引理 5.13。因此，只需证明该命题的两个条件对某个特定的 δ 成立即可。我们选择极端情况 $\delta=\delta^{\max}$，其中 $\delta_i=\nu_i$。在这种情况下，(δ,ν)- 树就是经典的 ν-树。

约化列向量（$c_0,\ \dots,\ c_{m-1}$）由 $\overline{\nu}$-树 T的行向量（$r_0,\ \dots,\ r_m$）删去其最后一个条目 r_m得到。于是，该命题的两个条件等价于命题5.3 （极端最大情形 δ）的前两个条件。第三个条件涉及 $\overleftarrow{T}$顶行中的点数，这些点对应于 T中的不相关点。□

5.4. 约化列向量与右区间。我们终于可以用约化列向量来刻画 $\mathrm{Tam}^{tr}_{\nu}(\delta)$ 中的右区间。

给定一个（δ，ν）-树 T，我们称$L=\{p,q'_0,q'_1,\dots,q'_\ell\}\subseteq T$为 T的一个有序垂直 L，如果 L是 T 在网格的一个矩形$R\subseteq F_{\delta,\,\nu}$ 上的限制，其中 p 是 R的左上角，并且q'_0，q'_1，$\dots$，q'_ℓ在 R右侧从上到下依次出现，其中 q'_0是其右上角，q'_ℓ 是其右下角。注意，T 中没有其他元素属于 R。我们称 L 的长度等于 ℓ。记 $T-L$ 为从 T得到的（δ，ν）-树，具体做法是按此顺序将 T中的节点 q'_0，q'_1，$\dots$，$q'_{\ell-1}$向下旋转。

请注意，条件 $R\subseteq F_{\delta,\,\nu}$ 在此至关重要，它能确保应用这些旋转后得到的结果仍包含在费雷尔图 $F_{\delta,\,\nu}$中，否则 $T-L$ 就不会是一个（δ，ν）-树。特别地，若 $R\subseteq F_{\delta,\,\nu}$，则 q'_0，q'_1、……、q'_ℓ都是 T中的相关节点，并对约化列向量作出贡献。反过来，若 q'_ℓ 是相关节点，则根据约化向下冲洗算法，$p\llcorner q'_\ell\in F_{\delta,\,\nu}$，因此 $R\subseteq F_{\delta,\,\nu}$。

图 20展示了这些概念的一个示例。

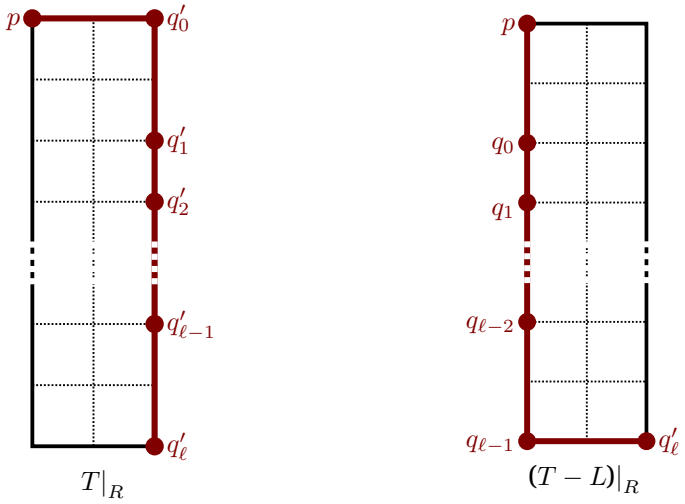

FIGURE 20. 垂直 L 及树 $T-L$的示意图。

引理 5.14。 设 L是一个（δ,ν）-树 T中长度为 ℓ的垂直 L。那么，$[T-L,T]$是 $\mathrm{Tam}^{tr}_{\nu}(\delta)$中长度为 ℓ 的右区间。此外，$\mathrm{Tam}^{tr}_{\nu}(\delta)$ 中每个顶元素为 T 的右区间都具有这种形式。

证明。 这由右区间的定义可知。 □

命题 5.15。 设 T 是一个 (δ,ν)-树，其约化列向量为 $c_\delta(T)=(c_0,\dots,c_{m-1})$。在 $\mathrm{Tam}^{tr}_{\nu}(\delta)$ 中，以 T 为顶元素且长度为 ℓ 的右区间数量等于

$$|\{0\le i\le m-1:\ \overline{c}_i\ge\ell\}|.$$

证明。 根据引理 5.14，长度为 ℓ且顶元素为 T的右区间具有如下形式：$[T-L,T]$其中 L是一个长度为 ℓ的垂直 L，它属于 T。每个 L对应一个这样的 $c_i\ge\ell$，满足 $0\le i\le m-1$，其中q'_0、……、q'_ℓ是 $\ell+1$在列 T处最靠上的节点，j_i且 p是 q_0在 T中的父节点。□

6. Bijections between linear intervals

利用上一节中开发的工具，我们现在可以证明一个主要结果了。

定理 6.1. 对于固定路径 ν，所有 *alt* ν-*Tamari* 格 $\mathrm{Tam}_\nu(\delta)$ 中长度为 ℓ 的线性区间数量都相同。

这是命题 5.2 以及推论 6.5 和 6.7的直接推论；这些结果表明，对于任意 ℓ，长度为 δ的左区间数量和右区间数量均保持不变。事实上，我们在命题 6.4 和 6.6中证明了这些结果的更精细版本。

注 6.2. 如果我们选择任意其他弱于ν 的路径 $\check{}\,\nu$，且该路径不满足 $\check{}\,\nu_i \le \nu_i$，那么对于所有 i >0，$\mathrm{Tam}_{\check{\nu}}$ 在 ν-路径子集上的限制不满足定理 6.1的计数结论。

更准确地说，这个偏序集的左区间数量仍与所有 alt ν-Tamari 格相同（后文给出的左冲刷论证仍然适用）。但根据计算实验，它的右区间似乎较少。例如，对于 ν = (1，2，0) 和 $\check{}\,\nu$ = (1，2，0)，所得偏序集中的线性区间分布为 (5，5，1)，而 Tam_ν 中的线性区间分布为 (5，5，2)。

注 6.3。 定理 6.1 推广了 [Che22] 针对阶梯形 $\nu = (NE)^n$所得的结果。然而，在这个更一般的情形下，我们通常没有闭式公式来计算长度为 ℓ 的线性区间数，类似于 [Che22]中给出的公式。

在 m-Tamari 格中，其中 $\nu = (NE^m)^n$，可以调整 [Che22] 中给出的分解，从而求出长度为 ℓ 的右区间数量的闭式公式：

$$m\binom{mn+n-\ell}{n-\ell-1}.$$

在这种情况下，我们无法找到左区间数量的简洁公式。对于 $n = 5$ and$m = 2$，这个格中的左区间分布为 (728，442，222，112，47，18，5，1)。由于 47 是质数，似乎不存在这样的简洁乘积公式。

6.1. **水平冲洗与左区间**。我们将 水平冲洗$f^h_{\delta,\,\delta'}$ 定义为从 (δ，ν)-树集合到 (δ'，ν)-树集合的映射，其特征性质为

$$f^h_{\delta,\delta'}(T) = T' \quad \longleftrightarrow \quad r(T) = r(T').$$

也就是说，这个映射保持树的行向量。该映射由这一性质唯一确定，并且可以通过复合计算得到。

$$f^h_{\delta,\delta'}(T) = \mathrm{flush}_{\delta',\nu} \circ \mathrm{flush}^{-1}_{\delta,\nu},$$

它将一个 (δ，ν)-树映射为具有相同行向量的唯一 ν-路径，然后再映射为一个对应的 (δ'，ν)-树。特别地，$f^h_{\delta,\,\delta'}$是一个双射，并且可以通过水平冲洗算法来描述：

若 $r(T)$ =(r_0，.....，r_n)，则 T'可以通过添加 $r_i + 1$ 个节点来重构，添加顺序为自下而上、从右向左，同时避开那些位于所在行中非最左节点上方的禁置位置。

这在 T 和 T'的水平 L 之间建立了自然对应关系： T 第 i[1] 行中长度为 ℓ 的水平 L，对应于 T' 第 i 行中唯一一个长度相同的水平 L。为方便起见，我们用 $f^h_{\delta,\,\delta'}(L) = L'$表示与 L相关联的 T'的水平 L，其中 L是 T的一个水平 L。

命题 6.4。 设 T是一个(δ,ν)-树，$T' = f^h_{\delta,\,\delta'}(T)$ 是与之对应的(δ',ν)-树。我们也用 $L' = f^h_{\delta,\,\delta'}(L)$ 表示与 L相关联的 T'的水平 L，其中 L是 T的一个水平 L。

(1) 在底部元素为 T 的 $\mathrm{Tam}^{tr}_\nu(\delta)$ 中，长度为 ℓ 的左区间数量，等于在底部元素为 T' 的 $\mathrm{Tam}^{tr}_\nu(\delta')$ 中，长度为 ℓ 的左区间数量。(2) 映射

$$[T, T+L] \to [T', T'+L']$$

是 $\mathrm{Tam}^{tr}_\nu(\delta)$ 的左区间与 $\mathrm{Tam}^{tr}_\nu(\delta')$的左区间之间的一个双射。

[1]这里指 L 的底部位于第 i 行

证明。 根据命题 5.5，底元素为 T 的左区间数量仅取决于行向量 $r(T)$。由于 $r(T) = r(T')$，因此结论（1）成立。根据引理 5.4中对左区间的刻画，结论（2）显而易见。 □

<escape>左区间之间的双射示例如图 21 所示。为便于观察，最大的水平 L 形标记为红色。</escape>

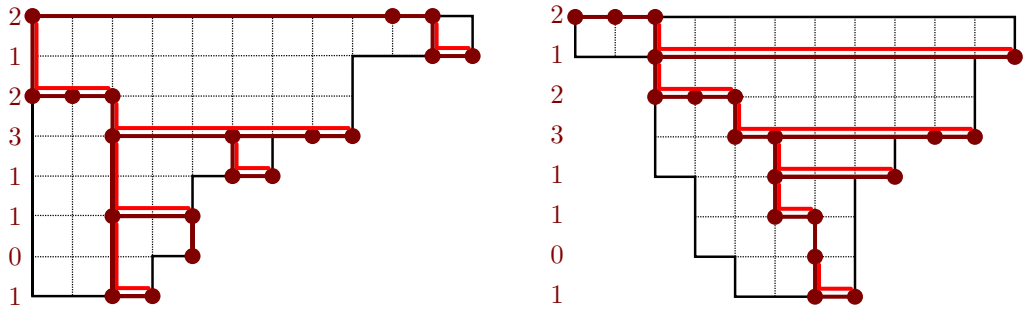

FIGURE 21. 对于 δ^{max} =(1，0，2，2，0，3，0) 和 δ =(0，0，1，2，0，1，0) 的左区间之间的双射。这两棵树具有相同的行向量 (1，0，1，1，3，2，1，2)，其各项加一后，分别表示每一行中的节点数。

推论 **6.5. 6.5.** 长度为 ℓ 的左区间在 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 和 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta')$ 中的数量相同 .

证明。这是命题6.4的直接推论。 □

6.2. **约化垂直填充与右区间**。 我们将垂直填充 $f^v_{\delta,\delta'}$ 定义为从 (δ,ν)-树集到 (δ',ν)-树集的映射，其特征是满足以下性质

$$f^v_{\delta,\delta'}(T) = T' \quad \longleftrightarrow \quad \bar{c}_\delta(T) = \bar{c}_{\delta'}(T').$$

也就是说，该映射保持树的约化列向量不变。

根据引理5.13，这一性质唯一确定了该映射。特别地，$f^v_{\delta,\delta'}$ 是一个双射，并且可以用垂直填充算法描述:

如果 $\bar{c}_\delta(T) = (\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{m-1})$，那么可以从右向左、从下向上添加节点来重构 T'，同时避开位于那些所在列中不是最顶端节点的节点左侧的禁置位置。这里的区别在于，我们添加到一列中的节点数，（其约化列标记为 j_i），不一定等于 $\bar{c}_{j_i}+1$: 我们先添加所有未被先前添加的任何节点禁用的无关节点；然后继续从下向上，在可用且未被禁用的位置添加 $\bar{c}_{j_i}+1$相关节点。

这也给出了 T 的垂直 L 之间的一种自然对应关系： T 的约化列 $\bar{j}_i$[2] 中长度为 ℓ 的一个 L，对应于 T' 的约化列 $\bar{j}_i$ 中唯一一个长度相同的垂直 L。略去符号上的区别，我们将 T 中与 L（一个垂直 L）对应的 T' 的垂直 L 记作 $f^v_{\delta,\delta'}(L) = L'$。

命题6.6。 设 T 是一棵 (δ,ν)-树，且 $T' = f^v_{\delta,\delta'}(T)$ 是与之对应的 (δ',ν)-树。我们也将 T 中与 L（一个垂直 L）对应的 T' 的垂直 L 记作 $L' = f^v_{\delta,\delta'}(L)$。

(1) $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 中顶元素为 T、长度为 ℓ 的右区间数量，等于 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta')$ 中顶元素为 T'、长度为 ℓ 的右区间数量。(2) 该映射是 $\mathrm{Tam}_\nu^{r}(\delta)$ 的右区间与 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta')$ 的右区间之间的一个双射。

$$[T, T-L] \underset{t}{\to} [T', T'-L']$$

证明。 由命题 5.15，顶元素为 T 的右区间数量仅取决于约化列向量 $\bar{c}_\delta(T)$。由于 $\bar{c}_\delta(T) = \bar{c}_{\delta'}(T')$，因此结论 (1) 得证。根据引理 5.14中对右区间的刻画，可直接得到结论 (2)。 □

图 22 和 23 展示了右区间之间双射的示例。为便于观察，最大的垂直 L 标为红色。绿色节点为无关节点。

[2]这里的意思是，L 的右部分属于约化列 $\bar{j}_i$

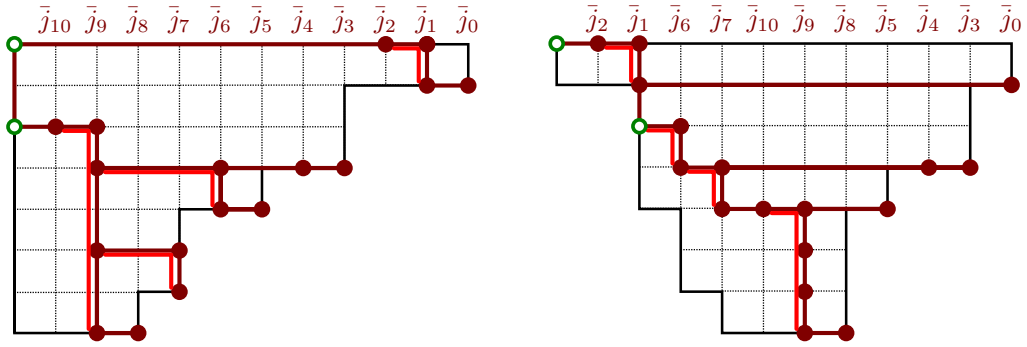

FIGURE 22. δ^{max} 与 $\delta =$ 的右区间双射(0，0，1，2，0，1，0)。两棵树的约化列向量为(0，1，0，0，0，0，1，1，0，3，0)，其各项加一后即为约化列中相关节点的数量。绿色的无关节点不计入其中。

推论6.7。 $\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta)$ 和$\mathrm{Tam}_\nu^{tr}(\delta')$ 中长度为 ℓ 的右区间数量相同。

证明。 这是命题6.6的直接推论。 □

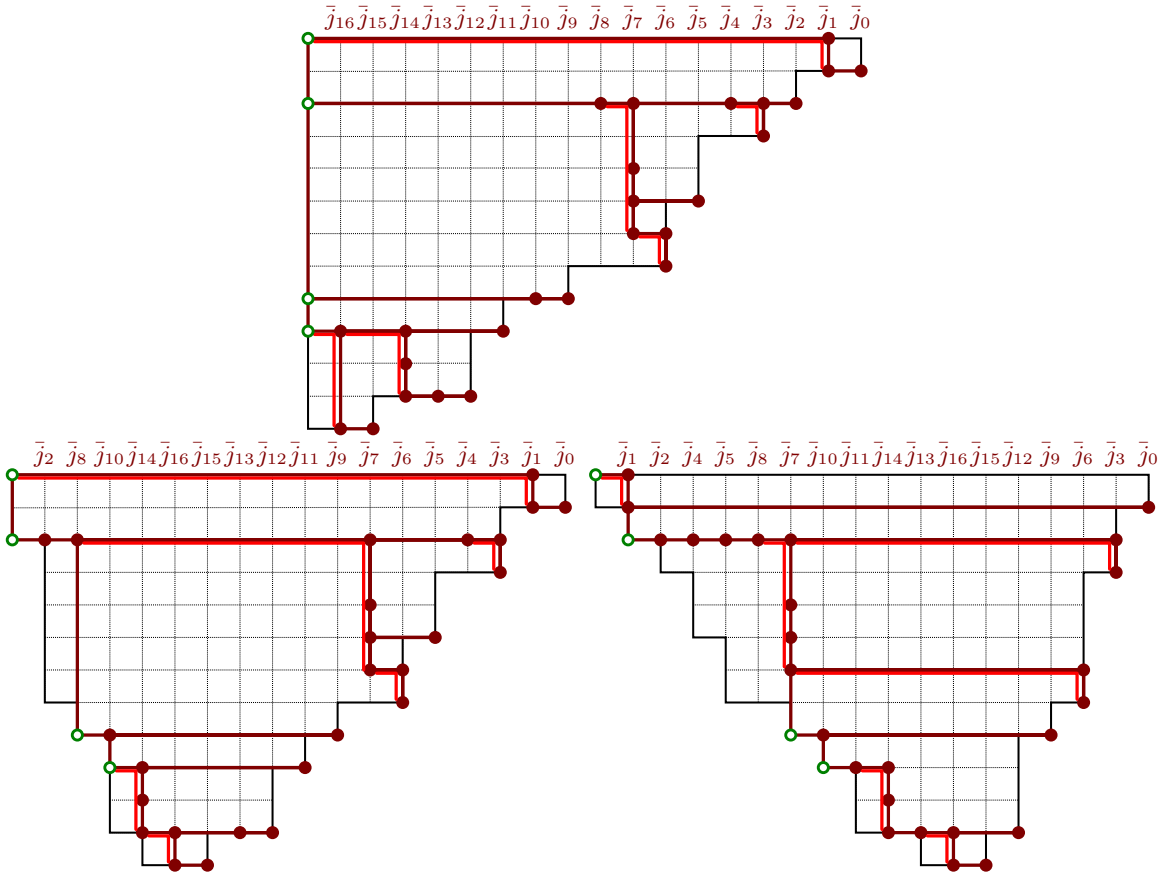

FIGURE 23. $\nu =$、δ^{max}、 $\delta' =$的右区间双射，分别对应(2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 0, 2, 1, 2, 0)、(2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 0)和(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0)。这三棵树的约化列向量为(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1)。

Acknowledgement

本项目始于2022年在 Strobl 举行的 SLC 88 会议期间的讨论，我们感谢会议期间愉快且鼓舞人心的氛围。我们也感谢 Wenjie Fang、Matias von Bell，尤其是 Fr´ed´eric Chapoton，感谢他们提供了有益且富有启发性的讨论。

References

[BMCPR13] Mireille Bousquet-M´elou、Guillaume Chapuy 和 Louis-Fran¸cois Pr´eville-Ratelle。对称群在 m-Tamari 区间上的表示。 *Adv. Math.*，247:309–342，2013。[BMFPR11] Mireille Bousquet-M´elou、 ´Eric Fusy 和 Louis-Fran¸cois Pr´eville-Ratelle。m-Tamari 格中的区间数量。 *Electron. J. Combin.*，18(2):论文 31，26，2011。[BPR12] Fran¸cois Bergeron 和 Louis-Fran¸cois Pr´eville-Ratelle。通过广义 Tamari 偏序集研究更高阶的三元对角调和多项式。 *J. Comb.*，3(3):317–341，2012。[Ceb] Cesar Ceballos。Alt ν-结合多面体。编写中。[Cha07] F. Chapoton。关于 Tamari 格中的区间数量。 *Sém. Lothar. Combin.*，55:文章 B55f，18，2005/07。[Che22] Cl´ement Chenevi`ere。Tamari 格、Dyck 格及 alt-Tamari 偏序集中的线性区间。预印本见 arXiv:2209.00418，2022年9月。[CPS19] Cesar Ceballos、Arnau Padrol 和 Camilo Sarmiento。类型 A 和 B 中 ν-Tamari 格的几何。*Trans. Amer. Math. Soc.*，371(4):2575–2622，2019。[CPS 20] Cesar Ceballos、Arnau Padrol 和 Camilo Sarmiento。通过 ν-树、 ν-括号向量和子词复形构造 ν-Tamari 格。 *Electron. J. Combin.*，27(1):第 1.14 号论文，31，2020。[FPR17] Wenjie Fang 和 Louis-Fran

´ *Euro-* cois

pean J. Combin. 61 69 84, 2017

Preville-Ratelle。广义 Tamari 区间的计数。 ，： –。[Hai94] Mark D. Haiman。关于对角不变量商环的猜想。 *J. Algebraic Combin.*，3 76，1994 1 17( ): – 。[MHPS12] Folkert M

¨ *Associahedra Tamari lattices and*

related structures 299 ¨ 2012

uller-Hoissen、Jean Marcel Pallo 和 Jim Stasheff，编者。 ， ，第 *Progress in Mathematics* 卷。Birkhauser/Springer，巴塞尔， 。Tamari 纪念文集。[PRV17] Louis-Fran¸cois Pr´eville-Ratelle 和 Xavier Viennot。广义 Tamari 区间的计数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，369(7):5219–5239，2017。

（C. Ceballos） Institute of Geometry, TU Graz, Graz, Austria

Email address: cesar.ceballos@tugraz.at*URL*: http://www.geometrie.tugraz.at/ceballos/

（C. Chenevi`） Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg, Strasbourg, France, and Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Germany*Email address*: ccheneviere@unistra.fr*URL*: https://irma.math.unistra.fr/~cheneviere/