arXiv:2305.02258v1 [math.DG] 3 May 2023

Calabi-Yau 度量的中间复结构极限

杨·李

2023年5月4日

摘要

我们研究 n 维 Calabi-Yau 超曲面 $\{F_0F_1\dots F_m+tF=0\}$ 的极化退化，其中本质骨架的维数为$1\le m\le n-1$。我们将从最优传输问题和非阿基米德势理论的角度，描述 Calabi-Yau 势函数在 C^0 层级上的极限行为。

1 引言

Calabi-Yau (CY) 流形的极化退化是指由一族 n 维射影 CY 流形 $X\to\mathbb{D}_t^*$ 构成的单参数族，定义在一个小复圆盘上，并配备一个丰线丛 $L\to X$。随后可以考虑类 $c_1(L)$ 中的 Calabi–Yau 度量 $(X_t,\omega_{CY,t},\Omega_t)$，并探究当 $t\to 0$ 时的极限行为。

这个问题关键取决于一个整数不变量 $0\le m\le n$，其定义为本质骨架 $Sk(X)$ 的维数，它控制着体积积分 $\int_{X_t}\Omega_t\wedge\bar{\Omega}_t\sim O(|\log|t||^m)$ 的增长率（见截面 2.3）。近期有些情形受到了特别关注：

- 在 $m=0$ 情形下，Calabi–Yau 度量 (X_t,ω_t) 的体积一致非塌缩，并且在 Gromov–Hausdorff 意义下收敛到具有 klt 奇点的 Calabi–Yau 簇上的奇异 Calabi–Yau 度量 [12][14][34]。
- 与之相反的极端情形 $m=n$ 称为大复结构极限，这是 SYZ 猜想 [36]所处的背景。近期进展 [25] 表明，它与非阿基米德几何有着密切联系。
- 这一情形 $m=1$ （称为“小复结构极限”）由 Sun-Zhang [37], 研究，其粘合构造涵盖了 Fano 流形中许多退化为两个横截光滑除子之并的 Calabi–Yau 超曲面族。K3 曲面的特殊情形此前已在 [19]中得到。

我们重点考察情形 $1\le m\le n-1$，并将其称为“中间复结构极限”。设 M 是一个 $(n+1)$ 维光滑 Fano 流形，并且我们

将其反典范丛写作 $-K_M = (\sum_0^m d_i)L$，其中$L \to M$是某个丰线丛，$d_i > 0$为自然数。设 F_0、F_1、……、F_m（分别为 F）是 $H^0(M, L^{\otimes d_i})$（分别为 $H^0(M, -K_M)$）的一般截面，且充分一般，从而所有除子$E_i = (F_i = 0)$和$(F = 0)$均为光滑的，且所有交叉均为横截的。我们考虑 Calabi–Yau 超曲面族 $X \to \mathbb{D}_t^*$:

$$X_t = \{F_0 F_1 \dots F_m + tF = 0\} \subset M. \tag{1}$$

在假设 $1 \le m \le n-1$ 下，利用 Lefschetz 超平面定理可知交集 $\cap_0^m E_i$ 连通，因此本质骨架 $Sk(X)$ 仅由一个维数为 m 的单形构成。

我们的目标是为厄米度量 $(L, h_{CY,\, t})$ 给出两种 C^0 多重势论极限描述；这些度量的 Chern 曲率诱导出类 $c_1(L)$ 中的 Calabi–Yau 度量 $(X_t, \omega_{CY,\, t})$。

- 该极限可由一个具有 m 个自变量的实 Monge-Amp`ère 型方程的解来编码，而该解源自一个最优传输问题的唯一解。这一观点更具 PDE 理论色彩；在 $m = 1$ 特殊情形下，它归结为 Sun-Zhang [37] 找到的极限势函数。

- 该极限可用与退化族相关的 Berkovich 空间 X_K^{an} 上的非阿基米德（NA）几何来解释。NA 多重势理论 [4] 给出线丛 $L \to X_K^{an}$ 上一个除尺度因子外唯一的半正度量$\|\cdot\|_{CY,\, 0}$，其 NA Monge-Amp`ère 测度等于支撑在本质骨架 $Sk(X)$ 上、总积分为 (L^n) 的勒贝格测度。在 $X_K^{an} \cup \bigcup_{t \neq 0} X_t$ 上存在一种混合拓扑，将 Berkovich 空间与 Calabi–Yau 流形统一起来。我们的主定理是关于混合拓扑的一个连续性原理:

  定理 1.1. 设 $1 \le m \le n-1$。经过适当的归一化后，范数$|\cdot|^{\frac{1}{-\log|t|}h_{CY\, t}}$，在 $L \to X_t$ 上关于 C^0-混合拓扑收敛到$\|\cdot\|_{CY,\, 0}$，当 $t \to 0$时。

  这一思路源自大复结构情形 $m = n$，该情形与 SYZ 猜想 [25][32][20][28][1] 相关。我们的情形 $1 \le m \le n-1$ 具有一些值得注意的新特点，归根结底，这是因为非 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 模型并未指定 Berkovich 空间的自然收缩映射。

文章结构如下。第 2 节回顾非阿基米德多重势理论中的一些基本概念，尤其介绍如何通过混合拓扑将 Berkovich 空间与复流形统一起来。第 3 节通过非阿基米德版本的 Bergman 核估计以及一些代数几何输入，推导出关于 $L \to X_K^{an}$ 上非阿基米德 Calabi–Yau 度量类比物的先验结构结果。第 4 节以这一结构结果为指导，提出一个最优传输问题；其唯一极小化子给出一个满足实 Monge–Ampère 型方程的凸函数，并呈现出奇特的墙室结构，该结构对应于梯度像的一个单纯形分解。第 5 节利用这一最优传输解，在阿基米德和非阿基米德

情形下构造正的试探度量。事实证明，非阿基米德试探度量等于非阿基米德 Calabi–Yau 度量，而阿基米德试探度量将在相当弱的意义下近似为 Calabi–Yau 度量，并且这两种试探度量的构造在混合拓扑下连续衔接。借助来自复多重势理论的更多输入，第 6 节证明，在除以因子 $|\frac{1}{\log|t||}$ 进行归一化后，阿基米德试探度量与 CY 势之间的差在 C^0-范数下收敛于零，进而推出主定理。第 7 节汇总了一些进一步讨论，特别是与 Sun-Zhang 的工作 [37], 的关系以及一些开放问题。

记号。我们采用约定 $d = \partial + \bar{\partial}, d^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(-\partial + \bar{\partial})$，因此 $dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}$。K¨ ahler 势函数与 K¨ahler 度量之间的关系为 $\omega_\phi = \omega + dd^c\phi$。给定线丛 L上的厄米度量 h，其曲率形式为 $-dd^c \log h^{1/2}$，属于上同调类 $c_1(L)$。

致谢。作者目前是常驻 MIT 的 Clay 研究员。他感谢 S. Sun、R. Zhang、S. Boucksom、J. Hultgren 和 L. Pille-Schneider 过去与他的讨论。

2 非阿基米德几何的一些背景

2.1 模型与对偶复形

我们回顾非阿基米德几何中的一些基本概念 [3, 节 5]。记 $R = \mathbb{C}[[t]]$，且 $K = \mathbb{C}((t))$。设 X_K 是形式圆盘 Spec(K)上的一个光滑、连通、射影簇 X_K，其维数为 n。记 X_K^{an}为 Berkovich 空间。给定一个定义在 K上的仿射簇，Berkovich 空间是函数环上所有延拓 K上的标准离散赋值的半赋值所构成的空间；一般而言， X_K^{an}由仿射片粘合而成。半赋值 v 也可等价地看作乘法半范数 $|\cdot| = e^{-v}$，并满足超度量性质

$$|f + g| \le \max\{|f| + |g|\}, \quad |fg| = |f||g|.$$

X_K 的一个模型是一个正规分离概形 X，它在 Spec(R) 上平坦且为有限型，并附有一个同构，将态射 X →Spec(R) 的一般纤维与 X_K 识别起来。对于任意模型 X 及 X_0, 的每个不可约分支 E，我们将中心纤维记为 $X_0 = \sum b_i E_i$，且 $E_J = \cap_{i\in J} E_i$。若 X 正则且 X_0 具有 SNC 支撑，则称 X 为 SNC。一般而言，每个模型都包含一个最大的 SNC Zariski 开子集 $X_{SNC} \subset X$，并且根据 Hironaka 定理，我们总能对给定模型作解消，从而得到一个 SNC 模型。线丛 $L \to X_K$ 的一个模型是在 proper 模型 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-线丛 L，并附有一个同构 $L|_{X_K} = L$。

设 X 是一个模型，其对数典范除子 $K^{log}{}_{\mathcal{X}}$ 为 $\mathbb{Q}$-Cartier。若 (X, $X_{0,red}$) 是 dlt，则称模型 X 为除子对数终端（dlt）。这意味着 (X, $X_{0,red}$) 是对数典范对，且所有 lc 中心都包含在 SNC 位点 X_{SNC} 中。

注 2.1。引入 dlt 模型的动机，一部分源于极小模型纲领 [30][31], ，另一部分则是因为 SNC 模型通常涉及大量

除子，从而使组合学变得复杂。关于 dlt 模型的微分几何直觉是：它们的行为类似 SNC 模型，只是相差一个 Zariski 闭子集，而该子集对体积积分的贡献可以忽略不计。

SNC 模型 X 的对偶复形 $\Delta_{\mathcal{X}}$ 是一个单纯复形，其顶点对应于中心纤维的不可约分支 E_i ，其面对应于非空交叠分层 E_J 的连通分支，并被识别为单形 $\Delta_J \simeq \{x \in \mathbb{R}^{|J|}_{\geq 0} | \sum_{i\in J} b_i x_i = 1\}$。dlt 模型的对偶复形定义为 X_{SNC} 的对偶复形。

给定一个 dlt 模型，对偶复形存在一个自然嵌入映射，将其嵌入 X_K^{an}，且该映射是到其像上的同胚。给定 $x \in \Delta_J$，我们需要关联一个拟单项式赋值 v_x，并将其视为 X_K^{an} 中的一个点。对于任意局部函数 $f \in \mathrm{O}\mathcal{X},\ \eta$，其中 η 是 E_J 的泛点，我们可以作泰勒展开

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{|J|}} f_\alpha z_1^{\alpha_0} \dots z_{|J|}^{\alpha_{|J|}},$$

其中 z_i 是除子 E_i 的局部方程，而 f_α 或者是单位，或者为零。然后 v_x 定义为最小加权消失阶：

$$v_x(f) = \min\{\langle x, \alpha\rangle | f_\alpha \neq 0\}.$$

特别是， Δ_J 顶点映到除子赋值。该要求 $\sum b_i x_i = 1$ 来自 $v(t) = 1$，其中 $t \in R$ 是一致化元。下文中，我们将对偶复形与其在 X_K^{an}中的像等同起来。

注 2.2. 任何 SNC 模型都会诱导一个收缩映射 $r_{\mathcal{X}} : X_K^{an} \to \Delta_{\mathcal{X}}$，其定义方式是计算 E_i 的局部定义函数上的赋值。对于 $\mathbb{Q}$- 阶乘 dlt 模型 X，这个收缩映射是有定义的；但对于一般的 dlt 模型，其存在性并不明确，因为 E_i 可能不是 Cartier 除子，因此未必有局部方程。我们提醒读者，必须格外谨慎地处理收缩映射；除此之外，dlt 模型的处理方式几乎与 SNC 模型相同。本文不会使用收缩映射。

例 2.3。在例 (1) 中，Spec(R) 上的优选模型

$$\mathcal{X} = \{F_0 F_1 \dots F_d + tF = 0\} \subset M_R$$

是 dlt 的，但不是 $\mathbb{Q}$-factorial。这是因为在我们的设定中，X 的局部奇点横向地模仿 $z_1 \dots z_k = ty$，其中 z_i 是环面边界各分支的局部定义方程，而 y 是 F 的局部坐标（参见 [32, 命题 4.1]）。特别地，在此例中重数为 $b_i = 1$ 。

2.2 混合拓扑

给定某个穿孔黎曼曲面上的光滑射影流形 $X \to \mathbb{D}^*$ 的退化族 X_t ，我们可以将 Berkovich 空间 X_K^{an} 与该族 X_K 在形式圆盘上的基变换联系起来。这里存在一种称为混合拓扑的自然拓扑，它将 X_K^{an}描述为复流形 [4, 的极限对象（附录] [32,第 1 节2]）。

抽象地说，对于任意有限型 X 的概形 A （不一定是非阿基米德的！）上的巴拿赫环 X^{An}，Berkovich 赋予其一个解析化X =。当BSpec(B)为仿射概形，且 A是一个有限生成的 X^{An} -代数时， $\|\cdot\|_x$ 被定义为 B 上的乘法半范数 A 的集合，这些半范数在 A上的限制受给定范数的有界性约束；而 X^{An} 上的拓扑则是弱拓扑。一般情形通过粘合仿射片得到。该解析化X^{An} 自然映射到 A的Berkovich谱，即 A上有界乘法半范数的集合。

复数域上的混合范数 $\mathbb{C}$ 定义为

$$\|\cdot\|_{hyb} = \max\{|\cdot|_0, |\cdot|_\infty\},$$

其中， $|\cdot|_0$ 是平凡绝对值， $|\cdot|_\infty$ 是通常绝对值。

令 $A_{e^{-1}}$ 为巴拿赫环 [1]

$$A_{e^{-1}} = \{f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} c_\alpha t^\alpha \in \mathbb{C}((t)) | \, \|f\|_{hyb} := \sum \|c_\alpha\|_{hyb} \, e^{-\alpha}\}.$$

在 $A_{e^{-1}}$ 上的 Berkovich 谱称为混合圆，它与闭圆盘 $\bar{\mathbb{D}}_{e^{-1}} = \{t \in \mathbb{C} : |t| \le e^{-1}\}$ 同胚，具体对应如下：¯给定 $z \in \mathbb{D}_{e^{-1}}$，我们将 $A_{e^{-1}}$ 上的半范数定义为

$$|f| = \begin{cases} e^{-ord_0(f)}, & z = 0, \\ e^{-\log|f(z)|_\infty / \log|z|_\infty}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在令 X 为一个有限型 $A_{e^{-1}}$概形；其具体来源是穿孔圆盘上的一族光滑射影流形。混合解析化 X^{hyb} 是混合环 $A_{e^{-1}}$上的 Berkovich 解析化，¯具有一个自然映射 π 到 Berkovich 谱 $\mathbb{D}_{e^{-1}}$。根据 [4, 引理 A.6]，（其证明用到了 Gelfand-Mazur 定理），我们有典范同一识别$\pi^{-1}(0) = X_K^{an}$，以及 $\pi^{-1}(\mathbb{D}^*_{e^{-1}}) = X^{hol}$，也就是说，中心纤维对应于非阿基米德Berkovich空间，而其他纤维则还原为复流形纤维。给定 X_t上的一族连续函数 f_t ，以及 X_K^{an}上的一个连续函数 f_0，如果当 $t \to 0$时，只要点 $z_t \in X_t$ 收敛到 $z_0 \in X_K^{an}$，就有 $f_t(z_t) \to f_0(z_0)$，那么我们称 f_t 在 C^0混合拓扑下收敛到 f_0 。

2.3 本质骨架与体积形式渐近行为

假设 X 是穿孔圆盘上光滑射影 CY流形 X_t 的一个退化族，并且 X 配备了全纯体积形式 Ω，它通过 $\Omega = \Omega_t \wedge dt$ 在 X_t 上诱导出全纯体积形式 Ω_t 。本质骨架是 X_K^{an} 的子集，其中对数不一致函数取最小值；通过将 Ω 乘以 t的适当次幂，我们不妨假设该最小值为零。

我们沿用 [4] 来概述 CY 体积形式渐近式的计算。设 X 是退化族的一个 dlt 模型，其对偶复形为 $\Delta_{\mathcal{X}}$。我们在 SNC 位点上工作，并将中心纤维写作 X $_0 = \sum b_i E_i$，将相对对数典范除子写作 $\sum a_i E_i$ （因此，对数不一致函数

[1]可以通过对基底的 t 变量进行某种缩放，将 e^{-1} 替换为 $0 < r < 1$ 。

在对应于 E_i的除子点处取值为 $\frac{a_i}{b_i}$）。取一个闭点 $\xi \in X_0$, ，并设 E_i 为经过 ξ的 X 的除子分支，其中$i \in J = \{0, 1, \dots k\}$。我们可以在$\xi \in X$ 周围选取一个局部坐标系 z_0、 $\dots z_n$，使得 z_0、 $\dots z_k$ 分别是 E_0、 $\dots E_k$的局部定义方程。局部地

$$\Omega = f_1 z_0^{a_0+b_0-1} \dots z_k^{a_k+b_k-1} dz_0 \wedge \dots dz_n,$$

对于某个可逆的局部全纯函数 f_1，底空间变量为

$$t = f_2 z_0^{b_0} \dots z_k^{b_k},$$

对于某个可逆的局部全纯函数 f_2。于是

$$\Omega_t = b_0^{-1} f_1 f_2^{-1} z_0^{a_0} \dots z_k^{a_k} d\log z_1 \wedge \dots d\log z_k \wedge dz_{k+1} \wedge \dots dz_n. \tag{2}$$

由对数不一致函数的非负性，我们有 $a_i \geq 0$ 对于 $i = 0, \dots k$。

如果至少有一个指数 $a_i > 0$，那么体积积分 $\int_{X_t} \Omega_t \wedge \Omega_t$的局部贡献会被因子 $O(|\frac{1}{\text{对数 } |t||})$所抑制。满足$a_i = 0$ 的除子对应于$\Delta_{\mathcal{X}}$的一个子复形的顶点，该子复形在嵌入映射下自然地与本质骨架 $Sk(X) \subset X_K^{an}$相识别。维数 $m = \dim Sk(X)$随后等于满足$a_0 = \dots = a_k = 0$的 k 的最大值，因此总体积积分为 $\int_{X_t} \Omega_t \wedge \Omega_t = O(|\text{对数 } |t||^m)$。我们将归一化的 Calabi–Yau 测度记为

$$\mu_t = \frac{\Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t}{\int_{X_t} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t},$$

这是 X_t 上的概率测度。Boucksom-Jonsson [4] 证明了

定理 2.4. 在混合拓扑下，测度 μ_t 在 X_t上弱收敛到一个概率测度 μ_0，其支撑位于 $Sk(X) \subset X_K^{an}$，并且在 $Sk(X)$ 的低维面上测度为零；它在 $Sk(X)$ 的 m 维面上与适当归一化的勒贝格测度一致。更具体地说，对于混合空间 X^{An} 上的任意连续函数 f，我们有

$$\int_{X_t} f d\mu_t \to \int_{X_K^{an}} f d\mu_0.$$

注 2.5. 体积收敛结果对 dlt 模型和 SNC 模型同样成立，原因在于进一步吹起时，奇异轨迹会产生对数差异严格为正的除子，因此其体积贡献会受到抑制。

归一化常数可以通过对局部计算 (2) 作更具不变性的解读来确定。令 $E_J = \cap_0^m E_i$ 对应于一个m维面 $\Delta_J \subset Sk(X)$。从复几何角度看，X 在 E_J（的 SNC 位点）附近的局部结构可由向量丛 $\oplus_{i \in J} O(E_i) \to E_J$ 的全空间来建模。公式 (2) 可以写成

$$\Omega_t = \Omega_{E_J} \wedge d\log z_1 \wedge \dots d\log z_k,$$

其中 Ω_{E_J} 可全纯延拓到 E_J（因为此处所有 $a_i = 0$），并在称为庞加莱´留数的 E_J 上定义一个全纯体积形式，该形式独立于局部坐标的选取。积分

$$\int_{E_J} \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}$$

是有限的，因为 dlt 条件保证了在 E_J 的（可能非空的）奇异轨迹附近积分收敛。于是，作为面 $\Delta_J \simeq \{x \in \mathbb{R}^{m+1}_{\geq 0} | \sum_0^m b_i x_i = 1\}$ 上的测度，

$$\mu_0 = (C_0 \int_{E_J} \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}) |dx_1 \dots dx_m|, \tag{3}$$

其中常数 C_0 与面无关，仅用于将 μ_0 归一化为概率测度。

例 2.6. 我们继续讨论 Fano 超曲面例子 (1)。从代数几何角度看，当 $t \to 0$ 时，超曲面 X_t 退化为 $\{F_i = 0\}$ 的并，归一化体积测度 μ_t 集中在 $E_J = \cap_0^{m+1} E_i$ 附近，误差至多为 $O(|\frac{1}{\log |t||})$。根据 Lefschetz 超平面定理，E_J 是连通的，因此本质骨架仅由一个 m 维单形构成。

Fano 流形内 E_J 的邻域在复解析意义下可建模为 $\oplus_0^m L^{\otimes d_i} \to E_J$ 的全空间，而 X_t 由 $\{F_0 \dots F_m = -tF\}$ 定义，其中 $F_i \in H^0(L^{\otimes d_i})$。在 $O(\frac{1}{\log |t||})$ 邻域中靠近 $E_J \subset M$ 的 X_t 部分，全纯体积形式在误差为 $O(|\frac{1}{\log |t||})$ 的意义下为

$$\Omega_t \approx \Omega_{E_J} \wedge d \log F_1 \wedge \dots d \log F_m.$$

将 μ_0 归一化为概率测度的约定要求

$$C_0 \int_{E_J} \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J} = \frac{1}{\int_{Sk(X)} dx_1 \dots dx_m} = m!, \tag{4}$$

即 $d\mu_0 = m! |dx_1 \dots dx_m|$. 相应地，误差至多为 $O(|\frac{1}{\text{对数}|t||})$，[2]

$$d\mu_t \approx C_0 \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J} \wedge \bigwedge_1^m \frac{1}{|\log |t||} d \log |F_i| \wedge d^c \log |F_i|. \tag{5}$$

2.4 半正度量，NACalabi 猜想

线丛 $L \to X_K^{an}$ 上的连续度量 $\|\cdot\|$ 将局部截面 s 关联到一个连续函数 $\|s\|$，且与截面的限制相容，并且对于局部函数 f 满足 $\|fs\| = |f| \|s\|$。选择模型线丛 L →X 会在 L 上诱导出一个“模型度量”，其性质是局部可逆截面的范数为 1。于是，我们可以通过势函数利用 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{model} e^{-\phi}$ 将任意其他连续度量表示出来，并且通常将度量与势函数等同起来。

[2] 记号 $\log |F_i|$ 涉及对 L 的局部平凡化作隐式选择，从而可以将 F_i 视为全纯函数。

设 L 为半丰线丛。给定 $k \geq 1$，以及一组 $(s_1, \dots s_N)$ 中在 kL 上的没有公共零点的整体截面，再给定实常数 c_1、$\dots c_N$，则我们可以通过下式关联出非阿基米德 Fubini-Study 度量：

$$\|s\|_{FS,k}(x) = \frac{|s|(x)}{\left(\max_{1\leq i\leq N} |s_i|(x)e^{c_i}\right)^{1/k}}. \tag{6}$$

这可以用势函数来重述

$$\phi_{FS,k} = \frac{1}{k}\max_{1\leq i\leq N}(\log|s_i| + c_i), \tag{7}$$

在计算 $|s_i|$ 时，我们隐式地使用一个局部平凡化截面 L，它来自对某个模型线丛的选取。

随后，可以将 L 上的连续半正度量定义为某列非阿基米德 Fubini-Study 度量的一致极限。对于这类度量，我们可以关联非阿基米德 Monge-Amp`ère 测度 $MA(\phi)$，其总积分为 (L^n)。对于模型线丛，非阿基米德 Monge–Ampère 测度用交理论定义，并在 X_K^{an} 内对偶复形的顶点处赋予狄拉克质量；一般情形则通过唯一的方式定义，使得度量一致收敛时，Monge–Ampère 测度弱收敛。

非阿基米德多重势理论的核心结果是非阿基米德 Calabi 猜想的解：

定理 2.7. *[5][4]* 设 $L \to X$ 是一个丰线丛。给定一个支撑在某个对偶复形 $\Delta_{\mathcal{X}} \subset X_K^{an}$ 上的概率测度 μ，则存在唯一的（相差一个加法常数） L 上的连续半正度量 ϕ，使得$MA(\phi) = (L^n)\mu$。

例 2.8。最重要的情形是 μ 为本质骨架上的勒贝格测度 μ_0（参见（3））。相应的解$\|\cdot\|_{CY,\,0}$ 被称为非阿基米德 Calabi–Yau（NA CY）度量。在我们对 Fano 超曲面（参见例 2.3）的应用中，Fano 流形M 上的线丛 L 在模型 X 上提供了一个优选模型线丛。设 N_0 足够大，使得 $H^0(M, N_0L)$ 全局生成线丛 $L^{\otimes N_0} \to M$，那么选取 $\tau_0, \dots \tau_{N_1}$ 作为 $H^0(M, N_0L)$ 的一组基后，所诱导的 NA Fubini-Study 度量与 $L \to X_K$上的优选模型度量一致，并且该度量与 N_0 或所选基无关。利用这一模型度量，NA Calabi–Yau 度量$\|\cdot\|_{CY,\,0}$ 自然地与一个势函数 $\phi_{CY,\,0}$对应。

2.5 非阿基米德 Monge–Ampère 测度与复 Monge–Ampère 测度

关于非阿基米德 Monge–Ampère 测度的以下“混合拓扑连续性原理”实质上已包含在 Favre [15], 的研究中，并由 Pille-Schneider [33]进一步阐明。

我们固定退化族 X的一个环境射影嵌入，并赋予其充足极化 $L \to X$；同时固定环境空间上一条具有正曲率的光滑厄米度量 h，定义在 L 上。 h 的选择无关紧要。于是，Fubini-Study 度量 (7) 可以视为如下的混合拓扑极限：

如下。给定 kL 的一组整体截面 $(s_1, \dots s_N)$，它们没有公共零点，并给定实常数 $c_1, \dots c_N$，我们便可以在 (X_t, L) 上定义连续势：

$$\phi_{k,t} = \frac{1}{k} \max_{1 \le i \le N} (\log |s_i|_{h^{\otimes k}} + c_i | \log |t||),$$

对应于（X_t, L）上的厄米度量 $h_{k,t} = he^{-2\phi_{k,t}}$，其在 X_t 上具有非负曲率流。然后

- 势函数 $\frac{1}{\log |t||}\phi_{k,t} \rightrightarrows \phi_{FS,k}$ 在 $t \to 0$ C^0-混合拓扑中。等价地，对于 L 的任意局部代数截面 s，在 C^0- 混合拓扑中，阿基米德范数函数 $|s|^1_{h_k} / |t|\log|t|| \to \|s\|_{FS,k}$。
- 与h_k相关联的 X_t 上的复 Monge–Ampère 测度 $_{,t}$ 当$t \to 0$ 时弱收敛于 X_K^{an} 上的非阿基米德 Monge–Ampère 测度。（这是基于将复 Monge–Ampère 测度的集中现象解释为交数，参见 [15, 命题 3.1]。）

更一般的势函数可通过一致的 Fubini-Study 逼近来处理。设 ϕ_t 是 (X_t, L) 上连续的 ω_h- 拟次调和势，满足一致逼近性质：存在较小的 $r_k > 0$，以及如上所述的一列逼近函数 $\phi_{k,\,t}$，满足 $k \to +\infty$，使得

$$\sup_{X_t} |\phi_{k,t} - \phi_t| \le \epsilon_k |\log |t||, \quad \forall 0 < |t| \le r_k. \tag{8}$$

并且 $\epsilon_k \to 0$ 当 $k \to +\infty$时。于是，在 (X_K^{an}, L) 上存在连续的非阿基米德拟次调和势 ϕ，它是 $\frac{1}{\text{对数 } |t||}\phi_t$ 当 $t \to 0$ 时的 C^0-极限。此外，与 ϕ_t 相关联的 X_t 上的复 Monge–Ampère 测度，在 $t \to 0$ 时收敛为 ϕ 的非阿基米德 Monge–Ampère 测度。（此结果基于 Chern–Levine 不等式，见 [15, 节 4]。）

注 2.9。Favre [15, 节 4] 要求小半径 $r_k > 0$ 与 k 无关。如果预先假设 ϕ_t 具有 ω_h-多重次调和性质，则没有这个必要。注意，我们不要求 ϕ_t 对族参数 t 具有拟次调和依赖。

3 Fano 超曲面的非阿基米德 Calabi–Yau 度量

我们聚焦于如 (1) 中所述的 Calabi–Yau 超曲面族 X，将基变换为 Fano 流形 M_K 上、位于 Spec(K) 上的族 $X_K \to$Spec(K)，并研究非阿基米德 Calabi–Yau 度量 $\phi_{CY,\,0}$。本节的主要结果是命题 3.8，它将 $\phi_{CY,\,0}$ 表示为一个带梯度约束的凸函数，其自变量为 log $|F_0|$、……、log $|F_m|$。在此过程中，我们将发现该凸函数的梯度像存在一种自然分解，这最终将体现为 Calabi–Yau 度量的势论极限所具有的墙室结构。

3.1 截面的分解

我们先在代数几何方面做一些准备，以便理解非阿基米德菲比尼–施图迪度量。

我们考虑 $l \geq 1$ 的任意非零截面 $s \in H^0(X_K, lL)$。由 M_K 上的层的正合序列,

$$0 \to (l - \sum d_i)L \to lL \to \mathcal{O}_{X_K}(lL) \to 0,$$

以及 Kodaira 消失定理

$$H^1(M_K, (l - \sum d_i)L) \simeq H^1(M_K, lL + K_M) = 0,$$

我们推得限制映射 $H^0(M_K, lL) \to H^0(X_K, lL)$ 是满射，因此截面 s 可以提升到 $H^0(M_K, lL)$。由于 X_K 是连通的，我们可以将 $l = 0$ 的情形一并纳入。

记 $E_J = \{F_i = 0, \forall i\} \subset X$。由同类的正合列论证可知，限制

$$H^0(M, kL) \to H^0(E_J, kL), \quad k \geq 0,$$

是满射，因此我们可以取一个子空间 $V_k \subset H^0(M, kL)$，使其映射同构于 $H^0(E_J, kL)$。

引理 3.1。 $\mathbb{C}$-向量空间之间的自然映射

$$W_l = \bigoplus_{\sum d_i l_i \leq l} F_0^{l_0} F_1^{l_1} \dots F_m^{l_m} V_{l - \sum d_i l_i} \to H^0(M, lL)$$

是一个同构。

证明。该映射是单射，因为不同的加项沿除子 $E_i = (F_i = 0)$ 的消失阶不同，因此给定一个分解 $\sum F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m} s_{l_0, \dots l_m} = 0$，我们可以归纳地证明各加项均为零。

为证明满射，只需比较维数，因此只需证明生成函数的等式

$$\sum_{l \geq 0} \dim W_l y^l = \sum_{l \geq 0} h^0(M, lL) y^l.$$

右端是 (M, L) 的希尔伯特多项式 $P_M(y)$。左端是

$$(1 - y^{d_0}) \dots (1 - y^{d_m}) P_{E_J}(y),$$

其中 $P_{E_J}(y)$ 是 (E_J, L) 的希尔伯特多项式。结论由希尔伯特多项式之间众所周知的关系得出

$$P_{E_J}(y) = \frac{1}{(1 - y^{d_0}) \dots (1 - y^{d_m})} P_M(y).$$

□

因此，我们将 W_l 与 $H^0(M, lL)$ 等同，并将 $\tilde{W}_l \subset W_l$ 记作 W_l 的子空间，它由至少有一个零分量的指标 $(l_0, \dots l_m)$ 构成。

引理 3.2. 截面 $s \in H^0(X_K, lL)$ 可提升至 $\tilde{W}_l \otimes_{\mathbb{C}} K$。

证明。我们首先将 s 提升至 $H^0(M_K, lL)$。将 s 乘以 t 的某个固定有限次幂后，我们得到 $t^N s \in H^0(M, lL) \otimes R$。注意

$$H^0(M, lL) = \tilde{W}_l \oplus F_0 \dots F_m H^0(M, (l - \sum d_i)L)$$

限制到 X 上后，我们可以用 $-tF$ 替换 $F_0 \dots F_m$，从而得到

$$t^N s \in \mathrm{Image}(\tilde{W}_l \otimes R + tH^0(M, lL) \otimes R).$$

迭代上述论证，

$$t^N s \in \mathrm{Image}(\tilde{W}_l \otimes R + t^{N'} H^0(M, lL) \otimes R), \quad \forall N'.$$

取完备化并除以 t^N 后，即得所要证明的结论。 □

因此， $s \in H^0(X_K, lL)$ 有如下展开

$$s = \sum_{l_0, \dots l_m} F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m} \sum_a s_{l_0 \dots l_m, a} t^a, \tag{9}$$

其中，整数 a 有下界， l_0、 $\dots l_m$ 是非负整数且至少有一个为零，并且 $s_{l_0 \dots l_m, a} \in V_{l - \sum d_i l_i}$ 要么为零，要么沿交层 E_J 不恒等于零。

任取 $L^{\otimes l}$ 的一个局部平凡化截面，我们可以将 $t^N s$ 视为 $k(E_J)[[z_0, \dots z_m]]$ 上的局部函数，其中 z_i 是 $E_i = (F_i = 0)$ 的局部定义方程。随后，我们可以在本质骨架 $Sk(X) \subset X_K^{an}$ 内的拟单项式赋值点上计算 s。回顾一下， $Sk(X)$ 可识别为单形

$$Sk(X) \simeq \Delta = \{\sum_0^m x_i = 1, x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{10}$$

因为 dlt 模型只有一个深度为 m 的交层，且所有除子的重数 $b_i = 1$。

推论 3.3。（无消去）作为 $Sk(X)$ 上的一个函数，

$$-\log|s| = \min\{l_0 x_0 + \dots l_m x_m + a : s_{l_0 \dots l_m, a} \neq 0\}.$$

根据构造， $d_0 l_0 + \dots d_m l_m \leq l$。

证明。回顾一下，要计算函数上的准单项式赋值，我们需要在 $z_0, \dots z_m$ 变量中作泰勒展开。注意，由 $F_0 \dots F_m = -tF$ 以及 F 在 $k(E_J)$ 中非零这一事实，我们知道 t 可以展开为乘积 $z_0 \dots z_m$（相差一个 $k(E_J)$ 中的单位，这无关紧要）。

关键在于，单项式分解（9）中的所有指数都互不相同，因此不会发生消去效应。具体而言，给定

$$(l_0 + a, \dots, l_m + a) = (l'_0 + a', \dots l'_m + a'),$$

我们需要检验 $l_0 = l'_0$、 $\dots l_m = l'_m$、 $a = a'$。这里至关重要的是， l_0、 $\dots l_m$ 中至少有一个为零，这样就可以通过 $\min(l_0 + a, \dots l_m + a)$ 恢复 a，由此可知 $a = a'$，因此该断言显然成立。 □

3.2 Fubini-Study 近似

现在我们考虑非阿基米德 Calabi–Yau 度量 $\phi_{CY,\,0}$ （参见例 2.8）。根据将连续半正度量刻画为 Fubini-Study 度量的一致极限的结果，我们可以找到一列具有如下形式的 Fubini-Study 度量

$$\phi_j = \frac{1}{l}\max_{i=1}^{N}(\log|s_i| + c_i), \quad s_i \in H^0(X, lL), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

使得

$$-\epsilon_j \le \phi_j - \phi_{CY,0} \le 0, \quad \epsilon_j \to 0.$$

这里我们省略了 l、N 等对序列索引 j 的依赖，特别是 l 无界。

按照（9）展开，

$$s_i = \sum F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m} \sum s^{(i)}_{l_0\dots l_m,a} t^a.$$

根据推论 3.3，限制在本质骨架上，每个 $-\log|s_i|$ 都具有如下形式

$$-\log|s_i| = \min\{l_0 x_0 + \dots l_m x_m + a | s^{(i)}_{l_0\dots l_m,a} \neq 0\}.$$

这里 $d_0 l_0 + \dots d_m l_m \le l$，并且根据构造，$l_i$ 中至少有一个为零。于是我们可以引入新的势函数

$$\tilde{\phi}_j = \frac{1}{l}\max_{i=1}^{N}\max\{l_0\log|F_0| + \dots + l_m\log|F_m| + c_i - a : s^{(i)}_{l_0\dots l_m,a} \neq 0\}. \tag{11}$$

请注意，由于 $a \gg 1$ 项非常负，实际上只有有限项会对最大值产生贡献。下面列出一些性质：

引理 3.4. 势函数 $\tilde{\phi}_j$ 是一个 NA Fubini-Study 度量，在 $Sk(X)$ 上与 ϕ_j 一致，并且在 X_K^{an} 上与 $\phi_j \ge \tilde{\phi}_j$ 一致。

证明。根据构造，等式 $\tilde{\phi}_j = \phi_j$ 在 $Sk(X)$ 上成立。为了说明 $\tilde{\phi}_j$是一个 Fubini-Study 度量，我们回顾例 2.8：将度量与势函数相对应时会涉及一个优选模型度量，而它本身就是一个 NA Fubini-Study 度量 $\frac{1}{N_0}\max_p \log|\tau_p|$. 于是，$\tilde{\phi}_j$ 是一个具有如下形式的 Fubini-Study 度量

$$\frac{1}{l}\max\{(l_0\log|F_0| + \dots + l_m\log|F_m| + \frac{(l - \sum d_k l_k)}{N_0}\max\log|\tau_p|) + c_i - a : s^{(i)}_{l_0\dots l_m,a} \neq 0\}.$$

这种写法清楚地表明，截面的总次数相加后等于 l。显然，$\tilde{\phi}_j$中所有截面的公共零点集必包含于 ϕ_j中相应的零点集，而根据假设，该零点集为空。

最后，我们需要证明 $\tilde{\phi}_j \ge \phi_j$ 在 X_K^{an}上成立。这是由超度量性质推出的

$$|s_i| \le \max\{|F_0|^{l_0} \dots |F_m|^{l_m}|s_{l_0\dots l_m,a}||t|^a\},$$

and

$$\log|s_{l_0\dots l_m,a}| \le \frac{l - \sum d_k l_k}{N_0}\max\{\log|\tau_p|\},$$

这些关系对所有半赋值都成立，而不仅仅是 $Sk(X)$ 上的半赋值。 □

˜引理 3.5。势函数 $\phi_j \le \phi_{CY,0}$。

˜证明。两个势函数都对应连续半正度量，并且 ϕ_j =$\phi_j \le \phi_{CY,0}$ 在 supp$MA(\phi_{CY,0}) = Sk(X)$ 上成立。由支配原理 [4,˜引理 8.4], , 可得 $\phi_j \le \phi_{CY,0}$ 在 X_K^{an} 上成立。 □

˜作为推论，$-\epsilon_j \le \phi_j - \phi_{CY,0} \le 0$。由此可知，我们可以将˜$\phi_j$ 替换为改进的 Fubini-Study 度量 ϕ_j；这里不再使用任意截面，而只使用来自 F_0的特定单项式表达式 $\dots F_m$。

3.3 勒让德变换

现在，我们通过勒让德变换重新诠释 (11)。我们引入单纯形$\Delta_k^\vee$，对应于 $k = 0$、1、$\dots m$，并记 $\Delta^\vee = \cup_k \Delta_k^\vee$:

$$\Delta_k^\vee = \{(p_0, \dots p_m) \in \mathbb{R}_{\le 0}^{m+1} | \sum d_i p_i \ge -1, p_k = 0\}.$$

设 u 是 $\mathbb{R}^{m+1}$上的一个函数，其形式为

$$u(x) = \sup_{p \in \Delta^\vee} \langle x, p\rangle - \tilde{u}(p), \tag{12}$$

其中 $\tilde{u}$ 是 $\Delta^\vee$上的一个有界函数。显然， u 是凸的，且其梯度包含于 $\Delta^\vee$的凸包中，因此 u 的 Lipschitz 常数先验有界。

我们可以在 $\Delta^\vee$ 上定义一个新函数 unerquicklich

$$u^*(p) = \max_{x \in \Delta}(\langle x, p\rangle - u(x)), \quad \Delta = \{x \in \mathbb{R}_{\ge 0}^{m+1} | \sum_0^m x_i = 1\}, \tag{13}$$

u^* 的 Lipschitz 常数先验有界。双重勒让德变换定义为

$$u^{**}(x) = \max_{p \in \Delta^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p).$$

引理 3.6。在 Δ 上，我们有 $u^{**}(x) = u(x)$。在整个 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上，我们有 $u^{**} \ge u$。

证明。由 $x, p - u(x) \le \tilde{u}(p)$，显然可得 $u^*(p) \le \tilde{u}(p)$。因此

$$u^{**}(x) = \max_{p \in \Delta^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p) \ge \max_{p \in \Delta^\vee} \langle p, x\rangle - \tilde{u}(p) = u(x).$$

对于反向推导，注意到对于 $x \in \Delta$， $u^*(p) \ge p, x - u(x)$，因此

$$u^{**}(x) = \max_{p \in \Delta^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p) \le u(x), \quad x \in \Delta.$$

□

注 3.7. 在商映射 $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{R}(1,1,\ldots 1)$ 下，单形复形 $\Delta^\vee$ 与 m 维单形 $\Delta^\vee$ 同胚，其顶点为 $(0,\ldots -\frac{1}{d_i},\ldots 0)$：

$$\bar{\Delta}^\vee = \mathrm{conv}((0,\ldots -\frac{1}{d_i},\ldots 0), i = 0,1,\ldots m) \subset \mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{R}(1,1,\ldots 1). \tag{14}$$

单纯复形结构诱导出像单形的一个细分：

$$\bar{\Delta}^\vee = \cup_k \bar{\Delta}^\vee_k, \quad \bar{\Delta}^\vee_k = \mathrm{Image}(\Delta^\vee_k). \tag{15}$$

当我们限制到 $\Delta \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 时，公式 (12) 仅在模 $\mathbb{R}(1,\ldots 1)$ 的意义下依赖于 p 变量，并且相当于要求 u 是凸的，且 u 的梯度包含于单形 $\Delta^\vee$ 中。

命题 3.8。CY 势 $\phi_{CY,0}$ 可表示为 $u(-\log|F_0|,\ldots -\log|F_m|)$，其中某个 u 满足 $u = u^{**}$ 于 $\mathbb{R}^{m+1}$。

证明。我们回到公式 (11) 中的 Fubini-Study 度量 ϕ_j。注意到 $(-\frac{l_0}{l},\ldots,-\frac{l_m}{l})$ 自然地属于 $\Delta^\vee$，因为 $\sum d_i l_i \le l$ 且 l_i 中至少有一个为零。因此，(11) 可以改写为

$$\tilde{\phi}_j = u_j(-\log|F_0|,\ldots -\log|F_m|),$$

对于某个 u_j，其形式如 (12) 所示。

如果我们用 u_j^{**} 替换 u_j，那么新的 Fubini-Study 势函数 $u_j^{**}(-\log|F_0|,\ldots)$ 在本质骨架上与 ϕ_j 一致，因为在 Δ 上 $u_j = u_j^{**}$，而在整个 X_K^{an} 上，由于 $u_j^{**} \ge u_j$，势函数只会增大。此外，根据与引理 3.5 中相同的支配原理，新的势函数仍然有上界，即 $\phi_{CY,\,0}$。此时，该势函数具备 ϕ_j 所需的所有性质，因此不失一般性地令 $u_j = u_j^{**}$ 取遍 $\mathbb{R}^{m+1}$。特别地，函数 u_j^*, u_j 具有一致的先验 Lipschitz 估计。由 Arzela-Ascoli 定理，我们可以提取一个子列的 C^0-极限，

$$u_j^* \to u^*, \quad u_j \to u.$$

由于 $-\epsilon_j \le \phi_j - \phi_{CY,\,0} \le 0$ 对于 $\epsilon_j \to 0$，通过取极限，我们推得 $\phi_{CY,\,0}$ 具有所需的形式。 □

注 3.9。在上述论证中，我们唯一需要的非阿基米德 Calabi–Yau 度量的性质是，其非阿基米德 Monge–Ampère 测度支撑在 $Sk(X)$上。

备注 3.10。在大复结构极限 $m = n$ 的类似情形中，C. Vilsmeier [39] 证明了一个显式公式，将非阿基米德 Monge–Ampère 测度与实 Monge–Ampère 测度联系起来，其假设是非阿基米德势函数在从 X_K^{an}到某个半稳定 SNC 模型的对偶复形的收缩映射下具有不变性。一个有趣的问题是，当 $m < n$ 时，在假设非阿基米德势函数可表示为 $u(-\log|F_0|,\ldots -\log|F_m|)$ 的条件下，能否证明类似的公式，其中 u 具有形式 (11)，但不一定假设满足 Calabi–Yau 条件。非阿基米德 Monge–Ampère 测度似乎可能与第 4.1 节讨论的实 Monge–Ampère 型测度密切相关，但缺乏与 dlt 模型相对应的自然收缩映射，使问题变得复杂。

4 实 Monge-Amp`ère 型方程与最优传输问题

现在我们换一种视角，通过最优传输求解一个（非平凡的）实 Monge–Ampère 型方程，从而构造候选的势函数理论极限。设定实 Monge–Ampère 型方程的动机来自 [25][10] 中的广义 Calabi 拟设（关于事后论证，另见第 5 节的体积计算）。这个方程的一个有趣特点是，梯度像具有自然的单纯分解，而解的梯度落在这些单纯胞腔交集上的轨迹表现得像一个自由边界。

4.1 实 MAtype 测度

现在我们引入一种实 MA 型测度，其中包含一个依赖于凸函数梯度的权重因子。

回顾 $\Delta = \{\sum x_i = 1, x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$。设 u 是定义在 Δ 上的凸函数，具有¯式 (12) 的形式，即梯度将包含在 $\Delta^\vee$ 中（参见注 3.7）。在每个内部点 $x \in$Int(Δ)，我们将次梯度的集合表示为

$$\nabla u(x) = \{p \in \Delta^\vee \simeq \bar{\Delta}^\vee | u(x') \geq u(x) + \langle x - x', p\rangle \text{ for all } x' \in \Delta\}$$

¯由于 $x - x'$, (1, 1,... 1) $= 0$，将 $\Delta^\vee$ 与其在 $\mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{R}$(1, . . . 1) 中的像 $\Delta^\vee$ 进行的识别（参见注释 3.7）与次梯度的定义相容。

在每个单形 $\Delta_j^\vee \subset \Delta^\vee$ 上，我们引入一个权重因子

$$W(p) = (1 + \sum_0^m d_i p_i)^{n-m},$$

¯其在 $\Delta^\vee \simeq \Delta^\vee$ 上定义了一个 Lipschitz 连续函数。单纯形 $\Delta_j^\vee$ 携带勒贝格测度 $dp = |dp_0 \dots dp_{j-1} dp_{j+1} \dots dp_m|$，通过将 $\Delta^\vee$ 与其在 $\mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{R}$(1, . . . 1) 中的像相识别，该测度与像单形上的勒贝格测度一致。随后，我们定义集合函数

$$Mu(E) = \int_{\nabla u(E)} W dp, \quad E \subset \mathrm{Int}(\Delta).$$

这与实 Monge–Ampère 测度的弱定义类似。注意，我们有先验估计 Mu(Int(Δ)) $\leq \int_{\Delta^\vee} W dp$. 通常的实 Monge–Ampère 测度理论 [18, 定理 1.1.13] 几乎可以逐字照搬来证明。

引理 4.1。集合函数 Mu 在 Int(Δ) 上定义了一个有限的博雷尔测度，且相对于 u 的实 Monge-Amp`ere 测度绝对连续。

我们将关注如何求解凸函数 u 如上所述对应的实 Monge–Ampère 型方程，

$$Mu = C_1 \mu_0, \quad C_1 = \int_{\Delta^\vee} W dp = \frac{d_0 + \ldots + d_m}{d_0 \dots d_m} \frac{(n-m)!}{n!}. \tag{16}$$

其中，μ_0 是 Δ 上的勒贝格测度，并将其归一化为概率测度。

注 4.2. 由于数值 d_i 可能不相等，该方程通常不具有置换群下的对称性。对坐标 x_i 进行重新缩放也无法恢复对称性，因为 $\sum x_i$ 届时将被加权求和所取代。

4.2 最优传输

最优传输问题如下：给定定义在（有界）可测子集 $A, B \subset \mathbb{R}^m$ 上的两个概率测度μ 和 ν，求一个可测映射$T : A \to B$，使得 μ 的推前测度等于 ν，并使传输代价最小。

$$\int_A c(x, T(x)) d\mu(x), \quad c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2.$$

关于一篇优秀的综述，参见 [11, 第 3]节。

在我们的应用中，取 $A = \Delta \subset \{\sum x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $B = \bar{\Delta}^\vee \subset \mathbb{R}^{m+1}/\mathbb{R}(1, .. . 1)$，以及测度

$$\mu = C_1 \mu_0 \text{ on } \Delta, \quad \nu = W(p)dp \text{ on } \bar{\Delta}^\vee \simeq \Delta^\vee.$$

显然， μ, ν 的支集是紧的，并且相对于勒贝格测度绝对连续。根据布雷尼耶定理 [11, 定理 3.1], , 最优传输问题存在唯一解 T。此外，存在一个凸函数 $u : \Delta \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，使得最优映射 T 满足 $T(x) = \nabla u(x)$，对 μ-几乎处处的 x 成立；映射 T 在 μ-几乎处处可微，并且

$$|\det(\nabla T)| = \frac{C_1}{W(T(x)) \int_\Delta dx}, \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x \in \Delta. \tag{17}$$

由于 $\Delta^\vee$ 是凸的，且 $\Delta = \text{supp}(\mu)$，因此最优传输$T = \nabla u$ 将 Δ 映射到 $\Delta^\vee$。于是 u 具有形式 (12)。由于 ∇u 在 μ- 几乎处处可微，(17) 推出

$$Mu(E) \geq \int_{\nabla u(E \cap \text{Dom}(D^2 u))} W(p)dp = \int_{E \cap \text{Dom}(D^2 u)} C_1 d\mu_0 = \int_E C_1 d\mu_0, \quad \forall E \subset \Delta.$$

另一方面，总测度

$$Mu(\Delta) = \int_{\nabla u(\Delta)} W(p)dp \leq \int_{\Delta^\vee} W(p)dp = C_1.$$

因此所有等号都必须成立，由此可得

引理 4.3. 最优传输问题的解满足实 MA 型方程 $Mu = C_1 \mu_0$，且 $\nabla u(\Delta) = \Delta^\vee$。

例 4.4。 $m = 1$ 的情形可以明确求解。单形 $\Delta = \{x_0 + x_1 = 1, x_0 \geq 0, x_1 \geq 0\}$ 可与区间 $[0, 1]$（变量为 $x = x_0$）等同。梯度单形为

$$\Delta_0^\vee = \{(0, p_1) : 0 \geq p_1 \geq -\frac{1}{d_1}\}, \quad \Delta_1^\vee = \{(p_0, 0) : 0 \geq p_0 \geq -\frac{1}{d_0}\},$$

因此 $\bar{\Delta}^\vee$ 可与区间 $[-\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}]$等同。权重因子为

$$W(p) = \begin{cases} (1 + d_0 p_0)^{n-1}, & \text{on } \Delta_1^\vee, \\ (1 + d_1 p_1)^{n-1}, & \text{on } \Delta_0^\vee. \end{cases}$$

因此 $\int_{\Delta^\vee} W(p)dp = \frac{1}{nd_0} + \frac{1}{nd_1}$。凸函数与 $u = u(x)$ 相对应，并且满足

$$\begin{cases} (1 + d_0 u')^{n-1} u'' = \frac{1}{nd_0} + \frac{1}{nd_1}, & \text{on } \Delta_1, \\ (1 - d_1 u')^{n-1} u'' = \frac{1}{nd_0} + \frac{1}{nd_1}, & \text{on } \Delta_0, \end{cases}$$

以及边界约束 $u'(0) = -\frac{1}{d_0}, u'(1) = \frac{1}{d_1}$。解为

$$u' = \begin{cases} \frac{1}{d_0}\left(-1 + (\frac{d_0+d_1}{d_1}x)^{1/n}\right), & 0 \le x \le \frac{d_1}{d_0+d_1}, \\ \frac{1}{d_1}\left(1 - (\frac{d_0+d_1}{d_0}(1-x))^{1/n}\right), & \frac{d_1}{d_0+d_1} \le x \le 1. \end{cases} \tag{18}$$

以及 $u = \int u' dx$。我们看到， u 在两个开区间上是光滑的，而 u' 在区间边界处是 H¨older 连续的，并且在 $x = \frac{d_1}{d_0+d_1}$处是$_{,1}$ 连续的。

4.3 解的正则性

我们将实 MA 方程的一些标准正则性理论应用于最优传输解。这些结果远非最优，但足以满足我们的主要目的。

引理 4.5。子集

$$E = \{x \in \Delta : \exists p \in \nabla u(x) \cap \cup_k \partial \bar{\Delta}_k^\vee\}$$

是闭的，且勒贝格测度为零。

¯证明。 $\Delta_k^\vee$ 的边界由有限个闭面组成。对于凸函数，一个一般事实是，若 $p_k \in \nabla u(x_k)$，且 $x_k \to x, p_k \to p$，则$p \in \nabla u(x)$。因此，梯度的原像仍是一个闭子集。

子集 S = {$x \in \Delta : \nabla u(x)$ 包含多个元素}的测度为零。根据构造， $\nabla u(E \setminus S)$ 包含于零测度子集$\cup_k \partial \Delta_k^\vee$中，因此由等式 $Mu = C_1 \mu_0$ 可知， $E \setminus$ S 的勒贝格测度为零， E也必然如此。 □

这在 Δ上诱导出一种墙室结构:

¯推论 4.6。子集 $\Delta_k = \{x \in \text{Int}(\Delta) : \nabla u(x) \subset \text{Int}(\Delta_k^\vee)\}$ 是一个开子集，并且 $\cup_k \Delta_k$ 在 Δ中具有满勒贝格测度。

在每个 Δ_k 上，实 Monge–Ampère 型方程简化为

$$\det(D^2 u) W(\nabla u) = \frac{C_1}{\int_\Delta dx} = \frac{d_0 + \ldots + d_m}{d_0 \ldots d_m} \frac{(n-m)!m!}{n!}. \tag{19}$$

根据构造， $0 < W(\nabla u) \le C$在 Δ_k上，而函数 $W(p)$ 现在是解析的，而非分段解析的。

引理 4.7。函数 u在 Δ_k 上光滑，必要时可删去一个测度为零的闭子集。

证明。首先注意到 $\det(D^2u) \geq C^{-1}$，因此由 Mooney 的部分正则性定理 [29,Thm 1.1]，u 除一个 Hausdorff $(n-1)$-测度为零的闭集外严格凸。我们断言，u 在严格凸区域上是光滑的。

通过穷竭论证，只需证明 $W(\nabla u) > \epsilon$ 的子集上的光滑性。由双侧密度界

$$C^{-1} \leq \det(D^2u) \leq C,$$

我们可以应用 Caffarelli 的内部 $C^{1,\alpha}$-估计 [11, Thm 2.14]，从而推出 $u \in C^{1,\alpha}_{loc}$。这意味着 $W(\nabla u) \in C^{\alpha}_{loc}$，将其代回方程可知，由 Caffarelli 的另一项结果 [7]，有 $u \in C^{2,\alpha}_{loc}$。其余部分由标准的 Schauder 理论得出。 □

4.4 凸函数的延拓

凸函数 u 先验地定义在 Δ 上。现在我们通过第 3.3 节中的双重勒让德变换构造，将 u 规范地延拓到 $\mathbb{R}^{m+1}$:

$$u^*(p) = \max_{x\in\Delta} \langle x, p\rangle - u(x), \quad p \in \Delta^\vee,$$

$$u^{**}(x) = \max_{p\in\Delta^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p).$$

与截面 3.3 中一样，函数 u^{**} 在 Δ上与 u 一致，今后我们将 $u = u^{**}$ 记作这个延拓。显然，u 是一个凸函数，其梯度包含于 $\Delta^\vee$的凸包中。需要注意的是，对于这个延拓而言，$\Delta^{\vee^-}$与 $\Delta^\vee$ 之间的区别很重要，尽管此前对于限制在 Δ上的 u 而言，这种区别并无影响。

引理 4.8. 存在一个开邻域 U_k，包含在 Cham 腔 $\Delta_k \subset \mathrm{Int}(\Delta)$ 的 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内，使得延拓的凸函数 u 在 U_k 上仅依赖于 $x_0, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_m$。

证明。给定任意紧子集 $K \subset \Delta_k$，我们可以找到一个依赖于K 的 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $x \in K$,

$$u(x) > \sup_{p\in\Delta^\vee\setminus\Delta_k^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p) + \epsilon.$$

由 u 的 Lipschitz 连续性可知，将 K 替换为 $\mathbb{R}^{m+1}$ 内的一个开邻域时，同样成立。这表明，在某个开邻域 U_k 上，我们有

$$u(x) = \sup_{p\in\Delta_k^\vee} \langle p, x\rangle - u^*(p).$$

但是，$\Delta_k^\vee$ 包含在平面$\{p_k = 0\}$中，因此 u 在U_k上与 x_k 无关。

□

5 试探度量

从最优传输问题的解 u 出发，我们的目标是在阿基米德情形和非阿基米德情形下，构造连续的拟次调和势，从而定义类$c_1(L)$中的半正度量。K¨ahler 版本的体积测度在全变差范数意义下接近 Calabi–Yau，而非阿基米德版本恰好就是非阿基米德 Calabi–Yau 度量。

5.1 非阿基米德半正度量

如例 2.8，设 $\tau_0, \dots \tau_{N_1}$是 $H^0(M, N_0L)$ 的一组基，它们整体生成丰线丛。(X_K^{an}, L) 上的 NA Fubini-Study 度量

$$\frac{1}{N_0} \log \max |\tau_i|$$

与 L 上的优选模型度量一致。这个参考度量使我们能够用势函数来刻画 L 上的其他度量。

我们在 L 上定义连续的 NA 势函数

$$\phi^{NA} = u(-\log|F_0|, \dots -\log|F_m|), \tag{20}$$

其中 u 是最优传输问题的解，而 $\log|F_i|$ 则利用 L 上的优选模型度量来定义。

命题 5.1。势函数 ϕ^{NA} 定义了一个连续的半正度量。

证明。我们在（X_K^{an}， L）上构造ϕ_k^{NA}:

$$\phi_k^{NA} = \max\{-\sum_0^m p_i \log|F_i| - u^*(p) | p = (p_0, \dots p_m) \in \Delta^\vee \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^{m+1}\}. \tag{21}$$

我们断言这些都是 Fubini–Study 势。为此，注意与ϕ_k^{NA}相关联的度量可以改写为齐次形式:

$$\max\{\frac{1}{k}\log\prod_{i=0}^m |F_i|^{-kp_i} + \frac{1+\sum d_i p_i}{N_0} \max \log|\tau_l| - u^*(p) | p \in \Delta^\vee \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^{m+1}\}.$$

由于 $-p_i \geq 0$和 $1+\sum d_i p_i \geq 0$，这是若干对数单项式项的最大值。注意，这些单项式没有公共零点集。

此外， u^* 的 Lipschitz 连续性很容易推出

$$-Ck^{-1} \leq \phi_k^{NA} - \phi^{NA} \leq 0.$$

我们得出结论： ϕ^{NA} 是 NA Fubini–Study 势的一致极限，因此定义了一个连续的半正度量。 □

5.2 环境 K¨ahler 度量

我们的目标是在 X_t 上构造一个 K¨ahler 度量，它除了在一个测度很小的子集上之外，处处都接近 CY 度量。该构造遵循先验预期：CY 势函数应 C^0 收敛到 NA CY 势。

在 $(n-m)$ 维紧致卡拉比-丘流形 $E_J = \{F_0 = \dots F_m = 0\}$ 上，我们在类 $c_1(L)$ 中找到 CY 度量 ω_{E_J}：

$$\omega_{E_J}^{n-m} = (L^{n-m} \cdot E_J)\frac{\Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}}{\int_{E_J} \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}} = d_0 \dots d_m (L^{n+1} \cdot M)\frac{\Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}}{\int_{E_J} \Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}},$$

其中我们回顾一下，Ω_{E_J} 是 E_J 上的全纯体积形式。与归一化约定 (4) 比较可知。

$$\omega_{E_J}^{n-m} = d_0 \dots d_m (L^{n+1} \cdot M)\frac{C_0}{m!}\Omega_{E_J} \wedge \overline{\Omega}_{E_J}. \tag{22}$$

我们将 ω_{E_J} 延拓为 M 上类 $c_1(L)$ 中的光滑 K¨ahler 度量 ω_M，并将 h 记为 $L \to M$ 上相应的厄米度量。由于我们主要只关注 E_J 在 M 内的邻域，因此这一延拓的选择并不重要。

我们在每个 X_t 上为 $0 < |t| \ll 1$ 引入连续势函数，

$$\phi_t = |\log|t|| u(-\frac{\log|F_0|_{h^{\otimes d_0}}}{|\log|t||}, \dots, -\frac{\log|F_m|_{h^{\otimes d_m}}}{|\log|t||}), \tag{23}$$

其中，$|F_i|_{h^{\otimes d_i}}$ 表示截面 F_i 相对于由 h诱导的$L^{\otimes d_i} \to M$ 上的 Hermitian 度量的模。这在$(X_t, c_1(L))$上定义了一个 (1, 1)-流，定义为 $\omega_t = \omega_M + dd^c\phi_t$.

命题 5.2. 势函数 ϕ_t是 ω_M-多重次调和的，即 (1, 1)-流 $\omega_t \geq 0$。

证明. 由于 ω_M-多重次调和性质在取最大值时保持不变，并且

$$\phi_t = \max_{p \in \Delta^\vee}\left(\sum_0^m -p_i \log|F_i|_{h^{\otimes d_i}} - u^*(p)|\log|t||\right),$$

只需证明$\sum_0^m -p_i \log |F_i|_{h^{\otimes d_i}}$是 ω_M-多重次调和的。将 h用局部势表示为 $h = e^{-2\phi_h}$，则

$$\begin{aligned}\omega_M + dd^c\sum_0^m -p_i \log|F_i|_{h^{\otimes d_i}} &= dd^c\phi_h + dd^c\sum_0^m -p_i \log(|F_i|e^{-d_i\phi_h}) \\ &= (1 + \sum d_i p_i)\omega_M - \sum p_i dd^c \log|F_i| \geq 0,\end{aligned}$$

这里用到了 $p_i \leq 0$, $1 + \sum d_i p_i \geq 0$。 □

现在我们验证第 2.5 节中的一致逼近性质，并构造与第 5.1 节中的非阿基米德版本密切相关的 Fubini-Study 型逼近项，

$$\phi_{k,t} = \max\{\frac{1}{k}\log\Pi_{i=0}^m |F_i|_{h^{\otimes d_i}}^{-kp_i} + \frac{1 + \sum d_i p_i}{N_0}\max\log|\tau_l|_{h^{\otimes N_0}} - u^*(p)|\log|t|| : p \in \Delta^\vee \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^{m+1}\}.$$

命题 5.3。（一致逼近）$|\phi_{k,\ t} - \phi_t| \le C(1 + k^{-1}|\log\ |t||)$对于$0 < |t| \ll 1$。

证明。$\phi_{k,t}$ 中的第二项有界于

$$|\max_l \log|\tau_l|_{h^{\otimes N_0}}| \le C.$$

去掉这一项后，$\phi_{k,t}$ 与 ϕ_t 之间的差异由离散性条件 $p \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^{m+1}$造成。根据 $u^*(p)$ 的 Lipschitz 界，该误差有界于 $|\log\ |t||Ck^{-1}$。

□

特别地，取 $r_k \ll e^{-k}$即可得到 (8)。根据第 2.5 节的讨论，(21) 中的 ϕ_k^{NA} 是$\frac{1}{\log|t||}\phi_{k,t}$在混合拓扑下的 C^0-极限。~~因此~~，一致逼近意味着

推论 5.4。非阿基米德势函数 ϕ^{NA}是$\frac{1}{\log|t||}\phi_t$在混合拓扑~~下的~~ C^0极限。此外，与 ϕ^{NA} 相关联的非阿基米德 Monge–Ampère 测度是复 Monge–Ampère 测度 ω_t^n在 $t \to 0$时的弱极限。

5.3 Kähler 设定的体积测度

Kähler 设定的主要优势 ω_t 在于，在一般区域中，体积形式近似为 Calabi–Yau 体积形式。

命题 5.5。给定任意 $0 < \delta \ll 1$，则对任意充分小且依赖于 δ的 t，都存在一个开子集 $U_{t,\ \delta}$，它位于 X_t 上，且其归一化 Calabi–Yau 测度为 $\mu_t(U_{t,\ \delta}) > 1 - \delta$；在此处，体积形式与 Calabi–Yau 体积形式的差距小于 C^0:

$$|\omega_t^n - (L^n)\mu_t| \le \delta\mu_t.$$

证明。舍去测度为 $\ll \delta$ 的 X_t 子集后，我们可以聚焦于 $X_t \subset M$内 E_J 的邻域，在此处，M 局部建模为 E_J上的全纯向量丛。我们考虑满足以下条件的子集

$$x = (-\frac{\log|F_0|_{h^{\otimes d_0}}}{|\log|t||}, \dots - \frac{\log|F_m|_{h^{\otimes d_m}}}{|\log|t||}) \in U_k, \quad k = 0, 1, \dots m,$$

其中，U_k 是引理 4.8 中所述的 Δ_k 的一个开邻域。不失一般性，我们聚焦于 U_0，因此在 U_0上有 $u = u(x_1, \dots x_m)$。我们在 u的光滑部分上进行计算（根据引理 4.7，该部分具有满测度）：

$$\begin{aligned}
&\omega_t = \omega_M + dd^c\phi_t \\
=&\omega_M + \frac{1}{|\log|t||}\sum_{1\le i,j\le m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} d\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}} \wedge d^c\log|F_j|_{h^{\otimes d_j}} \\
&- \sum_1^m \frac{\partial u}{\partial x_i} dd^c\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}.
\end{aligned}$$

根据庞加莱-勒隆方程，由于我们是在除子$F_i = 0$之外进行计算，因此该项

$$-dd^c\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}} = -dd^c(|F_i|e^{-d_i\phi_h}) = d_i dd^c\phi_h = d_i\omega_M.$$

因此 ω_t 可化简为

$$(1+\sum_1^m d_i\frac{\partial u}{\partial x_i})\omega_M+\frac{1}{|\log|t||}\sum_{1\le i,j\le m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}d\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}\wedge d^c\log|F_j|_{h^{\otimes d_j}}.$$

删去一个 Δ_k 勒贝格测度为 $\ll\delta$的子集后，利用引理 4.7 中u 的正则性，我们可以确保 u 具有依赖于 δ 但不依赖于 t的 C^2 界，因此 $1+\sum_1^m d_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$具有依赖于 δ的下界。对于依赖于 δ且足够小的 t， $d\log|F_i|$与 $d\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}$之间的差异便会被 $\frac{1}{|\log|t||}$因子压制，因此 ω_t可由一个近似

$$(1+\sum_1^m d_i\frac{\partial u}{\partial x_i})\omega_M+\frac{1}{|\log|t||}\sum_{1\le i,j\le m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}d\log|F_i|\wedge d^c\log|F_j|$$

误差为 $\ll\delta$。

对 ω_t^n 进行二项式展开后，主项为

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}(1+\sum_1^m d_i\frac{\partial u}{\partial x_i})^{n-m}\omega_M^{n-m}\wedge m!\det(D^2u)_{m\times m}\bigwedge_1^m\frac{1}{|\log|t||}d\log|F_i|\wedge d^c\log|F_i|. \tag{24}$$

二项式展开中的其他项至少需要包含 $n-m+1$ 个 ω_M 的楔积，但在 E_J 的法向方向上， ω_M 被 $\sum_{1\le i,j\le m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}d\log|F_i|\wedge d^c\log|F_j|$ 抑制，因此可以忽略这些贡献。

现在我们化简这个主项。应用实 Monge–Ampère 型方程 (19)，可得

$$\frac{\sum d_i}{\prod d_i}\omega_M^{n-m}\wedge m!\bigwedge_1^m\frac{1}{|\log|t||}d\log|F_i|\wedge d^c\log|F_i|.$$

再次利用 ω_M 在法向方向上的抑制，并根据 (22) 中关于 ω_{E_J} 的 Calabi–Yau 条件，上式可近似为

$$(\sum d_i)(L^{n+1}\cdot M)C_0\Omega_{E_J}\wedge\overline{\Omega}_{E_J}\wedge\bigwedge_1^m\frac{1}{|\log|t||}d\log|F_i|\wedge d^c\log|F_i|.$$

根据归一化 Calabi–Yau 体积测度 (5) 的渐近式，此表达式可近似为 $(\sum d_i)(L^{n+1}\cdot M)\mu_t$. 我们回顾 $-K_M=(d_0+\ldots+d_m)L$，因此

$$(L^n)=L^n\cdot X_t=L^n\cdot(-K_M)=(\sum d_i)(L^{n+1}\cdot M),$$

以上可简化为 $(L^n)\mu_t$。

总之，被删除区域的 μ_t-测度为 $<\delta$，而在良好区域上，对于充分小且取决于 δ 的 t，所有近似误差均为 $\ll\delta$，由此得证。 □

推论 5.6。全变差

$$\int_{X_t}|\omega_t^n-(L^n)\mu_t|\to 0,\quad t\to 0.$$

证明。注意到 $\int_{X_t}\omega_t^n=\int_X(L^n)\mu_t=(L^n)$，并应用命题 5.5。 □

注 5.7。势函数 ϕ_t 整体上并非光滑。然而，通过对 ϕ_t进行任意小的 C^0 正则化，我们可以得到一个真正的 K¨ahler 势函数，它在光滑区域内与 ϕ_t C^∞_{loc} 接近；特别是，其体积测度在全变差范数下与 ω_t^n 任意接近。

推论 5.8. 复 Monge–Ampère 测度 ω_t^n在 X_t 上收敛到非阿基米德 Calabi–Yau 测度 $(L^n)\mu_0$，当 $t \to 0$。特别地，非阿基米德度量 ϕ^{NA} 是唯一的非阿基米德 Calabi–Yau 度量。

证明。对于第一个结论，回顾一下， $\mu_t \to \mu_0$ 在混合拓扑中（参见定理 2.4），并且 $\int_{X_t} |\omega_t^n - (L^n)\mu_t| \to 0$，当 $t \to 0$。对于第二个结论，我们应用推论 5.4。□

6 CY 势函数的收敛

6.1 多重势理论背景

我们将回顾一些来自 [26][24][25], 的多重势理论估计，这些估计建立在 Kolodziej 的容量估计技术 [14][21][22]之上。

定理 6.1.（一致 Skoda 估计）*[26]*存在与 t 无关的一致正数常量 α, A，使得对于 $0 < |t| \ll 1$,

$$\int_{X_t} e^{-\alpha v} d\mu_t \le A, \quad \forall v \in PSH(X_t, \frac{1}{|\log|t||}\omega_M|_{X_t}) \ with \ \sup_{X_t} v = 0.$$

相对于拟设度量 ω_t（参见第 5 节），我们将 (X_t, L) 上的 Calabi–Yau 度量写作

$$\omega_{CY,t} = \omega_t + |\log|t|| dd^c \psi_t. \tag{25}$$

由于 ω_t 与 ω_M 之间的 K¨ahler 势函数有界于 $O(|\log|t||)$，因此在下文的 L^∞ 估计中，这两个背景度量可以互换。

定理 6.2。（一致 L^∞ 界） *[26]* 对于 $0 < |t| \ll 1$，经过适当的加法归一化后，势函数满足 $\|\psi_t\|_{L^\infty} \le C$，且与 t 无关。

此后我们固定加法归一化，使得 $\min_{X_t} \psi_t = 0$。

我们记录一个一般性结论，讨论体积测度在全变差范数下接近的 K¨ahler 度量。

定理 6.3。（一致 L^1-稳定性，改述自 *[25,* 定理 2.*6]*）设 (Y, ω) 为紧 K¨ahler 流形，且 $\phi \in PSH(Y, \omega) \cap C^\infty$。假设

- 有一个斯科达估计

$$\int_Y e^{-\alpha v} \frac{\omega^n}{Vol(Y)} \le A, \quad \forall v \in PSH(Y, \omega) \ with \ \sup_Y v = 0.$$

- 存在一个质量下界 $\frac{1}{Vol(Y)} \int_{\{\phi \le a\}} \omega^n \ge b > 0.$

- *The total variation* $\frac{1}{Vol(Y)}\int_Y |\omega^n - \omega_\phi^n| \le \gamma^{2n+3} < 1$.
- $\|\phi\|_{C^0} \le A'$.

那么，对于 $0 < \gamma < \gamma_0(b, n, \alpha, A, A') \ll 1$，存在一个一致估计值

$$\sup_Y \phi \le a + C(b, n, \alpha, A, A')\gamma.$$

6.2 C^0 在一般区域中的收敛

我们首先将一致 L^1-稳定性定理 6.3 应用于主要情形，从而得到关于 CY 势函数的弱 L^1-估计。

推论 6.4。（弱 L^1-收敛估计）给定任意小的 $\delta > 0$，则对于依赖于 δ 的充分小的 t，有

$$\int_{X_t \cap \{\psi_t \le \delta\}} d\mu_t \ge 1 - \delta.$$

证明。反设 $\int_{X_t\cap\{\psi\le\delta\}} d\mu_t < 1 - \delta.$。我们应用一致 L^1-稳定性定理，取 $Y = X_t$ 和

$$\omega = \frac{1}{|\log|t||}\omega_{CY,t}, \quad \omega_\phi = \frac{1}{|\log|t||}\omega_t, \quad \phi = -\psi_t.$$

（严格来说，我们使用的是 ω_t 的 C^∞-正则化版本，而非 ω_t；其势函数可任意 C^0-接近，见注 5.7。为使论证更加清晰，我们将省略这一正则化过程。）

因此，$\frac{\omega^n}{\mathrm{Vol}(Y)} = \mu_t$ 是归一化 Calabi–Yau 测度，根据定理 6.1、6.2，它满足一致 Skoda 估计。$\|\phi\|_{C^0}$ 界由定理 6.2 给出。根据反证假设，质量下界在 $a = -\delta$ 和 $b = \delta$ 的条件下成立。我们选择 $\gamma \ll C(b, n, \alpha, A, A')\delta$。根据推论 5.6，对于充分小的 t，全变差范数可以小于 $\ll \gamma^{2n+3}$。于是，一致 L^1-稳定性定理给出

$$\sup_{X_t}(-\psi_t) \le -\delta + C(b, n, \alpha, A, A')\gamma \le -\frac{\delta}{2},$$

这与我们的归一化 $\min_{X_t}\psi_t = 0$ 矛盾。 □

我们将把弱 L^1-收敛估计改进为在 $X_t \subset M$ 内靠近 E_J 的一个具体子集上的 C^0_{loc}-收敛，且该子集具有非平凡比例的 Calabi–Yau 测度。

我们在 E_J 上选取一个坐标图，其复坐标为 z_{m+1}、$\dots z_n$，并使其与 $\{F = 0\}$ 保持一定距离；再选取 L 的一个局部平凡化截面，使得 F_0，……，F_m 可以与坐标 z_0、$\dots z_m \in \mathbb{C}^*$ 相对应。方程 $F_0 \dots F_m = -tF$ 的意思只是可以用其他局部坐标来解出 z_0，因此 X_t 的局部图景与 $B(2)^{n-m} \times (\mathbb{C}^*)^m$ 的一个子集双全纯。我们将重点关注 $B(1)^{n-m} \times (\mathbb{C}^*)^m$ 内部的区域，

$$\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||} \gtrsim \epsilon, \quad i = 0, 1, \dots m. \tag{26}$$

注 6.5。记号 $a \gtrsim b$ 表示 $a \geq C^{-1}b$，其中 C 与 t 无关。这样写是为了省略因略微缩小定义域而产生的一些不便的常数。

命题 6.6.（C^0_{loc}-势收敛估计）给定任意小的 ϵ，则对于充分小且依赖于 ϵ 的 t，在子集 (26) 上有 $\psi_t \leq C\epsilon$。

证明。我们将在坐标图中使用局部 K¨ahler 势函数，并通过平均值不等式利用多重次调和性质。

利用 L 的局部平凡化，我们可以写成 $h = e^{-2\phi_h}$，因此 CY 度量$\omega_{CY,\ t}$ 在 X_t 上具有局部绝对势函数

$$\varphi = \phi_h + \phi_t + |\log|t||\psi_t, \quad |\phi_h| \leq C.$$

令 $\bar{\varphi}$ 为 φ 关于 z_{m+1}、$\ldots z_n$ 变量以及 T^m 方向角度的平均值:

$$\bar{\varphi} = \fint_{B(2)^{n-m}} \fint_{T^m} \varphi(z_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \ldots z_m e^{\sqrt{-1}\theta_m}, z_{m+1}, \ldots z_n).$$

因此，$\bar{\varphi}$ 是 log $|z_1|$、...、log $|z_m|$的函数；由于取平均保留了多重次调和性质，它必定是凸函数。

在给定值附近

$$y = (y_0, \ldots y_m), \quad \sum_0^m y_i = 1, \quad y_i \gtrsim \epsilon,$$

我们考虑 (26) 的环形子区域，其中

$$|\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||} - y_i| \lesssim \epsilon, \quad i = 0, \ldots m.$$

在此区域内，回顾 $\phi_t = |\log|t||u(x_0, \ldots x_m)$，其中 $x_i = -\log|\frac{|F_i|_{h^{\otimes d_i}}}{|t|}|\log$，$u$ 上的 Lipschitz 界意味着小振荡估计

$$|\frac{1}{|\log|t||}\phi_t - u(y)| \lesssim \epsilon. \tag{27}$$

在我们的归一化中 $\psi_t \geq 0$，因此

$$\frac{1}{|\log|t||}\varphi = \frac{1}{|\log|t||}\phi_h + \frac{1}{|\log|t||}\phi_t + \psi_t \geq -C\epsilon.$$

现在我们对 $\delta \leq \epsilon^{m+1}$ 应用推论 6.4，因此 $\psi_t \leq \epsilon$，除去一个归一化 Calabi–Yau 测度为 $\leq \epsilon^{m+1}$ 的子集。将 φ 中的三项相加可知，对于足够小且依赖于 ϵ 的 t，

$$\begin{aligned}
&\int_{|\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||} - y_i| \lesssim \epsilon} |\frac{1}{|\log|t||}\varphi - u(y)| d\mu_t \\
&\lesssim \epsilon \int_{|\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||} - y_i| \lesssim \epsilon} d\mu_t + \epsilon^{m+1} \|\psi_t\|_{L^\infty} \lesssim \epsilon^{m+1}.
\end{aligned}$$

取平均后，我们得出局部平均 L^1 在 $\bar{\varphi}$ 上的上界，

$$\fint_{|\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||}-y_i|\lesssim\epsilon} |\frac{1}{|\log|t||}\bar{\varphi}-u(y)|\lesssim\epsilon.$$

由于 $\bar{\phi}$ 是凸函数，平均值 L^1-上界意味着稍微缩小定义域后可得到一个 L^∞ 上界，即

$$\frac{1}{|\log|t||}\bar{\varphi}-u(y)\lesssim\epsilon.$$

但 $\bar{\varphi}$ 本身是通过对拟次调和函数 φ取平均得到的，因此由平均值不等式以及 $|\frac{1}{\text{对数 }|t||}\varphi\geq -C\epsilon$几乎非负可知，在稍微缩小的~~定义~~域上，

$$\frac{1}{|\log|t||}\varphi-u(y)\lesssim\epsilon,\quad \text{for } |\frac{-\log|z_i|}{|\log|t||}-y_i|\lesssim\epsilon.$$

展开 φ的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\psi_t &\leq \frac{1}{|\log|t||}\varphi-\frac{1}{|\log|t||}\phi_t-\frac{1}{|\log|t||}\phi_h\\ &\leq u(y)-u(y)+\frac{C}{|\log|t||}+C\epsilon\leq C\epsilon.\end{aligned}$$

由于区域 (26) 被这些小坐标图覆盖，结论得证。 □

6.3 Bergman 核估计

我们的目标是将势收敛从一般区域推广到整个 X_t。困难在于， X_t的非一般区域上的复结构相当退化，而且试探势 ϕ_t 振荡得相当剧烈，因此简单应用平均值不等式似乎并不足够。我们将转而通过 Bergman 核估计来推进。

命题 6.7. 对于任意充分大的 l，以及任意 $z\in X_t$，存在一个截面 $s\in H^0(X_t,lL)$，满足 $|s|_{h^{\otimes l}}(z)=1$，且

$$\frac{1}{2l}\log\int_{X_t}|s|^2_{h^{\otimes l}}e^{-2l(\phi_t+|\log|t||\psi_t)}\sqrt{-1}^{n^2}\Omega_t\wedge\overline{\Omega}_t\leq -(\phi_t+|\log|t||\psi_t)(z)+\frac{C}{l}|\log|t||.$$

所有常数对于较小的 t 都是统一的。

证明。思路是应用大泽-竹腰延拓定理，利用范数控制构造线丛 $lL+K_{X_t}$ 的某个截面，方法是从给定点 $z\in X_t$ 延拓到 X_t。我们选择线丛 lL 上的正度量，使其成为 Calabi–Yau 度量 $he^{-2(\phi_t+|\log|t||\psi_t)}$ 与背景度量 h 的加权组合，

$$h^{\otimes N_0}\left(he^{-2(\phi_t+|\log|t||\psi_t)}\right)^{\otimes(l-N_0)}=h^{\otimes l}e^{-2(l-N_0)(\phi_t+|\log|t||\psi_t)},$$

其中 N_0是一个与 l无关的大固定整数，而 $\tau_0,\dots\tau_{N_1}\in H^0(M,N_0L)$ 诱导了 M的射影嵌入，其中 $|\tau_i|_{h^{N_0}}\leq 1$。通过取常数阶的线性组合，我们可以安排使 $\tau=(\tau_1,\dots\tau_{N_1})$ 的公共零点

恰好位于 $z \in X_t$，且其大小在整体上有界 $|\tau_i|_{h^{N_0}} \leq C$，并且在 $z \in X_t$ 处满足一个定量横截性条件，

$$|\frac{\Lambda^n(d\tau)}{\Omega_t}|_{h^{\otimes nN_0}}(z) \geq e^{-C|\log|t||}.$$

这里 $\Lambda^n d\tau \in \Lambda^n \mathbb{C}^{N_1} \otimes (L^{\otimes nN_0} \otimes K_{X_t})|_z$，而定量横截性归结为估计 X_t 上的 Fubini–Study 体积形式与 CY 体积形式 $\sqrt{-1}^{n^2}\Omega_t \wedge \Omega_t$ 之间的比值，这是一个局部计算。

于是，大泽-竹腰延拓定理给出一个截面 $s \in H^0(X_t, lL)$（等价地，一个截面 $s \otimes \Omega_t \in H^0(X_t, lL + K_{X_t})$），

$$\begin{aligned}
&\int_{X_t} |s|^2_{h^{\otimes l}} e^{-2(l-N_0)(\phi_t + |\log|t||\psi_t)} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t \\
&\leq C|s|^2_{h^{\otimes l}}(z) e^{-2(l-N_0)(\phi_t+|\log|t||\psi_t)(z)} |\frac{\Lambda^n(d\tau)}{\Omega_t}|^{-2}_{h^{\otimes nN_0}}(z) \\
&\leq |s|^2_{h^{\otimes l}}(z) e^{-2(l-N_0)(\phi_t+|\log|t||\psi_t)(z)} e^{C|\log|t||}.
\end{aligned}$$

现在利用 CY 势的 L^∞ 界（参见定理 6.2），

$$|\phi_t + |\log|t||\psi_t| \leq C|\log|t||,$$

因此

$$\int_{X_t} |s|^2_{h^{\otimes l}} e^{-2l(\phi_t+|\log|t||\psi_t)} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t \leq (|s|^2_{h^{\otimes l}} e^{-2l(\phi_t+|\log|t||\psi_t)})(z) e^{C|\log|t||}$$

取对数即可证明该结论。 □

我们将尝试用单项式截面替代截面 s，方法是模仿非阿基米德情形（参见第 3.1 节）。回忆一下，我们选取了子空间 $V_k \subset H^0(M, kL)$，它们在限制映射下同构映至 $H^0(E_J, kL)$。当 t 足够小时，任意截面 $s \in H^0(X_t, lL)$ 都可以唯一分解为

$$s = \sum F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m} s_{l_0,\dots l_m}, \tag{28}$$

其中 l_0、$\dots l_m$ 是非负整数，且至少有一个为零，$d_0 l_0 + \dots d_m l_m \leq l$，$s_{l_0,\dots l_m} \in V_{l-\sum d_k l_k}$。

超度量不等式的阿基米德对应形式如下三角不等式：

引理 6.8。当 t 较小时，存在一致的逐点上界：

$$|s|_{h^{\otimes l}} \leq C(l) \max_{l_0,\dots l_m} |F_0|^{l_0}_{h^{\otimes d_0}} \dots |F_m|^{l_m}_{h^{\otimes d_m}} \|s_{l_0 \dots l_m}\|_{V_{l-\sum d_i l_i}},$$

其中 $\|\cdot\|_{V_k}$ 是有限维空间 V_k 上的一个固定范数，与 t 无关。

‘无消去性质’的阿基米德对应版本（参见推论 3.3）源自一种更微妙的近似正交性。我们采用与命题 6.6 相同的坐标设置 $B(1)^{n-m} \times (\mathbb{C}^*)^m$。在任意给定值附近

$$y = (y_0, \dots y_m), \quad \sum_0^m y_i = 1, \quad y_i \gtrsim \epsilon, \tag{29}$$

我们考虑式 (26) 中的一个小环带子区域,

$$U_{y,t} = \{y_i|\log|t|| \le -\log|z_i| \le y_i|\log|t|| + 1, \forall 1 \le i \le m\} \subset B(1)^{n-m} \times (\mathbb{C}^*)^m,$$

并在 $H^0(X_t, kL)$ 上定义内积

$$\|s\|^2_{y,t} = \int_{U_{y,t}} |s|^2_{h^{\otimes l}} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t.$$

我们可以安排 $U_{y,\ t}$，使其在 T^m 作用下保持对称：该作用旋转 $z_0, \dots z_m$，但保持它们的乘积不变。

引理 6.9。（几乎正交性 I）设 t 足够小，具体取值依赖于 ϵ, l。设 $s = F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m}\sigma$ 满足 $\sigma \in V_{l-\sum d_k l_k}$，其中 $l_0, \dots l_m$ 是非负整数，且至少有一个分量为零，$d_0 l_0 + \dots d_m l_m \le l$，并且 $\sigma \in V_{l-\sum d_k l_k}$。则

$$C(l)^{-1} \|\sigma\|_{V_{l-\sum d_k l_k}} \le |t|^{-\sum_0^m l_i y_i} \|s\|_{y,t} \le C(l) \|\sigma\|_{V_{l-\sum d_k l_k}}.$$

证明。在坐标中，我们可以将截面视为局部全纯函数，而积分范数可写为

$$\|s\|^2_{y,t} = \int_{U_{y,t}} |\sigma|^2 |z_0|^{2l_0} \dots |z_m|^{2l_m} e^{-2l\phi_h} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t.$$

注意到区域 $U_{y,\ t}$ 到 $E_J \subset M$ 的 ω_M-距离为 $O(|t|^\epsilon)$，并且根据 $V_{l-\sum d_i l_i}$ 的定义，σ 在 E_J 上不恒为零，因此，忽略相对误差为 $O(|t|^\epsilon)$ 的高阶项后，我们可以忽略 σ 和 ϕ_h 对变量 $z_0, \dots z_m$ 的依赖，将它们视为仅依赖于 $z_{m+1}, \dots z_n$ 的函数。于是积分基本上分解为一个乘积。σ 部分贡献一个因子 $\int_{B(1)} e^{-2l\phi_h} |\sigma|^2 \Omega_{E_J} \wedge \Omega^{E_J}$，它与 $\|\sigma\|^2_{V_{l-\sum d_i l_i}}$ 关于 $C(l)$ 一致等价。另一部分则贡献另一个成比例于

$$\int |z_0|^{2l_0} \dots |z_m|^{2l_m} \bigwedge_1^m \sqrt{-1} d\log z_i \wedge d\overline{\log z_i}.$$

由于积分在一个二进尺度内进行，该积分与 $|t|^{2l_0 y_0} \dots |t|^{2l_m y_m}$ 一致等价。

□

引理 6.10。（几乎正交性 II）设 t 足够小，其大小取决于 ϵ、l。设 $s = F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m}\sigma$ 和 $s' = F_0^{l'_0} \dots F_m^{l'_m}\sigma'$ 如引理 6.9 中所定义。则内积

$$|\langle |t|^{-\sum l_i y_i} s, |t|^{-\sum l'_i y_i} s' \rangle_{y,t}| \le C(l)|t|^\epsilon \|\sigma\| \|\sigma'\|,$$

除非 $(l_0, \dots l_m) = (l'_0, \dots l'_m)$。

证明。如引理 6.9 中一样，该内积基本上可拆分为一个乘积，其误差由 $C(l)$ $|t|^\epsilon \|\sigma\| \|\sigma'\|$ 控制。对我们而言，有关的因子是

$$\int (\frac{1}{z_1 \dots z_m})^{l_0} z_1^{l_1} \dots z_m^{l_m} \overline{(\frac{1}{z_1 \dots z_m})^{l'_0} z_1^{l'_1} \dots z_m^{l'_m}} \bigwedge_1^m \sqrt{-1} d\log z_i \wedge d\overline{\log z_i}.$$

根据傅里叶正交性，仅当下式成立时该表达式才非零:

$$l_1 - l_0 = l'_1 - l'_0, \dots, l_m - l_0 = l'_m - l'_0,$$

即 $(l_0, \dots l_m) = (l'_0, \dots l'_m)$ 模 $\mathbb{R}(1, 1 \dots 1)$。但根据假设，$\min_i l_i = \min_i l'_i = 0$，所以 $(l_0, \dots l_m) = (l'_0, \dots l'_m)$。

□

推论 6.11。（无消去）设 t 足够小，具体取值取决于 ϵ, l。给定截面 s 的一个分解，如式 (28) 所示，则

$$\max_{l_0,\dots l_m} \|s_{l_0,\dots l_m}\|_{V_{l-\sum l_i d_i}} |t|^{\sum l_i y_i} \le C(l) \|s\|_{y,t}.$$

证明。由近似正交性，

$$\begin{aligned}\|s\|_{y,t}^2 \ge & (1 - C(l)|t|^{\epsilon}) \sum \left\| F_0^{l_0} \dots F_m^{l_m} s_{l_0,\dots l_m} \right\|_{y,t}^2 \\ \ge & C(l)^{-1} \sum \|s_{l_0,\dots l_m}\|_{V_{l-\sum d_i l_i}}^2 |t|^{2\sum l_i y_i}.\end{aligned}$$

□

以下结论将是证明主要定理 1.1 的关键要素。

命题 6.12. 给定任意小的 ϵ 和大的 l，对于依赖于 ϵ、l 的充分小的 t，以下结论成立。对于任意给定的 $z \in X_t$，存在 $(l_0, \dots l_m)$，使得对于定义域 (29) 中任意的 $y = (y_0, \dots y_m)$，在 $z \in X_t$ 处的 ψ_t 有一个上界，

$$\psi_t(z) \le \frac{-1}{|\log|t||}\phi_t(z) + u(y) + \sum \frac{l_i}{l} \frac{\log |F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z)}{|\log|t||} + \frac{\sum l_i y_i}{l} + (\frac{C}{l} + C\epsilon). \quad (30)$$

常数 C 与 t、z、ϵ、l 无关，y.

证明。给定任意 $z \in X_t$，我们考虑通过命题 6.7 中的 Ohsawa-Takegoshi 方法构造的截面 $s \in H^0(X_t, lL)$，并按照 (28) 将其分解。在小环域 $U_{y,\ t}$ 内，小振荡估计

$$|\frac{1}{|\log|t||}\phi_t - u(y_0, \dots y_m)| \lesssim \epsilon,$$

如 (27) 中那样成立，并且由命题 6.6 可知，在 $U_{y,\ t}$ 上有 $\psi_t \le C\epsilon$。因此

$$\begin{aligned}&\int_{X_t} |s|_{h^{\otimes l}}^2 e^{-2l(\phi_t + |\log|t||\psi_t)} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t \\ \ge & e^{-Cl|\log|t||\epsilon - 2l|\log|t||u(y)} \int_{X_t} |s|_{h^{\otimes l}}^2 \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t \\ \ge & e^{-Cl|\log|t||\epsilon - 2l|\log|t||u(y)} \int_{U_{y,t}} |s|_{h^{\otimes l}}^2 \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t.\end{aligned}$$

取对数并重新整理，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\log\|s\|_{y,t} \le & \frac{1}{2l}\log \int_{X_t} |s|_{h^{\otimes l}}^2 e^{-2l(\phi_t + |\log|t||\psi_t)} \sqrt{-1}^{n^2} \Omega_t \wedge \overline{\Omega}_t + |\log|t||u(y) + C|\log|t||\epsilon. \\ \le & -(\phi_t + |\log|t||\psi_t)(z) + |\log|t||u(y) + \frac{C}{l}|\log|t|| + C|\log|t||\epsilon.\end{aligned}$$

应用推论 6.11 中的无消去性质，

$$\begin{aligned}&\max_{l_0,\dots l_m} \frac{1}{l}\log\|s_{l_0,\dots l_m}\|_{V_{l-\sum d_i l_i}} + \frac{\sum l_i y_i}{l}\log|t| \le \frac{1}{l}\log\|s\|_{y,t} + C(l) \\ \le & -(\phi_t + |\log|t||\psi_t)(z) + |\log|t||u(y) + \frac{C}{l}|\log|t|| + C|\log|t||\epsilon + C(l).\end{aligned}$$

另一方面，根据构造， $|s|_{h^{\otimes l}}(z) = 1$，因此引理 6.8 的三角不等式蕴含

$$\max_{l_0,\dots l_m} \sum_0^m l_i \log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z) + \log\|s_{l_0,\dots l_m}\|_{V_{l-\sum d_i l_i}} \geq -C(l).$$

对比上述两个不等式，我们可以找到某个 l_i，它取决于 z 但不取决于 y，使得

$$\sum_0^m \frac{l_i}{l}\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z) \geq -C(l) - \frac{1}{l}\log\|s_{l_0,\dots l_m}\|_{V_{l-\sum d_i l_i}}$$
$$\geq (\phi_t + |\log|t||\psi_t)(z) - |\log|t||u(y) + \frac{\sum l_i y_i}{l}\log|t| - (\frac{C}{l}|\log|t|| + C|\log|t||\epsilon + C(l)).$$

重新整理后，

$$\psi_t(z) \leq \frac{-1}{|\log|t||}\phi_t(z) + u(y) + \sum \frac{l_i}{l}\frac{\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z)}{|\log|t||} + \frac{\sum l_i y_i}{l} + (\frac{C}{l} + C\epsilon + \frac{C(l)}{|\log|t||}).$$

当 t足够小时，项 $\frac{C(l)}{\|\log|t|\|}$可以吸收到 Cl^{-1}中。 □

6.4 全局 C^0-收敛

让我们梳理一下迄今为止的进展。根据推论 5.4、5.8，NA CY势$\phi_{CY,0}$是$\frac{1}{\log|t|}\phi_t$在 C^0-混合拓扑下的极限。由于$L \to X_t$上的 CY 度量由厄米度量定义为

$$h_{CY,t} = he^{-2(\phi_t + |\log|t||\psi_t)},$$

定理 1.1归结为证明

命题 6.13. $\|\psi_t\|_{C^0} \to 0$ 当 $t \to 0$时。

证明。根据构造， $p = (-\frac{l_0}{l}, \dots -\frac{l_m}{l}) \in \Delta^\vee$。由于 u在 Δ上是 Lipschitz 连续的，且定义域 (29) 是通过对 Δ进行 ϵ-收缩得到的，因此我们看到，对于任意 $p \in \Delta^\vee$，

$$\sup_y \langle y, p\rangle - u(y) \geq u^*(p) - C\epsilon.$$

我们先利用上界 (30)，并在定义域 (29) 中对 y 进行优化，从而得到

$$\psi_t(z) \leq \frac{-1}{|\log|t||}\phi_t(z) - u^*(-\frac{l_i}{l}) + \sum \frac{l_i}{l}\frac{\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z)}{|\log|t||} + (\frac{C}{l} + C\epsilon).$$

令 $x_i = -\frac{\log|F_i|_{h^{\otimes d_i}}(z)}{\log|t|}$，则上式变为

$$\psi_t(z) \leq -u(x) - u^*(-\frac{l_i}{l}) + \sum_0^m \frac{-l_i}{l}x_i + (\frac{C}{l} + C\epsilon).$$

根据构造

$$u(x) = \max_{p\in\Delta^\vee}\langle p, x\rangle - u^*(p) \geq -u^*(-\frac{l_i}{l}) + \sum_0^m \frac{-l_i}{l}x_i,$$

因此，当 t 足够小（其大小取决于 l、ϵ）时， $0 \leq \psi_t(z) \leq \frac{C}{l} + C\epsilon$。我们选取 l，使其与 ϵ^{-1} 同阶。由于 ϵ 可以任意小，我们推得 $\|\psi_t\|_{C^0} \to 0$，其中 $t \to 0$。 □

7 进一步讨论

我们讨论其与近期一些文献的联系，并提出若干尚待解决的问题。

7.1 最优传输解的正则性

我们汇总一些关于最优传输问题的评论：

- 在大复结构极限 $m = n$ 环面 Fano 超曲面 [28][1], 的类似问题中，人们注意到，解的梯度也诱导出一种墙室结构，这与在 SYZ 底空间上寻找典范奇异仿射结构的问题密切相关。尽管该背景下的最优正则性结果尚未得到完全理解，Andreasson-Hultgren [1, 截面 8] 对仿射结构中余维二奇点的预期提出了一些挑战，并提出在某些情况下奇异集可能更大。

- 引理 4.7 中的正则性很可能远非最优。例如，基于与 Caffarelli [8], 的类比，人们可能预期 u 在 Δ的内部是严格凸的；然而，Caffarelli 的结果并不能直接适用，因为它假设了全局双侧密度界。

7.2 小复结构极限

Sun-Zhang [37] 近期取得的突破，为特殊情形 $m = 1$ 下 Calabi–Yau 度量的拼接构造提供了令人满意的方案，即

$$X_t = \{F_0F_1 + tF = 0\} \subset M.$$

从代数几何的角度看，Calabi–Yau 超曲面族 X_t 在中心纤维中退化为 $E_0 \cup E_1$ 。拼接过程涉及以下要素：

- 非紧空间 $E_0 \setminus E_1$ （分别为 $E_1 \setminus E_0$）可以视为 Fano 流形中去掉一个光滑反典范除子后的补集，因此承载着 Tian-Yau 度量 [38], ；其渐近几何由 Calabi–Yau 流形 $E_0 \cap E_1$上的正线丛全空间上的 Calabi 拟设刻画。这些 Tian-Yau 度量是 Calabi–Yau 度量在远离 $E_0 \cap E_1$的区域内的缩放后局部模型，该度量定义在 X_t 上。

- X_t 在除子交 $E_0 \cap E_1$ 附近的区域由一个不完备的 Ooguri-Vafa 型度量建模，该度量通过 Gibbons-Hawking 型拟设构造而成。这个 Ooguri-Vafa 型度量具有 S^1对称性，其不动点轨迹沿着 $\{F = F_0 = F_1 = 0\} \subset E_0 \cap E_1$。不动点轨迹的邻域看起来是由高度塌缩的 Taub-NUT 度量构成的纤维化，底空间为 $E_0 \cap E_1 \cap \{F = 0\}$。Ooguri-Vafa 型度量有两个不完备端，分别与两个 Tian-Yau 区域的渐近线相匹配。

我们的主要结果的 $m = 1$ 特殊情形与这一图景的契合方式如下。最优传输问题的解在 (18) 中得到了明确计算。就势函数 u而言，除去 x 的线性函数（它们会产生几乎多重调和函数，因此对 K¨ahler 度量影响甚微），在两个区间 u 上，解都与指数为$\frac{n+1}{n}$ 的幂函数成正比。这个解编码了 [37], 中出现的 Calabi 拟设度量，它几乎占据了 X_t 中 $0 < |t| \ll 1$的全部测度。.

我们的势函数理论描述无法体现 Tian-Yau 核心区域或 Ooguri-Vafa 型度量的全部细微之处。Tian-Yau 部分出现在区间 $[0, 1]$, 的两端，而 Ooguri-Vafa 型度量则出现在过渡点 $x = \frac{d_1}{d_0+d_1}$。这些效应发生在微观长度尺度上，无法通过全局极限势函数观察到。

7.2.1 $m > 1$ 时的预期图景：Ooguri-Vafa 型度量

对于 $m > 1$，$x = \frac{d_1}{d_0+d_1}$ 过渡点据称会被各个腔室之间的墙取代。我们预计，沿着分隔两个腔室 Δ_i、Δ_j的墙，可能会看到类似于 $m = 1$情形的 Ooguri-Vafa 型度量，其中包含一个纤维化，其纤维是由若干高度塌缩的 Taub-NUT 度量与塌缩圆柱（$\mathbb{C}^*$）$^{m-1}$构成的某种（扭曲）乘积，底空间为 $\{F_0 = \ldots = F_m = F = 0\}$。$m > 1$ 的一个新特征是墙之间的三重点；我们猜测，这里可能会出现一个纤维化，其纤维是 Taub-NUT 型度量在 $\mathbb{C}^3$ [23] 上的某种（扭曲）乘积与塌缩圆柱（$\mathbb{C}^*$）$^{m-2}$构成的乘积，底空间为 $\{F_0 = \ldots = F_m = F = 0\}$。墙之间更深层的交集可能呈现出一种归纳模式。

7.2.2 广义 Tian-Yau 度量

在最近与 Collins 的合作研究中 [10] ，我们构造了一种 Tian-Yau 度量的推广，它定义在紧致 Fano 流形中一个反典范除子 D 的补集上，其中 D 由两个横截光滑除子分支组成。在我们的主要设定的 $m = 2$ 情形下，这一构造适用于 $E_0 \setminus (E_1 \cup E_2)$以及其循环置换。其渐近几何是半显式的，涉及超几何函数。

$m = 2$ 区间 $[0, 1]$, 两个端点的对应物是三角形 $\partial\Delta$。可以设想，在这个三角形的一般部分，我们会看到通常 Tian-Yau 度量在 $E_0 \cap E_1 \setminus E_2$ 上的参数化版本（以及其循环置换等）；但在 $\partial\Delta$上的特殊点，广义 Tian-Yau 构造可能会作为局部模型出现。

7.3 Calabi–Yau 度量的数值计算

物理学家们对在某个极化退化极限 $t \to 0$ 下数值计算 Calabi–Yau 度量颇感兴趣。一种传统策略是通过 Fubini-Study 近似，用一个大厄米矩阵在 $H^0(X_t, kL)$ 上表示 CY 势，从而明确保持 K¨ähler 性质，其中 $k \gg 1$，然后尝试数值求解 Monge-Amp`ère 方程 [13]。然而，对于固定的

k，当 $t \to 0$ 时，Fubini-Study 体积形式与 Calabi–Yau 体积形式截然不同：在混合拓扑下，Fubini-Study 体积形式的极限是原子测度，而归一化的 Calabi–Yau 体积形式的极限是勒贝格测度。因此，为了在 t 较小时达到合理的精度，预计需要取 k large，这在计算上会非常昂贵。

我们的结果提出了一种截然不同的视角：只要人们关注的是 CY 度量的 K¨ahler 势函数，并且误差不超过较小的 C^0，那么只需解决一个最优传输问题即可。由于 Kontorovich 公式将其转化为具有凸成本的线性优化问题，因此计算效率很高。

如果能够进一步开发数值方法，以捕捉微观度量信息，例如 Tian-Yau 核心区域或 Ooguri-Vafa 型颈部区域，那将很有意思。

参考文献

[1] Rolf A., Jakob H. 单项式-Amp`ère 方程的可解性及自反多面体上的热带仿射结构。arXiv:2303.05276.[2] Boucksom, S.; Favre, C.; Jonsson, M. 非阿基米德几何中的奇异半正度量。《代数几何杂志》25 (2016), 第 1 期, 77–139.[3] Boucksom, S.; Jonsson, M. 退化体积形式族的热带与非阿基米德极限。《´理工学院数学年刊》4 (2017), 87–139.[4]Boucksom, S.; Favre, C.; Jonsson, M. 一个非阿基米德单项式-Amp`ère 方程的解。《美国数学会杂志》28 (2015), 第 3 期, 617–667.[5] Boucksom, S.; Favre, C.; Jonsson, M. 非阿基米德单项式-Amp`ère 方程。非阿基米德与热带几何，31–49，Simons 研讨会，Springer, [Cham], 2016。[6] Boucksom, S.; Eriksson, D. 非阿基米德几何中的范数空间、上同调行列式与 Fekete 点。《数学进展》378 (2021), 论文编号 107501，共 124 页。[7] Caffarelli, L A. 解单项式-Amp W^{2}的内部^{p} ère 方程的估计。《数学年刊》(第 2 辑) 131 (1990), 第 1 期, 135–150.[8] Caffarelli, L A. 具有凸势函数的映射的正则性。《美国数学会杂志》5 (1992), 第 1 期, 99–104.[9] Chambert-Loir, A.; Ducros, A. Berkovich 空间上的实微分形式与流。arXiv:1204.6277.[10] T. C. Collins, Y. Li. 两个除子的补集中的完备 Calabi-Yau 度量。arXiv:2203.10656.[11] De Philippis, G.; Figalli, A. 单项式-Amp`ère 方程及其与最优传输的联系。《美国数学会通报》(新系列) 51 (2014), 第 4 期, 527–580.

[12] Donaldson, S.; Sun, Song. Kähler 流形的 Gromov-Hausdorff 极限与代数几何。《数学学报》213 (2014)，第 1 期，63–106 页。[13] Douglas, M R.; Karp, R L.; Lukic, S.; Reinbacher, R. 数值 Calabi-Yau 度量。《数学物理杂志》49 (2008)，第 3 期，032302，共 19 页。[14] Eyssidieux, P.; Guedj, V.; Zeriahi, A. 奇异 Kähler-Einstein 度量。《美国数学会杂志》22 (2009)，第 3 期，607–639 页。[15] Favre, C. 混合空间中复射影空间自同态的退化。（英文摘要）《朱西厄数学研究所杂志》19 (2020)，第 4 期，1141–1183 页。[16] Gross, M. 镜像对称与 Strominger-Yau-Zaslow 猜想。《数学当前发展》2012，133–191 页，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2013。[17] Gross, M.; Wilson, P. M. H. $K3$ 曲面的复结构大极限。《微分几何杂志》55 (2000)，第 3 期，475–546 页。[18]Guti´errez, C E. Monge-Amp`ère 方程。MR 1829162] 的第二版。非线性微分方程及其应用进展，第 89 卷。Birkh¨ auser/Springer， [Cham], 2016。[19] Hein, H-J; Sun, S.; Viaclovsky, J.; Zhang, R. K3 曲面上的幂零结构与塌缩 Ricci 平坦度量。《美国数学会杂志》35 (2022)，第 1 期，123–209 页。[20] J. Hultgren, M. Jonsson, E. Mazzon, N. McCleerey. 一类 Calabi-Yau 超曲面的热带与非阿基米德 Monge-Amp`ère 方程。arXiv:2208.13697。[21]Ko lodziej, S. 复 Monge-Amp`ère 方程。《数学学报》180 (1998)，第 1 期，69–117 页。[22] Ko lodziej, S. 紧致 Kähler 流形上复 Monge-Amp`ère 方程解的稳定性。《印第安纳大学数学杂志》52 (2003)，667–686 页。[23] Li, Y. Calabi-Yau 三维流形的 SYZ 几何：Taub-NUT 与 Ooguri-Vafa 型度量。已被美国数学会回忆录接受。[24] Li, Y. Fermat 族中 Calabi-Yau 超曲面的 Strominger-Yau-Zaslow 猜想。《数学学报》229 (2022)，第 1 期，1–53 页。[25]Li, Y. 度量 SYZ 猜想与非阿基米德几何。arXiv:2007.01384，已被杜克大学接受。[26] Li, Y. 一致 Skoda 可积性与 Calabi-Yau 退化。已被《分析与偏微分方程》接受。[27] Li, Y; Tosatti, V. 退化的 Calabi-Yau 度量的直径界。arXiv:2006.13068。[28]Li, Y. 某些环面 Fano 超曲面的度量 SYZ 猜想。arXiv:2301.12983。

[29] Mooney, C. Monge-Amp`ère 方程奇异解的部分正则性。《纯粹与应用数学通讯》68（2015），第 6 期，1066–1084。[30] Nicaise, J.; Xu, C. 代数簇退化的本质骨架。《美国数学杂志》138（2016），第 6 期，1645–1667。[31] Nicaise, J.; Xu, C.; Yu, Tony Yue. 非阿基米德 SYZ 纤维化。《组合数学》155（2019），第 5 期，953–972。[32] Pille-Schneider, L. Calabi-Yau 超曲面的混合环面簇与非阿基米德 SYZ 纤维化。arXiv:2210.05578。[33] Pille-Schneider, L. Calabi-Yau 超曲面的混合环面簇与非阿基米德 SYZ 纤维化。arXiv:2210.05578。[34] Rong, X.; Zhang, Y. Calabi-Yau 流形极值跃迁与翻转的连续性。附录 B 由 Mark Gross 撰写。《微分几何杂志》89（2011），第 2 期，233–269。[35] Savin, O. 椭圆方程的小扰动解。《偏微分方程通讯》32（2007），第 4–6 期，557–578。[36] Strominger, A.; Yau, S-T.; Zaslow, E. 镜像对称是 T-对偶。《核物理 B》479：243–259，1996。[37] Sun, S.; Zhang, R. 复结构退化与 Calabi-Yau 度量的塌缩。arXiv:1906.03368。[38] Tian, G.; Yau, S-T. Ricci 曲率为零的完备 K¨ahler 流形。II。《数学发明》106（1991），第 1 期，27–60。[39]Vilsmeier, C. 实 Monge–Amp`ère 算子与非阿基米德 Monge–Amp`ère 算子的比较。《数学杂志》（2020）。[40] Yau, S-T. 关于紧 K¨ahler 流形的 Ricci 曲率与复 Monge-Amp`ère 方程。I。《纯粹与应用数学通讯》31（1978），第 3 期，339–411。