arXiv:2305.02272v1 [math.DG] 3 May 2023

$\mathbb{Q}^N(c)$中的一类极小超曲面

C. do Rei Filho 和 S. Canevari

2023年5月4日

摘要

我们证明，具有非零且互不相同的三个主曲率的极小超曲面 f: $M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 不能等距浸入$\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ $\tilde{c} \neq c$。对于其他情形，我们给出了这类超曲面的描述。

1 引言

我们用 $\mathbb{Q}^N(c)$ 表示一个维数为 N 、截面曲率为常数 c 的黎曼空间形式。对于超曲面 $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$，我们始终指将一个维数为 n 的黎曼流形 M^n 等距浸入到 $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ 中。我们称 f 为极小超曲面，如果它在 M^n 的每一点的平均曲率均为零。

本文的主要目的之一是探讨以下问题：

对于哪些维数为 $n \geq 2$ 的极小超曲面 $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$，存在另一个等距浸入 $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(\tilde{c})$，使得 $\tilde{c} \neq c$?

对于 $n = 2$，Lawson [1] 证明，给定问题中所述的 f，存在一个由 $\tilde{f}$ 构成的二参数族，其平均曲率由 $\tilde{H} = \sqrt{c - \tilde{c}}$. 给出。对于 $n \geq 4$，这个问题也已得到解决。事实上，do Carmo 和 Dajczer 在 [3]，研究了这一问题，但没有假设其中一个浸入是极小的，并证明了 M^n 是共形平坦的。早在 [2]，，同一作者就证明，极小旋转超曲面是共形平坦流形的唯一极小等距浸入。本文将研究维数为 $n = 3$ 的超曲面的这一问题。

注意，问题的平凡解是嵌入 $i\colon \mathbb{Q}^3(c) \to \mathbb{Q}^4(c)$ 和$\tilde{i}\colon \mathbb{Q}^3(c) \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$，$c > \tilde{c}$，是脐的但非全测地。

为了构造这个问题更有趣的解，我们将关于单位向量 $v \in \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$ 的 $\mathbb{Q}^2(k) \subset \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$ 中的一条单位速曲线 $\gamma\colon I \to \mathbb{Q}^2(k) \subset \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$ 称为悬链线，其中高度函数 $\gamma_v = \langle \gamma, v \rangle$ 满足

$$\gamma_v \gamma_v'' + 3r\gamma_v + 2\gamma_v'^2 - 2\delta = 0,$$

其中 $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ 且 $r \in \mathbb{R}$。这里， $\epsilon_0 = 0$ 或 1 分别对应于 $k > 0$ 或$k < 0$。

使问题的一个解更有趣的方法如下：设 $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个极小旋转超曲面。我们有（参见 [2, 推论 4.4]），其剖面曲线 $\beta\colon I \to \mathbb{Q}^2(c) \subset \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$ of f 是一条相对于单位向量 $e_1 \in \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$ 的悬链线。设 β_1 为 β 相对于单位向量$e_1 \in \mathbb{R}^3_{\epsilon_0}$的高度函数。现在考虑旋转超曲面 $\tilde{f}\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$，它按照 [2], 中的构造，通过函数 β_1 M^3 f 得到。由此可知，由 和 f 诱导的第一基本形式相同（参见 [2, 推论 3.8]）。

下面的结果给出了这个问题的解。

定理 1. 设 $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个极小超曲面，且存在一个等距浸入 $\tilde{f}\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$，满足 $c \neq \tilde{c}$。那么， f 要么有一个主曲率为零，要么有一个重数至少为二的主曲率。此外，

a) 若 f 有一个重数为三的主曲率，则 $c > \tilde{c}$, f 是全测地的，而 f 是非全测地的脐的。*b)* 若 f 有一个重数为二的主曲率，则 f 是一个旋转超曲面，其剖面曲线是 $\mathbb{Q}^2(c)$中的全测地曲面 $\mathbb{Q}^4(c)$内的一条 $c\delta-$悬链线；而 $\tilde{f}$ 是一个旋转超曲面，其剖面曲线是 $\mathbb{Q}^2(\tilde{c})$中的全测地曲面 $\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$内的一条 $c\tilde{\delta}-$悬链线。*c)* 若 f 有一个为零的主曲率，则 $c > \tilde{c}$, f 是 $\mathbb{Q}^4(c)$中的脐超曲面 $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$内、以极小曲面为底的广义锥， $\bar{c} \geq c$，并且f 是一个旋转超曲面，其剖面曲线是 $\mathbb{Q}^2(\tilde{c})$中的全测地曲面 $\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$内的一条 $c-$螺线。

我们将 $\mathbb{Q}^4(c)$ 中脐的超曲面 $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$ 上以曲面 $g\colon M^2 \to \mathbb{Q}^3(\bar{c})$ 为底的广义锥定义为由映射 $G\colon M^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^4(c)$ 参数化的超曲面（限制在正则点子集上），其中

$$G(x, t) = \exp_{g(x)}(t\xi(g(x))),$$

其中 ξ 是嵌入 $i\colon \mathbb{Q}^3(\bar{c}) \to \mathbb{Q}^4(c)$ 的单位法向量场，而 exp 是 $\mathbb{Q}^4(c)$ 的指数映射。若 γ 是关于单位向量 v 的 c-螺线，且位于 $\mathbb{Q}^2(k)$ 上，则称其满足 $\gamma_v'' + c\gamma_v = 0$。

本文组织如下：在第 2 节中，我们介绍一些将在其他各节中使用的结果。在第 3 节中，我们研究具有三个互异且非零主曲率的情形，并证明在此情形下问题无解。在第 4 节中，我们研究主曲率具有重数或为零的情形，描述问题的解，并证明定理 1。文章末尾附有一个附录，其中包含一些较为冗长的表达式；在前面各节中，我们避免将这些表达式写出。

2 预备知识

首先我们回顾全纯超曲面的概念。如果超曲面 $f\colon\ M^n \to \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ 是全纯的，则称其为全纯超曲面，如果 M^n 带有全局正交坐标 $(u_1, \ldots, u_n)$，使得坐标向量场 $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial u_j}$ 将 f 的第二基本形式 II 对角化。

令 $v_j = \|\partial_j\|$ 并由 $II(\partial_j, \partial_j) = V_j v_j$, $1 \le j \le n$ 定义 $V_j \in C^\infty(M)$。那么 f 的第一基本形式和第二基本形式为

$$I = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 du_i^2 \quad \text{and} \quad II = \sum_{i=1}^{n} V_i v_i du_i^2. \tag{1}$$

记 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 和 $V = (V_1, \ldots, V_n)$。我们称 (v, V) 为与 f 相关联的一对。下一个结果是众所周知的。

命题2. 三元组 (v, h, V)，其中 $h_{ij} = \dfrac{1}{v_i}\dfrac{\partial v_j}{\partial u_i},$，满足偏微分方程组

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji} v_j, \quad (ii)\ \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki} h_{kj} + V_i V_j + c\, v_i v_j = 0, \\ (iii)\ \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij} h_{jk}, \quad (iv)\ \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji} V_j, \quad 1 \le i \ne j \ne k \ne i \le n. \end{cases} \tag{2}$$

反之，若 (v, h, V) 是单连通开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 (2) 的解，且对所有 $1 \le i \le n$，$v_i \ne 0$ 处处成立，则存在一个全纯超曲面 $f\colon\ U \to \mathbb{R}^{n+1}$，其第一基本形式和第二基本形式由 (1)。给出

以下结果刻画了具有三个互异主曲率的超曲面 $f\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$：是否存在另一个等距浸入 $\tilde{f}\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$，使得 $c \ne \tilde{c}$。

定理 3 ([4])。设 $f\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个单连通的全脐超曲面，其关联对 (v, V) 满足

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i = 0 \quad and \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 = (c - \tilde{c}), \tag{3}$$

其中 $\tilde{c} \ne c$ 且 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, -1, 1)$。那么 M^3 存在到 $\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ 中的等距浸入，且在全等意义下唯一。

反之，若 $f\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个具有三个不同主曲率的超曲面，且存在一个等距浸入 $\tilde{f}\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$，则 f 局部地是一个全纯超曲面，其关联对 $(v,\ V)$ 满足 (3)。

3. 情形：三个非零且互异的主曲率

以下命题将会很有用。

引理4。 设 $f\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个单连通的整体坐标超曲面，具有三个非零且互异的主曲率，其关联对$(v,\ V)$满足

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_i v_i^2 = 1,\ \sum_{i=1}^{3}\delta_i v_i V_i = 0,\ \sum_{i=1}^{3}\delta_i V_i^2 = (c-\tilde{c})\ \textit{and}\ \sum_{i=1}^{3}\frac{V_i}{v_i} = 0 \tag{4}$$

其中 $c \neq \tilde{c}$ 以及$(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3) = (1,\ -1,\ 1)$。 则 $v_1 \neq v_3$,

$$V_2 = \frac{v_2(v_1^2 - v_3^2)}{v_1(v_2^2 + v_3^2)}V_1,\ V_3 = -\frac{v_3(v_1^2 + v_2^2)}{v_1(v_2^2 + v_3^2)}V_1 \tag{5}$$

and

$$\Theta := -v_1^2 + v_1^4 + v_2^2 - 10v_1^2v_2^2 + 9v_1^4v_2^2 + v_2^4 - 9v_1^2v_2^4 \neq 0. \tag{6}$$

此外:

a) If $c - \tilde{c} < 0$ then $v_k \neq v_2$, $k \in \{1,3\}$, $v_i^2 - \delta_i \neq 0$ and $3v_i^2 - \delta_i \neq 0$.

b) If $c - \tilde{c} > 0$, then $3v_k^2 - \delta_k \neq 0$ and $v_k \neq v_2$, $k \in \{1,3\}$, in an open and dense subset of M^3.

证明。 方程（4）中的第二个和第四个方程意味着

$$v_i(\delta_j v_j^2 - \delta_k v_k^2)V_j + v_j(\delta_i v_i^2 - \delta_k v_k^2)V_i = 0. \tag{7}$$

由此得到方程（5）。 $v_1 \neq v_3$ 这一事实由方程（5）的第一个方程推出。此外，要得到（6），只需将（5）中的表达式代入方程（4）的第三个方程。

最初假设 $c < \tilde{c}$。 如果 $v_1 = v_2$，那么 $v_3 = 1$，并且中的方程可化简为 (5)

$$V_2 = \frac{v_1^2 - 1}{v_1^2 + 1}V_1 \ \text{ and } \ V_3 = -\frac{2v_1}{v_1^2 + 1}V_1.$$

将这些表达式代入（4）的第三个方程，我们得到一个矛盾。其证明方式与 $v_2 \neq v_3$ 以及与 $3v_i^2 - \delta_i \neq 0$. 相同。条目（a）中的倒数第二条信息源于以下事实：对于 $i \neq j$， $v_i \neq v_j$。

现在假设 $c > \tilde{c}$。 如果 $3v_k^2 - \delta_k = 0$ and $k \in \{1,3\}$，由 (5) 可得

$$\frac{V_i}{v_i} = \frac{V_j}{v_j} = \sqrt{\frac{c-\tilde{c}}{2}},\ k \neq i \neq j \neq k,$$

这与假设矛盾。

最后说明，满足偏微分方程组的三元组（v、 h、 V），其中 $h_{ij} = \dfrac{1}{v_i}\dfrac{\partial v_j}{\partial u_i}$。

$$
\begin{cases}
\text{(i)}\ \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji} v_j, \\
\text{(ii)}\ \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki} h_{kj} + V_i V_j + c v_i v_j = 0, \\
\text{(iii)}\ \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij} h_{jk}, \\
\text{(iv)}\ \frac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji} V_j, \quad 1 \le i \ne j \ne k \ne i \le 3, \\
\text{(v)}\ \delta_i \dfrac{\partial v_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} v_j + \delta_k h_{ik} v_k = 0, \\
\text{(vi)}\ \delta_i \frac{\partial V_i}{\partial u_i} + \delta_j h_{ij} V_j + \delta_k h_{ik} V_k = 0,
\end{cases} \tag{8}
$$

其中，方程 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 是由 f 为一个具有 (v, V) 作为关联对的全纯超曲面这一条件推导得出的（参见命题2），而 (v) 和 (vi) 则是通过对 (4) 中的第一个和第三个方程求导得到的。

假设存在一个开集 $U \subset M^3_2$，使得 $v_1 = v_2$。那么 $v_3 = 1$，并且利用 (5)，可写为 $V_1 = -\dfrac{1+v_1^2}{2v_1} V_3$ 和 $V_2 = \dfrac{1-v_1^2}{2v_1} V_3$。将这些数据代入 (4) 的第三个方程，得到 $V_3 = \pm\sqrt{\dfrac{c-\tilde{c}}{2}}$。因此，由 (8) 中的 (i)、(v) 和 (vi) 式可知，$h_{13} = h_{23} = 0$ 和 $h_{31} = h_{32} = 0$。将这些信息代入方程 (ii)，便得到矛盾。同理可证，在一个开稠密子集 M^3. 中，$v_3 \ne v_2$。

□

命题 5。设 $f\colon\ M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 是一个具有三个非零且互异主曲率的单连通全纯脐超曲面，其关联对 $(v,\ V)$ 满足 *(4)*。设 $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，使得

$$
\alpha_i = \frac{1}{v_j \phi_j} h_{ij} \tag{9}
$$

其中 $\phi_j = (\delta_j - v_j^2)(\delta_j - 3v_j^2)$，且 $1 \le i \ne j \le 3$。那么，v，α 这一对满足 V_1

满足偏微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = v_j v_i \phi_i \alpha_j, \\
\dfrac{\partial v_i}{\partial u_i} = -\delta_i(\delta_j v_j^2 \phi_j + \delta_k v_k^2 \phi_k)\alpha_i, \\
\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u_j} = v_j(\phi_j - 5\phi_k - 8\delta_k v_k^2 + 4)\alpha_i \alpha_j, \\
\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u_i} = \dfrac{v_i \phi_i}{2\phi_j}(-8\delta_i v_i^2 + 8\delta_k v_k^2 - 5\phi_i - \phi_j + 5\phi_k)\alpha_j^2 \\
+\frac{v_i \phi_i}{2\phi_k}(-8\delta_i v_i^2 + 8\delta_j v_j^2 - 5\phi_i + 5\phi_j - \phi_k)\alpha_k^2 \\
-\dfrac{v_i}{2}(-8\delta_i v_i^2 - \phi_i + 5\phi_j + 5\phi_k)\alpha_i^2 + \dfrac{c\, v_i(\phi_i - \phi_j - \phi_k)}{2\phi_j \phi_k} \\
-\dfrac{1}{2v_j v_k \phi_j \phi_k}(-v_i \phi_i V_j V_k + v_j \phi_j V_i V_k + v_k \phi_k V_i V_j), \\
\dfrac{\partial V_1}{\partial u_1} = -\dfrac{V_1}{v_1}(2v_1^4 - 3v_1^6 - v_3^2 + v_1^2 v_3^2 + v_3^4)\alpha_1, \\
\dfrac{\partial V_1}{\partial u_i} = -\dfrac{\delta_i v_i \phi_1}{v_i^2 + v_j^2}(v_1^2 - \delta_j v_j^2) V_1 \alpha_i, \ i, j \neq 1.
\end{cases} \tag{10}
$$

其中 i， j， $k \in \{1,2,3\}$ 且 $i \neq j \neq k \neq i$。以及代数方程

$$
\alpha_1 F_1 = 0, \qquad \alpha_2 F_2 = 0 \qquad and \qquad \alpha_3 F_3 = 0, \tag{11}
$$

其中，函数 F_1、F_2、F_3： $M^3 \to \mathbb{R}$ 定义于附录中。

证明。根据引理 4， $\phi_i \neq 0$，对所有 i。三元组（v， h， V），其中 $h_{ij} = \dfrac{1}{v_i}\dfrac{\partial v_j}{\partial u_i}$，满足偏微分方程组 (8)。对 (4) 中的第四个方程求导，并利用方程组 (8) 中的方程，我们得到

$$
v_j \phi_j h_{ik} = v_k \phi_k h_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3. \tag{12}
$$

由方程组 (8) 的方程 (i) 和 (v)，结合 (9)，可得方程组 (10) 中对所有 i, j 的导数 $\dfrac{\partial v_i}{\partial u_j}$。类似地，我们可以利用方程组 (8) 的方程 (i) 和 (iii)、方程组 (10) 中已得到的方程以及 (9)，求出对所有 $i \neq j$ 的导数 $\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u_j}$ 的表达式。为计算对所有 i 的 $\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$，注意到方程组 (8) 的方程 ($ii$)，结合 (9) 和

（10）的其余方程，确定了线性方程组

$$\begin{cases} v_2\phi_2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}+v_1\phi_1\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u_2}=b_1 \\ v_3\phi_3\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}+v_1\phi_1\dfrac{\partial\alpha_3}{\partial u_3}=b_2 \\ v_3\phi_3\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial u_2}+v_2\phi_2\dfrac{\partial\alpha_3}{\partial u_3}=b_3 \end{cases} \tag{13}$$

对于未知数 $\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial u_i}$，对所有 i，以及函数 b_i，其形式为

$$\begin{aligned} b_1 &= v_1v_2\phi_2(5\phi_2-8v_2^2-4)\alpha_1^2+v_1v_2\phi_1(5\phi_1+8v_1^2-4)\alpha_2^2 \\ &\quad + v_1v_2\phi_1\phi_2\alpha_3^2+V_1V_2 \\ b_2 &= v_1v_3\phi_3(5\phi_3+8v_3^2-4)\alpha_1^2+v_1v_3\phi_1\phi_3\alpha_2^2 \\ &\quad + v_1v_3\phi_1(5\phi_1+8v_1^2-4)\alpha_3^2+V_1V_3 \\ b_3 &= v_2v_3\phi_2\phi_3\alpha_1^2+v_2v_3\phi_3(5\phi_3+8v_3^2-4)\alpha_2^2 \\ &\quad + v_2v_3\phi_2(5\phi_2-8v_2^2-4)\alpha_3^2+V_2V_3 \end{aligned}$$

然后，可以验证

$$\det\begin{pmatrix} v_2\phi_2 & v_1\phi_1 & 0 \\ v_3\phi_3 & 0 & v_1\phi_1 \\ 0 & v_3\phi_3 & v_2\phi_2 \end{pmatrix}=-2v_1v_2v_3\phi_1\phi_2\phi_3\neq 0,$$

并且，方程（10）的第四个方程是方程组（13）的唯一解。

剩下的工作是证明二元组（v，α）满足（11）。根据（10）中的方程，计算对所有 i、k、j 的混合偏导数 $\dfrac{\partial^2\alpha_i}{\partial u_j\partial u_k}=\dfrac{\partial^2\alpha_i}{\partial u_k\partial u_j}$，得到

$$\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_2\partial u_1}-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_1\partial u_2}=\frac{2v_2}{v_1(v_2^2+v_3^2)^2\phi_2^2\phi_3}\alpha_2F_2; \\ 0&=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_3\partial u_1}-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u_1\partial u_3}=\frac{2v_3}{v_1(v_2^2+v_3^2)^2\phi_2\phi_3^2}\alpha_3F_3; \\ 0&=\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_2\partial u_1}-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u_1\partial u_2}=\frac{-2v_2}{v_1(v_2^2+v_3^2)\phi_1^2\phi_3}\alpha_1F_1. \end{aligned}$$

□

命题 6。 在命题 *5* 的假设下，我们有：

(a) 不存在任何开子集 $U\subset M^3$，使函数 α_1、α_2 和 α_3 都恒等于零；

(b) 函数 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 在 M^3 上恒等于零；*(c)* 不存在任何开子集 $U \subset M^3$，使函数 α_1、α_2 和 α_3 中的两个恒等于零，而另一个处处不为零；*(d)* 不存在任何开子集 $U \subset M^3$，使函数 α_1、α_2 和 α_3 中的一个恒等于零，而其余函数处处不为零；

证明。(*a*) 设 $U \subset M^3$ 是一个开子集，在该子集上 α_1、α_2 和 α_3 均恒为零。于是，(10) 中的第四个方程化为

$$\begin{cases} c\,v_1v_2v_3(\phi_1-\phi_2-\phi_3) = -v_1V_2V_3\phi_1 + V_1v_2V_3\phi_2 + V_1V_2v_3\phi_3, \\ c\,v_1v_2v_3(-\phi_1+\phi_2-\phi_3) = v_1V_2V_3\phi_1 - V_1v_2V_3\phi_2 + V_1V_2v_3\phi_3, \\ c\,v_1v_2v_3(-\phi_1-\phi_2+\phi_3) = v_1V_2V_3\phi_1 + V_1v_2V_3\phi_2 - V_1V_2v_3\phi_3. \end{cases} \tag{14}$$

将 (14) 中的方程两两相加，我们得到

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2} = \frac{V_3}{v_3} \quad \text{or} \quad c = 0,$$

什么是矛盾。

（*b*）假设 α_1、α_2 和 α_3 在某点不为零，因此在某个开子集 $U \subset M^3$上也不为零。由于 α_1、α_2和 α_3在 U的任意一点都不为零，由（11）可知，在 U 上有 $F_i \equiv 0$，因此 α_1^2、α_2^2 和 α_3^2 满足线性方程组

$$\begin{cases} F_{11}\alpha_1^2 + F_{12}\alpha_2^2 + F_{13}\alpha_3^2 = -F_{14} - F_{15}, \\ F_{21}\alpha_1^2 + F_{22}\alpha_2^2 + F_{23}\alpha_3^2 = -F_{24} - F_{25}, \\ F_{31}\alpha_1^2 + F_{32}\alpha_2^2 + F_{33}\alpha_3^2 = -F_{34} - F_{35}. \end{cases} \tag{15}$$

注意到,

$$\det\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = 0 \text{ and } \det\begin{pmatrix} F_{14}+F_{15} & F_{12} & F_{13} \\ F_{24}+F_{25} & F_{22} & F_{23} \\ F_{34}+F_{35} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = a$$

其中

$$\begin{aligned} a \;=\; & 36\phi_1^3\phi_2\phi_3 v_1^6 V_1^2\Theta^2(-1+3v_1^2)(1+3v_2^2)(-1+3v_3^2)(v_1^2+v_2^2)(v_1^2-v_3^2)(v_2^2 \\ & +v_3^2)^4(4-15v_1^2+15v_1^4+15v_2^2-30v_1^2v_2^2+15v_1^4v_2^2+15v_2^4-15v_1^2v_2^4). \end{aligned}$$

令 P 为如下给出的二元多项式。

$$P(v_1,v_2) = 4-15v_1^2+15v_1^4+15v_2^2-30v_1^2v_2^2+15v_1^4v_2^2+15v_2^4-15v_1^2v_2^4.$$

由于方程组 (15) 有解，我们有 $a = 0$，因此 $P(\psi(p)) = 0$，其中 $\psi\colon\ U \to \mathbb{R}^2$，$\psi(p) = (v_1(p)\ v_2(p))$，对所有 $p \in U \subset M^3$.。由于 $P^{-1}(0)$

是代数曲线，因此可知 ψ 在每一点的秩为零或一。这意味着该矩阵任意一个 2 阶子矩阵的行列式

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right)_{1\le i\le 2;\, 1\le j\le 3},$$

等于零，即,

$$0 = v_1^2\phi_1 - v_2^2\phi_2 + v_3^2\phi_3 = \Theta,$$

根据 (6)，这是一个矛盾。

(*c*) 令 $U \subset M^3$ 为一个开子集，在该子集上， α_1 和 α_2 恒等于零，且$\alpha_3(p) \neq 0$对所有 $p \in U$均成立。在这种情况下，(10) 中的第四个方程分别代入 $i = 1$、2 和 $F_3 = 0$ 后，化简为

$$\begin{cases} A\alpha_3^2 + B + C = 0, \\ \widetilde{A}\alpha_3^2 + \widetilde{B} + \widetilde{C} = 0, \\ F_{33}\alpha_3^2 + F_{34} + F_{35} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_1\phi_1(12v_1^2 - 15v_1^4 + 12v_2^2 + 15v_2^4 - \phi_3)}{2\phi_3}, \\ B &= \frac{v_1\phi_1V_2V_3 - v_2\phi_2V_1V_3 - v_3\phi_3V_1V_2}{2v_2v_3\phi_2\phi_3} \\ C &= \frac{c\,v_1(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2\phi_2\phi_3}, \\ \widetilde{A} &= \frac{v_2\phi_2(-12v_1^2 + 15v_1^4 - 12v_2^2 - 15v_2^4 - \phi_3)}{2\phi_3}, \\ \widetilde{B} &= \frac{-v_1\phi_1V_2V_3 + v_2\phi_2V_1V_3 - v_3\phi_3V_1V_2}{2v_1v_3\phi_1\phi_3} \\ \widetilde{C} &= \frac{c\,v_2(-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3)}{2\phi_1\phi_3}. \end{aligned}$$

由（16）中的方程可得

$$\det \begin{pmatrix} A & B & C \\ \widetilde{A} & \widetilde{B} & \widetilde{C} \\ F_{33} & F_{34} & F_{35} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B+C \\ \widetilde{A} & \widetilde{B}+\widetilde{C} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{and} \qquad \det \begin{pmatrix} A & B+C \\ F_{33} & F_{34}+F_{35} \end{pmatrix} = 0.$$

计算行列式，并利用 V_2 和 V_3 关于 V_1 的表达式，分别得到

$$\begin{cases} 2cv_1v_2(1+3v_2^2)(1-v_1^2)(v_1^2+v_2^2)^2V_1^2P_1=0 \\ \\ \dfrac{v_2(v_1^2+v_2^2)}{v_1(v_2^2+v_3^2)^2\phi_3}[V_1^2P_2-cv_1^2(-1+9v_3^2)(v_2^2+v_3^2)^2]=0 \\ \\ v_1(v_1^2+v_2^2)\phi_1[V_1^2P_3+cv_1^2(v_2^2+v_3^2)^2P_4]=0, \end{cases} \tag{17}$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= -v_2^2-v_2^4+10v_2^2v_3^2+9v_2^4v_3^2+8v_3^4-9v_2^2v_3^4-9v_3^6-27v_3^8; \\ P_2 &= v_2^2+v_2^4+3v_3^2-v_2^2v_3^2-14v_3^4+18v_3^6; \\ P_3 &= -8v_2^2-40v_2^4-85v_2^6-86v_2^8-33v_2^{10}+96v_2^2v_3^2+416v_2^4v_3^2+763v_2^6v_3^2 \\ &\quad +672v_2^8v_3^2+225v_2^{10}v_3^2+16v_3^4-329v_2^2v_3^4-1128v_2^4v_3^4-1341v_2^6v_3^4 \\ &\quad -594v_2^8v_3^4-50v_3^6+901v_2^2v_3^6+2226v_2^4v_3^6+1323v_2^6v_3^6-2v_3^8 \\ &\quad -2118v_2^2v_3^8-3960v_2^4v_3^8-1620v_2^6v_3^8+90v_3^{10}+2268v_2^2v_3^{10} \\ &\quad +2430v_2^4v_3^{10}-54v_3^{12}-810v_2^2v_3^{12}; \\ P_4 &= 16v_2^2+37v_2^4+21v_2^6-16v_3^2-223v_2^2v_3^2-441v_2^4v_3^2-234v_2^6v_3^2 \\ &\quad +34v_3^4+600v_2^2v_3^4+1035v_2^4v_3^4+405v_2^6v_3^4+36v_3^6-459v_2^2v_3^6 \\ &\quad -567v_2^4v_3^6-54v_3^8+162v_2^2v_3^8, \end{aligned}$$

若 $c=0$，则由（17）中的方程可知 $P_2=0$ 和 $P_3=0$。我们有 P_2^{-1}(0) 和 P_3^{-1}(0) 是代数曲线。根据贝祖定理，$P_2^{-1}(0)\cap P_3^{-1}(0)$ 只有有限个点。不失一般性地假设 U 连通，我们得出函数 v_2 e v_3 在 U 中为常数，这与本命题的第（a）项矛盾。

如果 $c\neq 0$，那么由方程 (17) 可得 $P_1=0$. 对方程 $P_1=0$ 关于 u_3 求导，得到

$$\begin{aligned} 0 = &-v_2^2-16v_2^4-30v_2^6-15v_2^8+14v_2^2v_3^2+178v_2^4v_3^2+300v_2^6v_3^2+135v_2^8v_3^2 \\ &+32v_3^4+92v_2^2v_3^4-180v_2^4v_3^4-270v_2^6v_3^4-134v_3^6-186v_2^2v_3^6+54v_2^4v_3^6 \\ &-33v_3^8-891v_2^2v_3^8-972v_2^4v_3^8+459v_3^{10}+972v_2^2v_3^{10}-324v_3^{12} \end{aligned} \tag{18}$$

在 $c=0$ 的情形中采用相同的论证，并应用于方程 $P_1=0$ 和 (18)，即可得出该情形下的相同结论。

其他可能的情形也可用类似的方法得出。

(*d*) 令 $U\subset M^3$ 为一个开且连通的子集，其中 α_1 恒等于零，但对于所有 $p\in U$，$\alpha_2(p)\neq 0\neq\alpha_3(p)$。由 (11) 和 (10) 中的第四个方程可得，当 $i=1$ 时，$F_2=0$、$F_3=0$ 和 $\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}=0$，也就是说，$\alpha_2^2$ 和

α_3^2 满足线性方程组

$$\begin{cases} A\alpha_2^2 + B\alpha_3^2 + C = 0; \\ F_{22}\alpha_2^2 + F_{23}\alpha_3^2 + F_{24} + F_{25} = 0; \\ F_{32}\alpha_2^2 + F_{33}\alpha_3^2 + F_{34} + F_{35} = 0, \end{cases} \tag{19}$$

其中

$$A = \frac{v_1\phi_1}{2\phi_2}(12v_1^2 - 15v_1^4 - 12v_3^2 + 15v_3^4 - \phi_2);$$

$$B = \frac{v_1\phi_1}{2\phi_3}(12v_1^2 - 15v_1^4 + 12v_2^2 + 15v_2^4 - \phi_3);$$

$$C = \frac{v_1V_2V_3\phi_1 - V_1v_2V_3\phi_2 - V_1V_2v_3\phi_3}{2v_2v_3\phi_2\phi_3}.$$

方程组 (19) 有解这一事实意味着

$$\det\begin{pmatrix} A & B & C \\ F_{22} & F_{23} & F_{24}+F_{25} \\ F_{32} & F_{33} & F_{34}+F_{35} \end{pmatrix} = 0.$$

计算该行列式可得，对于所有 $p \in U$， $P(\psi(p)) = 0$，其中 $P = P(v_1, v_2)$ 是一个二元多项式

$$P = cR_1 - \tilde{c}R_2, \tag{20}$$

其中 R_1 和 R_2 在附录中定义，且 $\psi : U \to \mathbb{R}^2$, $\psi(p) = (v_1(p)\ v_2(p))$。由于 P 不是零多项式，无论给 c 和 $\tilde{c}$ 赋何值， $P^{-1}(0)$ 都是一条代数曲线，且 ψ 在每一点的秩都为零或一。这意味着矩阵的任意二阶子矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} \end{pmatrix}_{1\le i\le 2;\, 1\le j\le 3},$$

等于零。任一行列式都意味着 $\Theta = 0$，这与 (6) 矛盾。

□

下述定理给出了本文引言中提到的问题在超曲面 f 具有三个非零且互异的主曲率时的解。

定理 7. 不存在具有三个非零且互不相同的主曲率的极小超曲面 $f: M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$，且不存在另一个等距浸入 $\tilde{f}: M^3 \to Q^4(\tilde{c})$ 使得 $c \neq \tilde{c}$.

证明。由定理 3 可知，我们可以假设 f 是一个全纯超曲面，其关联对 (v, V) 满足 (3)。由于 f 是极小的，关联对 (v, V) 满足 (4) 中的四个方程。令 α 为命题 5 中定义的函数，它

满足命题 6 中的 (a)、(b)、(c) 和 (d)。由 (a)，存在一个开子集 $U \subset M^3$和 $i \in \{1,2,3\}$，使得对所有 $p \in U$， $\alpha_i(p) \neq 0$。由 (c) 可得，存在一个开子集 $U' \subset U$ 以及 $j \in \{1,2,3\}$、 $j \neq i$，使得对所有 $q \in U'.$， $\alpha_j(q) \neq 0$ 。于是 (d) 表明存在 $p_0 \in U'$，使得 $\alpha_k(p_0) \neq 0, j \neq k \neq i$。因此， $\alpha_1(p_0) \neq 0, \alpha_2(p_0) \neq 0$ 且 $\alpha_3(p_0) \neq 0$，这与 (b) 矛盾。 □

4 定理 1 的证明

令 $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ 和 $\tilde{f}\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ 为具有 $c \neq \tilde{c}$ 的超曲面。第二作者和 Tojeiro [4] 表明，在每一点 $x \in M^3$ 都存在一个正交归一基 $\{e_1, e_2, e_3\}$，使得 f 和 f 的~第二基本形式可同时对角化。令 λ_1、λ_2、λ_3 和 μ_1、μ_2、μ_3 分别为对应于 e_1、e_2 和 e_3 的 f 和 f 的主曲率。

在这些条件下，我们得到如下结果：

引理 8. *(a)* 假设 f 是极小的，且有一个二重重数的主曲率，记作 $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$。那么

$$2\lambda + \lambda_3 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 := \mu \neq 0 \quad 2\mu + \mu_3 = \frac{3}{\mu}(c - \tilde{c}).$$

(b) 假设 f 是极小的，且具有一个零主曲率，即$\lambda_3 = 0$。那么 $c > \tilde{c}$, $\mu_1 = \mu_2 := \mu$,

$$c - \tilde{c} - \lambda_1^2 = \mu^2 \tag{21}$$

and

$$c - \tilde{c} = \mu\mu_3. \tag{22}$$

~证明。 根据 f 和 f的高斯方程，我们有

$$c + \epsilon\lambda_i\lambda_j = \tilde{c} + \tilde{\epsilon}\mu_i\mu_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3. \tag{23}$$

此外，由于 f 是极小的，我们有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{24}$$

(a) 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$，那么前面的方程是

$$c + \lambda^2 = \tilde{c} + \mu_1\mu_2, \tag{25}$$

$$c + \lambda\lambda_3 = \tilde{c} + \mu_1\mu_3, \tag{26}$$

$$c + \lambda\lambda_3 = \tilde{c} + \mu_2\mu_3 \tag{27}$$

and

$$\lambda_3 = -2\lambda. \tag{28}$$

方程（26）和（27）给出

$$\mu_3(\mu_1-\mu_2)=0,$$

因此，要么是 $\mu_3=0$，要么是 $\mu_1=\mu_2$。根据（26）和（28），若 $c<\tilde{c}$，第一种情况不可能发生。因此，在这种情况下，我们必有 $\mu_1=\mu_2:=\mu$，于是根据（25），$c-\tilde{c}+\lambda^2=\mu^2$；将（28）代入（26），得到 $c-\tilde{c}-2\lambda^2=\mu\mu_3$。在倒数第二个方程中解出 λ^2，再代入最后一个方程，可得 $\mu\neq 0$ 和 $\mu_3=\dfrac{3}{\mu}(c-\tilde{c})-2\mu$。

否则，要么同样的结论成立，要么 $\mu_3=0$，于是由（26）得 $c+\lambda\lambda_3=\tilde{c}$，并且由（26）和（28）得 $c-\tilde{c}=2\lambda^2$。由此可知，f 是等主曲率的。根据Cartan公式（见 [5, 第91页]），我们有 $c+\lambda\lambda_3=0$，这导致矛盾。

（b）如果 $\lambda_3=0$，则方程（23）和（24）变为

$$c-\tilde{c}-\lambda_1^2=\mu_1\mu_2, \tag{29}$$

$$c-\tilde{c}=\mu_1\mu_3 \tag{30}$$

and

$$c-\tilde{c}=\mu_2\mu_3. \tag{31}$$

由于根据（30）或（31）有 $\mu_3\neq 0$，这些方程意味着 $\mu_1=\mu_2:=\mu$，从而得到（22）。由（29）可得 $c-\tilde{c}=\lambda_1^2+\mu^2$，由此可知$c>\tilde{c}$。□

下面的定理给出了引言中所述问题的一种解答，适用于超曲面 f 具有重数为某值或为零的主曲率的情形。

定理9。设 $f\colon M^3\to\mathbb{Q}^4(c)$ 是一个极小超曲面，且存在一个等距浸入 $\tilde{f}\colon M^3\to\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ 满足 $c\neq\tilde{c}$。

a) 若 f 有一个重数为三的主曲率，则 $c>\tilde{c}$，f 是全测地的，而 f 是非全测地的脐超曲面。 *b)* 假设 f 有一个重数为二的主曲率，则 f 是旋转超曲面，其剖面曲线是全测地曲面 $\mathbb{Q}^2(c)$（位于 $\mathbb{Q}^4(c)$ 中）内的一条悬链线；$\tilde{f}$ 是旋转超曲面，其剖面曲线是全测地曲面 $\mathbb{Q}^2(\tilde{c})$（位于 $\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ 中）内的一条悬链线。 *c)* 若 f 的一个主曲率为零，则 $c>\tilde{c}$，f 是在 $\mathbb{Q}^4(c)$ 的脐超曲面 $\mathbb{Q}^3(\tilde{c})$ 中一个极小曲面上的广义锥，$\tilde{c}\geq c$；而 f 是旋转超曲面，其剖面曲线是全测地曲面 $\mathbb{Q}^2(\tilde{c})$（位于 $\mathbb{Q}^4(\tilde{c})$ 中）内的一条螺线。

证明。情形 a）是显然的。假设 f 具有一个重数为二的主曲率，即 $\lambda_1=\lambda_2:=\lambda$。那么，由引理 8 可知

$$\lambda_3=-2\lambda,\quad \mu_1=\mu_2:=\mu\neq 0\quad \mu_3=\frac{3}{\mu}(c-\tilde{c})-2\mu. \tag{32}$$

˜其中，根据 [2] 中的定理 4.2，可知 f 和 f 是旋转超曲面。此外，利用 [2], 中命题 3.2 给出的主曲率，可以证明，方程 (32) 中的第一和第三个方程成立，当且仅当 f 和 f 这两条母曲线分别是˜ ˜ $c\delta-$悬链线和 $c\delta-$悬链线，分别位于 $\mathbb{Q}^2(c)$ 和 $\mathbb{Q}^2(\bar{c})$ 中。

最后，如果 f 的一个主曲率为零，那么由引理 8 可知 $c > \tilde{c}$, $\mu_1 = \mu_2 := \mu$, $c - \tilde{c} - \lambda_1^2 = \mu^2$ 和 $c - \tilde{c} = \mu\mu_3$. 。现在，按照 [4] 中定理 4 的证明可得， $f(M^3)$ 包含于 $\mathbb{Q}^4$ c $\bar{c} > c$ 4 2 ( ) 中脐˜超曲面 $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$ 上的一个常曲率曲面的广义锥中，其中 。另一方面，由 [2] 中的定理 . 可知 f 是一个旋转超曲面。此外，利用 [2], 中命题 3.2 给出的主曲率，可以证明方程 $c - \tilde{c} = \mu\mu_3$ 成立当且仅当剖面曲线是 $\mathbb{Q}^2(\bar{c})$ 中的一条 $c-$ 螺线。

□

现在我们可以证明主定理了。

定理 *1* 的证明：请遵循定理 7 和 9。 □

5 附录 A

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_{11}\alpha_1^2 + F_{12}\alpha_2^2 + F_{13}\alpha_3^2 + F_{14} + F_{15};\\
F_2 &= F_{21}\alpha_1^2 + F_{22}\alpha_2^2 + F_{23}\alpha_3^2 + F_{24} + F_{25};\\
F_3 &= F_{31}\alpha_1^2 + F_{32}\alpha_2^2 + F_{33}\alpha_3^2 + F_{34} + F_{35};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{11} = -3v_1^2\phi_2\phi_3(v_2^2+v_3^2)(v_2^2+v_3^2)(2v_1^2-7v_1^4+8v_1^6-3v_1^8-2v_2^2+17v_1^2v_2^2\\
&-15v_1^4v_2^2-45v_1^6v_2^2+45v_1^8v_2^2-2v_2^4+15v_1^2v_2^4-45v_1^6v_2^4);F_{12} = -3v_1^2\phi_1^2\phi_3(\\
&v_2^2+v_3^2)(2v_1^2-8v_1^4+6v_1^6-2v_2^2+21v_1^2v_2^2-53v_1^4v_2^2\\
&+30v_1^6v_2^2-5v_2^4+34v_1^2v_2^4-45v_1^4v_2^4-3v_2^6+15v_1^2v_2^6);F_{13} = 3v_1^2\phi_1^2\phi_2(v_2^2+v_3^2)\\
&(-v_1^2+2v_1^4-v_1^6+v_2^2-6v_1^2v_2^2-6v_1^4v_2^2+15v_1^6v_2^2\\
&+4v_2^4-20v_1^2v_2^4+3v_2^6-15v_1^2v_2^6);F_{14} = V_1^2(\\
&-5v_1^4+13v_1^6+7v_1^8-33v_1^{10}+18v_1^{12}+4v_2^2-48v_1^2v_2^2+178v_1^4v_2^2\\
&-428v_1^6v_2^2+780v_1^8v_2^2-756v_1^{10}v_2^2+270v_1^{12}v_2^2+17v_2^4-169v_1^2v_2^4\\
&+408v_1^4v_2^4-384v_1^6v_2^4+279v_1^8v_2^4-135v_1^{10}v_2^4+26v_2^6-224v_1^2v_2^6\\
&+324v_1^4v_2^6+144v_1^6v_2^6-270v_1^8v_2^6+13v_2^8-99v_1^2v_2^8+63v_1^4v_2^8+135v_1^6v_2^8);\\
&F_{15} = -c\,v_1^2(v_2^2+v_3^2)^2(-5v_1^2+8v_1^4+15v_1^6-18v_1^8+5v_2^2-77v_1^2v_2^2\\
&+225v_1^4v_2^2-207v_1^6v_2^2+54v_1^8v_2^2+5v_2^4-72v_1^2v_2^4+153v_1^4v_2^4-54v_1^6v_2^4)\\
&F_{21} = -3v_1^2\phi_2^2\phi_3(v_2^2+v_3^2)^2(v_2^2+2v_2^4+v_2^6-v_3^2-6v_2^2v_3^2+6v_2^4v_3^2+15v_2^6v_3^2\\
&+4v_3^4+20v_2^2v_3^4-3v_3^6-15v_2^2v_3^6);F_{22} = 3v_1^2\phi_1\phi_3(v_1^2-v_3^2)(v_2^2+v_3^2)^2(\\
&-2v_2^2-7v_2^4-8v_2^6-3v_2^8+2v_3^2+17v_2^2v_3^2\\
&+15v_2^4v_3^2-45v_2^6v_3^2-45v_2^8v_3^2-2v_3^4-15v_2^2v_3^4+45v_2^6v_3^4);
\end{aligned}
$$

<escape>$F_{23} = 3v_1^2\phi_1\phi_2^2(v_2^2+v_3^2)^2(-2v_2^2-8v_2^4-6v_2^6+2v_3^2+21v_2^2v_3^2+53v_2^4v_3^2$
$+30v_2^6v_3^2-5v_3^4-34v_2^2v_3^4-45v_2^4v_3^4+3v_3^6+15v_2^2v_3^6);F_{24} = V_1^2(v_1^2-v_3^2)($
$5v_2^4+13v_2^6-7v_2^8-33v_2^{10}-18v_2^{12}+4v_3^2+48v_2^2v_3^2$
$+178v_2^4v_3^2+428v_2^6v_3^2+780v_2^8v_3^2+756v_2^{10}v_3^2+270v_2^{12}v_3^2-17v_3^4$
$-169v_2^2v_3^4-408v_2^4v_3^4-384v_2^6v_3^4-279v_2^8v_3^4-135v_2^{10}v_3^4+26v_3^6$
$+224v_2^2v_3^6+324v_2^4v_3^6-144v_2^6v_3^6-270v_2^8v_3^6-13v_3^8-99v_2^2v_3^8-63v_2^4v_3^8+135v_2^6v_3^8);$
$F_{25} = -c\,v_1^2(v_1^2-v_3^2)(v_2^2+v_3^2)^2(-5v_2^2-8v_2^4+15v_2^6+18v_2^8+5v_3^2+77v_2^2v_3^2$
$+225v_2^4v_3^2+207v_2^6v_3^2+54v_2^8v_3^2-5v_3^4-72v_2^2v_3^4-153v_2^4v_3^4-54v_2^6v_3^4)$
$F_{31} = 3v_1^2\phi_2\phi_3^2(v_2^2+v_3^2)^2(-2v_1^2+5v_1^4-3v_1^6-2v_3^2+21v_1^2v_3^2-34v_1^4v_3^2$
$+15v_1^6v_3^2+8v_3^4-53v_1^2v_3^4+45v_1^4v_3^4-6v_3^6+30v_1^2v_3^6);F_{32} = 3v_1^2\phi_1\phi_3^2(v_2^2+v_3^2)^2($
$-v_1^2+4v_1^4-3v_1^6-v_3^2+6v_1^2v_3^2-20v_1^4v_3^2+15v_1^6v_3^2+2v_3^4+6v_1^2v_3^4-v_3^6-15v_1^2v_3^6);$
$F_{33} = -3v_1^2\phi_1\phi_2(v_1^2+v_2^2)(v_2^2+v_3^2)^2(-2v_1^2+2v_1^4-2v_3^2+17v_1^2v_3^2-15v_1^4v_3^2$
$+7v_3^4-15v_1^2v_3^4-8v_3^6-45v_1^2v_3^6+45v_1^4v_3^6+3v_3^8+45v_1^2v_3^8);F_{34} = -V_1^2(v_1^2+v_2^2)$
$(-4v_1^2+17v_1^4-26v_1^6+13v_1^8+48v_1^2v_3^2-169v_1^4v_3^2$
$+224v_1^6v_3^2-99v_1^8v_3^2-5v_3^4-178v_1^2v_3^4+408v_1^4v_3^4-324v_1^6v_3^4+63v_1^8v_3^4$
$+13v_3^6+428v_1^2v_3^6-384v_1^4v_3^6-144v_1^6v_3^6+135v_1^8v_3^6+7v_3^8-780v_1^2v_3^8$
$+279v_1^4v_3^8+270v_1^6v_3^8-33v_3^{10}+756v_1^2v_3^{10}-135v_1^4v_3^{10}+18v_3^{12}-270v_1^2v_3^{12});$
</escape>

$F_{35} = -c\,v_1^2(v_1^2+v_2^2)(v_2^2+v_3^2)^2(5v_1^2-5v_1^4+5v_3^2-77v_1^2v_3^2+72v_1^4v_3^2-8v_3^4$
$+225v_1^2v_3^4-153v_1^4v_3^4-15v_3^6-207v_1^2v_3^6+54v_1^4v_3^6+18v_3^8+54v_1^2v_3^8)$

$R_1 = v_1^2(-1+3v_1^2)(1+3v_2^2)(1-3v_3^2)(57v_1^6-474v_1^8+1620v_1^{10}-2910v_1^{12}+2895v_1^{14}-1512v_1^{16}$
$+324v_1^{18}-v_1^4v_2^2+1173v_1^6v_2^2-9096v_1^8v_2^2+28966v_1^{10}v_2^2-48345v_1^{12}v_2^2+44529v_1^{14}v_2^2$
$-21438v_1^{16}v_2^2+4212v_1^{18}v_2^2+15v_1^2v_2^4-111v_1^4v_2^4+10017v_1^6v_2^4-70074v_1^8v_2^4+203709v_1^{10}v_2^4$
$-308985v_1^{12}v_2^4+256473v_1^{14}v_2^4-109998v_1^{16}v_2^4+18954v_1^{18}v_2^4-7v_2^6+231v1^2v_2^6-1135v_1^4v_2^6$
$+45029v_1^6v_2^6-280311v_1^8v_2^6+728529v_1^{10}v_2^6-975825v_1^{12}v_2^6+703323v_1^{14}v_2^6-256770v_1^{16}v_2^6$
$+36936v_1^{18}v_2^6-51v_2^8+1167v_1^2v_2^8-4313v_1^4v_2^8+117744v_1^6v_2^8-646329v_1^8v_2^8+1455723v_1^{10}v_2^8$
$-1637577v_1^{12}v_2^8+945432v_1^{14}v_2^8-254178v_1^{16}v_2^8+21870v_1^{18}v_2^8-141v_2^{10}+2721v_1^2v_2^{10}$
$-7452v_1^4v_2^{10}+187842v_1^6v_2^{10}-897957v_1^8v_2^{10}+1677429v_1^{10}v_2^{10}-1471770v_1^{12}v_2^{10}$
$+596808v_1^{14}v_2^{10}-87480v_1^{16}v_2^{10}-187v_2^{12}+3240v_1^2v_2^{12}-5964v_1^4v_2^{12}+184050v_1^6v_2^{12}$
$-741069v_1^8v_2^{12}+1065474v_1^{10}v_2^{12}-634716v_1^{12}v_2^{12}+131220v_1^{14}v_2^{12}-120v_2^{14}+1920v_1^2v_2^{14}$
$-1800v_1^4v_2^{14}+103680v_1^6v_2^{14}-327240v_1^8v_2^{14}+311040v_1^{10}v_2^{14}-87480v_1^{12}v_2^{14}-30v_2^{16}$
$+450v_1^2v_2^{16}+25920v_1^6v_2^{16}-55890v_1^8v_2^{16}+21870v_1^{10}v_2^{16})$

$$
\begin{aligned}
R_2 = {} & 106v_1^8 - 1127v_1^{10} + 5395v_1^{12} - 15190v_1^{14} + 27362v_1^{16} - 31999v_1^{18} + 23499v_1^{20} - 9828v_1^{22} \\
& + 1782v_1^{24} + 14v_1^6v_2^2 + 2074v_1^8v_2^2 - 21134v_1^{10}v_2^2 + 94348v_1^{12}v_2^2 - 246178v_1^{14}v_2^2 + 410456v_1^{16}v_2^2 \\
& - 444186v_1^{18}v_2^2 + 301428v_1^{20}v_2^2 - 116100v_1^{22}v_2^2 + 19278v_1^{24}v_2^2 + 30v_1^4v_2^4 - 50v_1^6v_2^4 + 18800v_1^8v_2^4 \\
& - 168840v_1^{10}v_2^4 + 669656v_1^{12}v_2^4 - 1544558v_1^{14}v_2^4 + 2264802v_1^{16}v_2^4 - 2140020v_1^{18}v_2^4 \\
& + 1250910v_1^{20}v_2^4 - 404676v_1^{22}v_2^4 + 53946v_1^{24}v_2^4 - 30v_1^2v_2^6 + 1136v_1^4v_2^6 - 9324v_1^6v_2^6 \\
& + 144902v_1^8v_2^6 - 928388v_1^{10}v_2^6 + 2980324v_1^{12}v_2^6 - 5634936v_1^{14}v_2^6 + 6707592v_1^{16}v_2^6 \\
& - 5034366v_1^{18}v_2^6 + 2239164v_1^{20}v_2^6 - 502524v_1^{22}v_2^6 + 36450v_1^{24}v_2^6 + 8v_2^8 - 559v_1^2v_2^8 \\
& + 13031v_1^4v_2^8 - 108876v_1^6v_2^8 + 871930v_1^8v_2^8 - 3971216v_1^{10}v_2^8 + 9961902v_1^{12}v_2^8 - 14762808v_1^{14}v_2^8 \\
& + 13332978v_1^{16}v_2^8 - 7134885v_1^{18}v_2^8 + 2001591v_1^{20}v_2^8 - 204120v_1^{22}v_2^8 + 62v_2^{10} - 3254v_1^2v_2^{10} \\
& + 63546v_1^4v_2^{10} - 505742v_1^6v_2^{10} + 3147158v_1^8v_2^{10} - 11432058v_1^{10}v_2^{10} + 23188734v_1^{12}v_2^{10} \\
& - 27073386v_1^{14}v_2^{10} + 18102852v_1^{16}v_2^{10} - 6362712v_1^{18}v_2^{10} + 874800v_1^{20}v_2^{10} + 198v_2^{12} \\
& - 9198v_1^2v_2^{12} + 162680v_1^4v_2^{12} - 1217554v_1^6v_2^{12} + 6586536v_1^8v_2^{12} - 20185578v_1^{10}v_2^{12} \\
& + 33479568v_1^{12}v_2^{12} - 30142206v_1^{14}v_2^{12} + 13875786v_1^{16}v_2^{12} - 2536920v_1^{18}v_2^{12} + 332v_2^{14} \\
& - 14380v_1^2v_2^{14} + 237416v_1^4v_2^{14} - 1658148v_1^6v_2^{14} + 8098920v_1^8v_2^{14} - 21099636v_1^{10}v_2^{14} \\
& + 27662472v_1^{12}v_2^{14} - 17469756v_1^{14}v_2^{14} + 4242780v_1^{16}v_2^{14} + 308v_2^{16} - 12737v_1^2v_2^{16} \\
& + 199167v_1^4v_2^{16} - 1286820v_1^6v_2^{16} + 5770710v_1^8v_2^{16} - 12460149v_1^{10}v_2^{16} + 11744919v_1^{12}v_2^{16} \\
& - 3958470v_1^{14}v_2^{16} + 150v_2^{18} - 6000v_1^2v_2^{18} + 89550v_1^4v_2^{18} - 529200v_1^6v_2^{18} + 2207250v_1^8v_2^{18} \\
& - 3693600v_1^{10}v_2^{18} + 1931850v_1^{12}v_2^{18} + 30v_2^{20} - 1170v_1^2v_2^{20} + 16740v_1^4v_2^{20} - 89100v_1^6v_2^{20} \\
& + 352350v_1^8v_2^{20} - 386370v_1^{10}v_2^{20}
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] H. B. Lawson Jr., S^3中的完备极小曲面，《数学年刊》（第2辑）**92**（1970），335–374。[2] M. do Carmo和 M. Dajczer，《常曲率空间中的旋转超曲面》，《美国数学会汇刊》**277**（1983），685–709。[3] M. do Carmo 和 M. Dajczer，《由两个浸入诱导的黎曼度量》，《美国数学会会刊》**86**（1982），第1期，115–119。[4] S. Canevari 和 R. Tojeiro，《两个空间形式的超曲面与共形平坦超曲面》。《纯粹与应用数学年刊》**197**（2018），1–20。[5] T. E. Cecil 和 P. J. Ryan，《超曲面几何》，施普林格数学专著，施普林格，纽约，2015年。

阿拉戈斯联邦大学
数学研究所
57072-900 – 巴西阿拉戈阿斯州马塞约市
电子邮件：carlos.filho@im.ufal.br

塞尔希培联邦大学
数学系
49100-000 – 圣克里斯托旺 – SE – 巴西
电子邮箱：samuel@mat.ufs.br