arXiv:2305.02289v1 [math.NT] 3 May 2023

On the arithmetic of intersections of two quadrics containing a conic

Per Salberger

0 引言

本文旨在证明 Colliot-Th´el`ene、Sansuc 和 Swinnerton-Dyer 在 [CSS, §16] 中提出的以下两个猜想，适用于包含一条圆锥曲线的两个二次曲面的交的情形。

猜想 0.1. 设 k 为一个数域， $X \subset \mathbb{P}^n_k$、 $n \geq 6$ 为两个二次曲面的非锥形几何整交。假设对于 k 的每个赋值 v， X 上都存在一个光滑的 k_v-点。那么， X 上存在一个光滑的 k-点。

猜想 0.2. 设 k 是一个数域， $X \subset \mathbb{P}^5_k$ 是两个二次曲面的光滑交。假设对于 k 的每个赋值 v， X 上都存在一个 k_v-点。那么 X 上存在一个 k-点。

Colliot-Th´el`ene、Sansuc、Swinnerton-Dyer 的论文 [CSS] 在以下情况下包含了这些猜想的证明:

（a） X 包含两个共轭奇点 （b） X 包含两条共轭异面直线 （c） X 包含一个二维二次曲面 （d） $n \geq 8$

[CSS] 的作者运用了 Heath-Brown 提出的 Mordell 技巧，从两 个二次曲面的交包含圆锥曲线这一情形推出了 (d)。因此，研究包含圆锥曲线的低维二次曲面交颇有意义。 [CSS 第 §10] 节中证明 (d) 的基本思路，是构造包含该圆锥曲线并且在 k 的每个赋值 v 处都有光滑 k_v- 点的超平面截面。通过非常仔细地选取这些超平面，可以将问题归结为 $\mathbb{P}^4_k$ 中一类特殊的、包含圆锥曲线的两个二次曲面的奇异交。随后， [CSS] 的作者通过应用前几节关于 Châtelet 曲面的深刻结果完成了证明（另见 [Sb2], [Sb3]，其中给出了 Châtelet 曲面相关结果的其他证明）。然而，上述方法似乎不足以证明以下结果。

这是一个重新打字的版本，原始打字稿未发表，日期为 1993 年。我于 1993 年撰写了那篇论文，但没有投稿发表。在过去两年中，J. Iyer 和 R. Parimala（https://arxiv.org/abs/2201.12780）、J.-L. Colliot-Th´el`ene（https://arxiv.org/abs/2208.04121）以及 A. Molyakov（https://arxiv.org/abs/2305.00313）使用了这篇论文。因此，将这篇论文公开似乎是合理的。

定理 0.3. 设 k 是一个数域，且 $X \subset \mathbb{P}^n_k$ ($n \geq 6$) 是一个包含圆锥曲线的非锥形几何整交，且由两个二次曲面相交构成。假设在 k 的每个赋值 v 处， X 上都存在一个光滑的 k_v-点。那么， X 上存在一个光滑的 k-点。

定理 0.4. 设 k 是一个数域， $X \subset \mathbb{P}^5_k$ 是含有一条圆锥曲线的光滑两个二次曲面的交。假设对于 k的每个赋值 v ， X 上都存在一个 k_v-点。那么， X上存在一个 k-点。

我们注意到，定理 (0.3) 和 (0.4) 中的陈述分别对于 $\mathbb{P}^5_k$ 和 $\mathbb{P}^4_k$中的二次曲面交并不成立。(0.3)、(0.4) 的证明中主要的新要素是作者以下的深刻结果。

定理 0.5. 设 k 是一个数域， $Y \subset \mathbb{P}^4_k$ 是含有一条圆锥曲线的光滑两个二次曲面的交，并且函子映射

$$H^2_{\acute{e}t}(k, \mathbb{G}_m) \to H^2_{\acute{e}t}(Y, \mathbb{G}_m)$$

是满射。假设对于 k的每个赋值 v ， Y 上都存在一个 k_v-点。那么， Y上存在一个 k-点。

证明。若 $C \subset Y$ 是一条（光滑）圆锥曲线，则 C 的线性系定义了一个圆锥曲线丛态射 $Y \to \mathbb{P}^1_k$ （例如参见 [Is]）。因此，我们可以应用 [Sb1] 中确立的圆锥曲线丛曲面的哈斯原理（另见 [Sb2]）。另一种证明也出自作者（致 Skorobogatov 的信，1987年3月27日），参见 Colliot-Th´el`ene 的报告 [Co]。■

为证明 (0.3) 和 (0.4)，我们像 [CSS] k 中那样，考虑包含给定圆锥曲线且在 k 的每个赋值 v 处都有光滑 k_v-点的超平面截面。构造这样的超平面截面相当简单，但要得到几何整的此类超平面截面还需要一些工作，而且某些退化情形必须用其他方法处理。为证明 $n = 6$ 的 (0.3)，有必要先将 (0.4) 推广到 $\mathbb{P}^5_k$ 中更广泛的一类两个二次曲面的交，其中包括一些奇异簇。当 $n = 5$ 时，我们必须构造 Brauer 群平凡的超平面截面，以便应用 (0.5)。为此，我们采用强形式的希尔伯特不可约性定理。

1 $\mathbb{P}^4$ 中两个二次曲面的交

为了开始归纳，我们将使用以下结果。

定理 1.1. 设 k 是一个数域， F、 G 是定义在 X_0、X_1、.....、X_4 上且系数属于 k 的两个二次型，使得 $F(X_0, X_1, X_2, 0, 0)$ 的秩为 3，且 $G(X_0, X_1, X_2, 0, 0)$ 是零型。进一步假设 F 的秩为 5， G 的秩大于或等于 3，并且判别式多项式

$$P(\lambda) = \det(F + \lambda G)$$

不可约。则由 $F = G = 0$ 定义的 k-子概形 $Y \subset \mathbb{P}^4_k$ 满足：

(i) Y 在 $\mathbb{P}^4_k$ 中是几何整的，且余维数为 2。

(ii) 如果 V 是 Y 的一个光滑适当 k-模型，且 $\bar{k}$ 是 k 的一个代数闭包，那么

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{Pic}(V \times \bar{k})\big) = 0$$

以及函子映射

$$H^2_{\acute{e}t}(k, \mathbb{G}_m) \to H^2_{\acute{e}t}(Y, \mathbb{G}_m)$$

是满射的。

(iii) Y 满足光滑哈塞原理和弱逼近。

证明。

(i) 这是 [CSS, 1.11] 的一个特例。

（ii）如果以下假设不成立，则由 [CSS, 3.19] 可知这一点显然：

¯(E) 在铅笔 $\mu F + \lambda G$ $(\mu, \lambda \in k)$ 中，存在一对不成比例的秩 4 形式，它们均定义在 k 上，或者均定义在 k 的一个二次扩张 K 上，并且在伽罗瓦群 Gal(K/k) 的作用下互为共轭。

但是，如果 (E) 成立，那么齐次五次多项式

$$D(\mu, \lambda) = \mu^5 P(\lambda/\mu) \in k[\mu, \lambda]$$

将含有一个二次因子，该因子在 $k[\mu, \lambda]$ 中有两个不同的零点 $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$，这不可能，因为 $P(\lambda)$ 不可约，且 G 的秩大于或等于 3。

（iii）如果 Y 的奇点不是孤立的，那么这已在 [CSS, 3.15(iv)] 中得到证明。如果 Y 是具有孤立奇点的奇异曲面，且不是伊斯科夫斯基曲面，则可在 Coray 和 Tsfasman 的论文 [CrTs] 中找到证明。如果 Y 是伊斯科夫斯基曲面（即 Y 恰有两个奇点，且它们在 k 上不有理），则结论由（ii）和 [CSS, 9.7] 得出。最后，如果 Y 光滑，那么哈斯原理由（ii）和（0.5）得出，而弱逼近则在 [CoSk] 和 [SbSk] 中讨论。

■

2 $\mathbb{P}^5$ 中的二次曲面交集

¯定理 2.1. 设 k 为一个数域， k 为 k的一个代数闭包。设 F, G 为 $x_0, x_1, \ldots, x_5$ 中的两个二次型，其系数属于 k，满足 $F(x_0, x_1, x_2, 0, 0, 0)$ 的秩为 3，且 $G(x_0, x_1, x_2, 0, 0, 0)$ 为零型。假设满足以下条件：

(i) $\mathrm{rk}(F) = 6$

(ii) $\mathrm{rk}(F + \lambda G) \geq 5$ *for each* $\lambda \in \bar{k}$

(iii) $\mathrm{rk}(G) \geq 3$

那么，由 $F = G = 0$ 定义的子概形 $X \subset \mathbb{P}^5_k$ 是一个纯的几何整交，并满足光滑哈斯原理和弱逼近。

我们首先指出，当 G 的秩小于或等于 3 [CSS, 3.14]时，该结果已为人所知。若 rk$(G) = 4$，则二次曲面 $G = 0$ 是一个带有奇异直线 ℓ的锥。交$\{F = 0\} \cap \ell$ 上的所有点都是 X的奇点。这个交上有一个 k-点，或一对定义在二次扩张 $K \supset k$上的共轭点。在第一种情形下， X 与一个几何整二次曲面 k-双有理等价

（该二次曲面）在 $\mathbb{P}^4_k$ 上由 [CSS, 2.1] 给出，这便推出了结论。在第二种情形下，由于特殊情形 (E) 不可能出现（因为 G 是铅笔 $\mu F + \lambda G$ $(\mu, \lambda \in k)$ 中唯一一个秩为 4 的二次曲面），结论可由 [CSS, 9.1] 推出。因此，我们可以用以下更强的条件替换 (iii)

$$\mathrm{rk}(G) \geq 5 \tag{2.2}$$

接下来，设 $\Pi = \mathbb{P}^2_k$ 是由 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 定义的 k 平面。若 P 是 $X \backslash \Pi$ 上的一点，令 $\langle P, \Pi \rangle$ 为由 P 和 Π 生成的三维线性子空间。对于任意完美域 k，(2.1) 中的光滑簇 k 都满足以下结果。

引理 2.3. 存在一个扎里斯基开子集 $X_0 \subset X$，使得对于任意 k 点 $P \in X_0 \backslash \Pi$，都存在一个在 k 上定义的超平面 $H \supset \Pi$，使得 P 是交 $X \cap H$ 上的光滑点。

证明。我们需要以下结果：

定理（贝尔蒂尼）。设 X 是特征为 0 的域 k 上的光滑拟射影簇，且 $\mathcal{L}$ 是 X 上除子的线性系。假设 $\mathcal{L}$ 没有基点。则存在一个扎里斯基开子集 $U \subset |\mathcal{L}|$，使得其中任意除子 $D \in U$ 都是光滑的。

令 $\mathcal{L} \subset \Gamma\big(\mathbb{P}^5_k, \mathcal{O}(1)\big) = \Gamma\big(X, \mathcal{O}(1)\big)$ 为 X 上由在 Π 上消失的线性形式构成的线性系。$\mathcal{L}$ 的基点集为 $X \cap \Pi$。于是，$\mathcal{L}$ 在光滑拟射影簇 $X_{\mathrm{sm}} \backslash \Pi$ 上诱导出一个无基点线性系。由贝尔蒂尼定理可推得，对于开子集 $U \subset \mathbb{P}(\mathcal{L})$ 中的超平面 H，交 $(X_{\mathrm{sm}} \backslash \Pi) \cap H$ 是光滑的。令 ϕ: $X_{\mathrm{sm}} \backslash \Pi \to \mathbb{P}(\mathcal{L})$ 为自然映射，并令 $X_0 = \phi^{-1}(U)$。于是 $X_0 \subset X_{\mathrm{sm}} \backslash \Pi$ 是开集，且对于任意点 $P \in X_0$，都存在一个超平面 $H \supset \Pi$，使其在 P 处与 X 横截相交。■

注 2.4. 令 $U = X_0 \backslash \Pi$。则 U 是扎里斯基开且非空的。由隐函数定理，这意味着 [CCS, 164]，对于 k 的任意赋值 v，$U(k_v)$ 在 v-进拓扑下稠密于 $X_{\mathrm{sm}}(k_v)$。

令 $V = \mathbb{P}^2_k$ 为参数化包含 Π 的超平面的 k-簇，令 $Z \subset \mathbb{A}^1_k \times V$ 为由以下配对组成的关联簇：一个二次曲面与一个超平面 Q_λ、H，其中该二次曲面

$$Q_\lambda : \ F + \lambda G = 0$$

以及满足 $Q_\lambda \cap H$ 奇异的超平面 $H \supset \Pi$。因此，$Z \subset \mathbb{A}^1_k \times V$ 由下列方程定义

$$\det\big((F + \lambda G)|_H\big) = 0.$$

断言 2.5. 簇 Z 不与 $\mathbb{A}^1_k \times V$ 重合，且只有一个维数为 2 的不可约分支。

证明。令 $\lambda \in k$ 和 Q_λ 为二次曲面 $F + \lambda G = 0$。那么，由于 $Q_\lambda \cap \Pi$ 光滑且 $\mathrm{rk}(F + \lambda G) \geq 5$，存在一个超平面 $H \supset \Pi$，使得 $Q_\lambda \cap H$ 光滑。因此，从 $Z \subset \mathbb{A}^1_k \times V$ 到 $\mathbb{A}^1_k$ 的投影不包含投影 $\mathbb{A}^1_k \times V \to \mathbb{A}^1_k$. 的任何纤维。因此，只需证明从 Z 到 $\mathbb{A}^1_k$ 的投影映射的一般纤维不可约。但铅笔中的一般型定义了一个光滑二次曲面 $Q \subset \mathbb{P}^5_{k(\lambda)}$，它

与 Π 相交于一条光滑圆锥曲线。这意味着对偶簇 $\tilde{Q}$中的 Q 是一个光滑二次曲面

在对偶射影空间 $\tilde{\mathbb{P}}^5_{k(\lambda)}$ 中与 $V \subset \tilde{\mathbb{P}}^5_{k(\lambda)}$ 相交于一条光滑圆锥曲线。但 $\tilde{Q} \cap V$ 实际上就是 $Z \to \mathbb{A}^1_k$ 的一般纤维。

■

现在回到 (2.1) 的证明。首先注意到，投影 $p\colon Z \to V$ is¯ ¯满射，因为对于任意超平面 $H \in V(k)$，都存在 $\lambda \in k$，使得 $Q_\lambda \cap H$ 奇异。由 (2.5) 显然可知，存在一个非空开 k-子簇 $V_0 \subset V = \mathbb{P}^2_k$，使得 $Z_0 = p^{-1}(V_0)$ 不可约。由于态射 p 一般有限，存在一个足够小的非空子集 $V_0 \subset V$，使得 $p\colon Z \to V$ 在 $V_0 \subset V$ 上的限制 $p_0\colon Z_0 \to V_0$ 是有限且 ´étale 的。

于是，我们可以应用 [Ek] 中描述的希尔伯特不可约性定理版本，对 p_0 得出结论：

断言 2.6. 对于任意有限赋值集 S， k 上 $V_0(k)$ 中使得其在 p_0 下的原像不可约的 k-点，在 $\prod_{v\in S} V_0(k_v)$ 中稠密，因此在 $\prod_{v\in S} V(k_v)$ 中也稠密。

现在令 C 为光滑的 k-圆锥曲线 $X \cap \Pi$，并令 S 为一个有限赋值集，其中包含所有使 $C(k_v)$ 为空的赋值 v。假设对每个 $v \in S$，给定 X 上的一个光滑 k_v-点 P_v，以及 P_v 的一个开 v-进邻域 $N_v \subset V_{\mathrm{sm}}(k_v)$。我们来证明，存在 X 上的一个光滑 k-点 P，使得对每个 $v \in S$都有 $P \in N_v$。对每个 $v \in S$，存在（参见 (2.4)、(2.3)）一个 k_v-点 $R_v \in N_v$ 和一个包含R_v 的 k_v-超平面 $H_v \in V(k_v)$，使得 H_v 在 R_v处与 X 横截相交。隐函数定理 [CSS, 6.2]表明，若对每个 $v \in S$，存在 $H_v \in V(k_v)$的一个 v-进邻域 $O_v \subset V$，则任何 $H \in O_v$ 都与 X 横截相交于 N_v上的一个 k_v-点。现在应用 (2.6)，并选取 $H \in V_0(k)$，使得 $p^{-1}(H)$ 不可约，且对每个 $v \in S$都有 $H \in O_v$。那么，对每个 $v \in S$，$(X \cap H)_{\mathrm{sm}}(k_v) \cap N_v$ 非空。此外，由于 $X \cap H$ 包含 $C = X \cap \Pi$，对每个 $v \notin S$，$(X \cap H)_{\mathrm{sm}}(k_v)$非空。因此，当 $X \cap H$ 满足 (1.1) 的假设时，我们便得到所需结论。

我们可以假设 H 不与二次曲面 $F = 0$相切，因为这类 H构成 V 的一个开子集，并且若将 V_0 替换为 F的一个更小的非空开子集，(2.6) 仍然成立。因此， F 在 H 的仿射锥上的限制具有最大秩 5。根据 (2.2)， G 在 H 的仿射锥上的限制的秩也大于或等于 3。

最后， $p_0^{-1}(H)$ 不可约这一条件意味着， $F + \lambda G$ 在 H 的仿射锥上的限制的判别式多项式$P(\lambda)$ 不可约。因此，我们可以对 $X \cap H$应用 (1.1)，并找到一个光滑的 k点，它位于 $X \cap H$ 上且属于 N_v，对每个 $v \in S$均如此。由此完成 (2.1) 的证明。

定理 2.7. 设 k 为一个数域， $X \subset \mathbb{P}^5_k$ 为包含一条光滑 k圆锥曲线的两个二次曲面的光滑交。那么， X 满足哈斯原理和弱逼近。

证明。由 X [CSS 的光滑性可知，1.13] 定义 X 的 k-铅笔中的每个二次型的秩都大于或等于 5，且一般型的秩为 6。令 Π 为平面，使得 $X \cap \Pi = C$ 是 X 上的 k- 圆锥曲线。令 F、G 为定义 X 的铅笔中的两个二次 k-形式，满足 F 的秩为 6， F 在 Π 上的限制的秩为 3，且 G在某点 $S \in \Pi \backslash C$处消失。由于 G 也在 C 上消失，它在整个平面Π上都消失。现在，若我们选取 k-坐标 x_0、x_1、……、x_5，使得 Π 由 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$给出，那么 X 满足（2.1）的所有假设。■

3 在 $\mathbb{P}^n$（ $n \geq 6$）中两个二次曲面的交

¯定理3.1. 设 k 为一个数域， k 为 k的代数闭包。设 F、 G为 x_0、 x_1、.....、 x_n 中的两个二次型，其中 $n \geq 5$，其系数属于 k，且$F(x_0, x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$的秩为 3， $G(x_0, x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$为零型。假设以下条件成立：

(i) F的秩为 $n+1$

¯(ii) $F + \lambda G$ 对于每个 $\lambda \in k$，其秩大于或等于 5

(iii) G 的秩大于或等于 3

那么，由 $F = G = 0$ 定义的子概形 $X \subset \mathbb{P}^k_n$ 是一个纯的几何整交，满足光滑的 Hasse 原理和弱逼近。

证明。情形 $n = 5$ 已经处理过，因此我们可以并且将假设 $n \geq 6$，且该结论已在更低维数的情形中得到证明。我们还将用到以下事实：当 rk(G) $\leq n-2$ 时，初等情形已知 [CSS, 3.14]，并假设：

$$\mathrm{rk}(G) \geq n-1 \tag{3.2}$$

令 $\Pi \subset \mathbb{P}^k_n$ 为由 $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ 定义的 k-平面，并令 $V = \mathbb{P}^{n-3}_k$ 为参数化包含 Π 的超平面的 k-簇。固定¯上每个铅笔 $F + \lambda G = 0$ ($\lambda \in k$) 中的奇异二次曲面上的一个奇异 k-点 M_i。令 $V_0 \subset V$ 为超平面的开 k-子簇

$$\sum_{i=3}^{n} \alpha_i x_i = 0 \tag{$\star$}$$

使得 ($\star$) 不包含有限点集 M_i 中的任何点，并且 ($\star$) 不与二次曲面 $F = 0$ 相切，即 F 在 ($\star$) 上的限制的秩为 n。容易看出， V_0 非空。假设 $n \geq 6$。那么，如果 (i)、(ii) 和 (3.2) 对 X 和 $H \in V_0(k)$ 成立，则二次型在 $X \cap H$[CSS, 1.16] 的仿射锥上的限制满足 (i) 、 (ii) 和 (iii)。因此，根据归纳假设，当 $H \in V_0(k)$ 时， $X \cap H$ 满足光滑哈塞原理和弱逼近。

现在令 C 为光滑的 k-圆锥曲线 $X \cap H$，并令 S 为一个有限的赋值集合，其中包含所有使得 $C(k_v)$ 为空的赋值 v。假设对于每个 $v \in S$，我们给定了 X 上的一个光滑 k_v-点P_v，以及 P_v 的一个开邻域 $N_v \subset V_{\mathrm{sm}}(k_v)$。我们来证明，存在 X 上的一个光滑 k- 点 P，使得对于每个 $v \in S$，都有 $P \in N_v$。证明与 $n = 5$ 的情形类似，但更为简单。下面的结果将取代引理（ 2.3 ）。

命题 3.3. 设 $X \subset \mathbb{P}^n_k$、 $n \geq 6$ 和 Π 如上所述，且 $K \supset k$ 是域的扩张。那么，若 P是一个光滑的 K-点 X_K，则存在一个 K-超平面 $H \supset \langle P, \Pi \rangle$ 与 X_K横截相交于 P。

证明. 只需选取一个不包含 X在 P处切空间的超平面 $H \supset \langle P, \Pi \rangle$。■

我们现在完成（3.1）的证明。设 $H_v \in V$（k_v）为包含 P_v 的 k_v-超平面，使得对于每个 $v \in S$， H_v 与 X 在 P_v 中横截相交。随后，我们可以重复隐式

在（2.1）的证明中使用函数论证，并找出 v-进邻域 $O_v \subset V(k_v)$ of$H_v \in V(k_v)$，使得任意 $H \in O_v$ 都在 N_v 中的一个 k_v-点处与 X 横截相交。现在利用 $V_0(k)$ 在 $\prod_{v\in S} V(k_v)$ 中稠密这一事实，并将（2.1）应用于 $X \cap H$，其中取某个 $H \in V_0(k)$，使得对每个 $v \in S$，都有 $H \in O_v$。由此完成了（3.1）的证明。

■

定理 3.4. 设 k 是一个数域，$X \subset \mathbb{P}^n_k$、$n \geq 6$ 是纯非锥几何整的两个二次曲面交。假设 X 包含一条光滑的 k 圆锥曲线 C。那么 X 满足光滑哈塞原理和弱逼近。

证明。我们可以引入 k-坐标 x_0、x_1、.....、x_n，使得 X 由两个二次型 $F(x_0, x_1, \dots x_n)$、$G(x_0, x_1, \dots x_n)$ 定义，其中 $F(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ 的秩为 3，而 $F(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ 是零型。我们还可以假设 $P(\lambda) = \det(F + \lambda G)$ 不恒等于零，否则 $X_{\text{sing}}(k)$ 非空，结论便由[CSS, 2.1]得出。但是，如果 $P(\lambda)$ 非平凡，那么对某个 $\lambda \in k$，$F + \lambda G$ 的秩为最大秩；通过对二次曲面铅笔作线性坐标变换，我们可以假设 $\text{rk}(F) = n + 1$。

回顾一下[CSS, 1.1]中 $\bar{\text{rk}}(F + \lambda G)$。因此，如果 $\text{rk}(F + \lambda G) \leq 4$ 对于 s 个不同的值 $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$，那么

$$s(n + 1 - 4) \leq \deg(P) \leq n + 1$$

因此

$$s\Big(1 - \frac{4}{7}\Big) \leq s\Big(1 - \frac{4}{n+1}\Big) \leq 1.$$

这意味着 $s \leq 2$，且仅当 $n + 1 = 7$ 或 $n + 1 = 8$时等号成立。如果 $s = 0$，即如果对于每个 $\lambda \in k$都有 $\bar{\text{rk}}(F + \lambda G) \geq 5$，那么由 (3.1) 可得所需结论；如果 $s = 1$，那么这个 λ_1 属于 k，我们可以应用 [CSS, 3.14]。因此，设对于恰好两个 $\lambda \in k$，$\text{rk}(F + \lambda G) \leq 4$，即 $\bar{}$。不妨设为 λ_1和 λ_2。如果 $n+1 = 8$，那么 P有两个零点 λ_1和 λ_2，其重数为 4，因而没有其他零点。如果 $n + 1 = 7$，那么 P有两个零点 λ_1 和 λ_2，其重数至少为 3，因而至多还有一个零点；该零点必为属于 k的单零点。因此，在这两种情形下，$n + 1 = 7$ 或 $n + 1 = 8$ 都只有两种可能性：要么 λ_1和 λ_2 属于 k，要么 λ_1 和 λ_2 属于二次扩张 $K \supset k$，并且在 $\text{Gal}(K/k)$ 下互为共轭。如果 λ_1 和 λ_2 属于 k，那么我们可以再次应用初等结果 [CSS, 3.14] 。因此，设 λ_1 和 λ_2 不属于 k。通过考虑包含一条光滑圆锥曲线的超平面截面，并应用 (3.3) 以及 (3.1) 证明末尾的论证，可以很容易地由 $n = 6$ 情形推出 $n = 7$ 情形。

因此，我们剩下的是由两个二次型 $F + \lambda_i G$ 定义的簇 $\mathbb{P}^6_k$，其中$\lambda_i \in K\backslash k$ 的秩为 4，且它们在 $\text{Gal}(K/k) = \{\text{id } \sigma\}$ 的作用下互为共轭。于是，这两个二次曲面 $F + \lambda_i G$ 的奇异轨迹是一对互不相交的斜平面，并在 $\text{Gal}(K/k)$ 的作用下互为共轭。我们选取 K-坐标 $x_0, x_1, \dots, x_6$，使坐标 x_6 在 k上有定义，第一个平面由 $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ 给出，第二个平面由 $x_0 = x_1 = x_2 = x_6 = 0$给出。于是，第一个二次曲面由二次型 $T(x_3, x_4, x_5, x_6)$ 给出，第二个则由共轭形式 $T^\sigma(x_0, x_1, x_2, x_6)$ 给出。令 $H \subset \mathbb{P}^6_k$为 k-超平面 $x_6 = 0$和$X_0 = X\backslash H$。那么，X_0 是 $\mathbb{A}^6_k = \mathbb{P}^6_k\backslash H$ 中的一个光滑仿射 k-子簇，由方程 $T(x_3, x_4, x_5, 1) = 0$、$T^\sigma(x_0, x_1, x_2, 1) = 0$定义，因此它可以分解为乘积$X_0 = Q \times Q^\sigma$，其中 $Q \subset \mathbb{A}^3_K$是由 $T(x_3, x_4, x_5, 1) = 0$给出的光滑二次曲面。因此，X_0是 Weil 限制 $R_{K/k}(Q)$ [（BLR，第 191-195] 页）。因此，哈斯原理和弱

逼近对 X_0 成立，当且仅当它们对 Q成立。不过， Q的哈斯原理可由关于二次型的哈斯定理推出；弱逼近则源于这样一个事实：有 K点的 K-二次曲面是 K-有理的。由此完成了 (3.4) 的证明。■

备注 3.5。也可以通过应用[CSS 第12] 节中关于包含两条共轭异面直线的二次曲面交的更一般结果来完成证明。但该结果的证明非常冗长，因此我们认为有必要纳入简单的 Weil 限制论证。

参考文献

[BLR] S. Bosch、W. L¨utkebohmert、M. Raynaud，《N´eron 模型》，数学及其边界领域成果丛书，第3辑，第21卷，Springer-Verlag，柏林、海德堡，1990年。[Co] J.-L. Colliot-Th´el`ene，《次数为4的圆锥曲线纤维化有理曲面》，巴黎数论研讨会，1988—1989年，数学进展丛书第91卷，第43—55页，Birkh¨auser，1989年。[CCS] J.-L. Colliot-Th´el`ene、D.F. Coray、J.-J. Sansuc，《某些有理簇的下降与哈斯原理》，《纯粹与应用数学杂志》，第320卷（1980年），第150—191页。[CSS] J.-L. Colliot-Th´el`ene、J.-J. Sansuc、Sir Peter Swinnerton-Dyer，《两个二次曲面的交与Chˆatelet曲面》，《纯粹与应用数学杂志》，第一部分，第373卷（1987年），第37—107页；第二部分，第374卷（1987年），第72—168页。[CoSk] J.-L. Colliot-Th´el`ene、A.N. Skorobogatov，《次数为4的圆锥曲线丛上的 R-等价》，《杜克数学杂志》，第54卷（1987年），第671—677页。[CrTs] D.F. Coray、M.A. Tsfasman，《奇异德尔佩佐曲面的算术》，《伦敦数学会会刊》（第三辑），第57卷（1988年），第25—87页。[Ek] T. Ekedahl，《Hlibert不可约性定理的一个有效版本》，巴黎数论研讨会，1988—1989年，数学进展丛书第91卷，第241—249页，Birkh¨auser，1989年。[Is] V. A. Iskovskih，《 $\mathbb{P}^4$中次数为4的曲面的双有理性质》，《数学文集》，第88卷（1972年）（英文译本：《苏联数学文集》，第17卷（1972年），第575—577页）。[Sb1] P. Salberger，《数域上有理曲面的零循环》，《数学发明》，第91卷（1988年），第505—524页。[Sb2] P. Salberger，《圆锥曲线丛曲面的一些新哈斯原理》，巴黎数论研讨会，1987—1988年，数学进展丛书第81卷，第283—305页，Birkh¨auser，1989年。[Sb3] P. Salberger，《论某些两个二次曲面的交的算术》，《纯粹与应用数学杂志》，第394卷（1989年），第159—167页。[SbSk] P. Salberger、A. N. Skorobogatov，《由两个二次型定义的曲面上的弱逼近》，《杜克数学杂志》，第63卷（1987年），第507—536页，1991年。