arXiv:2305.02293v2 [math.CT] 1 Sep 2023

关于三角范畴的多重行列式函子

EttoreAldrovandi Cynthia Lester*
aldrovandi@math.fsu.edu clester@wooster.edu

佛罗里达州立大学数学系，佛罗里达州塔拉哈西，邮编 32306-4510

摘要

我们将德利涅的行列式函子概念推广到张量三角范畴。具体而言，为了体现张量的多重正合结构，我们在三角范畴的 2-多范畴上定义一个行列式函子，并为其多正合性由一种基于立方形状的特定复形恰当地刻画的三角范畴，提供泛行列式函子的多范畴版本；这一复形也将在文中引入。随后我们证明，对于张量具有 Verdier 结构的张量三角范畴，由此得到的行列式函子取值于一个范畴环。

目录

1 引言 **2**

2 背景 **4**
2.1 皮卡群胚 .42.2 行列式函子 .42.3 特殊范畴 .6

3 多重 -行列式函子用于三角范畴 **9**
3.1 多重行列式函子的定义.93.2 立方体.103.3 立方复形.153.4 多重行列式函子的另一种定义.173.5 行列式函子的加法.22

4 大学 rsal 多重行列式函子 **2** **2**
4.1 定理 4.1 的证明.234.2 等价的函子性.26

5 张量三角范畴上的行列式函子 **28**

*现地址：伍斯特学院，俄亥俄州伍斯特市 Beall 大道 1189 号，邮编 44691

1 引言

在 [德利涅87], 中，德利涅在正合范畴 $\mathcal{E}$ 上定义了一个行列式函子 $\det : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$，其取值于皮卡群胚 $\mathcal{P}$。这个函子仅定义在 $\mathcal{E}$ 的同构类上，$\det : \mathrm{isom}(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}$，并满足如下约束：$\mathcal{E}$ 中的每个短正合序列 $X \to Y \to Z$ 都对应一个自然同构 $\det(Z) \otimes \det(X) \cong \det(Y)$，其位于 $\mathcal{P}$ 中。此外，德利涅构造了一个皮卡群胚$V(\mathcal{E})$，其对象称为虚对象，以及一个泛行列式函子 $\det : \mathcal{E} \to V(\mathcal{E})$，使得 $\pi_0(V(\mathcal{E}))$ 是 $K_0(\mathcal{E})$，且 $\pi_1(V(\mathcal{E}))$ 是 $K_1(\mathcal{E})$，其中 K_i 是 $\mathcal{E}$ 的 K-理论群。称 $\det : \mathcal{E} \to V(\mathcal{E})$ 为泛函子，意指每个行列式函子 $\det' : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ 都能以唯一的方式（在 2-范畴意义下）通过态射 $V(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}$（皮卡群胚之间的态射），经由 $\det : \mathcal{E} \to V(\mathcal{E})$ 分解。

在 [Bre11], Breuning 将德利涅对行列式函子、虚对象和泛行列式函子的定义扩展到了（小）三角范畴。由于三角范畴并没有直接定义的 K-理论谱（例如，不像精确范畴或 Waldhausen 范畴那样），德利涅的全部结果无法以直接的方式扩展到三角范畴。不过，我们仍可以讨论三角范畴 $\mathcal{T}$ 的泛行列式函子 $\det: \mathcal{T} \to V(\mathcal{T})$，并计算 $\pi_0(V(\mathcal{T}))$ 和 $\pi_1(V(\mathcal{T}))$。此外，$\pi_0(V(\mathcal{T}))$ 是 $\mathcal{T}$ 的格罗滕迪克群，也就是说，在任何合理定义的 $\mathcal{T}$ 的 K-理论中，它都应当是 $K_0(\mathcal{T})$。因此，$K_1(\mathcal{T})$ 的一种定义是 $\pi_1(V(\mathcal{T}))$。Breuning 在 [Bre11] 中的结果表明，这样便能得到一种有趣且实用的理论。正如该文所指出的，这与尼曼的构造中的单纯形思想颇为相似（参见 [Nee05]）。Breuning 的方法被 Muro 和 Tonks [MT07], 采用，后来又被 Muro、Tonks 和维特 [MTW15] 采用，从而为泛皮卡群胚 $V(\mathcal{C})$ 得到了显式模型，其中 $\mathcal{C}$ 是 Waldhausen 范畴或三角范畴。

本文源于我们对张量三角范畴的考察，即配备了与三角结构相容的（对称）幺半群结构的三角范畴[Bal10b]。相容性要求张量结构所对应的双函子是正合的，也就是说，当另一个变量固定时，它在两个变量上都保持区别三角（以及一些额外条件。为简便起见，我们暂且忽略这些条件）。

若 $\mathcal{T}$ 是一个张量三角范畴，那么皮卡群胚$V(\mathcal{T})$ 和泛行列式函子 $\det : \mathrm{isom}(\mathcal{T}) \to V(\mathcal{T})$ 必须具备哪些额外性质，才能与张量三角结构相容？（Muro 和 Tonks 曾针对 Waldhausen 范畴探讨过类似问题 [MT07]。）我们证明，若 $\mathcal{T}$ 是一个张量三角范畴，那么$V(\mathcal{T})$ 可以赋予范畴环结构。事实上，范畴环正是张量三角范畴上行列式函子的自然目标。

这类问题最适合使用（带颜色的）算子来讨论，换一种说法，也就是多范畴。这是因为，类似环的结构（例如张量三角范畴或范畴环所具有的结构）可以视为多重正合函子，即以 n 个变量到一个对象的函子，并且以适当的方式对每个变量都是正合的。更具体地说，三角范畴的多重正合函子正是 n-函子

$$F : \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}$$

在每个变量中保持区别三角（同样，还需满足若干相容性条件）。于是，三角范畴构成一个群胚丰化多范畴，其中 n 重态射的范畴恰由多重正合函子及其自然同构给出

[Sch18]。[1] 类似地，通过采用类似的多重正合函子定义（参见 [Duc05、Ald17]），可以将皮卡群胚构造成群胚丰化多范畴。这两种结构中的类环对象，都是多范畴意义下的幺半群对象。

因此，我们将行列式函子的定义扩展到多范畴，并将所得结果称为多重行列式函子。多重行列式函子的定义可以通过两种方式给出：一是将 Breuning 的行列式函子明确地加以推广，二是将其定义为“立方体复形”之间的函子。前一种方式是将多正合性的思想用于推广 Breuning 关于行列式函子的公理：我们要求标准公理对每个变量都成立，并要求当涉及两个或更多变量时，可加性数据满足某些相容条件。后一种方式则采用具有立方体形状的（截断）复形，其模型源自 Mac Lane 的 Q-构造[ML57]。与原始定义一样，它们精确地编码了表达多正合性条件的全部数据。（关于立方复形定义的其他灵感，分别来自参考文献中的立方体和 Q-复形 [BG00、McC97]。）

此外，我们的多重行列式函子还可用于推广泛行列式函子的 2-范畴性质。具体而言，泛行列式函子 det: $\mathcal{T} \to V(\mathcal{T})$ 的经典定义等价于以下说法：对于任意三角范畴 $\mathcal{T}$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，存在一个群胚等价。

$$\textsc{Det}(\mathcal{T}, \mathcal{P}) \simeq \textsc{Pic}(V(\mathcal{T}), \mathcal{P})\,.$$

换言之，对于给定的 $\mathcal{T}$，泛行列式共表示该 2-函子。

$$\mathcal{P} \rightsquigarrow \textsc{Det}(\mathcal{T}, \mathcal{P})\,.$$

我们将这一等价推广到第4节的多范畴情形，并保留通常的函子性质。具体而言，我们证明

<escape>定理 (定理 4.1 和推论4.2 （无技术性假设）。 设 $\textsc{TrCat}$ 为三角范畴的（群胚富化）多范畴，且 $\textsc{Pic}$ 为皮卡群胚的多范畴。[2]记 $\textsc{Pic}^{\times}$ 为相应的（群胚富化）幺半范畴，其对象为字符串（$\mathcal{P}_0$，……，$\mathcal{P}_n$）。存在一个群胚等价</escape>

$$\textsc{Det}(\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_n; -) \simeq \textsc{Pic}^{\times}(V(\mathcal{T}_0), \ldots, V(\mathcal{T}_n); -)\,,$$

其中左侧由多重行列式组成，并被视为从 $\textsc{Pic}^{\times}$ 到群胚的 2-函子。换言之，多重行列式的群胚由 $\textsc{Pic}^{\times}$ 中的对象（$\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$）共表示。

事实证明，要充分体现上述陈述中提到的函子性，有必要对 $\textsc{TrCat}$ 的定义施加一些温和的限制：即（多）态射在某些 3×3 图表上创建并保留“Verdier 结构”（参见 [BBD82、KN02、May01],以及定义 3.12 和 3.27）。相应的多范畴 $\textsc{TrCat}_{\mathcal{V}} \subset \textsc{TrCat}$ 在第 4.2 节中引入，我们在第 5 节中利用它回到这样一个问题：当 $\mathcal{T}$ 是张量三角范畴时，皮卡群胚 $V(\mathcal{T})$ 所继承的结构是什么。对于这些“良好”的张量三角范畴$\mathcal{T}$，经典的虚对象 $V(\mathcal{T})$ 是一个范畴环（见定理 5.9），由此显然可得 $K_0(\mathcal{T})$ 是一个环，而 $K_1(\mathcal{T})$ 是一个 $K_0(\mathcal{T})$-双模。

[1]这比 [Sch18], 所考虑的线性范畴上的富化稍有限制。[2]$\textsc{Pic}$无论作为范畴还是多范畴，它都以自身为富化对象；在此陈述中，我们将其视为以群胚为富化对象。

本文结构如下。第 2 节回顾有关行列式函子的背景概念。多重行列式函子的主要论述在第3节展开；第 3.1 节给出 Breuning 的行列式函子的推广，第 3.4 节则介绍一种基于立方复形的替代方案。泛多行列式函子的存在性将在第 4 节证明。最后一节（第 5 节）较短，介绍其在张量结构中的应用，并证明泛行列式取值于一个范畴环。

2 背景

我们回顾一些关于皮卡群胚的基本概念，然后回顾与行列式函子相关的经典定义，并约定一些记号。接着讨论若干特定的范畴，同时约定一些记号和术语，并陈述一些相关的杂项事实。

2.1 皮卡群胚

皮卡群胚（也称为范畴群），[JS93], 是指一个群胚 $\mathcal{P}$，它带有一个对称幺半结构，记作 $+\colon \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$，且具有群状性质，即对于 $\mathcal{P}$ 中的每个对象 x，函子 $x+(\cdot)\colon \mathcal{P}\to\mathcal{P}$ 都是自然等价。幺半结构总是假定为含单位元的，我们将选定的单位元记作 0。对称性由函子性同构 $c_{a,b}\colon a+b\to b+a$ 构成（这是辫结构部分），并满足 $c_{b,a}\circ c_{a,b}=\mathrm{id}_{a+b}$。

我们用 $(\mathcal{P},+,0)$ 表示一个皮卡群胚，或简记为 $\mathcal{P}$，在记号中省略所有结构。尽管采用了这种简写，幺半结构和单位元并不假定为严格的。

对于任意皮卡群胚 $\mathcal{P}$，我们令 $\pi_0(\mathcal{P})$ 表示对象同构类所构成的阿贝尔群，并令 $\pi_1(\mathcal{P})=\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(0)$（这也是一个阿贝尔群）。众所周知，皮卡群胚由二次映射 $\pi_0(\mathcal{P})\to\pi_1(\mathcal{P})\otimes\mathbb{Z}/2$ 分类——即 k-不变量——该映射由 $a\mapsto c_{a,a}$ [JS93, MTW15] 给出。（对称性意味着 $c_{a,a}$ 的阶必须为 2。）这里，遵循文献 [JP07] 的做法 —— 以及 Mac Lane 的一则较早评论 [ML57]—— 我们更倾向于使用态射

$$\mathrm{coas}_{a,b,c,d}\colon (a+b)+(c+d)\longrightarrow(a+c)+(b+d)\,,$$

它同时包含交换同构和结合同构。coas 的相干条件包含五边形图和六边形图，并且与二者等价。这反映了这样一个事实：以 π_0 为系数的 π_1 的稳定上同调——其中 k-不变量所在之处——可以通过 Eilenberg–MacLane 立方复形计算。态射 coas 在后者中定义了相应的同调类。（见下文第 3 节。）

2.2 行列式函子

本节回顾行列式函子的基础知识。更多信息请参阅[Bre11] 和 [MTW15]。

定义 2.1. 对于三角范畴 $\mathcal{T}$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{P}$ 的行列式函子由一个函子组成

$$[-]\colon \mathrm{isom}(\mathcal{T})\to\mathcal{P}$$

它从 $\mathcal{T}$ 的同构范畴映至 $\mathcal{P}$，并配有可加性数据：对于任意区别三角

$$\Delta\colon x \to y \to z \to \Sigma x$$

赋予了一个态射

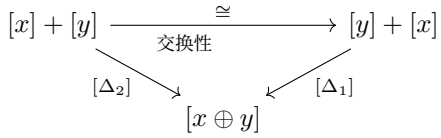
$$[\Delta]\colon [z] + [x] \to [y]$$

在 $\mathcal{P}$ 中，它关于区别三角的同构是自然的。可加性数据必须满足以下公理：

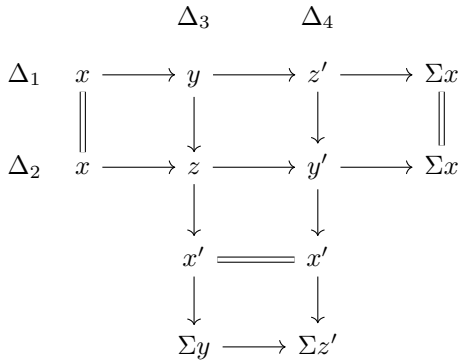
1. （交换性）对于任意 x、$y \in \mathcal{T}$，以及三角形

$$\Delta_1\colon x \to x \oplus y \to y \to \Sigma x$$
$$\Delta_2\colon y \to x \oplus y \to x \to \Sigma y.$$

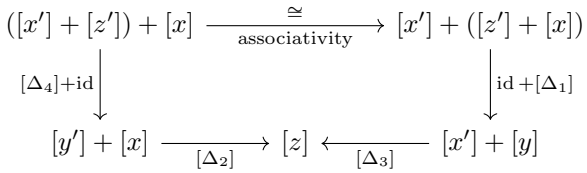
存在一个交换图表



2. （结合性）对于任意八面体：



下图表是可交换的。



为简便起见，我们将一个行列式简单地记作 $[-]\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}$，省略对同构子范畴和可加性数据的说明。

定义 2.2. 若对于任意皮卡群胚 $\mathcal{P}'$ 和行列式 $D\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}'$，都存在一对 (f, α)，由皮卡群胚的态射 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ 和自然变换 $\alpha\colon f \circ [-] \Rightarrow D$ 组成，使得对于 $\mathcal{T}$ 中任意区别三角 Δ: $x \to y \to z \to \Sigma x$，图表

$$\begin{array}{ccc} f([z]) + f([x]) & \longrightarrow & f([z] + [x]) \xrightarrow{f([\Delta])} f([y]) \\ {\scriptstyle \alpha_z + \alpha_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} \\ D(z) + D(x) & \xrightarrow[D(\Delta)]{} & D(y) \end{array}$$

可交换。此外，数对（f，α）在以下意义下是唯一的：若（f'，α'）是另一组这样的数对，则存在唯一的自然变换 $\beta\colon f \Rightarrow f'$，满足 $\alpha' \circ (\beta * [-]) = \alpha$。

记号 2.3. 对于任意三角范畴 $\mathcal{T}$，我们用 $\det\colon \mathcal{T} \to V(\mathcal{T})$ 表示泛行列式函子。此外，我们将 $V(\mathcal{T})$ 中的对象称为虚对象。已知此类泛行列式函子对于小三角范畴均存在（例如，参见 [MTW15]）。

定义 2.4. 设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴，$\mathcal{P}$ 是一个皮卡群胚。对于两个行列式函子 $d_i\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}$，行列式函子之间的一个态射 $\theta\colon d_1 \Rightarrow d_2$ 是函子 $d_i\colon \mathrm{isom}(\mathcal{T}) \to \mathcal{P}$ 之间的一个自然变换，并且与可加性数据相容；也就是说，对于任意区别三角 $\Delta\colon x \to y \to z \to \Sigma x$，满足下方图表交换的自然变换。

$$\begin{array}{ccc} d_1(z) + d_1(x) & \xrightarrow{d_1(\Delta)} & d_1(y) \\ {\scriptstyle \theta_z + \theta_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_y} \\ d_2(z) + d_2(x) & \xrightarrow[d_2(\Delta)]{} & d_2(y) \end{array}$$

2.3 特殊范畴

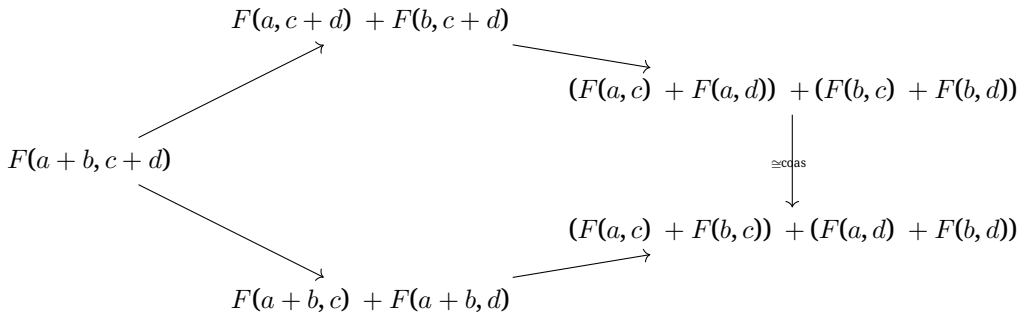
本节简要介绍下一节中所用范畴的部分记号和相关事实。一般而言，我们假设所有三角范畴都是小的；这只是为了确保虚对象的存在（见 [Bre11] 和 [MTW15]）。

记号 2.5. 对任意范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(x; y)$ 将作为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x; y)$ 的简写。同样，若 $\mathcal{C}$是一个多范畴，我们用 $\mathcal{C}(x_1, \ldots, x_n; y)$ 表示多态射。（注意，零元态射，即没有输入的态射，是允许的。）

我们首先阐明皮卡群胚和三角范畴中多重正合函子的概念。

定义 2.6. 对于皮卡群胚 $\mathcal{P}$、$\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{R}$，我们称函子 $F\colon \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ 为双正合

如果它是 函子在每个变量上都是幺半的，并且对于 $\mathcal{P}$ 中的任意对象 a、b 以及 $\mathcal{Q}$ 中的任意对象 c、d，图表
mo



可交换。类似地，对于皮卡群胚 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$和 $\mathcal{P}$，若函子 $F\colon \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}$在每个变量上都是幺半函子，并且对任意一对变量都满足上述图表，则称其为多重正合函子。

注 2.7。 coas 的相干条件保证了在定义含有 $n \geq 3$ 个变量的多重正合函子时，无需再附加其他条件，见上文定义 2.6 。

注 2.8。 上述多重正合函子的概念可以用立方复形来重新表述，见下文注 3.23。

三角范畴的情形非常相似，双函子的定义基本上是标准的（例如，参见文献 [KS06]）。推广到 n 个变量也很直接（ [Sch18]）。定义如下:

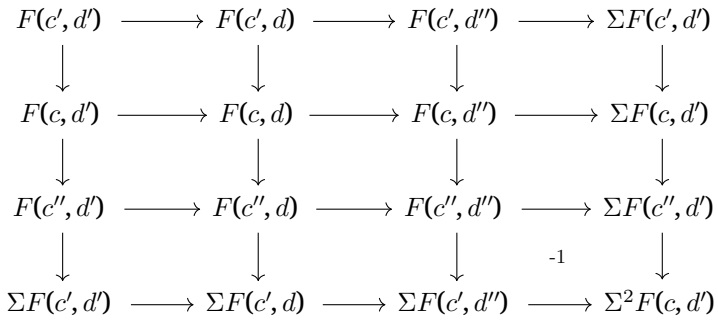
定义 2.9. 对于三角范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}$，若函子 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ 是双正合的，则称其在每个变量上都是三角函子。具体而言，若它在每个变量上都保持区别三角，并且保持平移函子，即 $F(\Sigma c, d) \cong \Sigma F(c, d)$ and$F(c, \Sigma d) \cong \Sigma F(c, d)$，使得

$$\begin{array}{ccc} F(\Sigma c, \Sigma d) & \xrightarrow{\cong} & \Sigma F(\Sigma c, d) \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & \text{-1} & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \Sigma F(c, \Sigma d) & \xrightarrow[\cong]{} & \Sigma^2 F(c, d) \end{array}$$

是反交换的。类似地，对于三角范畴 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$和 $\mathcal{T}$，若函子$F\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}$在每个变量上都是三角函子，且对于任意一对变量都是双正合的，则称其为多重正合函子。

因此，三角范畴之间的双正函子 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{T}$连同两个区别三角 $c' \to c \to c'' \to \Sigma c' \in \mathcal{C}$ 和 $d' \to d \to d'' \to \Sigma d' \in \mathcal{D}$ 给出了一个

交换图



参考文献 [BBD82中所讨论类型的11]。我们将在下面的第3节回到这些图表。

记号 2.10。我们将使用 TrCat 表示小三角范畴的范畴。类似地，我们将使用 Pic 表示皮卡群胚的范畴。

事实证明，这两个范畴都以显然的方式构成 2-范畴。此外，利用多重正合函子及其自然同构作为多重态射，还可以将它们提升为 Grpd-富多范畴。

回想一下，每个幺半范畴 $(\mathcal{M}, \otimes, I)$ 都会导出一个多范畴，暂记为$\mathcal{M}^{\otimes}$，它具有相同的对象，而多重态射由下式给出

$$\mathcal{M}^{\otimes}(x_1, \dots, x_n; y) = \mathcal{M}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; y)\,.$$

（若幺半群结构不是严格的，则右侧需要稍加注意。）事实证明，这正是一个伴随对中的右伴随。左伴随将每个多范畴 $\mathcal{M}$ 赋予一个幺半范畴，记作 $\mathcal{M}^{\times}$，其对象是来自 $\mathcal{M}$ 的对象列表，态射则由 $\mathcal{M}$ 中的态射拼接而成

$$\mathcal{M}^{\times}((x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_m)) = \prod_{\phi\colon \mathbf{n}\to\mathbf{m}} \mathcal{M}((x_i)_{i\in\phi^{-1}(j)}; y_j)$$

其中 $\mathbf{n} = 1, \dots, n$ 以及 $\phi\colon \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ 是一个“指标”函数（参见 [Lur17、Lei04] 以及 [EM09，定理 4。2]）。下面我们将讨论幺半（2-）范畴 $\mathrm{TrCat}^{\times}$ 和 $\mathrm{Pic}^{\times}$。

记号 2.11。 Pic 将同时表示皮卡群胚的（富）范畴和皮卡群胚的（富）多范畴。因此，按照这一约定， $\mathrm{TrCat}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n; \mathcal{T})$表示多重正合函子的范畴， Pic也同理。在类似情况下，我们将使用同一个名称来表示一个范畴及其所诱导的多范畴。注意， Pic是闭的。[3,4] （这对 Pic的两种含义都成立。）

[3]似乎没有一处提供完整的形式化证明。参见 [EM09] 以及较新的 [JY22、GJO22], ，它们讨论了置换情形，由此可以推导出适用于 Pic的陈述。关键在于内部对象的定义以及逆元的处理。其中一部分内容可见于 [Ald17]。 [4]感谢 N. Johnson 提供私人通信。

3 M三角范畴上的多重行列式函子

本节定义多重行列式函子。我们给出两种不同但等价的定义：第一种（见第3.1小节）是对 Breuning 的行列式函子的直接推广；第二种（见第3.3小节）基于皮卡群胚中立方体的范畴。

3.1 多重行列式函子的定义

记号 3.1. 在处理多变量函数时，为了记号简便，我们将不写出不发生变化的变量。例如，态射

$$\det(a_1,\dots,a_{i-1},z_i,a_{i+1},\dots,a_n)+\det(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)\to \\ \to \det(a_1,\dots,a_{i-1},y_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

将记作

$$\det(z_i)+\det(x_i)\to\det(y_i)\,.$$

设 $\mathcal{T}_1$、……、$\mathcal{T}_n$ 为三角范畴，$\mathcal{P}$ 为皮卡群胚。

定义 3.2. 多重行列式函子

$$[-]\colon \mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n\to\mathcal{P}$$

是一个 n-函子

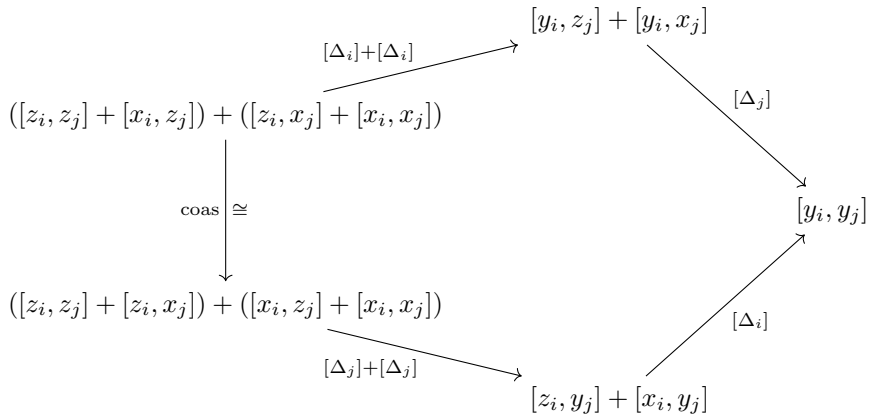
$$[-]\colon \operatorname{isom}(\mathcal{T}_1)\times\cdots\times\operatorname{isom}(\mathcal{T}_n)\to\mathcal{P}$$

即一个 行列式函子，并且满足以下相容性条件 s:

1.（双三角形公理）对于任意不同的 i 和 j，以及区别三角

$$\Delta_i : x_i\to y_i\to z_i\to\Sigma x_i\in\mathcal{T}_i$$
$$\Delta_j : x_j\to y_j\to z_j\to\Sigma x_j\in\mathcal{T}_j\,,$$

下方图表（如 $i<j$ 所示）可交换



2.（三角函数公理）对于任意不同的 i 和 j，态射 $f_i\colon a_i \to b_i$ in isom($\mathcal{T}_i$) 以及区别三角 Δ_j: $x_j \to y_j \to z_j \to \Sigma x_j$ in $\mathcal{T}_j$，下方图表（如 $i < j$ 所示）可交换

$$\begin{array}{ccc} [a_i, z_j] + [a_i, x_j] & \xrightarrow{[\Delta_j]} & [a_i, y_j] \\ \downarrow{\scriptstyle [f_i]} & & \downarrow{\scriptstyle [f_i]} \\ [b_i, z_j] + [b_i, x_j] & \xrightarrow[[\Delta_j]]{} & [b_i, y_j] \end{array}$$

定义 3.3. 设 $\mathcal{T}_i$ 为三角范畴，$\mathcal{P}$ 为皮卡群胚。对于两个多重行列式函子 $d_i\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$, 多重行列式函子 $\theta\colon d_1 \Rightarrow d_2$ 之间的态射是一个与每个变量中的可加性数据相容的自然变换。

换言之，θ 是关于每个变量的一个自然变换（定义在同构类上），使得对于 $\mathcal{T}_i$ 中的任意区别三角形 Δ_i: $x_i \to y_i \to z_i \to \Sigma x_i$，下图是可交换的。

$$\begin{array}{ccc} d_1(z_i) + d_1(x_i) & \xrightarrow{d_1(\Delta_i)} & d_1(y_i) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{z_i}+\theta_{x_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{y_i}} \\ d_2(z_i) + d_2(x_i) & \xrightarrow[d_2(\Delta_i)]{} & d_2(y_i) \end{array}$$

对于任意三角范畴 $\mathcal{T}_1$、.....、$\mathcal{T}_n$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，我们用 $\textsc{Det}(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P})$ 表示这样一个范畴：其对象是多重行列式函子（或行列式函子）$\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$，其态射是多重行列式函子的态射（如上所定义）。注意，$\textsc{Det}(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P})$ 是一个群胚。

记号 3.4（虚对象）。对于三角范畴 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$，态射 det: $\mathcal{T}_i \to V(\mathcal{T}_i)$ 表示泛行列式函子。此外，我们也会滥用记号，用 det 表示由它们的乘积构成的态射，并将 $\det : \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to V(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n)$ 写作 $\det : \mathrm{isom}(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times \mathrm{isom}(\mathcal{T}_n) \to V(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n)$。

3.2 立方体

令 I 为范畴 $\{-1 \to 0 \to 1\}$。换言之，I 是一个含有三个不同对象的范畴：一个始对象、一个终对象，以及另一个对象。

我们取 I^0 为一个仅有单个对象且没有非平凡态射的范畴。对于任意整数 $n \geq 1$，I^n 是一个对象为 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$、$a_i \in \{-1, 0, 1\}$ 的范畴，其非恒等态射基于 I；更具体地说，对于 $i = 1, \ldots, n$，存在非恒等态射

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, -1, a_{i+1}, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

and

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

最后，我们用 $\mathrm{ob}(I^n)$ 表示一个范畴，它与 I^n 拥有相同的对象，但没有非恒等态射。

3.2.1 皮卡群胚中的立方体

对于任意皮卡群胚 $\mathcal{P}$，我们引入一个立方复形，它让人联想到环 Q的埃伦伯格–麦克莱恩 [ML57], -复形，以及后来对正合范畴所做的改编 [BG00、McC97]。我们的复形基于一个由皮卡群胚组成的系统 $C^n(\mathcal{P})$，其中 $n \geq 0$具有“立方形状”，且满足$C^0(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$，现将其定义如下。

定义 3.5. 对于皮卡群胚 $\mathcal{P}$， $\mathcal{P}$ 中的一个 n-立方体是一个函子 $S\colon \mathrm{ob}(I^n) \to \mathcal{P}$，并配有同构

$$f_i(a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n)\colon S(a_0,\dots,a_{i-1},1,a_{i+1},\dots,a_n) + S(a_0,\dots,a_{i-1},-1,a_{i+1},\dots,a_n) \xrightarrow{\cong} S(a_0,\dots,a_{i-1},0,a_{i+1},\dots,a_n) \quad (3.1)$$

对于 $i = 1,\dots,n$，使得对于每一对 (i,j)、 $0 \leq i < j \leq n$， 下图交换

$$\begin{array}{ccc} (S(1,1)+S(-1,1))+(S(1,-1)+S(-1,-1)) & \xrightarrow{f_i(1)+f_i(-1)} & S(0,1)+S(0,-1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{coas}\,\cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_j(0)} \\ & & S(0,0) \\ & & \Big\uparrow{\scriptstyle f_i(0)} \\ (S(1,1)+S(1,-1))+(S(-1,1)+S(-1,-1)) & \xrightarrow[f_j(1)+f_j(-1)]{} & S(1,0)+S(-1,0) \end{array} \quad (3.2)$$

（为简化记号，我们没有写出保持不变的 a_k。 ）显然， n-立方体构成一个范畴，事实上是一个群胚，记作 $C^n(\mathcal{P})$，其态射是函子的自然变换。

备注 3.6. 定义 3.5 中的立方体概念适用于任意对称幺半范畴，而不仅仅是皮卡群胚。不过，本文只需考虑后者。

例 3.7。皮卡群胚中的 1-立方体 $\mathcal{P}$ 是对两个元素 x 和 z的选择，以及对它们的和（称为 y）的选择，还有一个同构 $x + z \to y$的选择。这类似于 Segal 对带和的范畴的描述（参见[Seg74]）。

记号 3.8. 为了突出范畴 I^n的组合结构所形成的形状，绘制立方体会很方便。例如， $\mathcal{P}$ 中的一个 1-立方体可以可视化为

$$\{\ -1 \qquad 0 \qquad 1\ \} \longmapsto\ x \text{ —— } y \text{ —— } z\ ,$$

而对于 $n = 2$ 2-立方体 $S\colon\ I^2 \to \mathcal{P}$，其图示如下

$$\left\{\begin{array}{ccc} (-1,1) & (0,1) & (1,1) \\ (-1,0) & (0,0) & (1,0) \\ (-1,-1) & (0,-1) & (1,-1) \end{array}\right\} \longmapsto \begin{array}{ccccc} b & \text{——} & p & \text{——} & a \\ | & & | & & | \\ s & \text{——} & z & \text{——} & r \\ | & & | & & | \\ d & \text{——} & q & \text{——} & c \end{array}\ ,$$

图中的线条展示了哪些元素通过同构彼此“关联”，这些同构构成了交换图

$$\begin{array}{ccccc} (a+b)+(c+d) & & \xrightarrow[\text{coas}]{\cong} & & (a+c)+(b+d) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ p+q & & \longrightarrow & z & \longleftarrow & r+s \end{array}$$

<escape>按照定义 3.2 中的图表（3.5 ）所示。</escape>

人们可能会想，除了定义 3.5 中的相容性条件之外，是否还应考虑其他相容性条件。事实上，我们注意到，当 $n \geq 3$ 时， n-立方体还存在额外的交换图，即相容性条件。例如，若 $S\colon I^3 \to \mathcal{P}$ 是一个 3- 立方体，我们可以利用（ 3.2 ）的三种可能情形，对立方体的中心顶点 $S(0,0,0)$ 进行分解，从而绘

命题 3.9。 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半范畴。对于任意立方体 $S\colon I^n \to \mathcal{C}$ 以及任意正整数 k 使得 $3 \leq k \leq n$, 所有使用（3.1）构造的图表，从中心顶点 S（0，...，0）开始，以类似于（3.2）的方式构造，均交换。

证明。 遵循 [BFSV03], 的思路，如果从 3-立方体 S 出发，并按刚才提到的方式从中心顶点 $S(0, 0, 0)$ 开始，得到的图表与 [BFSV03第 284], 页中当所有幺半群结构相同时的“大”图表相同，或者与 [Ald17附录 D]中出现的图表相同。我们将其示意性地写作：

$$\begin{array}{ccc} ((a_1+a_2)+(b_1+b_2))+((c_1+c_2)+(d_1+d_2)) & \xrightarrow{c} & ((a_1+a_2)+(c_1+c_2))+((b_1+b_2)+(d_1+d_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle c+c} & & \downarrow{\scriptstyle c+c} \\ ((a_1+b_1)+(a_2+b_2))+((c_1+d_1)+(c_2+d_2)) & & ((a_1+c_1)+(a_2+c_2))+((b_1+d_1)+(b_2+d_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ ((a_1+b_1)+(c_1+d_1))+((a_2+b_2)+(c_2+d_2)) & \xrightarrow[c+c]{} & ((a_1+c_1)+(b_1+d_1))+((a_2+c_2)+(b_2+d_2)) \end{array}$$

这个图表表达了我们称为 coas 的态射所满足的相干性，涵盖了 Mac Lane 五边形图和六边形图；当且仅当 $\mathcal{C}$ 上的幺半群结构是对称的时，该图表交换（显式证明见 [Ald17] ）。从 $S(0, 0, 0)$ 出发得到的整体图表中的其他所有胞腔，要么是由 coas 的函子性保证交换的方形，要么是（3.2）及其和的实例；它们也都交换。这样就处理了 $n = k = 3$ 的情形，其他所有情形均可由此以及 [BFSV03] 第一节中的结果推出。 □

注 3.10。 第一节 [BFSV03] 还指出，皮卡群胚中的 n-立方体$\mathcal{P}$ 可以递归定义：中所有 1-立方体的集合 $\mathcal{P}$ 本身就是一个皮卡群胚。因此，我们可以取 $\mathcal{P}$中所有 1-立方体的集合里的一个 1-立方体——这便得到 $\mathcal{P}$中的一个 2-立方体 n。继续递归，我们可以将 $\mathcal{P}$ 中的一个$n-1$-立方体 $\mathcal{P}$定义为 n中所有（$n-1$）-立方体 $\mathcal{P}$集合中的一个 1-立方体。

备注 3.11。 鉴于前述注记，并再次根据 [BFSV03], 双.....的存在 er

$$C^0(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\,, \quad C^1(\mathcal{P})\,, \quad C^2(\mathcal{P})\,, \quad \cdots$$

等价于 $\mathcal{P}$ 具有对称幺半结构。这对于一般的对称幺半范畴也成立。

3.2.2 三角范畴中的立方体

接下来，我们将定义三角范畴中的立方体。不过，我们将重点讨论低维立方体，因为三角范畴没有足够的既定结构来支持更高维立方体。

让我们考虑 3×3[5] 交换图 [BBD82, May01]

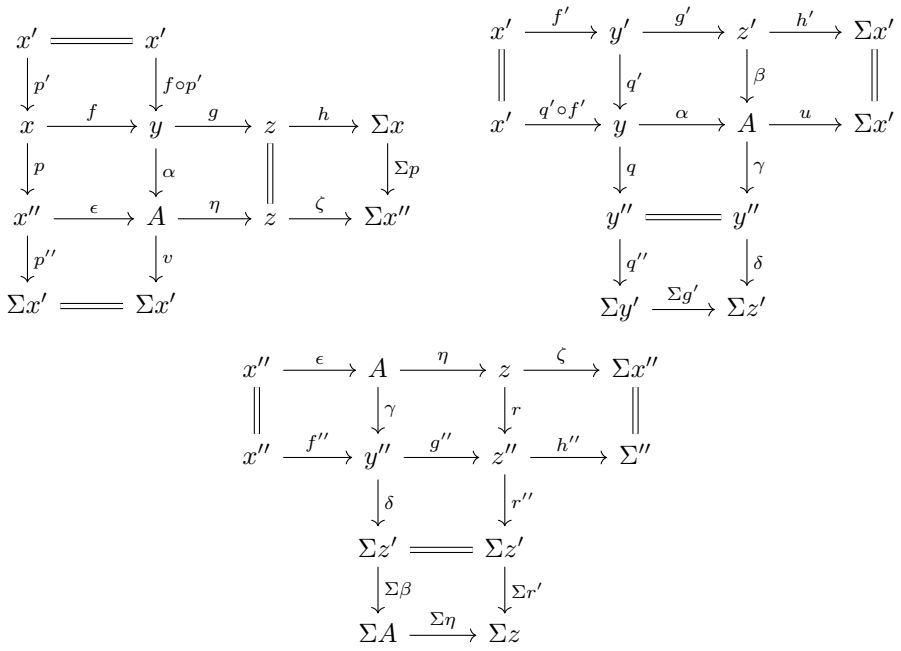
$$\begin{array}{ccccccc}
x' & \xrightarrow{f'} & y' & \xrightarrow{g'} & z' & \xrightarrow{h'} & \Sigma x' \\
\downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle r'} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma p'} \\
x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{g} & z & \xrightarrow{h} & \Sigma x \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma p} \\
x'' & \xrightarrow{f''} & y'' & \xrightarrow{g''} & z'' & \xrightarrow{h''} & \Sigma x'' \\
\downarrow{\scriptstyle p''} & & \downarrow{\scriptstyle q''} & & \downarrow{\scriptstyle r''} \quad \text{-1} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma p''} \\
\Sigma x' & \xrightarrow{\Sigma f'} & \Sigma y' & \xrightarrow{\Sigma g'} & \Sigma z' & \xrightarrow{\Sigma h'} & \Sigma^2 x'
\end{array} \tag{3.3}$$

（也称为九项图），其行和列均为区别三角。

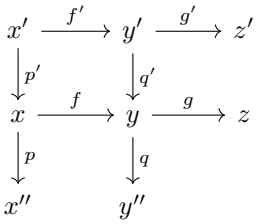
定义 3.12 ([BBD82, May01])。 在三角范畴 $\mathcal{T}$中，图表 (3.3) 具有一个

[5]当然，更严谨地说，该图表应视为 4×4，但最右列和最底行由其余部分确定，因此将其视为 3×3 更为方便。

Verdier 结构，当存在一个对象 A 属于 $\mathcal{T}$ 且存在八面体时



注记3.13。 参见文献 [BBD82，命题1.1。11]（另见 [May01]），我们得到，任意形如以下形式的图表



可以通过组合三个八面体，补全为如下形式（3.3），如定义 3.12所示。因此，所得九项图将具有 Verdier 结构。给定任意一个 3×3 图表，我们可以忽略底部和最右侧的映射，得到一个上述形式的图表，然后 再 应用 [BBD82、May01] 中的构造，重新构造一个具有 Verdier 结构的新 3×3 图表。请注意，这个新构造的 3×3 图表可能与原图表不同，因为它在位置 z''处有一个同构对象。这些图表显然也并非唯一。

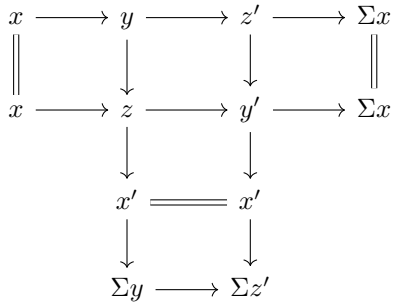
定义3.14. 对于 $n=0$、1、2 和一个三角范畴 $\mathcal{T}$， $\mathcal{T}$ 中的一个 n-立方体为：

1. 如果 $n=0$，则为 $\mathcal{T}$ 的一个对象 x； 2.
如果 $n=1$，则为一个区别三角 Δ； 以及

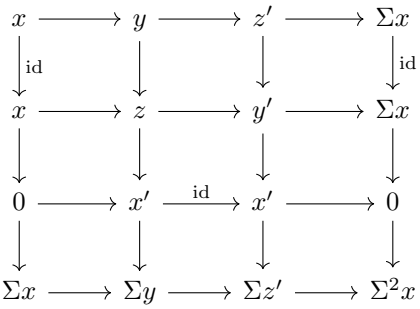
3. 一个图表（3.3），如果，则配备 Verdier 结构。

n-立方体在 $\mathcal{T}$ 中通过逐对象同构构成一个群胚。我们将其记为 $C^n(\text{isom}\,\mathcal{T})$，并注意到 $C^0(\mathcal{T})=\text{isom}(\mathcal{T})$。

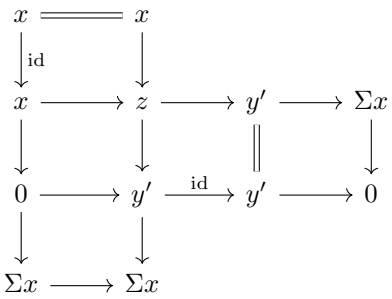
注 3.15. 八面体

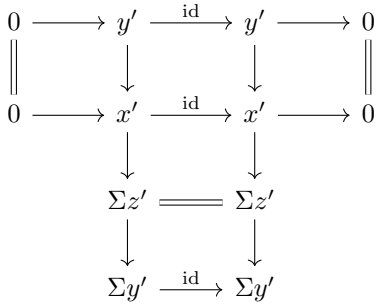


可以写成一个 2-立方体



具有显然的 Verdier 结构（相对于定义 3.12），并且带有 $A = y'$，其中一个八面体正是我们最初的那个，另外两个（平凡的）八面体为:





注 3.16。在三角范畴中，n-立方体（$n \leq 2$）也可以定义为从 I^n 到 $\mathcal{T}$ 的函子，并满足显然的附加条件。

3.3 立方复形

我们宽泛地使用“复形”一词，指由前文各节引入的立方形范畴所组成的图表。

回顾 [Lod82, BG00]，范畴 I^n 配有函子 $\delta^j_\alpha\colon I^{n-1}\to I^n$，其中$\alpha=-1$取 0、1 和 $j=1,\dots,n$，分别对应于在三个可能位置之一 -1 沿 j^{th} 方向的包含。令 $\mathcal{C}$ 为一个对称幺半范畴。回顾 n-立方体 $S\colon I^n\to\mathcal{C}$ 的群胚 $C^n(\mathcal{C})$（这是 $S\colon \mathrm{ob}(I^n)\to\mathcal{C}$ 的简写）。

与 δ^j_α 复合后，我们得到“面映射”

$$\partial^\alpha_j\colon C^n(\mathcal{C})\to C^{n-1}(\mathcal{C})\,;\qquad j=1,\dots,n\,,\ \alpha=-1,0,1\,. \tag{3.4}$$

因此，如果 S 是一个 n-立方体，则有

$$\partial^\alpha_j(S)(a_1,\dots,a_{n-1})=S(a_1,\dots,a_{j-1},\alpha,a_j,\dots,a_{n-1})$$

此外，还有方向相反的“退化映射”：

$$\begin{aligned} s^j_\alpha\colon C^n(\mathcal{C})\to C^{n+1}(\mathcal{C})\,;&\qquad j=1,\dots,n\,,\ \alpha=-1,1\,,\\ s^j_\alpha(S)(a_1,\dots,a_{n+1})=&\begin{cases} S(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1}\dots,a_{n+1}) & a_j\neq\alpha\\ 0 & a_j=\alpha\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

（注意，这些“退化映射”并非由相应的函子 $I^n\to I^{n-1}$诱导。）面“映射”和退化“映射”实际上都是函子，因为它们显然与立方体的态射相容（立方体的态射是逐点定义的）。我们还有以下关系：

$$\begin{aligned} \partial^\alpha_i\partial^\beta_j&=\partial^\beta_{j-1}\partial^\alpha_i\quad i<j\,;\ \alpha,\beta=-1,0,1\\ s^j_\beta s^i_\alpha&=s^i_\alpha s^{j-1}_\beta\quad i<j\,;\ \alpha,\beta=-1,1\\ \partial^\alpha_i s^j_\beta&=\begin{cases} s^{j-1}_\beta\partial^\alpha_i & i<j\,;\ \alpha=-1,0,1\,,\beta=\pm1\\ \mathrm{id} & i=j\,;\ \alpha=-1,0,1\,,\beta=\pm1\,,\alpha\neq\beta\\ 0 & i=j\,;\ \alpha=\beta=\pm1\\ s^j_\beta\partial^\alpha_{i-1} & i>j\,;\ \alpha=-1,0,1\,,\beta=\pm1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6}$$

映射 ∂^α_i和 s^i_β 以及它们满足的关系，对于对象 $C^k(\mathcal{T})$ 仍然有意义，其中 $\mathcal{T}$是上文介绍的三角范畴，但有 $k\leq 2$这一限制。

定义 3.17。设 $\mathcal{C}$是一个范畴，对于所有 n（或对于 $n=0$、.....、k），n-立方体的定义都有意义。在 $\mathcal{C}$上的立方复形记为 $C^*(\mathcal{C})$（或分别记为 $C^{*\leq k}(\mathcal{C})$），它是如下群胚图表：

$$\mathcal{C}=C^0(\mathcal{C})\ \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\ C^1(\mathcal{C})\ \substack{\longrightarrow\\ \cdots\\ \longleftarrow\\ \cdots\\ \longleftarrow}\ C^2(\mathcal{C})\qquad\cdots$$

注 3.18。 虽然我们只考虑以下情形 $\mathcal{C}=\mathcal{P}$，一个皮卡群胚，或 $\mathcal{C}=\mathcal{T}$，一个三角范畴，定义 3.17可以更一般地应用。例如， $\mathcal{C}$ 可以是一个具有和与零对象的范畴，或者更贴近原始构想，是一个正合范畴，甚至是一个 Waldhausen 范畴。

注 3.19. 尽管名称如此，定义 3.17中的图表是一个群胚图表，而非严格意义上的复形。我们可以由此得到一个真正的复形，它

最终成为埃伦伯格–麦克莱恩的类比 Q构造，如下所示（参见 [BG00、McC97]）。设 F是一个从群胚到阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$的函子。定义 $Q'_n(\mathcal{C},\ F) = F(C^n(\mathcal{C}))$，以及$\partial_n\colon\ Q'_n(\mathcal{C},\ F) \to Q'_{n-1}(\mathcal{C},\ F)$，定义如下：

$$\partial_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=-1}^{1}(-1)^{i+\alpha+1}F(\partial_i^\alpha)\,.$$

容易验证 $\partial^2 = 0$，因此 $Q'_\bullet(\mathcal{C},F)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个复形。此外，∂ 保持由 $F(s_\alpha^i)$ 的像生成的子对象，因此我们可以将 $Q_\bullet(\mathcal{C},F)$ 定义为 $Q'_\bullet(\mathcal{C},F)$ 除以退化子复形所得的商。

设 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 为阿贝尔群的范畴，且 $F(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}[\mathrm{ob}(\mathcal{C})]$，这实际上就是埃伦伯格–麦克莱恩的 Q-复形（当 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔群时），而当 $\mathcal{C}$ 是皮卡群胚时，则是它的直接推广 [McC97]。与经典情形类似，这些复形对于多重正合映射 $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}$的表现非常良好，例如乘法映射 $m\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 以及它的高阶伴随映射（当 $\mathcal{C}$ 是范畴环时；见下文第 5 节）。在本文的后续工作中，当我们研究张量三角范畴 $\mathcal{C} = V(\mathcal{T})$ 的行列式函子的 Mac Lane 上同调时，这些复形将会派上用场 $\mathcal{T}$（同样见下文）。下文将不会用到它们。

3.4 多重行列式函子的另一种定义

我们引入多重行列式函子的另一种定义，并在定理 3.26 中证明我们对多重行列式函子的两种定义是等价的。

定义 3.20. 对于三角范畴 $\mathcal{T}$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，立方行列式函子是一个图表态射。

$$D\colon C^{\le 2}(\mathrm{isom}\,\mathcal{T}) \to C^{\le 2}(\mathcal{P})\,.$$

备注 3.21。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为两个对称幺半范畴。称函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为对称幺半的定义，与称其扩展为一个图表态射完全等价。

$$F\colon C^*(\mathcal{C}) \to C^*(\mathcal{D})\,,$$

其中，实际上我们只需要考虑 $*\le 2$。因此，刻画 F 作为对称幺半函子的所有条件，都已内置于立方体态射这一概念之中。

上述定义可以推广到多个变量，首先从立方体复形本身开始。

定义 3 .22. 对于范畴 $\mathcal{C}_1,\ \ldots,\ \mathcal{C}_m$，立方复形 $C^*(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m)$ 是图表其第 n个 le vel 是

$$C^n(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m) \coloneqq \coprod_{\substack{\Sigma n_i = n\\ n_i\ge 0}} C^{n_1}(\mathcal{C}_1)\times\cdots\times C^{n_m}(\mathcal{C}_m)$$

其面映射和退化映射由 $C^*(\mathcal{C}_i)$ 诱导，如定义 3.17 之前所述。类似地，$C^{*\le k}(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m)$ 表示相应的图表，其截断于层级 k 以下。

注记 3.23。 推广注记 3.21，设 $\mathcal{C}_1, .., \mathcal{C}_n, \mathcal{D}$ 为对称幺半范畴。一个n-函子 $F\colon \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ 当且仅当它可扩张为图表态射时是多正合的

$$F\colon C^*(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n) \to C^*(\mathcal{D})\,.$$

换言之，立方图表及其态射编码了多重正合性。

定义 3.24. 对于三角范畴 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ 以及皮卡群胚 $\mathcal{P}$，立方多重行列式函子是一个函子

$$D\colon C^{\leq 2}(\mathrm{isom}(\mathcal{T}_1), \ldots, \mathrm{isom}(\mathcal{T}_m)) \to C^{\leq 2}(\mathcal{P})$$

其含义是，它将 n-立方体映射到 n-立方体，并且与面映射和退化映射相容。

引理 3.25. 对于三角范畴 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ 以及皮卡群胚 $\mathcal{P}$，若

$$D\colon C^{\leq 2}(\mathrm{isom}(\mathcal{T}_1), \ldots, \mathrm{isom}(\mathcal{T}_m)) \to C^{\leq 2}(\mathcal{P})$$

是一个立方多重行列式，那么对于 $\mathcal{T}_i$ 中的 0 和 $\mathcal{T}_k$ 中的 a_k，有 $k \in \{1, \ldots, m\} - \{i\}$

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m) \cong 0.$$

证明。由于 $0 \to 0 \to 0 \to \Sigma 0$ 是 $\mathcal{T}_i$ 中的一个区别三角，因此

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m) \to (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m) \to (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m)\\ \to \Sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m)\end{aligned}$$

是 C^1 中的一个 1-立方体（同构（$\mathcal{T}_1$） $\times \cdots \times$ 同构（$\mathcal{T}_m$））。因此，其像是 $\mathcal{P}$ 中的一个 1-立方体，即娱乐下载

$$\begin{aligned}D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m) + D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m) \xrightarrow{\cong}\\ \xrightarrow{\cong} D(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m).\end{aligned}$$

但在 $\mathcal{P}$ 中所有对象都是可逆的，因此得到了所需的结果。 □

定理 3.26。 多重行列式函子的两个定义，即定义 3.2 和 3.24，是等价的。

证明。设 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ 是三角范畴， $\mathcal{P}$ 是皮卡群胚。

首先，假设 $d\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_m \to \mathcal{P}$ 是定义3.2意义下的多重行列式函子。那么 d 是一个态射 C^0(同构($\mathcal{T}_1$)..., 同构($\mathcal{T}_m$)) $\to C^0(\mathcal{P})$。我们断言，这个层级 0 的态射诱导出更高层级的态射，并且这些态射与面映射和退化映射相容。

确实，对于层级 1， C^1(isom($\mathcal{T}_1$) . . . , isom($\mathcal{T}_m$)) 中的一个 1-立方体是 $\mathcal{T}_i$ 中的一个区别三角 $x_i \to y_i \to z_i \to \Sigma x$，连同对象 $\mathcal{T}_j$ 中的 a_j，其中 $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots m$。由于 d 是一个多重行列式函子，因此它关于变量 i 是一个行列式函子。因此，为了记号方便，省略变量 a_j，我们有

$$d(z_i) + d(x_i) \xrightarrow{\cong} d(y_i)\,,$$

也就是说

$$d\big(x_i \text{ — } y_i \text{ — } z_i\big) = d(x_i) \text{ — } d(y_i) \text{ — } d(z_i)$$

是 $\mathcal{P}$中的一个 1-立方体。此外，显然，层级 0 和层级 1 之间的面映射与退化映射是相容的，因为形如 $x \quad x \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow \Sigma x$ 和 $0 \quad \rightarrow x \quad x \quad \rightarrow$的对象始终是区别三角。

对于层级 2，在 $C^2(\text{isom}(\mathcal{T}_1)\ldots,\text{isom}(\mathcal{T}_m))$ 中有两种类型的 2-立方体：第一种类型是 $\mathcal{T}_i$ 中的一个区别三角 $x_i \to y_i \to z_i \to \Sigma x_i$，以及 $\mathcal{T}_j$ 中的一个区别三角 $x_j \to y_j \to z_j \to \Sigma x_j$（对应 $i < j$），并连同 $\mathcal{T}_k$ 中对应于 $k \in \{1,\ldots,m\} - \{i,j\}$ 的对象 a_k；第二种类型是 $C^2(\mathcal{T}_i)$ 中的一个 2- 立方体，并连同 $\mathcal{T}_k$ 中对应于 $k \in \{1,\ldots,m\} - \{i\}$ 的对象 a_k。为简化记号，省略 a_k，第一种类型的 2-立方体在 d 下的像为

$$\begin{array}{ccccc} d(z_i,x_j) & \longrightarrow & d(z_i,y_j) & \longrightarrow & d(z_i,z_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ d(y_i,x_j) & \longrightarrow & d(y_i,y_j) & \longrightarrow & d(y_i,z_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ d(x_i,x_j) & \longrightarrow & d(x_i,y_j) & \longrightarrow & d(x_i,z_j) \end{array} .$$

请注意，由于多重行列式函子定义中的双三角形公理，此图像是 $\mathcal{P}$ 中的 2-立方体。至于第二类 2-立方体，在 d 下的像，根据 $\mathcal{P}$中的[Bre11，引理 3。9]，可保证是。

其次，假设 $D\colon C^{*\leq 2}(\text{同构}(\mathcal{T}_1)\ldots,\mathcal{T}_m)) \to C^{*\leq 2}(\mathcal{P})$ 是定义 3.24 意义下的立方多行列式函子。那么， D 的零级部分（我们将其记为 D^0）定义了一个函子 $\text{同构}(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times \text{同构}(\mathcal{T}_m) \to \mathcal{P}$。我们断言 D^0 是一个多重行列式函子。

事实上，固定一个 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 和 $\mathcal{T}_k$ 中的对象 a_k，其中 $k \in \{1,\ldots,m\} - \{i\}$。我们将证明 D^0 关于变量 i 是一个行列式函子。和之前一样，为了方便起见，我们在记号上省略 a_k。

假设 $x \to y \to z \to \Sigma x$ 是 $\mathcal{T}_i$ 中的一个区别三角。根据定义，它是一个 1-立方体$x \quad y \quad z$，因此它在D 下的像是 $\mathcal{P}$ 中的一个 1-立方体，即。

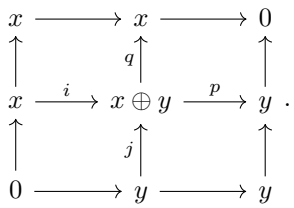
$$D^0(z) + D^0(x) \xrightarrow{\cong} D^0(y).$$

此外，上述同构关于区别三角的同构是自然的，因为任何同构的区别三角都可纳入 2-立方体中。

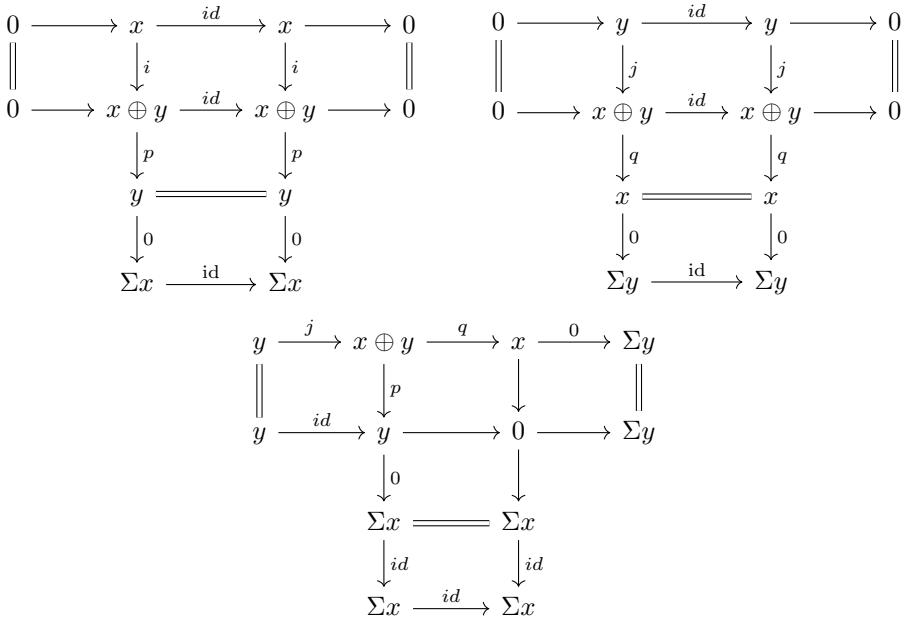
$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & z \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ * & \longrightarrow & * & \longrightarrow & * \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

以及这个 2-立方体的像与引理 3.25 给出了自然性条件。注意：上述图表是一个 2-立方体，因为它是一个八面体，因此以一种

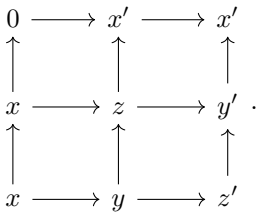
显然的方式具有 Verdier 结构。对于交换公理，请考虑：



上面的交换图表，其行和列均为区别三角，是一个 2-立方体，因为它具有如下 Verdier 结构：



因此，利用引理 3.25 以及上述 2-立方体的像，可以得到交换公理。行列式函子的八面体公理可利用引理 3.25 以及这个表示三角范畴八面体公理的 2-立方体的像得到：



接下来，我们将证明 D^0 在变量之间具有相容性：假设 $x_i \to y_i \to z_i \to \Sigma x_i$ 是 $\mathfrak{T}_i$ 中的一个区别三角，$x_j \to y_j \to z_j \to \Sigma x_j$ 是 $\mathfrak{T}_j$ 中的一个区别三角，$f_i\colon u_i \to v_i$ 是 $\mathfrak{T}_i$ 中的一个同构，并且 a_k 是 $\mathfrak{T}_k$ 中的对象，其中 $k \in \{1, \dots, m\} - \{i, j\}$。我们将继续。

为方便记号，省略 a_k 。第二个三角形公理由 2-立方体的像推出。

$$\begin{array}{ccccc}
(x_i, z_j) & \longrightarrow & (y_i, z_j) & \longrightarrow & (z_i, z_j) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(x_i, y_j) & \longrightarrow & (y_i, y_j) & \longrightarrow & (z_i, y_j) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(x_i, x_j) & \longrightarrow & (y_i, x_j) & \longrightarrow & (z_i, x_j)
\end{array}$$

wher因为三角函数公理可由引理 3.25 以及 2-立方体的像

$$\begin{array}{ccccc}
(u_i, x_j) & \longrightarrow & (u_i, y_j) & \longrightarrow & (u_i, z_j) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(v_i, x_j) & \longrightarrow & (v_i, y_j) & \longrightarrow & (v_i, z_j) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(0, x_j) & \longrightarrow & (0, y_j) & \longrightarrow & (0, z_j)
\end{array}$$

因为 $u_i \xrightarrow{f_i} v_i \to 0 \to \Sigma u_i$ 是一个区别三角。总之， D^0 是一个多重行列式函子。

□

定义 3.27。设 $F\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}$是一个从三角范畴出发的多重正合函子。若对于所有区别三角 $x_i \to y_i \to z_i \to \Sigma x_i$ （属于$\mathcal{T}_i$）和 $x_j \to y_j \to z_j \to \Sigma x_j$ （属于 $\mathcal{T}_j$）， $i < j$所诱导的 3×3 图表

$$\begin{array}{ccccc}
F(x_i, x_j) & \longrightarrow & F(y_i, x_j) & \longrightarrow & F(z_i, x_j) & \longrightarrow & \Sigma F(x_i, x_j) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
F(x_i, y_j) & \longrightarrow & F(y_i, y_j) & \longrightarrow & F(z_i, y_j) & \longrightarrow & \Sigma F(x_i, y_j) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
F(x_i, z_j) & \longrightarrow & F(y_i, z_j) & \longrightarrow & F(z_i, z_j) & \longrightarrow & \Sigma F(x_i, z_j) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{-1} & \downarrow \\
\Sigma F(x_i, x_j) & \longrightarrow & \Sigma F(y_i, x_j) & \longrightarrow & \Sigma F(z_i, x_j) & \longrightarrow & \Sigma^2 F(x_i, x_j)
\end{array}$$

具有 Verdier 结构（定义 3.12中所述）。

推论 3.28. 设 $F\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}$ 是三角范畴的一个多重正合函子，并且 F 具有 Verdier 结构。那么对于每个行列式函子 $[-]\colon \mathcal{T} \to \mathcal{P}$，复合 $[-] \circ F$ 都是一个多重行列式函子。

证明。 这样的函子 F诱导出函子 $C^{*\leq 2}(\text{同构}(\mathcal{T}_1) \ldots, \text{同构}(\mathcal{T}_n)) \to C^{*\leq 2}(\text{同构}(\mathcal{T}))$，且与面映射和退化映射相容。于是该结论由定理 3.26 得出。 □

3.5 行列式函子的加法

多重行列式函子的加法是逐点进行的。不过，为了使其更加具体，我们将从立方多重行列式函子的角度来考察它。首先，我们来看 $C^*(\mathcal{P})$ 中的和。

定义 3.29. 设 $\mathcal{P}$ 是一个皮卡群胚。两个 n-立方体 $S, T\colon \mathrm{ob}(I^n) \to \mathcal{P}$ 的和是一个n-立方体，其定义于 $\mathcal{P}$ 中，定义为

$$(S+T)(a_1,\dots,a_n) \coloneqq S(a_1,\dots,a_n) + T(a_1,\dots,a_n).$$

此外，如果 S 的同构为 f_1、……、f_n，而 T 的同构为 g_1、……、g_n，那么 $S+T$ 的同构为 $(f_1+g_1)\circ\mathrm{coas}$ …… 、 $(f_n+g_n)\circ\mathrm{coas}$。

引理 3.30。两个 n-立方体（如上所定义）的和是一个 n-立方体。

证明。唯一需要证明的是，2-立方体的和具有所需的附加结构；但这可由每个2-立方体上的附加结构，以及交换同构和结合同构的基本性质推出。 □

事实上，还有更强的结论：

命题 3.31. 对任意 n-立方体 $C\colon \mathrm{ob}(I^n) \to \mathcal{P}$，我们有一个同构

$$\partial_j^1 C + \partial_j^{-1} C \xrightarrow{\cong} \partial_j^0 C\,,$$

对于 e ，$\dots, n$，其中该同构由 coas 或其逆确定 .

证明. 显然。 □

定义 3.32. 对于两个立方多行列式函子 $\det_1, \det_2\colon C^{\le 2}(\mathrm{isom}(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times \mathrm{isom}(\mathcal{T}_n)) \to C^{\le 2}(\mathcal{P})$，和 $\det_1 + \det_2$ 的定义是通过其在立方体 $S \in C^{\le 2}(\mathrm{isom}(\mathcal{T}_1)\times \cdots \times$ 上的作用给出的同构$(\mathcal{T}_n))$:

$$(\det_1 + \det_2)(S) \coloneqq \det_1(S) + \det_2(S)\,.$$

定理 3.33. 两个多重行列式函子的和本身也是一个多重行列式函子。 r.

证明。 该结果直接由引理 3.30以及两个立方多重行列式函子都保持面映射和退化映射这一事实得出。 □

4 通用多重行列式函子

在本节中，我们证明泛多行列式函子的存在性，或者等价地，对于任意 n元组的三角范畴，将一个皮卡群胚 $\mathcal{P}$ 映射到多重行列式群胚的 2-函子 $D\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$ 是可表的。回顾一下，我们使用 $\det\colon \mathcal{T} \to V(\mathcal{T})$ 表示一个泛行列式函子；对于 n 个三角范畴，我们对这些行列式函子的 n 个副本的并置沿用相同的记号：

$$\det\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to V(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n)\,.$$

我们主张，按刚刚（重新）定义的 det 是一个泛多重行列式。更准确地说： :

定理 4.1。对于每个从三角范畴 $\mathcal{T}_i$ 到皮卡群胚 $\mathcal{P}$ 的多重行列式函子 $D\colon \mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$，存在一对 (d, a)，其中包括皮卡群胚多范畴中的一个态射 $d\colon V(\mathcal{T}_0)\times V(\mathcal{T}_1)\times\cdots\times V(\mathcal{T}_n) \to \mathcal{P}$ 以及一个自然变换$a\colon d \circ \mathsf{det} \Rightarrow D$。这对 (d, a) 具有如下意义下的唯一性：对于任意其他的对 (g, β)，其态射为 $g\colon V(\mathcal{T}_0) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n) \to \mathcal{P}$，自然变换为 $\beta\colon g \circ \mathsf{det} \Rightarrow D$，存在唯一的自然变换 $\gamma\colon d \Rightarrow g$，使得 $a = \beta \circ (\gamma * \mathsf{det})$。

回顾一下，如果 $\mathcal{M}$ 是一个多范畴，我们用 $\mathcal{M}^\times$ 表示由 $\mathcal{M}$的对象元组构成的相应幺半范畴。定理 4.1 可以改述如下：

推论 4.2. 对任意三角范畴 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，沿泛行列式 $f \circ \mathsf{det}\, f\colon \mathsf{det}^*$ 的拉回给出群胚的一个等价

$$\textsc{Det}(\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P}) \simeq \textsc{Pic}^\times(V(\mathcal{T}_0), \ldots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})\,.$$

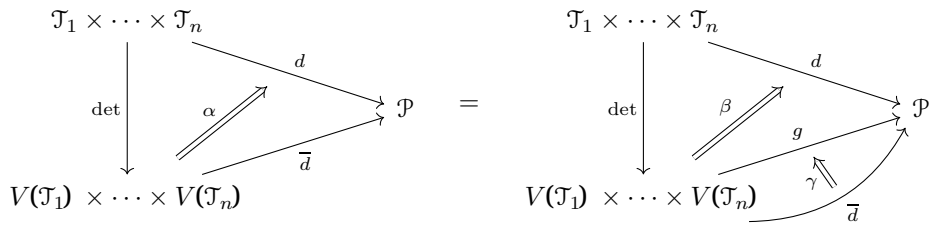
我们将（由上述推论给出的）等价映射的反方向记为 $\mathsf{bar}\colon \mathsf{d} \mapsto \mathsf{d}$。

4.1 定理4.1的证明

我们将用归纳法证明此定理，并将本节的大部分篇幅用于证明归纳步骤所需的各个部分。因此，以下假设和记号适用于本节全文。

记号与归纳假设

- （函子）固定 n和 D：$\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$，这是一个从三角范畴 $\mathcal{T}_i$ 到皮卡群胚 $\mathcal{P}$的多重行列式函子。这意味着，对所有 $x \in \mathcal{T}_0$，存在一个多重行列式函子 D_x：$\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$，由 $D_x(t_1, \ldots, t_n) = D(x, t_1, \ldots, t_n)$ 给出。
- （诱导态射）任意多重行列式函子 d：$\mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$ 都诱导出一对 $(\overline{d}, \alpha)$，其中包含皮卡群胚多范畴中的一个态射 $\overline{d}$：$V(\mathcal{T}_1)\times\cdots\times V(\mathcal{T}_n) \to \mathcal{P}$，以及一个自然变换 α：$\overline{d} \circ \mathsf{det} \Rightarrow d$。这对 $(\overline{d}, \alpha)$ 按如下方式唯一确定：
- （唯一性）对于皮卡群胚多范畴中的任意其他一对 (g, β) 及其态射g：$V(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n) \to \mathcal{P}$，以及自然变换 $\beta\colon g \circ \mathsf{det} \Rightarrow d$，存在唯一的自然变换 $\gamma\colon \overline{d} \Rightarrow g$，使得 $\alpha = \beta \circ (\gamma * \mathsf{det})$。图示如下：



引理 4.3. 设 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ 是三角范畴，$\mathcal{P}$ 是皮卡群胚，$d_i\colon \mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$ 是适用于 $i = 1, 2$ 的多重行列式函子，并且 $(\overline{d_i}, \alpha_i)$ 是由 d_i 诱导的一对。若行列式函子之间存在一个态射 $\theta\colon d_1 \Rightarrow d_2$，则存在唯一的幺半群自然变换 $\beta\colon \overline{d_2} \Rightarrow \overline{d_1}$，使得 $\alpha_2 = \theta \circ \alpha_1 \circ (\beta * \mathsf{det})$。

证明。此 这直接蕴含于“诱导态射”和“唯一性假设”。 □

注：尽管上述引理可直接由我们的假设推出，我们仍将其列出，以提醒读者函数横线的箭头反转。

命题 4.4. 对任意 $x, y \in \mathfrak{T}_0$，我们有 $\overline{D_x + D_y} \xrightarrow{\cong} \overline{D_x} + \overline{D_y}$。

证明。设 $(\overline{D_x}, \alpha_x)$ 和 $(\overline{D_y}, \alpha_y)$ 分别是 D_x 和 D_y 的诱导对。由定理3.33， $D_x + D_y$ 是一个行列式函子，这意味着它有一个诱导对 $(\overline{D_x + D_y}, \beta)$。

考虑对 $(\overline{D_x} + \overline{D_y}, \alpha_x + \alpha_y)$，其中所有和均由逐点加法定义。由于$\mathcal{P}$ 是一个皮卡群胚，且加法按逐点方式定义， $\overline{D_x} + \overline{D_y} \in \textsc{Pic}(V(\mathfrak{T}_1) \dots, V(\mathfrak{T}_n); \mathcal{P})$。注意， $\alpha_x + \alpha_y$ 是一个自然变换 $(\overline{D_x} + \overline{D_y}) \circ \mathsf{det} \Rightarrow D_x + D_y$；事实上，对于 $\mathfrak{T}_1 \times \cdots \times \mathfrak{T}_n$ 中的任意对象 k，我们有：

$$\begin{aligned}((\overline{D_x} + \overline{D_y}) \circ \det)(k) &= (\overline{D_x} + \overline{D_y})(\det(k)) \\ &\overset{\text{def}}{=} \overline{D_x}(\det(k)) + \overline{D_y}(\det(k)) \\ &= (\overline{D_x} \circ \det)(k) + (\overline{D_y} \circ \det)(k) \\ &\xrightarrow{\alpha_x + \alpha_y} D_x(k) + D_y(k) \\ &\overset{\text{def}}{=} (D_x + D_y)(k)\end{aligned}$$

并且对于任意态射 $f\colon k \to m$ 属于 $\mathfrak{T}_1 \times \cdots \times \mathfrak{T}_n$，图表

$$\begin{array}{ccc} ((\overline{D_x} + \overline{D_y}) \circ \det)(k) = (\overline{D_x} \circ \det)(k) + (\overline{D_y} \circ \det)(k) & \xrightarrow{\alpha_x(k) + \alpha_y(k)} & D_x(k) + D_y(k) = (D_x + D_y)(k) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_x(f) + \alpha_y(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_x(f) + \alpha_y(f)} \\ ((\overline{D_x} + \overline{D_y}) \circ \det)(m) = (\overline{D_x} \circ \det)(m) + (\overline{D_y} \circ \det)(m) & \xrightarrow[\alpha_x(m) + \alpha_y(m)]{} & D_x(m) + D_y(m) = (D_x + D_y)(m) \end{array}$$

是可交换的，因为 α_x 和 α_y 是自然变换。

因此，根据唯一性假设，存在唯一的自然变换

$$\gamma\colon \overline{D_x + D_y} \Rightarrow \overline{D_x} + \overline{D_y}$$

使得 $\beta = (\alpha_x + \alpha_y) \circ (\gamma * \mathsf{det})$。由于 γ 是 $\textsc{Pic}$中的自然变换，因此它是一个同构。

□

命题 4.5. 每个态射 $f\colon d_1 \to d_2$ 属于 $\textsc{Det}(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n; \mathcal{P})$ 都诱导出唯一的（就唯一性假设而言）反箭头幺半群态射 $\overline{f}\colon \overline{d_2} \to \overline{d_1}$，其位于皮卡群胚 $\textsc{Pic}(V(\mathfrak{T}_1) \dots, V(\mathfrak{T}_n); \mathcal{P})$ 中。此外，若 $(\overline{d_1}, \alpha_1)$ 和 $(\overline{d_2}, \alpha_2)$ 分别是 d_1和 d_2 所诱导的对，则 $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 \circ (\overline{f} * \mathsf{det})$。

证明。由唯一性假设可得此结论。事实上，使用自然变换$\alpha_2\colon \overline{d_2} \circ \mathsf{det} \Rightarrow d_2$和 $f \circ \alpha_1\colon \overline{d_1} \circ \mathsf{det} \Rightarrow d_2$。于是，根据 $(\overline{d_2}, \alpha_2)$ 上的唯一性假设，存在唯一的自然变换 $\overline{f}\colon \overline{d_2} \Rightarrow \overline{d_1}$，使得 $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 \circ (\overline{f} * \mathsf{det})$。

□

命题 4.6. $g \circ f\colon x \to y \to z$ in $\textsc{Det}(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_n; \mathcal{P})$ 中的每一对可复合态射都会在 $\textsc{Pic}(V(\mathfrak{T}_1) \dots, V(\mathfrak{T}_n); \mathcal{P})$ 中诱导出复合，换言之 $\overline{g \circ f} = \overline{f} \circ \overline{g}$。

证明。设 $(\overline{x},\ \alpha_x)$、$(\overline{y},\ \alpha_y)$ 和 $(\overline{z},\ \alpha_z)$ 分别是 x、y 和 z 所诱导的对。利用态射 $g\circ f\colon x\to z$，命题 4.5 告诉我们存在唯一的态射 $\overline{g\circ f}\colon\ \overline{z}\to\overline{x}$ 使得

$$\alpha_z=(g\circ f)\circ\alpha_x\circ(\overline{g\circ f}*\det).$$

然而，还存在另一条“第二”箭头 $\overline{z}\to\overline{x}$ 以及重写 α_z 的另一种“第二”方式。事实上，根据命题 4.5，存在唯一的态射 $\overline{f}\colon\ \overline{y}\to\overline{x}$ 和 $\overline{g}\colon\ \overline{z}\to\overline{y}$，使得我们可以将 $\alpha_y=f\circ\alpha_x\circ(\overline{f}*\det)$ 和 $\alpha_z=g\circ\alpha_y\circ(\overline{g}*\det)$ 重写；因此，将 α_y 的方程代入后，我们得到重写 α_z 的另一种“第二”方式：

$$\begin{aligned}\alpha_z&=g\circ(f\circ\alpha_x\circ(\overline{f}*\det))\circ(\overline{g}*\det)\\&=(g\circ f)\circ\alpha_x\circ((\overline{f}\circ\overline{g})*\det).\end{aligned}$$

对于一个“第二个”态射 $(\overline{f}\circ\overline{g})\colon\ \overline{z}\to\overline{x}$。现在，由于 $\overline{g\circ f}$ 的唯一性，必然有等式 $\overline{g\circ f}=\overline{f}\circ\overline{g}$。□

推论 4.7。$\textsc{Det}(\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{T}_n;\ \mathcal{P})$ 中的任意交换图，均可通过映射 $f\mapsto\overline{f}$ 在 $\textsc{Pic}(V(\mathcal{T}_1)\dots,V(\mathcal{T}_n);\ \mathcal{P})$ 中诱导出一个交换图（箭头方向相反）。

证明。这是命题4.5 和 4.6的直接推论。□

命题 4.8。由 $x\mapsto D_x$ 给出的箭头 $\mathcal{T}_0\to\textsc{Det}(\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{T}_n;\ \mathcal{P})$ 是一个行列式函子。

证明。由于 D 是对所有变量都具有相容自然性的多重态射（具体而言，它具有双函子的性质），因此对于第一变量中的任意 $f\colon\ x\to y$，箭头

$$D_f(z_1,\dots,z_n)\colon D(x,z_1,\dots,z_n)\to D(y,z_1,\dots,z_n)$$

定义自然变换 $D_f\colon\ D_x\Rightarrow D_y$。此外，根据多重行列式函子的三角函数公理，$D_f$ 与可加性数据相容。因此，f 诱导出多重行列式函子之间的态射 $D_f\colon\ D_x\Rightarrow D_y$。

对于任意区别三角 $\Delta\colon\ x\to y\to z\to\Sigma x$ 在 $\mathcal{T}_0$ 中，由于 D 在其第一个变量上是一个行列式函子，且根据三角函数公理，存在一个自然变换$\beta\colon\ D_z+D_x\Rightarrow D_y$。此外，根据多重行列式函子的双三角公理，$\beta$ 与可加性数据相容。因此，三角 Δ 诱导出一个多重行列式函子之间的态射 $D_z+D_x\Rightarrow D_y$。

要看出 $x\mapsto D_x$ 导出了交换性公理和八面体公理，只需注意，对于任意固定的 $(x_1,\dots,x_n)$，$\in\mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n$ 满足行列式函子的所有要求，因为 D 是一个多重行列式函子，因此在每个变量上都是一个行列式函子。对于 $\mathsf{isom}(\mathcal{T}_1)\ \times\cdots\times\mathsf{isom}(\mathcal{T}_n)$ 中的任意态射或三角形，多重行列式函子的双三角形公理和三角函数公理提供了必要的相容性。□

推论 4.9. 由 $x\mapsto\overline{D_x}$ 给出的箭头 $\mathcal{T}_0\to\textsc{Pic}(V(\mathcal{T}_1)\ ..\ .,V(\mathcal{T}_n);\ \mathcal{P})$ 是一个行列式函子。

证明。箭头 $x\mapsto\overline{D_x}$ 是两个箭头的复合。第一个箭头 $x\mapsto D_x$，由命题 4.8 可知是一个行列式函子，后接箭头 $f\mapsto\overline{f}$，根据引理 4.3 和命题 4.6，它是一个（逆变）函子。由命题4.4 和 4.5，对于任意的区别三角$x\to y\to z\to\Sigma x$ 在 $\mathcal{T}_0$中，$\overline{D_z}+\overline{D_x}\overset{\cong}{\leftarrow}\overline{D_z+D_x}\leftarrow\overline{D_{y\circ}}$。此外，由于 $x\mapsto D_x$ 满足交换性和八面体公理，因此根据推论 4.7 $x\mapsto\overline{D_x}$ 也满足。□

定理的证明结束 4.1。 当 $n = 0$ 时，我们考察一个行列式函子 $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{P}$。众所周知，这样的行列式函子会导出所需的唯一一对（例如，参见[MTW15]）。

现在假设定理对 n 三角范畴成立，即假设本节开头的归纳假设成立。根据推论4.9，箭头

$$\delta_D \colon \mathcal{T}_0 \to \mathrm{Pic}(V(\mathcal{T}_1), \dots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})$$

由 δ_D: $x \mapsto \overline{D_x}$ 给出的是一个行列式函子。因此，存在一个诱导函子$\overline{\delta_D}$: $V(\mathcal{T}_0) \to \mathrm{Pic}(V(\mathcal{T}_1) \dots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})$，它属于皮卡群胚范畴，并伴有一个自然变换$\overline{\alpha}$: $\overline{\delta_D} \circ \det \Rightarrow \delta_D$，且它是唯一的（按唯一性假设的意义）。

由于皮卡群胚的多范畴是闭的，因此 $(\overline{\delta_D}, \overline{\alpha})$ 诱导映射 (d, a)，其中$d \in \mathrm{Pic}(V(\mathcal{T}_0) \dots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})$，以及 a: $d \circ \det \Rightarrow D$，它们也满足唯一性假设。 □

4.2 等价的函子性

回顾一下， TrCat 表示（小）三角范畴的多范畴（取富化意义）。还请回顾关于具有 Verdier 结构的多函子的定义 3.27。我们稍作限制， TrCat 只考虑以下多态射：

定义 4.10. 多范畴 $\mathrm{TrCat}_{\mathcal{V}}$ 是 TrCat 的子多范畴，其中所有函子都具有 Verdier 结构。诱导的幺半范畴 $\mathrm{TrCat}_{\mathcal{V}}^{\times}$ 也类似。

定理 4.11. 对任意皮卡群胚 $\mathcal{P}$ 及所有 n-元组 $\underline{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$，对所有 $n \geq 0$，群胚 $\mathrm{Det}(\underline{\mathcal{T}}, \mathcal{P})$确定一个 2-函子

$$\mathrm{Det}(-; \mathcal{P}) \colon (\mathrm{TrCat}_{\mathcal{V}}^{\times})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pic} \,.$$

证明。 Det 的陪域自动是群胚范畴。由于存在一个 2-范畴等价 $\mathrm{Det}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P}) \simeq \mathrm{Pic}^{\times}(V(\mathcal{T}_1) \dots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})$，且皮卡群胚范畴是闭的，因此陪域实际上是皮卡群胚范畴。

与推论 3.28采用相同的推理，对于任意三角范畴 $\mathcal{T}_1$， ....., $\mathcal{T}_n$ 以及任意多重正合态射 F_i: $\mathcal{S}_1^i \times \cdots \times \mathcal{S}_{m_i}^i \to \mathcal{T}_i$，只要它们具有 Verdier 结构，态射（$F_1$， ....., F_n）便诱导出一个映射

$$(F_1, \dots, F_n)^* \colon \mathrm{Det}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P}) \to \mathrm{Det}(\mathcal{S}_1^1, \dots, \mathcal{S}_{m_n}^n; \mathcal{P}),\ D \mapsto D \circ (F_1, \dots, F_n) \,.$$

多重行列式函子 η: $D \to E$ 的任意态射都会给出行列式函子 $\eta * (F_1, \dots, F_n)$: $D \circ (F_1, \dots, F_n) \to E \circ (F_1, \dots, F_n)$ 的一个态射。此外，恒等映射和复合显然都得以保持。 □

定理 4.12. 对于任意皮卡群胚 $\mathcal{P}$，等价

$$\mathrm{Det}(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P}) \simeq \mathrm{Pic}^{\times}(V(\mathcal{T}_1), \dots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P})$$

关于 $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathrm{TrCat}_{\mathcal{V}}^{\times}$ 是函子性的。

记号 4.13。对于任意行列式函子 d，我们用 $\overline{d}$ 表示定理 4.1所保证的诱导皮卡群胚之间的多重正合函子。

证明。设 $\mathcal{T}_1$、…、$\mathcal{T}_n$ 为三角范畴，$F_i\colon \mathcal{S}_1^i \times \cdots \times \mathcal{S}_{m_i}^i \to \mathcal{T}_i$ 为具有 Verdier 结构的多重正合函子。对于行列式函子 $D\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$ 及态射 $f\colon (V(\mathcal{T}_1) \ldots, V(\mathcal{T}_n)) \to \mathcal{P}$，我们用 $(F_1, \ldots, F_n)^*$ 表示映射 $(F_1, \ldots, F_n)^*(D) = D \circ (F_1, \ldots, F_n)$，并用 $(F_1, \ldots, F_n)^*$ 表示映射 $(F_1, \ldots, F_n)^*(f) = f \circ$(行列式 $\circ F_1, \ldots,$ 行列式 $\circ F_n$)。

为证明该等价保持态射，也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DET}(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n; \mathcal{P}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{PIC}^{\times}(V(\mathcal{T}_1), \ldots, V(\mathcal{T}_n); \mathcal{P}) \\ \downarrow{\scriptstyle (F_1,\ldots,F_n)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{(F_1,\ldots,F_n)^*}} \\ \mathrm{DET}(\mathcal{S}_1^1, \ldots, \mathcal{S}_{m_n}^n; \mathcal{P}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{PIC}^{\times}(V(\mathcal{S}_1^1), \ldots, V(\mathcal{S}_{m_n}^n); \mathcal{P}) \end{array}$$

在自然变换意义下交换，我们将证明，对于每个多重行列式函子 $D\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{P}$，都存在一个自然变换 $\beta\colon \overline{D} \circ (\mathrm{Det} \circ F_1, \ldots, \mathrm{Det} \circ F_n) \circ \mathrm{Det} \Rightarrow D \circ (F_1, \ldots, F_n)$。此自然变换结合定理 4.1 的唯一性，将导出所需的自然变换 $D \circ (F_1, \ldots, F_n) \Rightarrow \overline{D} \circ (\mathrm{Det} \circ F_1, \ldots, \mathrm{Det} \circ F_n)$。

令 α_i 为自然变换 $\det \circ F_i \circ \det \Rightarrow \det \circ F_i$，并令 τ 为自然变换 $\overline{D} \circ \det \to D$，二者均由定理 4.1 保证存在。于是我们可以取 β 为

$$(\tau * (F_1, \ldots, F_n)) \circ (\overline{D} * (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

此外，对于任意多重正合函子 $G_{i,j}\colon \mathcal{R}^i_{,1}{}^j \times \ldots \times \mathcal{R}^{i,p_j}{}^j \to \mathcal{S}_j^i$，若其具有 Verdier 结构，且带有自然变换 $\gamma_{i,j}\colon \det \circ G_{i,j} \circ \det \Rightarrow \det \circ \overline{G_{i,j}}$，则复合 $(F_1, \ldots, F_n) \circ (G_{1,1}, \ldots, G_{n,m_n})$ 得以保持。事实上，使用自然变换

$$\begin{aligned} (\tau * ((F_1, \ldots, F_n) \circ (G_{1,1}, \ldots, G_{n,m_n}))) \circ (\overline{D} * (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) * (G_{1,1}, \ldots, G_{n,m_n})) \\ \circ (\overline{D} * (\overline{\det \circ F_1}, \ldots, \overline{\det \circ F_n}) * (\gamma_{1,1}, \ldots \gamma_{n,m_n})) \end{aligned}$$

从而诱导所需的自然变换。最后，我们注意到，恒等映射显然得以保留。

□

命题 4.14. 对于任意三角范畴 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ 和皮卡群胚 $\mathcal{P}$，若 $D\colon \mathcal{T}_0 \to \mathcal{P}$ 是一个行列式函子，那么在承认 Verdier 结构 $F_i\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_0$ 的多重正合函子之间，任意自然同构 $\alpha\colon F_1 \to F_2$ 都会诱导一个多重行列式函子间的态射 $D * \alpha\colon D \circ F_1 \to D \circ F_2$。

证明。由推论 3.28，$D \circ F_i$ 是一个多重行列式函子。此外，$D * \alpha$ 自动构成一个自然变换。最后，由于每个区别三角 Δ_i 在 $\mathcal{T}_i$ 中都会导出一个自然同构 $\alpha(\Delta_i)\colon F_1(\Delta_i) \to F_2(\Delta_i)$，且这些是区别三角，并且 D 是一个行列式函子，因此 $D * \alpha$ 与可加性数据相容。

□

定理 4.15. 设 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ 是三角范畴，且 $\mathcal{P}$ 是一个皮卡群胚。假设 $D\colon \mathcal{T}_0 \to \mathcal{P}$ 是一个行列式函子，并且 $\alpha\colon F_1 \to F_2$ 是多重正合函子之间的自然变换，这些函子带有 Verdier 结构 $F_i\colon \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_0$。那么存在一个诱导的自然变换 $\overline{D * \alpha}\colon \overline{D \circ F_2} \to \overline{D \circ F_1}$，它是多重正合态射 $\overline{D \circ F_i}\colon V(\mathcal{T}_1) \times \cdots \times V(\mathcal{T}_n) \to \mathcal{P}$ 之间的自然变换。

证明。这直接由命题 4.14 和推论4.2得出。

□

5 De张量三角范畴上的终结函子 s

定义 5.1。 张量三角范畴是一个三元组（$\mathcal{T}$， $\otimes$，$\mathbf{1}$），由一个三角范畴 $\mathcal{T}$、一个幺半群结构 $\otimes$: $\mathcal{T}\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$（其单位对象为 $\mathbf{1}$）组成，并且张量是一个双正合函子，其含义见定义 2.9。

注释 5.2。 我们没有将通常假定的对称性条件（例如参见[Bal10b]）纳入定义中。下面我们不特别强调张量运算的交换性，但请注意，如果幺半群结构确实是对称的，定义 5.1 就与 Balmer 的定义一致。

注释 5.3。张量三角范畴类似于一个 2-环，即具有两个幺半群结构、并满足环的公理的范畴化版本的范畴；换言之，它是不含负元素的环。这是因为，由于 $\otimes$ 的双正合性以及三角结构的性质，乘法结构（由张量 $\otimes$给出）对加法结构（由余积 $\oplus$给出）满足分配律。例如，对于任意对象 x、y 和 z，考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} x\otimes z & \longrightarrow & (x\otimes z)\oplus(y\otimes z) & \longrightarrow & y\otimes z & \longrightarrow & \Sigma x\otimes z \\ \| & & \cong\uparrow\exists & & \| & & \downarrow\cong \\ x\otimes z & \longrightarrow & (x\oplus y)\otimes z & \longrightarrow & y\otimes z & \longrightarrow & \Sigma x\otimes z \end{array}$$

底部三角形是可区别的，因为 $x\to x\oplus y\to y\to\Sigma x$ 也是如此，而 $\otimes$ 是双正合的。于是，“分配子”同构（第二个竖直箭头）的存在性由公理 TR3 和 TR4 得出。2-环的其他结构态射也可通过类似的考虑得到，但这些态射并不存在规范选择。

定义 5.4. 张量三角范畴 $\mathcal{T}$ 中的张量 $\otimes$ 具有 Verdier 结构，如果对于 $\mathcal{T}$中的所有区别三角 $x\xrightarrow{f}y\xrightarrow{g}z\xrightarrow{h}\Sigma x$ 和 $u\xrightarrow{p}v\xrightarrow{q}w\xrightarrow{r}\Sigma u$，图表 3×3

$$\begin{array}{ccccccc} x\otimes u & \xrightarrow{f\otimes id} & y\otimes u & \xrightarrow{g\otimes id} & z\otimes u & \xrightarrow{h\otimes id} & \Sigma x\otimes x \\ \downarrow{\scriptstyle id\otimes p} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes p} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes p} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\Sigma f} \\ x\otimes v & \xrightarrow{f\otimes id} & y\otimes v & \xrightarrow{g\otimes id} & z\otimes v & \xrightarrow{h\otimes id} & \Sigma x\otimes v \\ \downarrow{\scriptstyle id\otimes q} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes q} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes q} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\Sigma q} \\ x\otimes w & \xrightarrow{f\otimes id} & y\otimes w & \xrightarrow{g\otimes id} & z\otimes w & \xrightarrow{h\otimes id} & \Sigma x\otimes w \\ \downarrow{\scriptstyle id\otimes r} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes r} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes r} & -1 & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\Sigma r} \\ \Sigma x\otimes u & \xrightarrow{\Sigma f\otimes id} & \Sigma y\otimes u & \xrightarrow{\Sigma g\otimes id} & \Sigma z\otimes u & \xrightarrow{\Sigma h\otimes id} & \Sigma^2 x\otimes u \end{array}$$

具有 Verdier 结构（定义 3.12 中的含义）。

备注 5.5。 Keller 和尼曼在 [KN02，定义 3。1]中考虑的公理意味着，他们的张量积具有 Verdier 结构。（他们称这样的张量三角范畴为“良好”。）P. May 此前也考虑过这些额外公理 [May01]。Balmer 对张量三角范畴的定义中并未包含这些额外公理 [Bal10b、Bal10a、Bal05], ，定义 5.1中也未包含。从现在起，我们假设张量结构满足这一附加性质；不过，为避免引起混淆，我们不修改定义，而是在需要时于相关陈述中明确提出这一要求。（参见下文定理5.9 。）

定义 5.6。若一个皮卡群胚 $(\mathcal{P}, +, 0)$ 存在第二个幺半群结构，且该结构是形式为 $\odot\colon \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ 的多重精确幺元结合映射，则称其为范畴环。

注记 5.7。 第二个幺半群结构的多正合性，指的是运算 $\odot\colon \mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ 以及复合运算 $\odot\circ(\odot\times\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$，$\odot\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\times\odot)$ 等在公理中涉及的运算的双正合性。这些运算可通过引入适当的高阶运算 $\odot_n\colon \mathcal{P}^{\times n}\to\mathcal{P}$ 以“无偏形式”表示，并假定它们相对于底层皮卡群胚结构（$\mathcal{P}, +, 0$) 是多正合的（参见 [Ald17]）。

注记 5.8。 众所周知（例如参见 [JP07]），若 $\mathcal{P}$ 是范畴环，则 $\pi_0(\mathcal{P})$ 是一个环，并且 $\pi_1(\mathcal{P})$ 是一个 π_0-双模。

更具体地说，若 $(\mathcal{P}, +, 0, \odot, 1)$ 是一个范畴环，则 $\pi_0(\mathcal{P})$ 是阿贝尔群 $\mathrm{ob}(\mathcal{P})/\sim$，其中当 x 和 y 同构时，$x\sim y$，其运算为 $[x]+[y]\coloneqq[x+y]$，以及$[x]\cdot[y]\coloneqq[x\odot y]$。

此外，$\pi_1(\mathcal{P})$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(0)$。在复合运算下，这是一个阿贝尔群，并具有以下作用：对于 $f\in\mathrm{Aut}(0)$，定义左作用 $A\cdot f$ 如下

$$\begin{array}{ccc} A\odot 0 & \xrightarrow{{}_A\sigma} & 0 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A\odot f}\downarrow & \circ & \vdots{\scriptstyle A\cdot f} \\ A\odot 0 & \xrightarrow[{}_A\sigma]{} & 0 \end{array}$$

其中 ${}_A\sigma\colon A\odot 0\to 0$ 是复合

$$\begin{aligned} A\odot 0\to(A\odot 0)+0\to(A\odot 0)+[(A\odot 0)+(-(A\odot 0))]\to[(A\odot 0)+(A\odot 0)]+(-(A\odot 0))\to \\ \to[A\odot(0+0)]+(-(A\odot 0))\to(A\odot 0)+(-(A\odot 0))\to 0. \end{aligned}$$

类似地，令 $\sigma_A\colon 0\odot A\to 0$ 为相应的复合；则右作用 $f\cdot A$ 同样使用 σ_A定义。

定理 5.9. 若 $\mathcal{T}$ 是一个张量三角范畴，且其张量结构具有 Verdier 结构，则虚对象的泛性质皮卡群胚 $V(\mathcal{T})$ 是一个范畴环。

证明。 令 $\mathcal{T}$ 为一个张量三角范畴，其中 $\otimes\colon \mathcal{T}\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ 是具有 Verdier 结构的张量结构。特别地，$\otimes$ 是幺半、结合且双正合的。令 $\odot\colon V(\mathcal{T})\times V(\mathcal{T})\to V(\mathcal{T})$ 由 $\otimes$ 诱导（如定理 4.1所示）。由于 $\otimes$ 是多重正合的并具有 Verdier 结构，因此 $\otimes\circ\det$ 是一个多重行列式函子，见推论 3.28。因此 $\odot$ 自动是多重正合的。

请注意，$\otimes$ 中的所有含幺性和结合性都可以表述为以下形式。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}\times\cdots\times\mathcal{T} & & \\ & \Downarrow\cong & \mathcal{T} \end{array}$$

对于一些具有 Verdier 结构和自然同构的函子。这些自然变换转化为皮卡群胚多范畴中多重正合函子之间的自然变换（命题 4.14 和定理 4.15）。此外，它们的像是 $\odot$ 所对应的单位元和结合恒等式，因为 Det，而且 Det 与 Pic 之间的范畴等价在 $\mathcal{T}$ 上是函子性的（定理 4.11 和 4.12）。

□

备注 5.10. 若 1 是张量三角范畴 $\mathcal{T}$ 的单位元，则 det(1) 是范畴环 $V(\mathcal{T})$ 的单位元。

推论 5.11. 若 $\mathcal{T}$ 是一个张量三角范畴，且其张量运算具有 Verdier 结构，则 $K_0(\mathcal{T})$ 是一个环，并且 $K_1(\mathcal{T}) := \pi_1(V(\mathcal{T}))$ 是一个 K_0 双模

证明。 这直接由定理 5.9、注 5.8以及以下事实得出： $K_0(\mathcal{T})$ 是$\pi_0(V(\mathcal{T})$。

□

参考文献

[Ald17] Ettore Aldrovandi, 《双扩张、双幺半函子、多重线性函子演算与范畴环》, 《范畴理论与应用》32（2017年）, 第27号, 889–969, 网址: http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/32/27/32-27abs.html。[Bal05] Paul Balmer, 《张量三角范畴中的素理想谱》, 《纯粹与应用数学杂志》588（2005）, 149–168, doi:10.1515/crll.2005.2005.588.149。MR 2196732[Bal10a] ———, 《谱、谱、谱——张量三角谱与自同态环的 Zariski 谱》, 《代数几何与拓扑》10（2010）, 第3号, 1521–1563, doi:10.2140/agt.2010.10.1521。MR 2661535[Bal10b] ———, 《张量三角几何》, 《国际数学家大会论文集》。第二卷, 印度斯坦图书公司, 新德里, 2010年, 第85–112页。MR 2827786[BBD82] Alexander A. Be˘ılinson、J. Bernstein 和 Pierre Deligne, 《pervers 层》, 《奇异空间上的分析与拓扑》, I（吕米尼, 1981）, Ast´erisque, 第100卷, 法国数学会, 巴黎, 1982年, 第5–171页。MR 86g:32015[BFSV03] Cornel Balteanu、Zbigniew Fiedorowicz、Roland Schw¨anzl 和 Rainer Vogt, 《迭代幺半范畴》, 《数学进展》176（2003）, 第2号, 277–349。[BG00] Jos´e I. Burgos Gil, 《厄米向量丛与特征类》, 《代数循环的算术与几何》（班夫, 艾伯塔省, 1998）, CRM 会议论文集讲义, 第24卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 2000年, 第155–182页。MR 1738857[Bre11] Manuel Breuning, 《三角范畴上的行列式函子》, 《K理论杂志》8（2011）, 第2号, 251–291, doi:10.1017/is010006009jkt120。MR 2842932[Del87] Pierre Deligne, 《上同调的行列式》, 《算术代数几何的当前趋势》（阿卡塔, 加利福尼亚州, 1985）, 《当代数学》, 第67卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 1987年, 第93–177页。MR 89b:32038 ´Duc[Fran05] cois Ducrot, 《立方结构与交丛》, 《纯粹与应用代数》195（2005）, 第1号, 33–73, doi:10.1016/j.jpaa.2004.06.002。MR 2100310.EM[A. D. Elmendorf 和 M. A. Mandell, 《置换范畴、多范畴与代数 09] K 理论》, 《代数几何与拓扑》9（2009）, 第4号, 2391–2441, doi:10.2140/agt.2009.9.2391。MR 2558315

[GJO22] Nick Gurski、Niles Johnson 和 Ang´elica M. Osorno，《置换范畴的对称幺半 2-范畴》，2022年，arXiv:2211.04464。[JP07] Mamuka Jibladze 和 Teimuraz Pirashvili，《通过范畴环研究第三 Mac Lane 上同调》，《同伦相关结构杂志》2（2007），第2号，187–216，arXiv:math/0608519。MR MR2369166（2008m:18014）[JS93] Andr´e Joyal 和 Ross Street，《辫编织张量范畴》，《数学进展》102（1993），第1号，20–78，doi:10.1006/aima.1993.1055。MR MR1250465（94m:18008）[JY22] Niles Johnson 和 Donald Yau，《富化 Mackey 函子的同伦论》，2022年，arXiv:2212.04276。[KN02] Bernhard Keller 和 Amnon Neeman，《May 关于三角张量积的公理与 Happel 对 D_4 箭图导出范畴的描述之间的联系》，《文献数学》7（2002年），535–560。[KS06] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《范畴与层》，《数学科学基础丛书》[Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 第332卷，施普林格出版社，柏林，2006年。MR MR2182076（2006k:18001）[Lei04] Tom Leinster，《高阶算子与高阶范畴》，伦敦数学会讲义系列，第298卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004年，网址：http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511525896，doi:10.1017/CBO9780511525896。MR 2094071（2005h:18030）[Lod82] Jean-Louis Loday，《具有有限多个非平凡同伦群的空间》，《纯粹与应用代数》24（1982），第2号，179–202，doi:10.1016/0022-4049(82)90014-7。MR 651845[Lur17] JacobLurie，《高阶代数》，2017年，网址：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf

[May01] J. P. May，三角范畴中迹的可加性，Adv. Math. 163（2001年），34–73，doi:10.1006/aima.2001.1995。MR 1867203[McC97] Randy McCarthy，正合范畴代数 K-理论谱同调的一个链复形，Algebraic K-理论（Toronto, ON，1996），Fields Inst. Commun.，第16卷，美国数学会，Providence, RI，1997年，199–220页，doi:10.1016/j.ffa.2012.08.007。MR 1466976[ML57] Saunders Mac Lane，环与模的同调，代数拓扑学研讨会，鲁汶，1956年，Georges Thone，Liège；Masson & Cie，巴黎，1957年，55–80页。MR 0094374（20 #892）[MT07]Fernando Muro和Andrew Tonks，Waldhausen K-理论谱的1-型，Adv. Math. 216（2007年），第1期，178–211，URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.05.008，doi:10.1016/j.aim.2007.05.008。MR 2353254（2008j:19006）[MTW15]Fernando Muro、Andrew Tonks和Malte Witte，关于行列式函子与 K-理论，Publ. Mat. 59（2015年），第1期，137–233，URL：http://projecteuclid.org/euclid.pm/1421861996。MR 3302579

[Nee05]Amnon Neeman，三角范畴的KK-理论，KK-理论。第1、2卷，施普林格，柏林，2005年，1011–1078页，URL：https://doi.org/10.1007/978-3-540-27855-9_20，doi:10.1007/978-3-540-27855-9_20。MR 2181838[Sch18] OlafM. Schn¨urer，层的导出范畴的 dg 增强上的六运算，Selecta Mathematica **24** （2018年），第3期，1805–1911，doi:10.1007/s00029-018-0392-4。[Seg74] Graeme Segal，范畴与上同调理论，Topology **13**（1974），293–312，doi:10.1016/0040-9383(74)90022-6。MR 353298