arXiv:2305.02303v1 [math.GR] 3 May 2023

具有有限多个布塞曼点的群

LIRAN RON-GEORGE 和 ARIEL YADIN

Abstract. 我们证明，无限有限生成群 G 是虚拟 $\mathbb{Z}$，当且仅当它的每个凯莱图 G 在其 horofunction 边界中都只包含有限个布塞曼点。这一结果补充了第二位署名作者与 M. Tointon 先前的一项成果。

1 引言

在一些重要的研究成果中，研究者提出，可以将 horofunctions 视为线性泛函在（非线性）一般度量空间中的一种类比概念，参见 例如 [3, 5, 6, 14] 及其中的参考文献。horofunctions 空间（将在下文中给出精确定义）已被有效地应用于度量空间几何的研究。尤其是在双曲空间和双曲群的情形下，这一方法已取得相当显著的成效。相比之下，针对“小型”群的测地函数边界的研究则较少。这或许是因为，在同一个群的不同凯莱图之间进行切换时，horofunctions 空间本身并非不变量。然而，似乎确实存在一些为给定群的所有凯莱图所共有的性质，而确定这类不变量是一个非常有趣的问题。

horofunction 非常适合用于寻找虚特征，也就是说，寻找其在某个有限指数子群上的限制是到阿贝尔群的非平凡同态的函数。事实上，如下文将要说明的，如果某个 horofunction 在典范群作用下具有有限轨道，那么它就是这样的虚特征（其中隐含的有限指数子群是该作用的稳定子）。在许多情况下，寻找这样的虚特征都很有用，因为它提供了一种将群分解为两部分的方法。具体而言，如果 $\psi\colon G\to\mathbb{Z}$ 是一个满同态，那么 $G\cong\mathbb{Z}\ltimes K$ 对于 $K=\mathrm{Ker}\psi$。尽管这种分解是半直积，但在许多情况下，它在几何或代数分析中仍然很有用。例如，关于多项式增长群的格罗莫夫定理的证明中，主要部分 [2] 是证明每个多项式增长群都存在一个虚特征。该定理的大多数新证明实际上都是这一结果的证明，包括克莱纳的证明 [8]和小泽的

Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev*E-mail addresses*: {lirar, yadina}@bgu.ac.il。感谢 Y. Glasner、Y. Hartman、A. Karlsson、T. Meyerovitch 和 M. Tointon 提供的宝贵讨论。本研究得到以色列科学基金会第 954/21 号项目的资助。第一作者还获得以色列科学基金会第 1175/18 号项目的部分资助。

证明 [9]。甚至在这些新证明出现之前，Karlsson 就曾建议 [4] 在多项式增长的情形下，利用测地函数边界来提供所需的虚特征。

猜想 1.1 设 G 是一个有限生成的多项式增长群。则对于 G 的任意凯莱图，测地函数边界都包含一个有限轨道（在规范群作用下）。

另见 [11]中的猜想 1.3。

Grigorchuk 猜想，凯莱图的可能增长函数之间存在一个“间隔”，见 [1]。具体而言，人们猜想，如果增长足够小，那么该群实际上具有多项式增长。由于 horofunction，尤其是布塞曼点（见下文）与图中的测地线有关，因此它们很可能是研究增长的有效工具。根据前面提到的格罗莫夫定理，每个多项式增长群都是几乎幂零的，因而具有一个虚特征。Walsh [12] 已证明，幂零群在其测地函数边界上的作用具有一个有限轨道。因此，我们得到以下这个（逻辑上较弱的）猜想。

猜想 1.2 设 Γ 是一个凯莱图。假设在 Γ 中，半径为 r的球的大小对于某些 $C>0$、$\alpha<\frac{1}{2}$ 及所有 $r\in\mathbb{N}$，均有上界 $C\exp(Cr^{\alpha})$。
那么， Γ的测地函数边界在相应的群作用下包含一个有限轨道。

值得指出的是，猜想1.2 中更小的增长函数也值得关注。目前最好的结果来自 Shalom 与 Tao 的工作 [10] ，他们证明了任何增长不超过 $C\exp(C(\log r)(\operatorname{loglog} r)^{\varepsilon})$（其中 $\varepsilon>0$ 为某个常数）的群几乎幂零（因而实际上具有多项式增长）。在 Szusterman 与第二作者即将发表的工作中，他们证明了如果每个增长足够小的凯莱图都在其测地函数边界上有一个有限轨道，那么相应的群实际上几乎幂零。

理解凯莱图的测地函数边界，尤其是将其与群的底层代数结构联系起来，颇具难度，原因之一在于更换凯莱图的具体选择时，边界也会随之改变。对于更换凯莱图时保持不变的边界性质，我们仍不甚了解。作为研究此类不变量的第一步， [11] 文中证明，任何具有线性体积增长的图，其边界中必定只有有限多个布塞曼点（布塞曼点的精确定义见下文）。对于一般的图，反向结论并不成立；我们给出一个具有任意增长率、但边界仅由一个点构成的图作为例子，见下文例4.2。

我们的主要结果定理1.3是理解群的代数性质与其凯莱图的测地函数边界之间关系的第一步。定理1.3 指出，一个无限有限生成群是几乎 $\mathbb{Z}$ 当且仅当对每个凯莱图，其测地函数边界中都只有有限多个布塞曼点。文中还证明，这些条件等价于每个凯莱图都有有限的测地函数边界；并且当这些等价条件成立时，每个 horofunction 都是布塞曼点。精确表述和定义见下文。

1.1 记号与结果的精确表述

设 G 是一个有限生成群。固定 G 的一个有限对称生成集 S；也就是说， S 作为群生成 G， $|S| < \infty$，且 $S = S^{-1} = \{x^{-1} : \quad x \in S\}$。相对于 S 的 G 的凯莱图，记作 $\Gamma(G, S)$，其顶点是 G 的元素，边由以下关系确定：对于任意 $x \in G$ 和 $s \in S$， $\{x, xs\}$ 是一条边。 $\Gamma(G, S)$ 的图度量记作 d_S。容易验证， d_S 是左不变的，也就是说，对于所有 x、 y、 $z \in G$， $d_S(zx, zy) = d_S(x, y)$。因此，使用记号 $|x|_S = d_S(x, 1)$ 很方便，其中 $1 = 1_G$ 表示群 G 的单位元。当度量可由上下文明确时，我们将省略下标 $d = d_S$ 和 $|x| = |x|_S$。

固定一个凯莱图 $\Gamma(G, S)$。令 $L(G, S)$ 为所有函数 $h\colon G \to \mathbb{R}$ 的集合，其中 h 是 1-利普希茨的（即，对于所有 $x, y \in G$， $|h(x) - h(y)| \le d(x, y)$），且 $h(1) = 0$。在 $L(G, S)$ 上赋予逐点收敛拓扑，并注意到 $L(G, S)$ 是紧致的。通过将 $x \in G$ 与布塞曼函数 $b_x\colon G \to \mathbb{R}$（定义为 $b_x(y) = d(x, y) - d(x, 1)$）相对应，可将集合 G 嵌入 $L(G, S)$。我们用 $\Gamma(G, S)$ 表示 $\{b_x\colon \ x \in G\}$ 在 $L(G, S)$ 中的闭包，并将 $\Gamma(G, S)$ 的 horofunction 边界（或视界边界）定义为

$$\partial\Gamma(G, S) := \overline{\Gamma(G, S)} \setminus \{b_x \ : \ x \in G\}.$$

.....的元素 $\partial\Gamma(G, \ S)$ 称为 **horofunction**。（度量泛函 这一术语也常被使用，且有充分理由，详见 [7]。）注意，所有 horofunction 都是整数值的（因为布塞曼函数取整数值，且我们讨论的是逐点收敛）。

在 $\Gamma(G, \ S)$ 中，**有限测地线**是一个有限数列 $(\gamma_k)_{k=0}^{n}$，满足

$$\forall\ 0 \le m \le k \le n \qquad d(\gamma_k, \gamma_m) = k - m. \tag{1}$$

一条**无限测地线**在 $\Gamma(G, \ S)$ 是一个无限数列 $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$，满足（1）对所有 $0 \le m \le k$都成立。为简便起见，当我们写测地线时，指的是无限测地线；如果需要有限测地线，我们会明确注明有限。

引理 3.2 下文将证明，若 $(\gamma_n)_n$ 是一条无限测地线，则 $\gamma_\infty := \lim_{n\to\infty} b_{\gamma_n}$ 存在（作为 $\Gamma(G, \ S)$ 中的极限），并且 $\gamma_\infty \in \partial\Gamma(G, \ S)$。这种由测地线取极限得到的 horofunction $\gamma_\infty \in \partial\Gamma(G, \ S)$ 称为**布塞曼点**。我们记

用 $\partial_b\Gamma(G,\ S)$ 表示所有布塞曼点的闭包（在 $\Gamma(G,\ S)$ 中）。关于凯莱图上布塞曼点的深入讨论，参见 [13] 及其中的参考文献。

任何凯莱图都包含一条无限测地线，这一事实是经典结果，可以利用 K¨onig 引理证明。（事实上，该证明表明存在一条双向无限测地线，也就是说，存在一个数列 $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{Z}}$，使得 $\gamma_0 = 1$，并且任意有限子路径都是一条有限测地线。这说明视界边界中始终至少有两个布塞曼点。另见 Karlsson 在 [6] 中给出的证明（采用另一种方法）：有限生成无限群的视界边界（该文中称为度量边界）至少包含 2 个元素。）

视界边界的构造还在测地线上定义了一种等价关系：若两条测地线 $\alpha,\ \beta$ 满足 $\alpha_\infty = \beta_\infty$，则称它们等价。注意，如果 $\alpha \cap \beta := \{x :\ \exists\, t,\ k \in \mathbb{N},\ \ \alpha_t = \beta_k = x\}$ 是无限的，那么 $\alpha_\infty = \beta_\infty$。然而，反过来则未必成立。等价的测地线可能没有交点。（不过，确实有这样的结论：测地线 $\alpha,\ \beta$ 等价，当且仅当存在某条测地线 γ，使得 $|\gamma \cap \alpha| = |\gamma \cap \beta| = \infty$。参见 [12]。）

我们的主要结果如下。

定理 1.3 设 G 是一个无限有限生成群。以下各条件等价。

(1) G 是虚拟的 $\mathbb{Z}$。(2) 对于 G 的每个凯莱图，布塞曼边界都是有限的。(3) 对于 G 的每个凯莱图，测地函数边界都是有限的。

此外，当 G 是虚拟的 $\mathbb{Z}$ 时，任意 horofunction 都是布塞曼点。

回顾一下，对于群性质 $\mathcal{P}$，具有虚拟 $\mathcal{P}$ 性质意味着含有一个具有性质 $\mathcal{P}$的有限指数子群。因此，虚拟 $\mathbb{Z}$ 意味着含有一个有限指数的无限循环子群。

定理 *1.3*的证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 最早在 [11], 中得到证明，并且对线性增长的一般图也成立。在命题 4.1 中，我们给出 Sam Shepperd 提供的一种非常优雅而简短的证明（由 M. Tointon 转告我们）。

我们的两项主要新贡献是 (2) $\Rightarrow$ (1)，以及如下断言：如果 G 是虚拟的$\mathbb{Z}$，那么每个 horofunction 都是布塞曼点。

蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ 蕴含关系 (1) 将在引理3.1 中给出。

定理 4.3 下面表明，当 G 在有限指数子群意义下是 $\mathbb{Z}$ 时，在任意凯莱图中，每个 horofunction 都是布塞曼点。结合定理 $\Rightarrow$ 4.3 与蕴含关系 (1) $\Rightarrow\Rightarrow$ (2)，即可得到 (1) $\Rightarrow$ (3)。。

(3) $\Rightarrow$(2）显然成立，因为布塞曼边界包含于视界边界。□

有些令人沮丧的是，我们尚未证明以下结论。

猜想 1.4 设 G 是一个无限有限生成群，并假设存在 G 的某个凯莱图，使得 $\partial_b\Gamma(G,S)$ 是有限的。

那么， G 几乎是 $\mathbb{Z}$。

2 群作用

G在 $\Gamma(G,\ S)$上有一个自然的作用，定义为：对于 $x\in G$和 $h\in\Gamma(G,\ S)$， $x.h(y)=h(x^{-1}y)-h(x^{-1})$。以下基本性质很容易验证，证明留给读者。

命题 2.1 G 在 $\Gamma(G,\ S)$上的作用具有以下性质：

(1) 该作用是连续的，即 若 $h_n\to h$ ，则 $x.h_n\to x.h$。(2) 映射 $x\mapsto b_x$ 是等变的，即 $x.b_y=b_{xy}$。(3) 视界边界 $\partial\Gamma(G,\ S)$和布塞曼边界 $\partial_b\Gamma(G,\ S)$都是不变子集。

我们需要用到的 horofunctions 的两个基本性质如下。为完整起见，附上证明。

命题 2.2 设 $\Gamma(G,\ S)$是一个凯莱图。

如果 $b_{x_n}\to h$ 和 $h\in\partial\Gamma(G,S)$，那么 $|x_n|\to\infty$。

此外，如果 $b_{x_n}\to h$ 和 $|x_n|\to\infty$，那么对每个 $r\geq 0$ ，都存在 $x\in G$ 使得$h(x)=-|x|=-r$。

特别地，地函数没有下界。

证明。假设 $b_{x_n} \to h \in \Gamma(G,S)$，且对所有 n 都有 $|x_n| \leq r$。那么，由于半径为 r 的球是有限的，必定存在某个 $|x| \leq r$，使得对于无穷多个 n，有 $x_n = x$。因此，$h = b_x \notin \partial\Gamma(G,S)$。这表明，如果 $b_{x_n} \to h \in \partial\Gamma(G,S)$，那么 $|x_n| \to \infty$。

现在，假设 $b_{x_n} \to h$ 满足 $|x_n| \to \infty$。固定某个 $r \geq 0$，令 $z = x_n \in G$ 满足：对于所有 $|y| \leq r$，$b_z(y) = h(y)$。由于 $|x_n| \to \infty$，我们可以选择 z 使得 $|z| > r$。令$\gamma = (1 = \gamma_0, \ldots\ldots, \gamma_{|z|} = z)$为一条有限测地线，并令 $x = \gamma_r$。注意到 $|x| = r$，并且

$$h(x) = d(\gamma_{|z|}, \gamma_r) - d(\gamma_{|z|}, \gamma_0) = -r = -|x|.$$

□

命题 2.3 令 $h \in \partial\Gamma(G, S)$为一个 horofunction。令 $K = \text{stab}(h) = \{x \in G : x.h = h\}$ 为 h的稳定子。

那么，限制映射 $h\big|_K$ 是从 K 到 $\mathbb{Z}$（整数加法群）的同态。

证明。这显然成立，因为对于任意 $x \in K$ 和任意 $y \in G$，我们都有

$$h(xy) = x^{-1}.h(y) + h(x) = h(y) + h(x).$$

□

我们已经看到，将一个 horofunction 限制在稳定子子群上（对于典范群作用）会得到一个映入 $\mathbb{Z}$的同态。若要尝试给出一个简单的证明，说明有限视界边界意味着该群几乎是 $\mathbb{Z}$（类似于猜想 1.4），一种直接的思路如下。

G 作用于 $\partial\Gamma(G, S)$。定义：

$$K = \{x \in G : \forall\, h \in \partial\Gamma(G,S),\ x.h = h\}$$

$$F = \{x \in K : \forall\, h \in \partial\Gamma(G,S),\ h(x) = 0\}.$$

可以证明 F 是一个子群。事实上，可以证明，如果 x_1、……、$x_n \in F$，那么它们生成的群 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ 包含在半径有限的球 r 内，而该半径仅取决于生成元 x_1、……、x_n。

目前我们尚不清楚以下问题的答案：

问题 2.4 当视界边界有限时，子群 F 是否有限生成？ F（在任意凯莱图中）是否总是有限生成？

由于上述性质，如果 F 是有限生成的，那么它就是有限的。

当视界边界有限时，我们有 $[G:K]<\infty$，并且也可以写作$\partial\Gamma(G,S)=\{h_1,\dots,h_d\}$。映射 $\Psi(x)=(h_1(x)\dots,h_d(x))$ 因而是一个映入 $\mathbb{Z}^d$ 的映射，其在 K 上的限制是一个同态。$\Psi\big|_K$ 的核恰好是 F。因此，如果 F 有限，那么可以证明 K 对某个 $n\le d$ 是虚拟 $\mathbb{Z}^n$，这也意味着 G 是如此。由于 G 有有限的视界边界，沿着我们证明定理 1.3 的思路，可以进一步证明实际上 $n=1$。

3 有限布塞曼边界

本节将证明定理 1.3 的主要新内容，具体表述如下引理。

引理 3.1 设 G 是一个有限生成无限群。假设 S 是一个有限对称生成集，使得对于任意 $x\in G$，都有布塞曼边界$\partial_b\Gamma(G,U)$ 是有限的，其中 $U=S\cup\{x,x^{-1}\}$。

那么，G 是 $\mathbb{Z}$ 的虚拟群。

引理 3.1 的证明将在本节末给出，并将使用以下引理。

引理 3.2 设 $\Gamma(G,S)$ 是一个凯莱图。设 $(\gamma_t)_t$ 是一条测地线。

那么，逐点极限

$$\gamma_\infty=\lim_{t\to\infty}b_{\gamma_t}$$

存在，且 $\gamma_\infty\in\partial\Gamma(G,S)$。

那么，存在 t_0，使得对所有 $t\ge t_0$，都有 $\gamma_\infty(\gamma_t)=-|\gamma_t|$。

如果 $\gamma_0=1$，那么对所有 $t\in\mathbb{N}$，都有 $\gamma_\infty(\gamma_t)=-t$。

证明。设 $(\gamma_t)_t$ 是一条满足 $\gamma_0=1$ 的测地线。令 $b_t=b_{\gamma_t}$。对任意 $x\in G$，由三角不等式可得 $b_x(y)=d(y,x)-|x|\ge-|y|$。因此，对固定的 $y\in G$，数列 $(b_t(y))_t$ 有下界 $-|y|$。由于 γ 是一条满足 $\gamma_0=1$ 的测地线，我们有$|\gamma_{t+1}|-|\gamma_t|=d(\gamma_{t+1},\gamma_t)$。因此，再次应用三角不等式可得，

$$b_{t+1}(y)-b_t(y)=d(\gamma_{t+1},y)-d(\gamma_t,y)-d(\gamma_{t+1},\gamma_t)\le 0.$$

我们得出，$(b_t(y))_t$ 是一个非递增的整数数列，且有下界，因此必定收敛到某个整数，我们将其记为 $\gamma_\infty(y)$。

此外，对于每个 $s \geq t$，我们有

$$b_s(\gamma_t) = d(\gamma_t, \gamma_s) - |\gamma_s| = -|\gamma_t|.$$

取 $s \to \infty$，我们有 $\gamma_\infty(\gamma_t) = -|\gamma_t| = -t$，对所有 t 都成立。

现在，设 β 是一条测地线，其中 $\beta_0 = x$。那么，$(\gamma_t = x^{-1}\beta_t)_t$ 是一条测地线，其中 $\gamma_0 = 1$，因此极限 $\beta_\infty = x.\gamma_\infty$ 存在。

设 t_0 满足：对所有 $t \geq t_0$，都有 $\gamma_\infty(x^{-1}) = d(\gamma_t, x^{-1}) - |\gamma_t|$。那么，对所有$s \geq t \geq t_0$，我们有

$$d(\gamma_s, \gamma_t) - (d(\gamma_s, x^{-1}) - d(\gamma_t, x^{-1})) = d(\gamma_t, x^{-1}) - |\gamma_t| - (d(\gamma_s, x^{-1}) - |\gamma_s|) = 0,$$

因此，对所有 $t \geq t_0$ 以及所有充分大的 s,

$$\begin{aligned}\beta_\infty(\beta_t) &= d(\beta_s, \beta_t) - |\beta_s| \\ &= d(\gamma_s, \gamma_t) - (d(\gamma_s, x^{-1}) - d(\gamma_t, x^{-1})) - |\beta_t| = -|\beta_t|.\end{aligned}$$

□

引理 3.3 设 $\Gamma(G, S)$ 是一个凯莱图。设 $K \leq G$ 是一个有限指数子群$[G : K] < \infty$。

那么，存在 $h \in \partial_b\Gamma(G, S)$ 和 $1 \neq y \in K$，使得 $h(y) = -|y|$。

证明。令 $R \subset G$ 为 K 的陪集的有限代表元集合，即 $G = \uplus_{r\in R} rK$，并设 $1 \in R$。令 $(\gamma_t)_t$ 为 $\Gamma(G, S)$ 中的某条测地线，使得 $\gamma_0 = 1$，并令 $\gamma_\infty \in \partial_b\Gamma(G, S)$。根据引理 3.2，对于每个 t，我们有 $\gamma_\infty(\gamma_t) = -t$。由于 R 是有限的，存在 $r \in R$，使得对无穷多个 t 有 $\gamma_t \in rK$。记 $\beta_t = r^{-1}\gamma_t$。注意到 β_t 是一条测地线且 $\beta_\infty = r^{-1}.\gamma_\infty$。根据引理 3.2，存在 t_0，使得对于每个 $t \geq t_0$，我们有 $\beta_\infty(\beta_t) = -|\beta_t|$。由于根据定义，对于无穷多个 t 有 $\beta_t \in K$，因此存在 t，使得 $\beta_t \in K$ 且 $\beta_\infty(\beta_t) = -|\beta_t|$。取 $h = \beta_\infty$ 和 $y = \beta_t$ 即得。□

引理 3.4 设 $\Gamma(G, S)$ 是一个凯莱图。设 $K \leq G$ 是一个子群。

假设存在一个 1-利普希茨映射 $h : G \to \mathbb{R}$，使得 $h|_K$ 是群同态，并且还假设存在 $1 \neq x \in K$，使得 $h(x) = |x|_S$。

那么对每个 $t \in \mathbb{N}$，都有 $|x^t|_S = t \cdot |x|_S$。若记 $U = S \cup \{x, x^{-1}\}$，则对任意 $g \in G$，有 $(gx^t)_t$ 是 $\Gamma(G, U)$ 中的一条测地线。

此外，存在一条测地线 γ，位于 $\Gamma(G, S)$ 中，使得 $\gamma_{t|x|} = x^t$ 对所有 $t \in \mathbb{N}$.

证明。 根据三角不等式 $|x^t|_S \leq t|x|_S$。由我们对 h 的假设，由于 $x \in K$，我们有

$$t|x|_S = th(x) = h(x^t) \leq |x^t|_S,$$

因此，对所有 $t \in \mathbb{N}$， $|x^t|_S = t|x|_S = h(x^t)$。

接下来我们证明，对每个 $t \in \mathbb{N}$， $|x^t|_U = t$。令 $x^t = u_1 \cdots u_m$，其中对所有 $1 \leq j \leq m = |x^t|_U$， $u_j \in U$。设 $J = \{j \mid u_j \in S\}$，于是若 $j \notin J$，则 $u_j \in \{x, x^{-1}\}$。由于 $x \in U$， $m \leq t$。此外，

$$t \cdot |x|_S = |x^t|_S = |u_1 \cdots u_m|_S \leq \sum_{j=1}^{m} |u_j|_S \leq |J| + (m - |J|) \cdot |x|_S \leq m \cdot |x|_S,$$

这里我们利用了 $|x|_S \geq 1$，因为 $x \neq 1$。因此， $t \leq m$，这意味着 $|x^t|_U = m = t$。

现在，设 $g \in G$。由于 $(x^t)_t$ 是 $\Gamma(G, U)$ 中的一条测地线，且图度量具有左不变性，$d_U(gx^n, gx^m) = d_U(x^n, x^m) = |n - m|$，所以 $(gx^t)_t$ 也是 $\Gamma(G, U)$ 中的一条测地线。

最后，对于最后一个断言，我们要构造一条测地线 γ in $\Gamma(G, S)$，使得$\gamma_{t|x|} = x^t$ 对所有 $t \in \mathbb{N}$ 都成立。为此，令 $m = |x|$，并设 $(1 = x_0, x_1, \ldots, x_m = x)$ 是 $\Gamma(G, S)$ 中的一条有限测地线。定义 $\gamma_0 = 1$，并对 $0 \leq j \leq m$ 定义 $\gamma_{nm+j} = x^n x_j$。

我们将证明 γ 是 $\Gamma(G, S)$ 中的一条测地线。事实上，由于 γ 是图$\Gamma(G, S)$ 中的一条路径，显然对于所有 $s \geq t$，都有 $d(\gamma_t, \gamma_s) \leq s - t$，因此我们只需证明相应的下界。

令 $k \geq n$ 和 $0 \leq i, j \leq m$ 满足 $km + i \geq nm + j$。那么，

$$d(\gamma_{nm+j}, \gamma_{km+i}) = d(x^n x_j, x^k x_i) = d(x_j, x^{k-n} x_i).$$

如果 $k = n$，那么 $i \geq j$ 并且

$$d(\gamma_{nm+j}, \gamma_{km+i}) = d(x_j, x_i) = i - j = km + i - (nm + j)$$

因为 $(x_0, \ldots, x_m)$ 是一条有限测地线。如果 $k > n$，那么

$$\begin{aligned}(k - n + 1)|x|_S = |x^{k-n+1}|_S &\leq d(x^{k-n+1}, x^{k-n} x_i) + d(x^{k-n} x_i, x_j) + d(x_j, 1) \\ &= d(x_m, x_i) + d(\gamma_{nm+j}, \gamma_{km+i}) + d(x_j, x_0) \\ &= d(\gamma_{nm+j}, \gamma_{km+i}) + |x|_S + j - i,\end{aligned}$$

其中我们再次利用了 $(x_0, \ldots, x_m)$ 是一条有限测地线。因此，在所有情况下，我们都得到 that

$$d(\gamma_{nm+j}, \gamma_{km+i}) \geq km + i - (nm + j),$$

给出了与上界相应的下界，并证明 γ 确实是 $\Gamma(G, S)$ 中的一条测地线。□

引理 3.5 设 $\Gamma(G,\ S)$ 是一个凯莱图。设 $K \leq G$ 是一个子群。

假设存在一个 1-利普希茨映射 $h\colon\ G \to \mathbb{R}$，使得 $h|_K$ 是群同态，并且还假设存在 $1 \neq x \in K$，使得 $h(x) = |x|_S$。令$U = S \cup \{x, x^{-1}\}$。

那么，

$$|\mathsf{Ker}(h|_K)| \leq |\partial_b \Gamma(G, U)|.$$

证明。令 $g \in$ 核$(h|_K)$。令 $\gamma_t = x^t$ 并令 $\beta_t = gx^t$。注意，$\gamma_t)_t$ 和 $\beta_t)_t$ 都是测地线，位于 $\Gamma(G, U)$ 中，这是引理 3.4的结论。

定义 $\psi(x) = \frac{1}{|x|_S} \cdot h(x)$。注意，$\psi$ 是定义在 $\Gamma(G,\ U)$ 上的 1-利普希茨映射，因为对每个 $s \in S$，$|\psi(s)| \leq 1$，且 $|\psi(x)| = |\psi(x^{-1})| = 1$。另请注意，$\psi|_K$ 是到 $\mathbb{R}$ 的同态，并且对每个 t 都满足 $\psi(\gamma_t) = \psi(\beta_t) = t$。因此，对每个 t,

$$d_U(\gamma_t, \gamma_0) = t = |\psi(\gamma_t) - \psi(\beta_0)| \leq d_U(\gamma_t, \beta_0)$$

$$d_U(\beta_t, \beta_0) = t = |\psi(\beta_t) - \psi(\gamma_0)| \leq d_U(\beta_t, \gamma_0)$$

考虑 $\Gamma(\overline{G,\ U})$。注意,

$$\begin{aligned} b_{\gamma_t}(\gamma_0) - b_{\gamma_t}(\beta_0) &= d_U(\gamma_t, \gamma_0) - d_U(\gamma_t, \beta_0) \leq 0 \\ &\leq d_U(\beta_t, \gamma_0) - d_U(\beta_t, \beta_0) = b_{\beta_t}(\gamma_0) - b_{\beta_t}(\beta_0). \end{aligned} \tag{2}$$

若 $\gamma_\infty = \beta_\infty$，则存在 t_0，使得对每个 $t \geq t_0$，都有 $b_{\gamma_t}(\gamma_0) - b_{\gamma_t}(\beta_0) = b_{\beta_t}(\gamma_0) - b_{\beta_t}(\beta_0)$，从而（2）中的等式处处成立。因此，对每个 $t \geq t_0$，$d_U(\gamma_t, \beta_0) = d(\gamma_t, \gamma_0) = t$。

现在我们来证明 $g = 1$。由于 $h(g) = 0, h(x^n) = n \cdot |x|_S$，且 h 是 1-利普希茨的，我们有

$$t \cdot |x|_S = h(\gamma_t) = |h(\gamma_t) - h(g)| \leq d_S(\gamma_t, g),$$

因此，对每个 t，都有 $t \cdot |x|_S \leq d_S(\gamma_t,\ g)$。

固定一个 $t \geq t_0$。由于 $d_U(\gamma_t,\ \beta_0) = t$，存在 $\Gamma(G,\ U)$ 中的一条有限测地线 $(z_j)_{j=0}^t$，使得 $z_0 = \beta_0 = g$ 且 $z_t = \gamma_t = x^t$。令每个 $1 \leq j \leq t$ 对应 $u_j = z_{j-1}^{-1} z_j$，并令 $J = \{j \mid u_j \in S\}$。于是得到:

$$t \cdot |x|_S \leq d_S(\gamma_t, g) \leq \sum_{j=1}^{t} |u_j|_S = |J| + (t - |J|) \cdot |x|_S = t \cdot |x|_S - |J| \cdot (|x|_S - 1).$$

由于 $x \neq 1$，可知 $|J| = 0$，因此对于每个 $1 \leq j \leq t$都有 $u_j \in \{x, x^{-1}\}$。于是，对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $x^t = z_t = gx^m$。但这意味着 $g = x^{t-m}$，从而 $0 = h(g) = h(x^{t-m}) = (t - m) \cdot |x|_S$。这说明 $t - m = 0$，即 $g = 1$。

由此我们证明了，满足 $\gamma_\infty = g.\gamma_\infty$ 的唯一 $g \in \mathrm{Ker}(h|_K)$ 是 $g = 1$。因此，如果g，$g' \in \mathrm{Ker}(h|_K)$ 满足 $g.\gamma_\infty = g'.\gamma_\infty$，那么 $g = g'$。也就是说，从 $\mathrm{Ker}(h|_K)$ 到 $\partial_b\Gamma(G, U)$ 的映射 $g \mapsto g.\gamma_\infty$ 是单射，证明完毕。□

现在，我们通过证明引理 3.1 来完成本节。

引理 *3.1* 的证明。设 S 是无限群 G的有限对称生成集，$x \in G$使得对于任意 $U = S \cup \{x, x^{-1}\}$，令 $\Gamma(G, U)$得到一个具有有限布塞曼边界的凯莱图。具体而言，取 $x \in S$ 可知 $|\partial_b\Gamma(G, S)| < \infty$。令

$$K = \{x \in G \ : \ \forall\, h \in \partial_b\Gamma(G, S)\ ,\ x.h = h\}$$

为该作用的核。由于 $\partial_b\Gamma(G, S)$ 是有限的，$[G : K] < \infty$。根据引理 3.3，存在 $h \in \partial_b\Gamma(G, S)$ 和 $1 \neq y \in K$，使得 $h(y) = -|y|_S$。根据命题 2.3，$h|_K$ 是到 $\mathbb{R}$ 中的一个同态，因此对于 $x = y^{-1}$，$h(x) = |x|_S$。根据引理 3.5，我们有 $|\mathrm{Ker}(h|_K)| \leq |\partial_b\Gamma(G, U)|$，其中 $U = S \cup \{x, x^{-1}\}$。根据我们对 S 的假设，这是有限的。

由于 h 是无限群 K 上一个非平凡的整数值同态，因此必有 $h(K) \cong \mathbb{Z}$。因此，$K/\mathrm{Ker}(h|_K) \cong \mathbb{Z}$，又由于核是有限的，这意味着 K 在有限指数意义下同构于 $\mathbb{Z}$。由于 $[G : K] < \infty$，这就完成了证明。□

4 线性增长图函数

定理的“仅当”方向1.3 最初在 [11] 中得到证明（在那篇论文中，视界边界指的是我们所称的布塞曼边界）。Sam Shepperd 给出了以下简短而优雅的证明。

所谓线性增长图，是指图中半径为 r 的球内顶点数随半径 r 的增长至多为线性。

命题 4.1 设 Γ 为一个图，其中 d 表示图距离。设 $o \in \Gamma$ 为某个顶点，并考虑关于此基点的布塞曼边界 $\partial_b\Gamma$。令 $S_r = \{x \in \Gamma : \ d(x, o) = r\}$ 为以 o 为中心、半径为 r 的球面。

然后，

$$|\partial_b\Gamma| \leq \liminf_{r\to\infty} |S_r|.$$

具体来说，如果 Γ 具有线性增长，那么布塞曼边界是有限的。

证明。对于 Γ 中的一条测地线 γ，记作

$$S_r \cap \gamma = \{x \in S_r \ : \ \exists\, t\ ,\ \gamma_t = x\}.$$

对于任意】 测地线 γ 存在某个 $r(\gamma)$，使得对于所有 $r \geq r(\gamma)$，都有 $|S_r \cap \gamma| = 1$ 。
【。

现在，设 $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ 是 n 条测地线，使得 $\gamma_\infty^{(1)}, \dots, \gamma_\infty^{(n)}$ 均为互不相同的布塞曼点。由于这些测地线两两不等价，因此任意两条都不可能有无穷多个交点。于是，存在某个 r_0 ，使得对于所有 $r \geq r_0$，都有

$$\forall\, i \neq j\ ,\ \big(S_r \cap \gamma^{(i)}\big) \cap \big(S_r \cap \gamma^{(j)}\big) = \emptyset.$$

通过确保 $r_0 \geq \max\{r(\gamma^{(1)}) \dots, r(\gamma^{(n)})\}$ 我们得到即彩票计划

$$n = \Big|\bigcup_{j=1}^{n} (S_r \cap \gamma^{(j)})\Big| \leq |S_r|$$

对所有 $r \geq r_0$。对右侧取下极限，即完成第一个断言的证明。

现在，如果 Γ 具有线性增长，那么存在一个常数 $C > 0$ ，使得对于任意 $r \in \mathbb{N}$，都有

$$\big|\{x \in \Gamma \ :\ d(x, o) \leq r\}\big| = \sum_{k=0}^{r} |S_k| \leq C(r+1).$$

这很　容易看出这意味着 $\liminf_{r\to\infty} |S_r| < \infty$，从而得出第二个断言。 □

还要注意，可以将上述证明中的测地线替换为在视界边界中具有不同极限的无限简单路径。然而，并非每个 horofunction 都是构成一条无限简单路径的数列的极限。

如前所述，对于一般图，命题4.1的逆命题即定理 1.3的类似结论，一般并不成立。考虑下面这个例子：一个增长率任意、但视界边界中只有一个点的图。

例 4.2 考虑下面这张图：设 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列有限图，并在每个图中选定一个顶点 $x_n \in \Gamma_n$ 。

该　图的顶点集 Γ 随后定义为 $\mathbb{N} \cup \bigcup_n \Gamma_n$。 Γ 中的边定义为 :

$\mathbb{N}$ 中的原始边（如果对于 $x,\ y \in \mathbb{N}$，则 $|x-y| = 1$ 是一条边），
每个 Γ_n中的原始边，
以及对于每个 $n \in \mathbb{N}$添加的边 $\{n, x_n\}$ 。

见图 1。

不难计算得出，如果 $x \in \Gamma_n \cup \{n\}$ 且如果 $y \in \Gamma_m \cup \{m\}$ 对于 $m > n$，那么

$$d(y, x) = d(y, m) + d(m, n) + d(n, x),$$

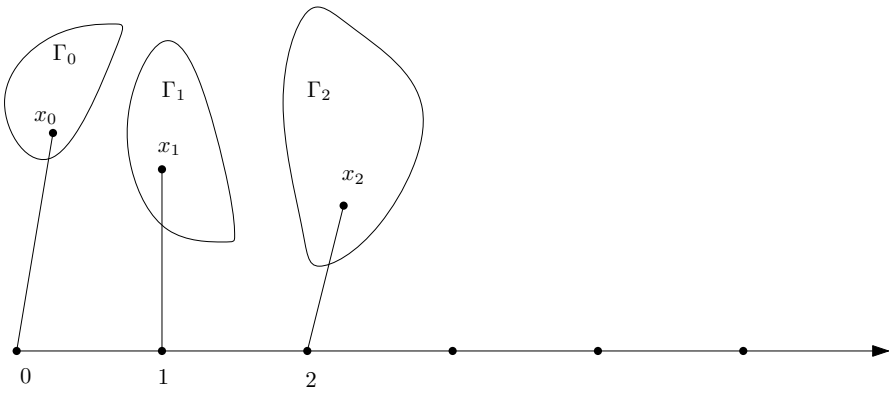

FIGURE 1. 图 Γ 来自例 4.2。

因此，这个图中唯一可能的 horofunction 由下式给出

$$h(x) = \lim_{m\to\infty}(d(m,x) - m).$$

△ ▽ △

定理 4.3 设 G 是一个几乎为 $\mathbb{Z}$ 的群，并且令 $\Gamma(G, S)$ 为 G 的任意凯莱图。

Then, $\partial\Gamma(G, S)$ 中的任意 horofunction 都是布塞曼点；也就是说，$\partial\Gamma(G, S) = \partial_b\Gamma(G, S)$.

证明。 由于 G 几乎是 $\mathbb{Z}$，它具有线性增长，因此根据命题4.1，我们知道布塞曼边界 $\partial_b\Gamma(G, S)$ 是有限的。 G 作用于 $\partial_b\Gamma(G, S)$。令

$$K = \{x \in G : \forall\, h \in \partial_b\Gamma(G, S),\ x.h = h\}$$

是该作用的核。由于 $\partial_b\Gamma(G, S)$ 是有限的，$[G : K] < \infty$。由引理 3.3，存在 $\varphi \in \partial_b\Gamma(G, S)$ 和 $1 \neq y \in K$，使得 $\varphi(y) = -|y|_S$。由命题 2.3，$\varphi|_K$ 是到 $\mathbb{R}$ 的同态，因此对于 $x = y^{-1}$，$\varphi(x) = |x|_S$。由于 φ 是 1-利普希茨函数，由引理 3.4，存在一条测地线 α，位于 $\Gamma(G, S)$ 中，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\alpha_{n|x|} = x^n$。对 $y = x^{-1}$ 应用相同的逻辑，但使用 1- 利普希茨函数 $-\varphi$，我们也可以定义一条测地线 β，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\beta_{n|x|} = x^{-n}$。

现在，考虑子群 $N = \langle x\rangle \cong \mathbb{Z}$。由于 G 在虚拟意义上是 $\mathbb{Z}$，因此不可能有 $[G : N] = \infty$。设 R 为 N 的陪集代表元集合；即 $G = \biguplus_{r\in R} rN$，其中 $|R| = [G : N] < \infty$。假设 $1 \in R$。

设 $h \in \partial\Gamma(G, S)$ 是任意一个 horofunction。令 $(y_n)_n$ 是 G 中的一个数列，满足$h = \lim_{n\to\infty} b_{y_n}$。由命题 2.2可知，集合 $\{y_n\}_n$ 是无限集，因此必定存在

某个 $r \in R$ 使得有无穷多个 y_n 属于陪集 rN。因此，两个集合中至少有一个

$$\{y_n \ : \ \exists\ k\ ,\ y_n = r\alpha_k\} \qquad \text{or } \{y_n \ : \ \exists\ k\ ,\ y_n = r\beta_k\}$$

是无限的。也就是说，数列 $(y_n)_n$ 与测地线 $r\alpha$ 或 $r\beta$之一有无穷多个公共点。这意味着

$$h = \lim_{n\to\infty} b_{y_n} = \lim_{k\to\infty} b_{rx^k} \in \{r.\alpha_\infty, r.\beta_\infty\}.$$

由于这对于任意 horofunction $h \in \partial\Gamma(G,\ S)$ 都成立，因此我们有

$$\partial\Gamma(G,S) \subset \{r.\alpha_\infty, r.\beta_\infty \ : \ r \in R\} \subset \partial_b\Gamma(G,S).$$

□

参考文献

[1] R. I. Grigorchuk. 群论中的增长。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 1, 325 338, 1990 , 卷页码 – 。[2] M. Gromov. 多项式增长群与扩张映射。 *Publications Mathématiques del'IHÉS*, 53:53–78, 1981。[3] A. Karlsson. 非扩张映射、布塞曼函数与乘法遍历理论。 *Rigidityin Dynamics and Geometry: Contributions from the Programme Ergodic Theory, Geometric Rigidityand Number Theory Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences Cambridge United , , , , Kingdom 5 January–7 July 2000* 283 294, 2002 页码 – 。[4] A. Karlsson. 非交换随机乘积的遍历定理。 *Lecture notes available on the author's website* 2008 ,。[5] A. Karlsson. 从线性到度量泛函分析。*Sciences* 118 28 2021 *Proceedings of the National Academy of* , ( ), 。[6] A. Karlsson. 度量泛函与 horofunction 的 Hahn-Banach 定理。 *Journal of Functional Analysis*, 281 2 109030, 2021 ( ): 。[7] A. Karlsson. 8. 度量谱理论的要素。载于 *Dynamics, Geometry, Number Theory*, 第276–300页。芝加哥大学出版社, 2022。[8] B. Kleiner. 格罗莫夫多项式增长群定理的新证明。 *American Mathematical Society* 23 3 815 829, 2010 *Journal of the* , ( ): – 。[9] N. Ozawa. 格罗莫夫多项式增长定理的泛函分析证明。 *Ann. Sci. Éc.* , ( ): – 。[10] Y. *Norm. Supér.(4)* 51 3 549 556, 2018 Shalom and T. Tao. 格罗莫夫多项式增长定理的有限形式。 *Functional Analysis* 20 6 1502 1547, 2010 *Geometric and* , ( ): – 。[11] M. C. Tointon and A. Yadin. 线性增长图上的 horofunction。 *matique* 354 12 1151 1154, 2016 *Comptes Rendus Mathe-* , ( ): – 。[12] C. Walsh. 幂零群在其测地函数边界上的作用具有有限轨道。 *Groups, Geometry and Dynamics* 5 1 189 206, 2011 , , ( ): – 。[13] C. Webster and A. Winchester. 无限图上的布塞曼点。 *Mathematical Society* 358 9 4209 4224, 2006 *Transactions of the American* , ( ): – 。[14] S.-T. Yau. 几何分析展望。 *arXiv preprint math/0602363*, 2006。