arXiv:2305.02308v1 [math.CT] 3 May 2023

张量三角几何中的下降

TOBIAS BARTHEL、NAT`ALIA CASTELLANA、DREW HEARD、NIKO NAUMANN、LUCA POL 和 BEREN SANDERS

Abstract. 我们研究了在何种程度上，可以沿着一个可下降的交换代数 A，将可表示对称幺半稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中局部化理想、smashing 理想和厚理想的分类下降。我们建立了联系 $\mathcal{C}$ 的局部化理想格和 smashing 理想格与 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 及 $\mathrm{Mod}^{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 中相应理想格的等化子图表。如果 A 是紧对象，我们还可得到厚理想格的类似等化子；通过 Stone 对偶，这将给出谱空间范畴中 Balmer 谱的余等化子图表。随后，我们给出望远镜猜想和分层从 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 下降到 $\mathcal{C}$ 的条件。最后，我们以张量三角几何中的忠实伽罗瓦扩张为例，展示这些结果的实用性。

Contents

1. 引言 2 2. 分裂等化子 5 3. Stone 对偶 7 4. 谱的拓扑余等化子 9 5. 三角范畴与高阶范畴 13 6. 投影公式与基变换 15 7. 可下降代数 18 8. 局部化理想的下降 21 9. smashing 理想的下降 26 10. 厚理想与望远镜猜想的下降 28 11. Balmer 谱的下降 30 12. 分层的下降 34 13. 忠实伽罗瓦扩张 38 参考文献 44

Date：2023年5月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18F70、18F99、18G80、18N60、55U35。TB获得欧洲研究委员会（ERC）Horizon Europe计划的资助（资助编号：101042990）。NC获得西班牙国家研究机构项目PID2020-116481GB-I00、Severo Ochoa和Mar´ıa de Maeztu研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M）以及CERCA计划/加泰罗尼亚自治区政府的部分资助。DH获得Trond Mohn基金会资助，编号为TMS2020TMT02。NN和LP获得雷根斯堡 SFB 1085“高阶不变量”项目的资助。BS获得美国国家科学基金会（NSF）DMS-1903429号资助。最后，我们谨向豪斯多夫数学研究所表示感谢，感谢其在三个月项目 *Spectral Methods in Algebra, Geometry, andTopology* 期间提供的热情接待；该项目由德国研究基金会根据德国卓越战略资助——EXC-2047/1——390685813。

1. Introduction

设 $\mathcal{C}$ 是一个张量三角（“tt”）范畴，即配备了相容的对称幺半结构的三角范畴。我们可以通过多种方式研究 $\mathcal{C}$ 的张量三角几何；例如，我们可以尝试对厚理想、局部化理想或 $\mathcal{C}$ 的 smashing 理想进行分类。实现这一目标的一种方法是找到一个张量三角函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 到一个更简单的张量三角范畴 $\mathcal{D}$，并通过下降方法将 $\mathcal{C}$ 中的分类问题转化为 $\mathcal{D}$ 中的分类问题。

构造此类函子的一种方法是在底层 ∞-范畴的层面上进行（即假设 $\mathcal{C}$ 是一个 tt-∞-范畴），并考虑基变换函子。

$$F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$$

与高度结构化的交换代数相关联 A 于 $\mathcal{C}$。事实上，在对 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$的温和假设下，任何函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，只要其右伴随是保守的，就在等价意义下是沿着 $\mathcal{C}$ 中的一个交换代数对象进行的基变换（参见命题 6.10）。

理解 tt-几何中的下降所迈出的重要第一步由 Balmer [Bal16], 完成，他研究了沿着 可分的 交换代数的扩张。[1]这些是 A 中的交换代数 $\mathcal{C}$，其乘法 μ: $A \otimes A \to A$ 具有一个双模截面。为了陈述 Balmer 的定理，回顾一下，本质小 tt-范畴 $\mathcal{K}$ 的（根）厚理想由一个谱拓扑空间 Spc($\mathcal{K}$) 分类，该空间称为 Balmer 谱。于是，给定 A 中的一个有限次数可分交换代数 $\mathcal{K}$，Balmer 证明了存在一个拓扑空间的余等化子图表

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{K})) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{K})) \longrightarrow \mathrm{supp}(A). \tag{1.1}$$

特别地，如果 A 是 可下降[2] (定义 7.1)，那么 supp(A) $=$Spc($\mathcal{K}$)，且这个余等化子计算出 $\mathcal{K}$ 本身的谱。

一般而言，Balmer 定理中关于代数 A 是可分的且在某种意义上“较小”（这由假设 $A \in \mathcal{K}$所体现）的假设不能被移除。例如， $\mathcal{K}$ 为 K（2）-局部可对偶谱的范畴这一情形，已由部分作者在 [BHN22]中进行了详细研究。Morava E-理论在所有 K（2）-局部谱组成的更大范畴中提供了一个可下降代数 A，它不是可对偶的（即不包含于 $\mathcal{K}$中），并且 [BHN22，命题 511]表明，上述余等化子的类似物并不是拓扑空间的余等化子，而是 谱空间的余等化子。正如该例充分展示的那样，谱空间中的余等化子，以及更一般地说，余极限，其行为可能与拓扑空间中的余极限大相径庭；另见 例 4.1。

谱空间范畴与分配格范畴反等价，这是一个经典结果，基本上归功于 Stone。上述结果以及此前关于 Balmer 谱的研究（例如 [KP17]），表明可以采用格论方法研究 tt-几何中的下降问题。本文采用的正是这一方法。

[1]这不需要 ∞范畴论工具，这是由于可分代数的特殊性质；参见注释11.19 和 [Balmer11]。[2] Balmer 使用术语 *nil-faithful*。

全文中，我们都在刚性紧生成 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$的背景下开展研究；也就是说，这是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，其同伦范畴是刚性紧生成的；精确定义见第 5 节。紧对象构成的满子范畴记作 $\mathcal{C}^c$（在一些例子中，它对应于上文所述的 $\mathcal{K}$）。例如，$\mathcal{C}$ 可以是交换环 ∞的导出 R-范畴 D(R)；其对象为无界链复形，系数取自交换环 R。我们研究以下偏序集的下降：

(a) $\mathcal{C}$的局部化理想偏序集 Locid($\mathcal{C}$)。(b) $\mathcal{C}$的 smashing 局部化理想偏序集 Smashid($\mathcal{C}$)。(c) $\mathcal{C}$的紧对象厚理想偏序集 Thickid($\mathcal{C}^c$)。

相应地，我们得到以下结果，它们见于 命题 8.23、推论 9.11和定理 10.7。

定理 A。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-∞-范畴，且 $A \in$交换代数（$\mathcal{C}$）是一个可下降的交换代数。

(a) 存在一个偏序集的分裂等化子

$$\mathrm{Locid}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \rightrightarrows \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

(b) 存在一个偏序集的等化子

$$\mathrm{Smashid}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Smashid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \rightrightarrows \mathrm{Smashid}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

(c) 如果 A 是紧的，那么存在偏序集的等化子

$$\mathrm{Thickid}(\mathcal{C}^c) \longrightarrow \mathrm{Thickid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \rightrightarrows \mathrm{Thickid}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c).$$

回顾一下，tt-范畴的望远镜猜想的一种表述是，映射 $\sigma\colon \mathrm{Thickid}(\mathcal{C}^c) \to \mathrm{Smashid}(\mathcal{C})$ 由 $\mathcal{J} \mapsto \mathrm{Locid}(\mathcal{J})$ 给出，且它是双射。在定理 10.8 中，我们推导出望远镜猜想的以下下降结果：

定理 B。设 $\mathcal{C}$ 为刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，且 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$)是一个紧可下降交换代数。如果模范畴$_A(\mathcal{C})$满足望远镜猜想，那么 $\mathcal{C}$ 也满足望远镜猜想。

例如，该定理适用于拓扑模形式的 2-局部连通谱上的模范畴；参见 例 10.9。

受 Balmer 关于可分交换代数的下降结果启发，我们也研究主根厚理想的 Zariski 框架。将我们的结果从框架转回拓扑空间，我们在 定理 11.17 中证明了以下结论：

定理 C。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，且 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$)是一个紧交换代数。则由基变换诱导的图表

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \longrightarrow \mathrm{supp}(A)$$

是谱空间范畴中的余等化子。

我们再次注意到，如果 A 是可下降的，那么 supp(A) = Spc($\mathcal{C}^c$)，因此在这种情况下，我们得到一个计算 Spc($\mathcal{C}^c$) 的余等化子。
与 Balmer 的结果相比（1.1），请注意，我们去掉了对交换代数必须是可分的这一要求，但代价是必须在

范畴： 谱空间 而非拓扑空间。如上所述，谱空间与拓扑空间中的余等化子不一定相同。Balmer 的工作表明，在假设 A 是有限次数可分的情况下，这两个余等化子确实相同（参见 注释11.19）。

我们的下一个结果涉及 分层 意义下的 [BHS23]的下降。我们回顾一下，这是一个能够通过 $\mathcal{C}$ 的子集 Spc($\mathcal{C}^c$来分类局部化理想的条件。关于这一方向的部分结果已见于 [BCHS23a]。我们的结果可概括如下；文档正文中的结果（定理 12.12）略强一些。

定理 D. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-∞-范畴，且 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$) 可下降，其基变换函子为 $F_A\colon \mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$。假设 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 是分层的，且 Spc(模范畴$_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c$) 是弱诺特的。那么以下条件等价：

(a) $\mathcal{C}$ 是分层的。***(b)*** 对所有 $x \in \mathcal{C}$，恒等式 $\operatorname{Supp}(F_A(x)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(x))$ 成立。***(c)*** 基变换所诱导的图表

$$\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \rightrightarrows \operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \longrightarrow \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)$$

是集合范畴中的余等化子。

作为这一结果的一个应用，我们证明分层满足伽罗瓦下降的一个版本（定理 13.7）。

定理 E. 设 A 是刚性紧生成 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的忠实 G-伽罗瓦扩张，其中 G 是一个有限群。假设 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 是分层的，且其 ***Balmer*** 谱是诺特的。那么 $\mathcal{C}$ 也是分层的，且其 ***Balmer*** 谱是诺特的，其中 $\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c)/G$。

利用这一点以及 [BCH+23]，我们在 例 13.11 中证明，范畴 Mod$_{KO_G}(\mathrm{Sp}_G)$ 是分层的，其谱 Spc(Mod$_{KO_G}(\mathrm{Sp}_G)^c$) $\cong \operatorname{Spec}(R(G))/C_2$，其中 KO_G 表示实等变 K-理论，而 G 是一个有限群。
对于交换环谱的伽罗瓦扩张，定理 E 可加强如下（定理 13.22）：

定理 F. 设 $A \to B$ 是交换环谱的一个忠实 G-伽罗瓦扩张，其中 G 是一个紧李群。如果模范畴$_B$ 是分层的且其 ***Balmer*** 谱是诺特的，那么模范畴$_A$也具有这些性质。

1.2. 集合论考量。 我们固定三个不可数的强不可达基数 $\kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2$ 及其对应的宇宙 $\mathcal{U}_{\kappa_0} \in \mathcal{U}_{\kappa_1} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}$。如果一个集合、单纯集合、范畴等包含于 $\mathcal{U}_{\kappa_0}$，就称其为小的；如果包含于宇宙 $\mathcal{U}_{\kappa_1}$，就称其为大的；如果包含于宇宙 $\mathcal{U}_{\kappa_2}$，就称其为非常大的 。我们称一个集合、单纯集合、范畴等本质小，是指它等价于一个小对象（在相应意义下）。

致谢。 感谢 Scott Balchin 与我们就本文进行有益的讨论。我们也感谢阿贝尔表示论与其他领域三角范畴研讨会的组织者邀请我们为会议论文集撰稿。

2. Split equalizers

我们先介绍一些关于分裂等化子的预备引理。

2.1. **定义**。 范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个叉形图 是一个图表

$$X_0 \xrightarrow{f} X_1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X_2$$

其中 $\alpha \circ f = \beta \circ f$。分裂叉图表 是配有另外两个箭头的此类图表

$$X_0 \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X_1 \underset{v}{\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}} X_2$$

其中 $u \circ f = \mathrm{id}$、 $v \circ \beta = \mathrm{id}$ 和 $v \circ \alpha = f \circ u$。

2.2. **注记**。 每个分裂叉图表

$$X_0 \xrightarrow{f} X_1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X_2$$

是一个等化子；参见 [ML98，第 VI 节。6]事实上，分裂叉图表是一个绝对等化子；也就是说，它是被所有函子保持的等化子。我们将 分裂等化子 用作 分裂叉图表的同义词。

2.3.**引理**。 考虑一个集合的图表

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{f} & X_1 & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} & X_2 \\ {\scriptstyle i_0}\uparrow & & {\scriptstyle i_1}\uparrow & & {\scriptstyle i_2}\uparrow \\ Y_0 & \xrightarrow{g} & Y_1 & \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightrightarrows}} & Y_2 \end{array}$$

其中

（*i*） *Top* 叉形图是分裂的：存在 $u\colon\ X_1 \to X_0$ 和 $v\colon\ X_2 \to X_1$，使得 $u \circ f = \mathrm{id}$、 $v \circ \beta = \mathrm{id}$ 和 $v \circ \alpha = f \circ u$； （*ii*） i_0 和 i_1 是单射； （*iii*） $f \circ i_0 = i_1 \circ g$； （*iv*） $\alpha \circ i_1 = i_2 \circ \gamma$ 和 $\beta \circ i_1 = i_2 \circ \delta$。

那么，以下条件等价：

(a) 等化子中的底部叉；*(b)* 对所有满足 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$ 的 $y_1 \in Y_1$ ，存在满足$u(i_1(y_1)) = i_0(y_0)$ 的 $y_0 \in Y_0$ 。

证明。 $(a) \Rightarrow (b)$：若 $y_1 \in Y_1$ 满足 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$，则由 (a) 可知，存在$y_0 \in Y_0$ 使得 $g(y_0) = y_1$。我们断言 $u(i_1(y_1)) = i_0(y_0)$，从而得到 (b)。由于 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$，因此 $i_2(\gamma(y_1)) = i_2(\delta(y_1))$，于是由条件 (iv) 可得 $\alpha(i_1(y_1)) = \beta(i_1(y_1))$。将 v 应用于这个恒等式，并利用该叉形图是分裂的这一点，我们得到

$$f(u(i_1(y_1))) = v(\alpha(i_1(y_1))) = v(\beta(i_1(y_1))) = i_1(y_1).$$

注意，右侧可根据（iii）改写为 $i_1(y_1) = i_1(g(y_0)) = f(i_0(y_0))$。注意，根据 (i)， f 是单射，因此我们得出 $u(i_1(y_1)) = i_0(y_0)$，从而得到 (b)。

$(b) \Rightarrow (a)$：设 $y_1 \in Y_1$ 使得 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$。我们需要证明存在唯一的 $y_0 \in Y_0$ 使得 $g(y_0) = y_1$。唯一性由以下事实可得：

g 是单射，因为通过结合 (i) 和 (ii)，复合映射 $i_1 g = f i_0$ 也是单射。我们来构造这样的 y_0。由 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$ 和 (iv)，可推出 $\alpha(i_1(y_1)) = \beta(i_1(y_1))$。对其应用 v，并利用分裂叉的恒等式，可得

$$f(u(i_1(y_1))) = i_1(y_1) \tag{2.4}$$

如前一段所述。由条件 (B)，存在 $y_0 \in Y_0$ 使得$i_0(y_0) = u(i_1(y_1))$。我们声称这样的 y_0 可行，即 $g(y_0) = y_1$。确实

$$i_1(g(y_0)) = f(i_0(y_0)) = f(u(i_1(y_1))) \overset{(2.4)}{=} i_1(y_1)$$

因此，由 i_1的单射性可得结论。 □

2.5.**引理**。考虑一个集合图表

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{f} & X_1 & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} & X_2 \\ {\scriptstyle i_0}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r_0} & & {\scriptstyle i_1}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r_1} & & {\scriptstyle i_2}\uparrow\downarrow{\scriptstyle r_2} \\ Y_0 & \xrightarrow{g} & Y_1 & \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightrightarrows}} & Y_2 \end{array}$$

其中

（*i*）顶部叉形图是一个等化子，且 $\gamma \circ g = \delta \circ g$；（*ii*）$r_0 \circ i_0 = \mathrm{id}$、$r_1 \circ i_1 = \mathrm{id}$ 和 $r_2 \circ i_2 = \mathrm{id}$；（*iii*）$i_1$ 是双射（因此其逆映射为 r_1）；（*iv*）$f \circ i_0 = i_1 \circ g$、$\alpha \circ i_1 = i_2 \circ \gamma$ 和 $\beta \circ i_1 = i_2 \circ \delta$。

那么，以下各项等价：

(a) r_0 是双射；*(b)* $g \circ r_0 = r_1 \circ f$；

(c) 底部叉是一个等化子。

证明。(*a*) $\Rightarrow$ (*b*)：利用 (ii) 和 (iv)，我们看到 $g = r_1 \circ i_1 \circ g = r_1 \circ f \circ i_0$。现在结合 (ii)+(a)，我们得出 r_0 有逆元 i_0。因此，$g \circ r_0 = r_1 \circ f \circ i_0 \circ r_0 = r_1 \circ f$，如所需。

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*): 给定 $y_1 \in Y_1$ 使得 $\gamma(y_1) = \delta(y_1)$，我们需要证明存在唯一的 $y_0 \in Y_0$ 使得 $g(y_0) = y_1$。注意到 g 是单射，因为复合映射$i_1 \circ g = f \circ i_0$ 根据假设是单射。因此，如果它存在，y_0 必然是唯一的。注意到 $i_2(\gamma(y_1)) = i_2(\delta(y_1))$，因此由（iii）可知 $\alpha(i_1(y_1)) = \beta(i_1(y_1))$。由于顶部图表是一个等化子，我们可以找到唯一的 $x_0 \in X_0$ 使得 $f(x_0) = i_1(y_1)$.我们断言 $y_0 := r_0(x_0)$ 满足要求。事实上

$$g(y_0) = g(r_0(x_0)) \overset{(b)}{=} r_1 f(x_0) = r_1 i_1(y_1) \overset{(ii)}{=} y_1.$$

(*c*) $\Rightarrow$(*a*): 根据条件（ii），只需证明 r_0 是单射，或者等价地证明 i_0 是满射。因此，取 $x_0 \in X_0$；我们将证明 x_0 属于 i_0的像。根据假设，$\alpha \circ i_1 = i_2 \circ \gamma$ 且 $\beta \circ i_1 = i_2 \circ \delta$，因此通过对 r_1 进行前复合并利用（iii），我们得到 $\alpha = i_2 \circ \gamma \circ r_1$和 $\beta = i_2 \circ \delta \circ r_1$。显然，$r_2(\alpha(f(x_0))) = r_2(\beta(f(x_0)))$，因此

$$\begin{aligned} \gamma(r_1(f(x_0))) = r_2(i_2(\gamma(r_1(f(x_0))))) &= r_2(\alpha(f(x_0))) \\ &= r_2(\beta(f(x_0))) \\ &= r_2(i_2(\delta(r_1(f(x_0))))) = \delta(r_1(f(x_0))) \end{aligned}$$

通过插入 α 和 β 的恒等式。然后由 (c) 我们找到 $y_0 \in Y_0$，使得 $g(y_0) = r_1(f(x_0))$。我们声称 $i_0(y_0) = x_0$。事实上，$f(i_0(y_0)) = i_1(g(y_0)) = i_1(r_1(f(x_0))) = f(x_0)$，由 f 的单射性，我们得出 $i_0(y_0) = x_0$。□

3. Stone duality

我们简要回顾格与 Stone 对偶的一些背景知识。主要参考文献是 [Joh86] 读者可在其中找到更详尽的讨论。

3.1. 格。 偏序集 $(A, \leq)$ 若任意两个元素组成的子集$\{a, b\} \subseteq A$ 都有并（或最小上界） $a \vee b$和交（或最大下界） $a \wedge b$，则称为格。我们还要求它包含最小元 0 和最大元 1。格态射 $f\colon A \to B$ 是满足以下条件的函数：对所有 $a, a' \in A$，$f(a \wedge a') = f(a) \wedge f(a')$ 且 $f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$，并且$f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$。我们用 Lat 表示格范畴。

3.2. **注记。** 许多作者并不要求格具有 0 和 1，并会将上述概念称为有界 格。我们沿用 [Joh86] 的术语。

3.3. 注记。 任何格态射必然是保序的（因为 $a \leq a'$当且仅当 $a \vee a' = a'$），但并非所有保序映射都是格态射。例如，令 $\mathcal{P}$ 为二元素集合 $\{a, b\}$ 的幂集，令 $\mathcal{Q}$ 为全序集 $\{0 < 1 < 2\}$。那么基数映射 $c\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是保序的，但不是格态射，因为 $c(\{a\} \vee \{b\}) = c(\{a, b\}) = 2$，然而 $c(\{a\}) \vee c(\{b\}) = 1 \vee 1 = 1$。

3.4. 注记。 根据上述注记，从格到偏序集的遗忘函子 Lat $\to$ Pos 是忠实的，但不是满的。另一方面，很容易验证，如果 $f\colon A \to B$ 是双射格态射，那么 $f^{-1}\colon B \to A$ 是格态射。因此，格同构与双射格态射一致。特别地，遗忘函子 Lat $\to$ Pos 和 Lat $\to$ Set 反映同构。

3.5. 分配格。 若格 $(A, \leq)$ 满足

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

对所有 $a, b, c \in A$皆成立。等价刻画有很多种；参见 [Joh86，I.1。5], [Bir67，第 I 节。6]，以及 [BD74，第 II 节。5]。分配格构成格范畴 DLat 的满子范畴，而格范畴记作 Lat。

3.6. 相干框架。 若格 A 的每个 子集 $S \subseteq A$ 在 A中都有交 $\bigwedge S$和并 $\bigvee S$，则称其为完备。若框架 是一个完备格 F，其中有限交对任意并满足分配律，则称其为：

$$a \wedge \bigvee_{s \in S} s = \bigvee_{s \in S} (a \wedge s)$$

对于任意 $a \in F$ 和 $S \subseteq F$。一个 框架映射 是保持任意并的格态射。我们将框架与框架映射构成的范畴记为 Frm。框架 c 中的元素 F 称为 有限，如果每当 $c \leq \bigvee_{s \in S} s$ 对于某个子集$S \subseteq F$成立时，都存在一个有限子集 $K \subseteq S$ 使得 $c \leq \bigvee_{s \in K} s$。框架 F 是相干的，如果每个元素都可表示为有限元的并，且有限元构成一个（分配）格 F^f。这相当于要求 1 是有限的，并且两个有限元的交也是有限的。（参见 [Joh86，第 II 节。3]。）一个

框架映射是相干的，当且仅当它将有限元映射为有限元。我们用 CFrm 表示相干框架及相干框架映射构成的范畴。根据定义，我们有一个函子 $(-)^f\colon \mathsf{CFrm} \to \mathsf{DLat}$，它将相干框架映射为其有限元。

3.7. **谱空间**。如果一个拓扑空间是 T_0，并且每个非空不可约闭集都是某个（唯一）点的闭包，那么它就是素性的。谱空间是一个拟紧素性空间，其中拟紧开子集在有限交下封闭，并构成拓扑的一个基。谱空间之间的谱映射是这样一种连续映射：任意拟紧开子集的原像都是拟紧的。谱空间与谱映射构成的范畴记作 Spec。我们有一个函子

$$\Omega\colon \mathsf{Spec}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{CFrm}$$

它将一个谱空间 X 映到其开子集构成的X相干框架 $\Omega(X$。我们的术语源自 [Hoc 69]。注意， [Joh86]中将谱空间称为“相干空间”，这是基于以下定理：

3.8. **定理**（Stone 对偶）。函子

$$\Omega\colon \mathsf{Spec}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{CFrm} \qquad and \qquad (-)^f\colon \mathsf{CFrm} \to \mathsf{DLat}$$

是范畴等价。

证明。 参见 [Joh86，推论 II.3。4]。 □

3.9. **注记**。 特别地，我们有一个等价

$$\mathsf{Spec}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{DLat} \tag{3.10}$$

它将一个谱空间 X 映射到 X 的拟紧开子集所成的分配格。现在我们描述这个等价的一个拟逆：

3.11. **分配格的谱**。 分配格 A 的一个子集 I 是一个理想，如果：

- I 非空；
若 $a \in I$ 和 $b \in A$ 满足 $b \leq a$，则 $b \in I$；
对于所有 a， $b \in I$，元素 $a \vee b \in I$。

此外， I 若还是 A 的真子集，并且满足以下条件，则称其为素的：

若 $a \wedge b \in I$，则 $a \in I$ 或 $b \in I$。

A 的素理想集合记作 $\mathsf{Spec}(A)$。我们在此集合上赋予一个拓扑，其基由子集 $d(a) := \{I \in \mathsf{Spec}(A) \mid a \notin I\}$ （对所有 $a \in A$）构成。我们称 $\mathsf{Spec}(A)$ 为分配格 A 的谱。给定格映射 $f\colon A \to B$，定义映射 $\mathsf{Spec}(f)\colon \mathsf{Spec}(B) \to \mathsf{Spec}(A)$，将 I 映射到 $f^{-1}(I)$。可以验证，这定义了一个函子

$$\mathrm{Spec}\colon \mathsf{DLat}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Spec}$$

它是该等价的拟逆（3.10）。

3.12. **注记 (Hochster 对偶性)**。 每个谱空间 X 都可以赋予一种“Hochster 对偶”谱拓扑；参见 [Hoc69，命题 8]。在等价$\mathsf{Spec}^{\mathrm{op}} \cong \mathsf{DLat}$ 下，这相当于将一个分配格映射为其对偶格（从范畴论的角度看，这相当于取对偶范畴）。请注意，“Hochster 对偶拓扑”在 [DST19]中称为“逆拓扑”。

3.13. **注记**。 等价$\mathsf{Spec}^{\mathrm{op}} \cong \mathsf{DLat}$ 限制为拟有限空间（又称“Stone 空间”）与布尔格（又称“布尔代数”）之间的等价。这是 Stone 对偶最初的表现形式，出自 [Sto37]。

最后，我们回顾以下结果：

3.14. **引理**。 遗忘函子 $\mathsf{Lat} \to$ 集合、$\mathsf{DLat} \to$ 集合 和 $\mathsf{Frm} \to$ 集合 均创建所有极限。

证明。Johnstone [Joh86, I.3.8]将范畴定义为：若其到集合范畴的遗忘函子是单子函子，则称该范畴为代数的；若其对象可以通过（一个真类的）运算和方程来描述，则称其为方程可呈现的。注意，Lat、DLat 和 Frm 都是方程可呈现的，因此根据 [Joh86, 命题 I.3.8]，它们都具有所有极限。此外，根据 [Joh86, I.3.7]中的讨论，Lat 和 DLat 是代数的，而根据 [Joh86, II.1.2]，Frm 也是代数的。最后只需指出，单子函子会创建极限；例如参见 [ML98, 练习 2，第 142] 页。□

3.15. **注记**。 相比之下，遗忘函子 $\mathsf{Spec} \to \mathsf{Set}$ 不保持余极限。例如，在 Stone 对偶下，单点空间对应于布尔代数 $2 := \{0 < 1\}$。在 DLat 中，可数无穷多个 $2^{\vee}$ 的乘积在 Stone 对偶下对应于自然数的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$。因此，$\beta\mathbb{N}$ 是 Spec 中可数无穷多个单点空间的余积。由于 $\beta\mathbb{N}$ 是不可数的，我们推出遗忘函子 $\mathsf{Spec} \to \mathsf{Set}$ 不保持这个无限余积。$\mathsf{Spec} \to \mathsf{Set}$ 和 $\mathsf{Spec} \to \mathsf{Top}$ 保持余极限的程度对我们的问题而言非常重要。接下来我们将探讨这一点。

4. Spectral and topological coequalizers

谱空间中的余极限通常不同于在拓扑空间范畴中取得的余极限，下面的例子将说明这一点。我们的目标是描述在什么条件下，谱空间及谱映射中的图表的余等化子与拓扑余等化子同胚。

4.1. **例**。 本例取自 [DST19，例 10.2.9 (i)]。回顾一下，有限谱空间等价于有限偏序集；参见 [DST19，§1.1。16]。根据这一等价关系，谱映射与单调映射相一致。接下来考虑以下有限偏序集图表：

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\} & \longrightarrow & \{0>1\} \\ \downarrow & & \\ \{1>0\} & & \end{array}$$

谱推出只有一个点，而拓扑推出是具有两个点的不可分拓扑，这不是一个 T_0-空间。

4.2. **谱反射**。 现在我们回顾一下谱反射函子 $S\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Spec}$ 的一些性质，它有一个单位，记作 $S_X\colon X \to S(X)$，对应于每个$X \in$Top (参见 [DST19, §11] 和 [Sch17b])。该函子是遗忘函子 $U\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{Top}$的左伴随，因此它与余极限（特别是余等化子）交换。

值得回顾的是，谱空间范畴并不是拓扑空间范畴的满子范畴。这意味着，即使 X 是谱空间，单位 $S_X\colon X \to S(X)$ 也不一定是同胚。不过， S_X 的性质已得到充分理解。

4.3. **定理** (Schwartz)**.** 设 X 是一个拓扑空间，令 $S_X\colon X \to S(X)$ 为其谱反射。于是

> ***(a)*** S_X 是到其像上的拟同胚。***(b)*** S_X 是单射，当且仅当 X 是 T_0。***(c)*** S_X 是到其像上的同胚，当且仅当 X 是 T_0。***(d)*** $S_X\colon X \to S_X(X)$ 是 T_0对 X的反射。***(e)*** S_X 是同胚，当且仅当 X 是诺特谱空间。***(f)*** S_X 是满射，当且仅当 X 的 T_0反射是诺特谱空间。

证明。 这些结果证明见 [Sch17b]。或者参见 [DST19，定理 11.1.3 和 11.1.12，以及 §11.4。3]。 □

4.4. T_0**-反射**。 将 T_0-空间全忠实嵌入 Top的函子也有一个左伴随，而且很容易描述：拓扑空间 T_0-反射（或称“柯尔莫哥洛夫商”） X 是商 $X \to \mathrm{KQ}(X) \colon = X/\equiv$ 由 X 上的等价关系定义，其中 $x \equiv y$ 当且仅当 $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$；参见 [DST19, §6.1。4]。特别地，它与余极限交换；若 $X \to \mathrm{KQ}(X)$ 是同胚，则 X 是一个 T_0-空间。

4.5.**引理**。 拓扑空间的谱反射与其 T_0-反射的谱反射一致：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id} & \mathrm{KQ}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle S_X} & & \downarrow{\scriptstyle S_{\mathrm{KQ}(X)}} \\ S(X) & \xrightarrow{\cong} & S(\mathrm{KQ}(X)). \end{array}$$

证明。 这是一个常规练习，利用 T_0-反射和谱反射的泛性质，以及如下事实：满射连续映射（例如 $X \to \mathrm{KQ}(X)$）是拓扑空间范畴中的满态射。□

4.6. 注记。 假设我们给定了一个余等化子图表

$$Z \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\varphi_S} T^{\mathsf{Spec}} \tag{4.7}$$

在谱空间范畴中（也就是说， Z, Y, g, h 是谱空间和谱映射）。我们还可以考虑拓扑范畴中的以下余等化子。

空间，

$$UZ \overset{Ug}{\underset{Uh}{\rightrightarrows}} UY \xrightarrow{\varphi_T} T^{\mathsf{Top}}. \tag{4.8}$$

两个映射 φ_S 和 φ_T 分别是 Spec 和 Top中的满态射，因此是满射。将遗忘函子应用于图表（4.7），我们得到一个比较映射 $p\colon T^{\mathsf{Top}} \to UT^{\mathsf{Spec}}$ 使得 $p \circ \varphi_T = U\varphi_S$。

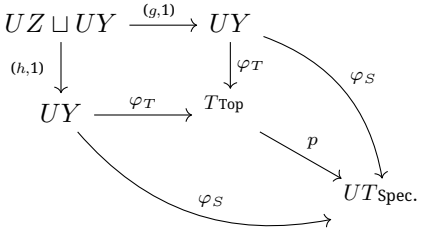
4.9. **注记**。 在 注 4.6的情形下，首先注意到 p 是满射，因为φ_S 也是如此。此外，如果 φ_S 是闭的，那么比较映射 p也如此：设 $K \subseteq T^{\mathsf{Top}}$是一个闭子集；那么 $p(K) = p(\varphi_T(\varphi_T^{-1}(K))) = \varphi_S(\varphi_T^{-1}(K))$ 也是闭的。

在某些有利的情况下，比较映射自动就是同胚。

4.10.**命题**。 在 注 *4.6* 的情形下，以下条件等价：

(a) T^{Top} 是一个谱空间，φ_T 是一个谱映射。***(b)*** 比较映射 $p\colon T^{\mathsf{Top}} \to UT^{\mathsf{Spec}}$ 是一个同胚。

证明。 根据定义，在拓扑空间范畴中有一个交换图表



其中顶端的方形是一个推出。(a) 推出 (b) 这一事实现在可由 [DST19，推论 10.2 得出。6]。若 (b) 成立，则 $\varphi_S = p \circ \varphi_T$结合 φ_S 是谱的这一事实，可推出 φ_T 也是谱的。□

4.11. 注记。 由于谱反射与余极限交换，我们得到一个新的余等化子图表

$$S(UZ) \overset{S(Ug)}{\underset{S(Uh)}{\rightrightarrows}} S(UY) \xrightarrow{S(\varphi_T)} S(T^{\mathsf{Top}})$$

于谱空间范畴中。谱反射诱导出一个从T^{Spec}到 $S(T^{\mathsf{Top}})$ 的映射，该映射不一定是同胚。也就是说，谱余等化子不一定是拓扑余等化子的谱反射。

4.12.**命题**。 在注 *4.6*的情形下，假设 Y 和 Z 是诺特谱空间。那么比较映射 $p\colon T^{\mathsf{Top}} \to UT^{\mathsf{Spec}}$是$T_0$-反射 T^{Top}。因此，在这种情况下，映射 p 是同胚，当且仅当 T^{Top} 是一个 T_0-空间。

证明。 由于 Y 和 Z 是诺特谱空间，余等化子 T^{Spec} 也是诺特谱空间。此外，谱反射是一个同构

在 Spec 由定理 4.3。然后考虑下面的拓扑空间交换图：

$$\begin{array}{ccccc} Z & \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} & Y & \xrightarrow{\varphi_S} & T^{Spec} \\ {\scriptstyle S_Z}\downarrow\cong & & {\scriptstyle S_Y}\downarrow\cong & & \cong\vdots\exists!\theta \\ S(UZ) & \underset{S(h)}{\overset{S(g)}{\rightrightarrows}} & S(UY) & \xrightarrow{S(\varphi_T)} & S(T^{Top}) \end{array}$$

由此可得 $\theta\colon\ T^{\mathsf{Spec}} \xrightarrow{\cong} S(T^{\mathsf{Top}})$ 是一个同胚，这是由余等化子的唯一性得出的。此外，由于 $p\circ\varphi_T = U\varphi_S$，将遗忘函子应用于图表的第一行，我们得到复合 $\theta\circ U\varphi_S = (\theta\circ p)\circ\varphi_T = S(\varphi_T)\circ S_Y$。但是，谱反射 $S(\varphi_T)\circ S_Y = S_{T^{\mathsf{Top}}}\circ\varphi_T$的自然性 $\theta\circ p = S_{T^{\mathsf{Top}}}$根据因子分解的唯一性可知。因此，映射 p 在同胚意义下可视为谱反射映射 $T^{\mathsf{Top}}\to S(T^{\mathsf{Top}})$。由此，结合定理 4.3(d)，即可得出结论。□

4.13. 注记。 谱空间范畴中的余等化子是 Y 按由以下关系生成的等价关系取商所得的谱商

$$\{(f(z), g(z))|z\in Z\}\subseteq Y\times Y$$

参见 [DST19，命题 6.1。6]。关于谱空间商的讨论，参见 [Far，§1。7] 另见 [Sch17a，引理 2。9]。因此，只需给出谱商与拓扑商相一致的条件。这就是我们接下来要讨论的内容。

4.14. 记号。 设 X 是一个谱空间，R 是 X 上的一个等价关系，并设p: $X\to X/R$ 是商映射。如果 $A\subseteq X$，我们将 $R^{-1}(A)$ 记为 $=p^{-1}(p(A))$，即包含 A的最小 R-不变子集。注意，$R^{-1}(x) = [x]$，即 $x\in X$的等价类。设 p_S: $X\to X//R$ 是谱商映射。根据商空间的泛性质，存在一个连续比较映射c: $X/R\to X//R$，使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_S} & X//R \\ & {\scriptstyle p}\searrow & \uparrow{\scriptstyle c} \\ & & X/R. \end{array} \tag{4.15}$$

4.16. **命题。** 在 记号 *4.14*的情形下，假设 $p_S\colon\ X\to X//R$是闭的，且 $p_S^{-1}\left(p_S(x)\right)\subseteq X$ 是一个 T_1-空间。若 $p_S^{-1}\left(p_S(x)\right)\subseteq R^{-1}(\{x\})$，则比较映射 $c\colon\ X/R\to\overline{X//R}$ 是一个同胚。

证明。注意，图表（4.15）中的所有映射都是满射，因为 p_S 和 p 也是如此。此外，c 是闭的，因为 p_S 根据假设是闭的（见 注记 4.9）。剩下的就是证明 c的单射性。为此，我们将证明 $p_S^{-1}\left(p_S(x)\right) = [x]$。
我们有包含关系 $[x]\subseteq p_S^{-1}\left(p_S(x)\right)\subseteq R^{-1}(\{x\})$。令 $y\in p_S^{-1}\left(p_S(x)\right)$。那么存在 $z\in\{x\}$ 使得 $[y]=[z]$；特别地，$p_S(z) = p_S(y) = p_S(x)$。由于$p_S^{-1}\left(p_S(x)\right)\subseteq X$ 是一个 T_1-空间，$\{x\}\cap p_S^{-1}\left(p_S(x)\right) = \{x\}$ 意味着 $z = x$。最后，$[y] = [x]$。□

4.17.**推论**。 在 注 4.6 的情形下，令 R 为由余等化子图表生成的等价关系。假设 φ_S 是闭的，并且对于所有 $y \in Y$， $\varphi_S^{-1}(\varphi_S(y))$都是一个 T_1-空间。如果对于所有 $y \in Y$， $\varphi_S^{-1}(\varphi_S(y)) \subseteq R^{-1}(\{y\})$，那么比较映射 $c\colon T_{\mathsf{Top}} \to UT_{\mathsf{Spec}}$ 是一个同胚。

证明。 结合 注记 4.13与 命题 4.16。 □

4.18. **例**。 令 $X = \mathrm{Spec(Z)}_1 \sqcup \mathrm{Spec(Z)}_2$ 为两个 Spec(Z) 的不交并，并赋予由 $(p)_1 \sim (p)_2$ 当且仅当 $p \neq 0$ 所生成的等价关系。注意， $[(0)_1]_R \neq [(0)_2]_R$，但 $\mathrm{Cl}_R((0)_1) = \mathrm{Cl}_R((0)_2) = X$。拓扑商不是 T_0，而谱商是 Spec(Z)。 p_0 的纤维是离散的，并且谱商映射 p_0 是闭映射，但 $p_0^{-1}(p_0((0)_1)) = \{(0)_1,(0)_2\}$ 且 $(0)_2 \notin R^{-1}(\{(0)_1\}) = X \setminus \overline{\{(0)_2\}}$。还需注意， $R^{-1}(\{(0)_1\}) \subseteq X$ 不是闭的。

5. Triangulated categories and higher categories

现在我们转向导出代数的领域，并介绍我们旨在研究的（高阶）范畴类型。我们也借此机会回顾各种定义、记号和术语。

5.1. **定义**。 *tt*-范畴 是一个三角范畴，并配备了符合 [HPS97 附录 A] 意义下的相容闭对称幺半结构。我们将内部 Hom 记作 hom，将对偶函子记作 $D := \mathrm{hom}(-, \mathbb{1})$。

5.2. **定义**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个 tt-范畴。

(a) $\mathcal{T}$ 的厚子范畴 是一个厚的（即对直和项封闭的）三角子范畴（满的、重plete 的）。(b) $\mathcal{T}$ 的厚理想 是一个厚子范畴 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$，满足 $\mathcal{T} \otimes \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$；也就是说，若 $a \in \mathcal{T}$ 且 $b \in \mathcal{I}$，则 $a \otimes b \in \mathcal{I}$。(c) $\mathcal{T}$ 的根厚理想 是一个厚理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$，具有如下性质：若 $a \in \mathcal{T}$ 满足某个 $k \geq 1$ 下的 $a^{\otimes k} \in \mathcal{I}$，则 $a \in \mathcal{I}$。(d) 我们用 $\mathrm{thick}\langle\mathcal{E}\rangle$、$\mathrm{Thickid}\langle\mathcal{E}\rangle$ 和 $\sqrt{\mathcal{E}}$ 分别表示由一族对象 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ 生成的厚子范畴、厚理想和根厚理想。

5.3. **定义**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个 tt-范畴。

(a) 若对所有 $y \in \mathcal{T}$，典范映射 $Dx \otimes y \to \mathrm{hom}(x, y)$ 是 $\mathcal{T}$中的一个同构，则称 $x \in \mathcal{T}$ 是可对偶的。(b) 若 $\mathcal{T}$ 中的每个对象都是可对偶的，则称 $\mathcal{T}$ 是刚性的。(c) 我们用 $\mathcal{T}^d$表示可对偶对象构成的满子范畴。它是 $\mathcal{T}$的一个刚性 tt-子范畴。

5.4. **注记**。 若 $\mathcal{T}$ 是刚性的，则任何厚理想都是根的；参见 [Bal07，命题 2。4]。

5.5. **定义**。 大 *tt*-范畴 是一个容许余积的 tt-范畴 $\mathcal{T}$。

5.6. **定义**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个大 tt-范畴。

(a) $\mathcal{T}$ 的 局部化子范畴 是一个对余积闭合的厚子范畴。(b) $\mathcal{T}$ 的 局部化理想 是一个对余积闭合的厚理想。(c) 我们用 $\mathrm{loc}\langle\mathcal{E}\rangle$ 和 $\mathrm{locid}\langle\mathcal{E}\rangle$ 分别表示由对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ 生成的局部化子范畴和局部化理想。

5.7. **定义**。 设 $\mathcal{T}$ 为一个大 tt-范畴。

(a) 对象 $x \in \mathcal{T}$是紧的，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(x, -)\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Ab}$ 保持余积。(b) 我们用 $\mathcal{T}^c$表示紧对象构成的满子范畴。它是 $\mathcal{T}$的厚三角子范畴。(c) 如果存在一个集合 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}^c$ 使得 $\mathrm{loc}\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{T}$，我们就称 $\mathcal{T}$ 是紧生成的。(d) 如果 $\mathcal{T}^c = \mathcal{T}^d$ 且 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，我们就称 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成的。

5.8. **注记**。 对于紧对象的集合 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}^c$，以下陈述等价：

(a) $\mathrm{loc}\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{T}$；(b) 对任意 $t \in \mathcal{T}$，若 $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}, t) = 0$，则 $t = 0$；(c) 对任意 $t \in \mathcal{T}$，若对所有 $g \in \mathcal{G}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ 均有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^n g, t) = 0$，则 $t = 0$。

5.9. **注记**。 Neeman 的一个基本结果 [Nee92，引理 2。2] 断言，若$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}^c$ 是由紧对象构成的集合，则 $\mathrm{loc}\langle \mathcal{G} \rangle \cap \mathcal{T}^c = \mathrm{thick}\langle \mathcal{G} \rangle$。

5.10. **定义**。 一个 *tt*-函子 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 在 tt-范畴之间是一个（强）对称幺半正合函子。这种函子总会限制为一个 tt-函子$\mathcal{T}^d \to \mathcal{S}^d$，作用于可对偶对象构成的子范畴之间。这是因为（强）对称幺半函子保持可对偶对象。通过用求值和余求值映射刻画可对偶对象，可以最容易地看出这一点；例如参见 [LMSM86，命题 III.1。9]。为简便起见，大三角张量范畴之间保持余积的 tt-函子称为 几何函子。

我们还需要引入前述定义的 ∞-范畴类比。

5.11. **定义**。 一个大 *tt*-∞-范畴 是一个可呈示的、对称幺半的稳定∞-范畴 $\mathcal{C}$，其张量积 $\otimes$ 在每个变量上都与余极限相交换。注意，任何这样的 $\mathcal{C}$ 都自动是闭对称幺半范畴。一个tt-∞-函子 是一个对称幺半正合函子。大 tt-∞-范畴及保余极限 tt-∞-函子所构成的超大 ∞-范畴记为 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$。

5.12. **注记**。 大 tt-$\mathcal{C}$-范畴的同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 具有典范的大 tt-范畴结构；参见 [Lur17，第 1]章。我们感兴趣的许多关于 $\mathcal{C}$ 的量及性质，实际上都是 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 的量及性质。例如，我们可以讨论 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴（即在直缩下闭合的稳定子范畴）、厚理想、局部化理想等等。此外，对象 $x \in \mathcal{C}$ 可对偶，当且仅当它作为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 的对象可对偶；参见 [Lur17，第 4.6 节。1]。

5.13. **注记**。 一个 tt-∞-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 大 tt-∞-范畴的函子保余极限，当且仅当 F 保余积；参见 [Lur17，命题 1.4.4.1(2)]。这一后一条件也等价于由其诱导的 tt-函子 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ 在大 tt-范畴之间保余积。

5.14.**引理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个大型 *tt*-∞-范畴。对于一个对象 $x \in \mathcal{C}$，以下条件等价：

(a) 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$到空间的 ∞-范畴，保持滤过余极限；

(b) 函子 $\hom_{\mathcal{C}}(x,-)\colon \mathcal{C}\to \mathrm{Sp}$ 到谱的 ∞-范畴，保持滤过余极限；*(c)* 函子 $\hom_{\mathcal{C}}(x,-)\colon \mathcal{C}\to \mathrm{Sp}$ 保持余积；*(d)* 函子 $\mathrm{Hom}^{*}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(x,-)\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{C})\to \mathsf{Ab}$ 到阿贝尔群，保持余积。

证明。回忆 $\Omega^{\infty}\hom_{\mathcal{C}}\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$。因此，由于 Ω^{∞} 保留滤过余极限，(b) 蕴含 (a)。反之，设 $\{y_i\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中对象的一个滤过系统，并考虑典范映射 $\hom_{\mathcal{C}}(x,\varinjlim^{y_i})\to\varinjlim \hom_{\mathcal{C}}(x,y_i)$。当且仅当对所有 $n\in\mathbb{Z}$，$\Omega^{\infty}\hom_{\mathcal{C}}(x,\Sigma^{n}\varinjlim^{y_i})\to\varinjlim\Omega^{\infty}\hom_{\mathcal{C}}(x,\Sigma^{n}y_i)$ 是等价时，该映射才是等价。再次使用 $\Omega^{\infty}\hom_{\mathcal{C}}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$，我们得出 (a) 蕴含 (b)。注意，函子 $\hom_{\mathcal{C}}(x,-)\colon\mathcal{C}\to\mathrm{Sp}$ 是正合的。根据 [Lur17，命题 1.4.4.1(2)]，(b) 等价于 (c)。最后，(c) 等价于 (d)，因为我们有自然等价 $\pi_n\hom_{\mathcal{C}}(x,-)=\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(x,\Sigma^{-n}(-))$；见 [Lur17，记号 1.1.2.17]。□

5.15. **注记**。回顾一下，满足条件（$x\in\mathcal{C}$）的对象a（见引理 5.14）称为紧对象。由同一引理可知，x在 $\mathcal{C}$ 中是紧的，当且仅当 x 按照定义 5.7(a)的意义，是 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 中的紧对象。记 $\mathcal{C}^{c}$ 为紧对象构成的子范畴，则有 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}^{c})=\mathrm{Ho}(\mathcal{C})^{c}$。

5.16. **注记**。当 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 是紧生成或刚性紧生成时，我们称大 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$ 为紧生成或刚性紧生成的。

采用“较小”的定义版本也很方便：

5.17. **定义**。令 $\mathsf{Cat}_{\infty}^{\mathrm{perf}}$ 表示由本质小、幂等完备稳定 ∞-范畴及精确函子组成的大型 ∞-范畴。

- 一个*tt*-∞-范畴是 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{perf}\infty}$ 中的交换代数对象。具体而言，tt-∞-范畴是本质小、幂等完备的稳定∞-范畴，配备了一个对称幺半结构，其张量积在每个变量上都是正合的。这与我们先前的术语相一致，因为按照第 5.11 条定义的意义，big tt-范畴就是此处意义下的 tt-范畴。

- tt-∞-范畴与 tt-∞-函子的大全 ∞-范畴记作 $\mathsf{CAlg}(\mathsf{Cat}_{\mathrm{perf}\infty})$。

- 一个 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$ 若 *Ho*($\mathcal{C}$) 是刚性的（定义 5.3（b）），则称其为刚性范畴。

5.18. **例**。如果 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 tt-∞-范畴，那么 $\mathcal{C}^{c}=\mathcal{C}^{d}$ 是一个刚性 tt-∞-范畴。

6. Projection formulas and base change

本节首先讨论 tt-范畴的一个伴随的投影公式。然后介绍交换代数对象上的模的 ∞-范畴，并讨论相关基变换函子的各种性质。

6.1. **定义**。设 $F\colon\mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 是一个存在右伴随 U的 tt-函子。若典范自然变换满足下式，我们称投影公式成立 。

$$U(s)\otimes t\to U(s\otimes F(t)) \tag{6.2}$$

定义于 [BDS15, （2.6）] 对于所有 $s \in \mathcal{S}$ 以及 $t \in \mathcal{T}$，都是同构。在这种情况下，$UF \simeq U(\mathbb{1}) \otimes -$ 是单子 [BDS15，引理 2。8]。

6.3. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是大三角张量范畴之间的一个 *tt*-函子，并且具有右伴随 U。

> ***(a)*** 如果 $\mathcal{T}$ 由可对偶对象生成（即 $\mathcal{T} = \mathrm{loc}\langle \mathcal{T}^d \rangle$），并且 U 保持余积，则投影公式成立。***(b)*** 如果 U 保持余积，则 F 保持紧对象。***(c)*** 如果 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，且 U 是保守的并保持余积，则 $\mathcal{S} = \mathrm{loc}\langle F(\mathcal{T}^c) \rangle$。

证明。 (a)：这是从 [BDS16]的工作中提取出的。对于可对偶对象，投影公式（6.2）总是一个同构 t FHM03, 命题 3。12]对于固定的 $s \in \mathcal{S}$, （6.2）在 U 保持余积这一假设下，是保持余积的正合函子的自然变换 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$。因此，使其成为同构的对象族是 $\mathcal{T}$的一个局部化子范畴。正如上文所述，它包含可对偶对象；因此，在 $\mathcal{T}$ 由可对偶对象生成这一假设下，它就是全部对象。

（b）：见 [Nee96，定理 51]的证明。（c）：这是标准结论，可由（b）和注记 5.8推出。 □

6.4. **推论**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是大三角张量范畴之间的 *tt*-函子，它有一个右伴随 U，且该右伴随是保守的并保持余积。则：

> （*a*）如果 $\mathcal{T}$ 是紧生成的，那么 $\mathcal{S}$ 也是。（*b*）如果 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成的，那么 $\mathcal{S}$ 也是。

证明。 （a）由引理 6.3可得。此外，这意味着若 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成的，则 $\mathcal{S}$ 由一组紧且可对偶的对象生成。接下来，为证明（b），我们需要证明 $\mathcal{S}^c = \mathcal{S}^d$。由于 $\mathbb{1}_{\mathcal{S}} = F(\mathbb{1}_{\mathcal{T}})$ 是紧的，这可由 [HPS97，定理 2.1.3(d)]得到。□

6.5. **推论**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是大三角张量范畴之间的一个 *tt*-函子，它有一个 U 保守且保余积的右伴随。如果 $\mathcal{T}$ 是刚性紧生成的，且 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧对象，那么 U 保紧对象。

证明。考虑厚子范畴 $\mathcal{S}_0 := \left\{ s \in \mathcal{S}^c \,\middle|\, U(s) \in \mathcal{T}^c \right\} \subseteq \mathcal{S}^c$。根据引理 6.3(b)， F 保持紧性。因此， $\mathbb{1}_{\mathcal{S}} = F(\mathbb{1}_{\mathcal{T}})$是紧的，故包含于 $\mathcal{S}_0$ 中，因为根据假设， $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的。接下来需要证明 $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}^c$的一个厚理想。根据引理 6.3(c)， $\mathcal{S} = \mathrm{loc}\langle F(\mathcal{T}^c) \rangle$。由于 F 保持紧性，注 5.9 随即推出 $\mathcal{S}^c = \mathrm{thick}\langle F(\mathcal{T}^c) \rangle$。由此可知， $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}^c$ 的一个厚理想，当且仅当 $F(\mathcal{T}^c) \otimes \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_0$。根据投影公式（引理 6.3(a)），后者成立。□

我们主要会用到前述结果的以下特殊情形。

6.6. **命题**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子。那么：

> ***(a)*** F 存在一个右伴随 U；***(b)*** U 本身存在一个右伴随；

(c) F 保持紧对象；*(d)* 投影公式

成立。

此外，若 U 是保守的，且 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的，那么 U 保持紧对象。

证明。 这是 [BDS16，推论 2.14 和命题 2。15]。最后的结论由推论 6.5得出。 □

6.7. 回顾。设 $\mathcal{C}$ 是一个大 tt-∞-范畴，并考虑 $A \in$CAlg($\mathcal{C}$)。正如 [Lur17，第 4.5] 节所述，存在一个大 tt-∞-范畴 Mod$_A(\mathcal{C})$，其对象是内部于 $\mathcal{C}$ 的 A-模对象。标量扩张（或基变换）给出一个 tt-∞-函子F_A: $\mathcal{C} \to$ Mod$_A(\mathcal{C})$（参见 [Lur17，定理 4.5.2.1 和 4.5.3.1]），它有一个右伴随"遗忘函子" U_A: Mod$_A(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$。为简化记号，我们常常省略下标 A，将这些函子分别记作 F 和 U。遗忘函子是保守的（即反映等价），并且保持所有余极限[Lur17，推论 4.2.3.5]。这两个事实带来若干结论，如下所示：

6.8. **引理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个大 *tt*-∞-范畴，并设 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$)。

(a) 基变换函子 F_A: $\mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 保持可对偶对象和紧对象的子范畴。*(b)* 如果 $\mathcal{C}$ 由可对偶对象生成（即 $\mathcal{C} = loc\langle \mathcal{C}^d \rangle$），那么投影公式对基变换函子 F_A 成立。*(c)* 如果 $\mathcal{C}$ 是紧生成的，假设由 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}^c$生成，那么模范畴 $Mod_A(\mathcal{C})$ 由 $F_A(\mathcal{G})$ 紧生成。此外，$Mod_A(\mathcal{C})^c = thick(F_A(\mathcal{C}^c))$。*(d)* 如果 $\mathcal{C}$ 是刚性紧生成的，那么 $Mod_A(\mathcal{C})$ 也是刚性紧生成的。

证明。 这可由 引理 6.3 和推论 6.4。 □

6.9. **注记**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的大型张量三角∞范畴，并考虑$A \in$CAlg($\mathcal{C}$) 。由 命题 6.6 可知，若 A 是紧的（作为 $\mathcal{C}$中的一个对象），则 U_A: 模范畴$_A(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 保持紧对象。

6.10. **命题**。 设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是刚性紧生成 *tt*-∞ 范畴之间保余极限的 *tt*-∞-函子，且其右伴随 U 保守。那么 F 是关于 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}) \in$ 交换代数($\mathcal{C}$) 的标量扩张：存在 *tt*-∞ 范畴之间的等价 $\mathcal{D} \cong$ 模范畴$_{U(\mathbb{1}_{\mathcal{D}})}(\mathcal{C})$，在此等价下，：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 被识别为 $\mathcal{C} \to$模范畴$_{U(\mathbb{1}_{\mathcal{D}})}(\mathcal{C})$。

证明。 应用 [MNN17，命题 5。29]。注意，所需条件由命题 6.6满足。 □

我们简要回顾基变换函子的相对版本。

6.11. 回顾。设 $\mathcal{C}$ 是一个大 tt-∞-范畴，且 f: $A \to B$ 是 CAlg($\mathcal{C}$) 中的一个态射。根据 Lur17，推论 4.2.3.2], ，可诱导出一个限制函子 U: Mod$_B(\mathcal{C}) \to$ Mod$_A(\mathcal{C})$。根据 Lur17，推论 4.2.3.7(2)]，该函子是保守的，并且保持所有小（余）极限。这个限制函子有一个对称幺半左伴随，由 $M \mapsto B \otimes_A M$ 给出；参见 Lur17，命题 4.6.2.17 和注记 4.5.3.2]。

6.12.**推论**。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，且 $f\colon A \to B$ 是 交换代数($\mathcal{C}$) 中的一个态射。存在一个 *tt*-∞-范畴的等价

$$\mathrm{Mod}_B(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Mod}_{U(B)}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$$

在此条件下， $F_{U(B)}$: 模范畴$_A(\mathcal{C}) \to$ 模范畴$^{U(B)}$(模范畴$_A(\mathcal{C})$) 与标量扩张函子 模范畴$_A$ ($\mathcal{C}$) $\to$ 模范畴$_B(\mathcal{C})$相对应。

证明。 将 命题 6.10 应用于基变换函子 模范畴$_A(\mathcal{C}) \to$ 模范畴$_B(\mathcal{C})$。 □

7. Descendable algebras

我们首先回顾 [Mat16a，第 3], [Mat15b]和 [MNN17],中的一些定义和结果，这些内容部分受到 [Bal16]的启发。从现在起，设 $\mathcal{C}$ 为一个（大）tt-∞-范畴。

7.1. **定义**。 交换代数 $A \in \mathsf{CAlg}(\mathcal{C})$ 若由 A 生成的厚理想是整个 $\mathcal{C}$，即 $\mathsf{thickid}\langle A\rangle = \mathcal{C}$，则称其为可下降 的。更一般地，若交换代数之间的映射 $f\colon A \to B$ 满足 B 作为 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中的交换代数是可下降的，则称该映射是可下降的。

7.2. **引理**。 若 $A \in$CAlg($\mathcal{C}$) 是可下降的，则

$$\mathrm{thickid}\langle x\rangle = \mathrm{thickid}\langle x \otimes A\rangle$$

对所有 $x \in \mathcal{C}$ 均成立。

证明。 假设 $\mathbb{1} \in \mathsf{thickid}\langle A\rangle$，由标准的厚子范畴论证可得 $x \in \mathsf{thickid}\langle x \otimes A\rangle$。因此，$\mathsf{thickid}\langle x\rangle \subseteq \mathsf{thickid}\langle x \otimes A\rangle$。反向包含关系显然成立。□

7.3. **推论**。 若 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 是可下降的，则基变换函子 $F_A\colon \mathcal{C} \to$模范畴$_A(\mathcal{C})$是保守的。

7.4. **注记**。 对于任意的 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$)，考虑基变换伴随

$$F_A\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) : U_A.$$

将单位 $\eta\colon \mathbb{1} \to A$ 完备为一个正合三角

$$W \xrightarrow{\xi} \mathbb{1} \xrightarrow{\eta} A \to \Sigma W. \tag{7.5}$$

那么 $F_A(\xi) = 0$ 属于 模范畴$_A(\mathcal{C})$，使得 $F_A(A) \simeq \Sigma F_A(W) \oplus \mathbb{1}_A$ 属于 模范畴$_A(\mathcal{C})$，并且$A \otimes A \simeq (\Sigma A \otimes W) \oplus A$ 属于 $\mathcal{C}$。

7.6.**引理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-∞-范畴。对于任意的$A \in$交换代数($\mathcal{C}$)，我们有

$$\mathrm{thickid}\langle U_A(x)\rangle = \mathrm{thickid}\langle U_A(x) \otimes A\rangle$$

对于任意 $x \in$模范畴$_A(\mathcal{C})$。

证明。这由注记 7.4 得出。如果 $x \in \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 是任意的，那么 x 是 $x \otimes F_A(A)$ 的一个直和项。因此， $U_A(x)$ 是 $U_A(x \otimes F_A(A)) \simeq U_A(x) \otimes A$ 的一个直和项，其中最后一个等价是投影公式（见引理 6.8）。因此 $\mathsf{thickid}\langle U_A(x)\rangle = \mathsf{thickid}\langle U_A(x) \otimes A\rangle$。□

7.7. **命题**。 对于 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$)，以下条件等价：

(a) A is descendable;
(b) The base change functor $F_A\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ is nil-faithful: if f is a morphism in $\mathcal{C}$ such that $F_A(f) = 0$ (i.e., $f \otimes A = 0$), then f is tensor-nilpotent.

证明。 这基本上包含在 Balmer 的工作中 [Bal16，Bal18]；另见[Mat16a，命题 3。27]。正如 [Bal18，命题 2。10]，

$$\mathrm{thickid}\langle A\rangle = \left\{ z \in \mathcal{C} \,\middle|\, \xi^{\otimes n} \otimes z = 0 \text{ for some } n \geq 1 \right\}$$

其中 $\xi\colon W \to \mathbb{1}$ 是（7.5）中的态射。因此， A 是可下降的，当且仅当态射 ξ 是张量幂零的。特别地，注意到 $\xi \otimes A = 0$，也就是说， ξ 在其锥上是张量幂零的。因此，（b）蕴含（a）。反过来，假设 $f\colon x \to y$是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，满足 $A \otimes f = 0$。由

$$\begin{array}{ccccccc} W\otimes x & \longrightarrow & x & \longrightarrow & A\otimes x & \longrightarrow & \Sigma W\otimes x \\ {\scriptstyle W\otimes f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \xi\otimes y} & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle A\otimes f=0} & & \downarrow \\ W\otimes y & \longrightarrow & y & \longrightarrow & A\otimes y & \longrightarrow & \Sigma W\otimes y \end{array}$$

我们看到， f 可经由 $\xi \otimes y$分解。若 A 是可下降的，则 ξ 是张量幂零的，这便可直接推出 f 也是张量幂零的。□

7.8.**命题**。 设 $\mathcal{C}$ 为一个刚性紧生成 *tt*-∞-范畴。对于任意$A \in$交换代数$(\mathcal{C})$，令

$$\varphi\colon \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$$

表示由标量扩张诱导的 *Balmer* 谱之间的映射。

(a) 如果 A 是可下降的，那么 φ 是满射的。***(b)*** 如果 A 是紧的且 φ 是满射的，那么 A 是可下降的。

证明。 对于 (a)：如果 A 是可下降的，那么 $F_A\colon \mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 由[Mat16a，命题 3 19]可知是保守的。因此 φ 由 [BCH+23，推论 226]可知是满射的；任意几何函子族的推广将在 [BCHS23b]中给出。
对于 (b)：如果 A 是紧的，那么限制函子 U_A 保持紧对象（注 6.9）。因此，根据 [Bal18，定理 1.7]， φ 的像是 supp(A)。由于 φ 是满射的，supp(A) = Spc($\mathcal{C}^c$)。根据 $\mathcal{C}^c$的（根）厚理想分类，这意味着 $\mathbb{1}$ 包含于由 A生成的 $\mathcal{C}^c$ 的（根）厚理想中。特别地， $\mathbb{1} \in$厚理想$\langle A\rangle$。□

7.9.**注记**。 自然会想知道，命题 7.8 的 (b) 部分是否不需要 A 是紧这一假设；换句话说， φ 的满射性是否能够刻画可下降代数。如下两个反例表明，一般而言并非如此。

7.10. 例。设 R 是一个交换环， $I \subseteq R$ 是一个非幂零的幂零理想；例如，令 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/(x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ 且 $I = (x_1, x_2, \ldots)$。现在考虑由商映射 $R \to R/I$ 诱导的标量扩张函子 D(R) $\to$ D(R/I)。在 Balmer 谱上，这诱导出一个同胚 Spec(R/I) $\cong$ Spec(R)，但是 $R/I \in$ D(R) 不可下降 [BS17b，例 11.21]。

7.11. **例**。另一个反例，令 R 为赋值整环，在 A 中称为 [Kel94]。令 $k := R/\mathfrak{m}$ 为其剩余域，并令 Q 表示其分式域。正如 Bazzoni–Šťovíček 所示（见 [BŠ17a，例 5.24]），$R \to Q \times k$诱导出一个保守的（非有限）smashing 局部化 D(R) $\to$ D($Q \times k$)，它

在 Balmer 谱上是满射。然而，幂等代数 $Q \times k$ 不是可下降的。（注意，幂等代数 f 是可下降的，当且仅当$f = \mathbb{1}$。）这个例子还表明， $A \otimes -$ 的保守性并不意味着 A 是可下降的，即 推论 7.3 的逆命题不成立。

7.12. **构造**。 给定 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$，我们可以在 $\mathcal{C}$ 中构造一个余单纯对象

$$\mathrm{CB}^\bullet(A) = \{A \rightrightarrows A \otimes A \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \dots\} \in \mathrm{Fun}(\Delta, \mathcal{C})$$

称为 A 上的 余条构造。然后是部分全局化序列

$$\mathrm{Tot}_n(\mathrm{CB}^\bullet(A)) = \lim_{[i] \in \Delta, i \leq n} A^{i+1}$$

自然地排列成一个塔，其逆极限由全局化 $\mathrm{Tot}(\mathrm{CB}^\bullet(A))$ 给出。余条构造扩展为一个增广余单纯对象。

$$\mathrm{CB}^\bullet_{\mathrm{aug}}(A) = \{\mathbb{1} \to A \rightrightarrows A \otimes A \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \dots\} \in \mathrm{Fun}(\Delta_+, \mathcal{C})$$

其中 Δ_+ 是有限有序集合的增广单纯形范畴。

7.13. **命题**。 假设 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$ 是可下降的。那么对所有 $x \in \mathcal{C}$以及任意正合函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ，其中 $\mathcal{D}$ 是一个稳定的 ∞-范畴，增广余单纯对象

$$F(x \otimes \mathrm{CB}^\bullet_{\mathrm{aug}}(A))\colon \Delta^+ \to \mathcal{D}$$

是一个极限图表。也就是说，自然态射

$$\eta_x\colon F(x) \to \mathrm{Tot}(F(x \otimes A) \rightrightarrows F(x \otimes A \otimes A) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \cdots)$$

在 $\mathcal{D}$中是等价。

证明。这在 [Mat18, 命题 2.12] 中已经得到证明，但为了便于今后参考，我们在此回顾一下论证。首先注意，如果 $x = A \otimes y$，那么增广余单纯对象 $x \otimes \mathrm{CB}^\bullet_{\mathrm{aug}}(A)$ 具有一个由 A 的乘法映射诱导的“额外退化”或分裂 [Lur17, 定义 4.7.2.2] 。由此，根据 [Lur09, 引理 6.1.3.16] ，函子 $F(x \otimes \mathrm{CB}^\bullet_{\mathrm{aug}}(A))$ 是一个极限图表。换言之，如果 $x = A \otimes y$，那么 η_x 是一个等价。由于使 η_x 成为等价的 x 类是厚子类，因此对于所有 $x \in \mathrm{thickid}\langle A \rangle$， η_x 都是一个等价。由于 A 是可下降的，我们有 $\mathrm{thickid}\langle A \rangle = \mathcal{C}$。 □

回顾可下降交换代数的以下一个实用刻画。

7.14. **命题** ([Mat16a, 命题 3.20])**.** 考虑 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$。那么， A可下降，当且仅当 *Tot* 塔 $\{\mathrm{Tot}_n(\mathrm{CB}^\bullet(A))\}_{n \geq 0}$ 是原恒定的，并收敛于$\mathbb{1}$ （即$\mathrm{CB}^\bullet_{\mathrm{aug}}(A)$ 是一个极限图表）。

这使我们能够在 $\mathcal{C}^d$ 内部刻画可对偶的可下降代数：

7.15. **引理**。 对于 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$，以下条件等价：

> ***(a)*** A 在 $\mathcal{C}$中是可对偶且可下降的；***(b)*** A 在 $\mathcal{C}^d$中是可对偶且可下降的；***(c)*** A 是可对偶的，并且 $\mathrm{supp}(A) = \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^d)$。

证明。回顾一下，$\mathcal{C}^d$ 是 $\mathcal{C}$ 的对称幺半子范畴，因此 (b) 蕴含 (a)。反之，假设 A 在 $\mathcal{C}$中是可对偶且可下降的。那么根据命题 7.14，Tot 塔 $\{\mathrm{Tot}_n(\mathrm{CB}^\bullet(A))\}_{n\geq 1} \in \mathrm{Tow}(\mathcal{C})$ 是最终常值的，并收敛于 1。由于 A 是可对偶的，$\mathrm{CB}^\bullet(A)$ 在 $\mathcal{C}^d$ 中定义了一个余单纯对象，因此所得的 Tot 塔属于 $\mathrm{Tow}(\mathcal{C}^d) \subseteq \mathrm{Tow}(\mathcal{C})$。该塔仍然是最终常值的，并收敛于 $\mathbb{1} \in \mathcal{C}^d$，所以根据命题 7.14，$A$ 在 $\mathcal{C}^d$ 中是可下降的。对于 (b) 与 (c) 的等价性，注意对任意可对偶对象 $A \in \mathcal{C}^d$，$\mathrm{Thickid}\langle A\rangle = \mathcal{C}^d$ 与 $\mathbb{1} \in \mathrm{thickid}\langle A\rangle$等价。此外，由于 $\mathcal{C}^d$ 具有刚性，由 A 生成的厚理想与由 A生成的根厚理想相同。因此根据根厚理想的分类，$\mathbb{1} \in \mathrm{thickid}\langle A\rangle$ 与 $\mathrm{supp}(\mathbb{1}) \subseteq \mathrm{supp}(A)$ 等价。□

接下来，我们展示如何利用可下降性来检测紧对象。

7.16.**命题**。设 $\mathcal{C}$ 是由可对偶对象生成的大型 *tt*-∞-范畴。若 $A \in$ 交换代数$(\mathcal{C})$ 可下降，则 $F_A\colon \mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 反映紧性：若 $x \in \mathcal{C}$ 满足 $F_A(x)$ 在 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 中是紧的，则 x 在 $\mathcal{C}$ 中是紧的。

证明。这基本上就是 [Mat16a，命题 3。28]。为求完备，我们在此重述这一论证。对于任意对象集合 $\{z_i\}$，我们需要证明映射

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, \coprod_i z_i)$$

是一个同构。考虑由满足以下条件的对象 y 组成的集合 $\mathcal{U}$

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y \otimes z_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y \otimes \coprod_i z_i)$$

是一个同构。我们希望证明它包含 $\mathbb{1}$。集合 $\mathcal{U}$构成一个厚子范畴。利用 $F_A \dashv U_A$ 伴随和投影公式（引理 6.3），可以验证它对每个 $U_A(s)$ 都包含 $s \in$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$。因此它包含 $A \otimes \mathcal{C}$。也就是说，它包含 $\mathrm{thick}\langle A \otimes \mathcal{C}\rangle = \mathrm{Thickid}\langle A\rangle$，从而包含 $\mathbb{1}$。□

我们通过回顾以下关于下降理论的结果来结束本节。

7.17. **命题** ([Mat16a，命题 3.22])。设 $\mathcal{C} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 并考虑$A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 为可下降的情形。则基变换伴随 $F_A\colon \mathcal{C} \rightleftarrows$ 模范畴$_A(\mathcal{C})\colon U_A$是余单子的。特别地，典范映射

$$\mathcal{C} \to \mathrm{Tot}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) \rightrightarrows \mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})) \overset{\to}{\underset{\to}{\to}} \cdots)$$

是等价关系。

8. 局部化理想的下降

本节的目标是建立一种用于分类局部化理想的下降策略；参见命题 8.23下文。我们将在第 12 节 中利用这一策略推导出一个关于分层的下降结果。

8.1. **定义**。对于大 tt-范畴 $\mathcal{T}$，我们用 $\mathrm{Locid}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 的局部化理想按包含关系排序后构成的（大）偏序集。

8.2. **注记**。 给定两个大三角张量范畴 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{S}$，以及任意 函子 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$，我们定义一个映射

$$F_*\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{T}) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{S})$$

将局部化理想 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$ 映射到由 $F(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{S}$生成的局部化理想，即 $F_*(\mathcal{L}) \coloneqq \operatorname{locid}\langle F(\mathcal{L})\rangle$。如果 $\mathcal{L} = \operatorname{locid}\langle t_i \mid i \in I\rangle$ 由一组对象生成，那么很容易让人认为 $F_*(\mathcal{L}) = \operatorname{locid}\langle F(\mathcal{L})\rangle$ 等于 $\operatorname{locid}\langle Ft_i \mid i \in I\rangle$。请注意，我们总有包含关系 $F_*(\mathcal{L}) \supseteq \operatorname{locid}\langle Ft_i \mid i \in I\rangle$，但一般而言这未必是等式。下一个结果表明，在关于 F的一些温和条件下，确实有这样的等式：

8.3. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是大 *tt*-范畴之间的一个函子。假设原像 F^{-1} 保持局部化理想。那么

$$\operatorname{locid}\langle F(\mathcal{E})\rangle = \operatorname{locid}\langle F(\operatorname{Locid}(\mathcal{E}))\rangle$$

对于任意对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$。

证明。 $\subseteq$包含关系显然。对于反向包含，注意到$F^{-1}(\operatorname{locid}\langle F(\mathcal{E})\rangle$ 根据假设是一个局部化理想。由于它包含 $\mathcal{E}$，我们得出它包含 $\operatorname{locid}\langle\mathcal{E}\rangle$。因此， $F(\operatorname{locid}\langle\mathcal{E}\rangle)$ 包含于 $\operatorname{locid}\langle F(\mathcal{E})\rangle$，证毕。□

8.4. **注记**。 由 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 和 $G\colon \mathcal{S} \to \mathcal{R}$ 是函子，并且 G^{-1} 保持局部化理想，可由引理 8.3 得出，$G \circ F)_* = G_* \circ F_*$。

8.5. **注记**。 引理 8.3 的结论 $F_*(\operatorname{locid}\langle\mathcal{E}\rangle) = \operatorname{locid}\langle F(\mathcal{E})\rangle$对任意对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$都成立。在这种情况下，我们称 F_* 可以“在生成元上定义”。

8.6. **例**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是大三角张量范畴之间的一个几何三角张量函子。那么 F^{-1} 保留局部化理想，因此 F_* 可以“在生成元上定义”。

8.7. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成三角张量范畴之间的一个几何三角张量函子。若其右伴随 $U\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ 是保守的，则 U^{-1}保留局部化理想。因此我们有

$$U_*(\operatorname{locid}\langle\mathcal{E}\rangle) = \operatorname{locid}\langle U(\mathcal{E})\rangle$$

对任意对象族 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$都成立。

证明。回顾命题 6.6，右伴随 U 保留余积。因此，若 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$ 是一个局部化理想，则 $U^{-1}(\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{S}$的一个局部化子范畴。 U 的保守性蕴含（引理 6.3(c)） $\mathcal{S} = \operatorname{loc}\langle F(\mathcal{T}^c)\rangle$，因此$\mathcal{S} \otimes U^{-1}(\mathcal{L}) \subseteq U^{-1}(\mathcal{L})$ 当且仅当 $F(\mathcal{T}^c) \otimes U^{-1}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$。但这可由投影公式（命题 6.6）推出。□

8.8. **例**。 设 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$ 是刚性紧生成三角张量∞-范畴 $\mathcal{C}$中的一个交换代数。引理 8.7 适用于基变换函子 $F_A\colon \mathcal{C} \to$模范畴 $_A(\mathcal{C})$，因为右伴随 U_A 是保守的。

8.9. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子。假设其右伴随 U 是保守的。那么：

(a) 对于任意 $s \in \mathcal{S}$，我们有 $U(s) \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。*(b)* 对于任意 $s \in \mathcal{S}$，我们有 $U(s) \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(s)\rangle$。

(c) 对于任意局部化理想 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$，我们有一个等式

$$\operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}\rangle = \operatorname{locid}\langle U(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}\rangle.$$

证明。对于 (a) 部分，只需注意到 $s \in \operatorname{locid}\langle \mathbb{1}_{\mathcal{S}}\rangle$，因此 $U(s) \in U(\operatorname{locid}\langle \mathbb{1}_{\mathcal{S}}\rangle) \subseteq \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$，由引理 8.7 得。现在考虑 (b) 部分。注意到 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(s) \simeq UFU(s)$，由投影公式可得。我们将伴随 (F, U) 的余单位补全为一个三角

$$FU(s) \xrightarrow{\epsilon} s \xrightarrow{\chi} z \to \Sigma FU(s).$$

注意到 $U(\epsilon)$ 是一个分裂满态射（由单位-余单位方程可知），因此映射 $U(\chi)\colon U(s) \to U(z)$ 为零。特别地，应用 U 后该三角分裂，因此 $U(s)$ 是 $UFU(s) \simeq U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(s)$ 的一个直和因子。这就证明了 (b) 部分。考虑 (c) 部分。若 $U(s) \in \mathcal{L}$，则 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(s) \in U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}$。因此，我们有一个包含关系

$$\operatorname{locid}\langle U(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}\rangle \subseteq \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}\rangle.$$

另一方面，注意到 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L} = UF(\mathcal{L}) \subseteq U(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}$。 □

8.10. **定义**。我们称一个局部化理想 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{T}$ 是由来自 $\mathcal{S}$的对象生成的，若 $\mathcal{L} = \operatorname{locid}\langle U(\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}\rangle$。请牢记 引理 8.9的 (c) 部分。

8.11.**引理**。假设右伴随 U 是保守的，则以下命题等价：

(a) $\mathcal{T}$ 的每个局部化理想都由来自 $\mathcal{S}$的对象生成。*(b)* $\mathcal{T} = \operatorname{locid}\langle U(\mathcal{S})\rangle$。*(c)* $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。

证明。(a) ⇒ (b)显然。(b) ⇒ (c)由将引理 8.9 的 (c) 部分应用于$\mathcal{L} := \mathcal{T}$即可得到。(c) ⇒ (a)同样由引理 8.9 得出：对于任意 $t \in \mathcal{T}$, $t \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes t\rangle$，因此 $\mathcal{L} \subseteq \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}\rangle$，于是这就是一个等式。□

8.12. **记号**。我们用 $\operatorname{Locid}(F\colon \mathcal{T} \uparrow \mathcal{S})$ 表示由 $\mathcal{S}$生成的 $\mathcal{T}$ 的局部化理想构成的（大型）偏序集。注意，它包含一个最大元素 $\operatorname{locid}\langle U(\mathcal{S})\rangle$。

以下结果推广了 Mathew 的一项结果 [Mat15b，命题 6。3]。

8.13. **命题**。设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间一个保持余积的 *tt*-函子，其右伴随 U 是保守的。映射

$$F_*\colon \operatorname{Locid}(F\colon \mathcal{T} \uparrow \mathcal{S}) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{S})$$

在偏序集范畴中是分裂单射，其中分裂由右伴随 U 诱导。特别地，若 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{Locid}(U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}))$，则我们有一个分裂单射

$$F_*\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{T}) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{S})$$

在偏序集范畴中。

证明。令 $\mathcal{L} = \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}\rangle$ 为由 $\mathcal{S}$中的对象生成的局部化理想；见引理 8.9(c)。注意，根据例 8.6 和引理 8.7，F_* 和 U_* 可在生成元上定义。由注记 8.4，只需验证 $(UF)_*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$。由于 $\mathcal{L}$ 由 $\mathcal{S}$ 中的对象生成，这转化为验证 $\operatorname{locid}\langle (UF)(U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L})\rangle = \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}\rangle$。由投影公式（根据命题 6.6，该公式成立），我们有 $(UF)(U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}) = U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{L}$。所需结论由此得证。

locid 这一事实$\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle = \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。一个包含关系显然成立，另一个则由引理 8.9(c) 得出。对于最后一个结论，应用 引理 8.11。□

8.14.**例**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 tt-∞-范畴，且$A \in$CAlg($\mathcal{C}$) 是可下降的。那么映射

$$F_*\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))$$

是偏序集范畴中的分裂单射。

8.15. **注记**。 细心的读者会注意到，其中一些结果只依赖于 $A \in$CAlg($\mathcal{C}$) 具有 $\mathbb{1} \in \operatorname{locid}\langle A\rangle$ 这一性质。我们或许可以称这样的代数为“弱可下降的”。请注意，若 A 是紧的，则它弱可下降当且仅当它可下降。

8.16. **注记**。 我们的目标是将例 8.14 中的分裂单射提升为分裂等化子。为此，我们回顾一些关于基变换函子的结果：

8.17. **命题**。 设 $A \in \operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$，并假设单位映射 $f\colon \mathbb{1} \to A$有一个可下降的截面，即存在一个映射 $r\colon A \to \mathbb{1}$，它属于 $\operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$，且是可下降的，并满足 $r \circ f = \mathrm{id}$。那么，基变换 $F\colon \mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 诱导出一个同构 $F_*\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim}$ Locid(模范畴$_A(\mathcal{C})$)。

证明。 注意，由 推论 6.12，我们有 $\mathcal{C} =$ 模范畴$_{\mathbb{1}}(\mathcal{C}) \simeq$ 模范畴$_{\mathbb{1}}$(模范畴$_A(\mathcal{C})$)。沿着 r 和 f 进行基变换会诱导映射

$$F_*\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) \quad \text{and} \quad R_*\colon \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{C})$$

其满足 $R_* \circ F_* = \mathrm{Id}$（因为 r 是 f 的截面，再结合 注记 8.4）。特别地，我们看到 R_* 是满射。由于 r 是可下降的， 例 8.14表明映射

$$R_*\colon \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{C})$$

也是单射。因此 R_* 是双射，其逆映射为 F_*。 □

8.18. **例**。 设 R 是一个交换环谱， X 是一个有限连通 CW 复形。那么，由在基点处求值给出的映射 $C^*(X; R) \to R$，根据 [Mat16a，命题 3.36]，是可下降的。这给出了典范代数映射 $R \to C^*(X; R)$ 的一个截面。因此 $\operatorname{Loc}(\operatorname{Mod}_R) \simeq \operatorname{Loc}(\operatorname{Mod}_{C^*(X;\ R)})$。

8.19. **例**。 设 R 是一个 n-截断的连通交换环谱，使得对所有 $i > n$，都有 $\pi_i(R) = 0$。假设存在一个环映射$\pi_0(R) \to R$，它在 π_0 上是恒等映射（例如，当 R 是分次交换环时，这一点总是成立）。那么，典范截断映射 $\tau_{\leq 0}\colon R \to \pi_0(R)$ 根据 [Mat16a，命题 3.34] 是可下降的，并且这是 $\pi_0(R) \to R$ 的一个截面。因此 $\operatorname{Loc}(\operatorname{Mod}_{\pi_0(R)}) \simeq \operatorname{Loc}(\operatorname{Mod}_R)$。若 $\pi_0(R)$ 是诺特的，那么我们就能对 $\operatorname{Mod}_{\pi_0(R)}$ 的局部化子范畴进行分类，进而也能对 Mod_R 的局部化子范畴进行分类，即使 $\pi_*(R)$ 可能不是诺特的。

8.20. **记号**。 考虑 $A \in$ CAlg($\mathcal{C}$)，并令 $f\colon \mathbb{1} \to A$ 表示单位映射。于是我们有环映射 $g := f \otimes 1_A\colon \mathbb{1} \otimes A \to A \otimes A$ 和 $h := 1_A \otimes f\colon A \otimes \mathbb{1} \to A \otimes A$。沿这些环映射扩张标量给出函子

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}) \underset{G}{\overset{H}{\rightrightarrows}} \operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C}).$$

沿 $f\colon \mathbb{1}\to A$ 和 $g\colon A\to A\otimes A$ 限制标量定义函子 U 和 V，如下图所示

$$\mathcal{C}\underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})\underset{V}{\overset{G}{\rightleftarrows}}\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C}).$$

8.21. 注记。 注意，对于所有 A-模 $M\in\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$，我们都有自然等价 $(V\circ H)(M)\simeq(F\circ U)(M)$。这是因为 $(V\circ H)(M)=(A\otimes A)\otimes_A M$，其 A-模结构来自 $A\otimes A$ 的右因子。$A\otimes A$ 的左因子用于计算与 M 的张量积。

8.22. 注记。 代数态射 $g\colon A\to A\otimes A$ 和 $h\colon A\to A\otimes A$ 都是可下降的。事实上，若 $\mu\colon A\otimes A\to A$ 是乘法映射，则 $g\mu=1_A=f\mu$，因此 A 是 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中 $A\otimes A$ 的直缩。

8.23.**命题。** 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，并设 $A\in$交换代数$(\mathcal{C})$。则基变换诱导的图表为

$$\operatorname{Locid}(F\colon\mathcal{C}\uparrow\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\xrightarrow{F_*}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\underset{G_*}{\overset{H_*}{\rightrightarrows}}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

是偏序集的分裂等化子。

证明。 我们将证明该叉形图在偏序集范畴中是分裂的。换言之，我们将证明存在如下图表中的 U_* 和 V_*

$$\operatorname{Locid}(\mathcal{C}\uparrow\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\xrightarrow{F_*}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\underset{G_*}{\overset{H_*}{\rightrightarrows}}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

使得 $U_*\circ F_*=1$ 和 $V_*\circ G_*=1$ 和 $V_*\circ H_*=F_*\circ U_*$。这些方程立即表明 F_* 是 H_* 和 G_* 的等化子（回忆一下 注记 2.2）。
回忆一下，$g=F(f)\colon A\otimes\mathbb{1}\to A\otimes A$在 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中是可下降的（注记 8.22）。另请注意，根据推论 6.12，$\mathsf{Mod}_{A\otimes A}(\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C}))\simeq\mathsf{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$。因此，根据命题 8.13，函子 F_* 和 G_* 存在截面 U_* 和 V_*，它们分别由沿着 f 和 g 限制标量所诱导。因此，$U_*\circ F_*=1$ 和$V_*\circ G_*=1$。

现在只需证明 $V_*\circ H_*=F_*\circ U_*$。令 $\mathcal{L}\subseteq\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 为一个局部化理想。由注记 8.4 可知，$(F_*\circ U_*)(\mathcal{L})=\mathsf{locid}\langle F(U(\mathcal{L}))\rangle$ 且 $(V_*\circ H_*)(\mathcal{L})=\mathsf{locid}\langle V(H(\mathcal{L}))\rangle$。最后，只需注意到，对于所有 A-模 M，都有自然等价 $(V\circ H)(M)\simeq(F\circ U)(M)$，如注记 8.21 中所述。□

8.24. 例。 如果 A 是可下降的，那么我们得到偏序集的一个分裂等化子：

$$\operatorname{Locid}(\mathcal{C})\xrightarrow{F_*}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\underset{G_*}{\overset{H_*}{\rightrightarrows}}\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

值得明确说明以下相对版本。

8.25.**推论。** 设 $A\to B$ 是交换代数$(\mathcal{C})$ 中的一个态射。如果 B 在 A 上可下降，那么由基变换诱导的图表

$$\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C}))\to\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_B(\mathcal{C}))\rightrightarrows\operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{B\otimes_A B}(\mathcal{C}))$$

是集合的一个分裂等化子（因此也是偏序集的等化子）。

证明。 利用 推论 6.12我们可以将叉形图改写为

$$\mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \to \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_B(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))) \rightrightarrows \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))).$$

现在，根据命题 8.23，这是一个集合的分裂等化子。注意， $A \to B$ 的可下降性确保了 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 的所有局部化理想均由 $\mathsf{Mod}_B(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$ 生成；参见引理 8.11。□

8.26. **例**。 考虑一个交换环谱 A 满足 $\pi_i(A) = 0$ 对所有$i > 0$ 以及 $i \ll 0$，并且满足 $\pi_0(A) = k$ 是一个域。那么，根据 $A \to k$ Mat18，例 3，映射 [5] 因此，我们得到一个单射映射 $\mathsf{Loc}(\mathsf{Mod}_A) \to \mathrm{Loc}(\mathrm{Mod}_k) =${0,模范畴$_k$}。这显然是满射的，因此是双射。

9. Descent for smashing ideals

本节将展示如何利用可下降的交换代数对 smashing 理想进行分类。首先，我们回顾一些重要的定义和结果。

9.1. 定义。设 $\mathcal{T}$ 是一个大 tt-范畴。若局部化函子 $L\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 保持余积，则称其为 smashing。根据 [HPS97，定义 3.3，2] 我们有 $L \simeq L\mathbb{1} \otimes -$ 作为函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$。若局部化理想 $\mathcal{I}$ of $\mathcal{T}$ 满足存在一个 smashing 局部化 $L_{\mathcal{I}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，使得 $\ker(L) = \mathcal{I}$，则称其为 smashing。我们用 $\mathsf{Smashid}(\mathcal{T})$ 表示按包含关系排序的 $\mathcal{T}$ 的 smashing 理想（大）偏序集。对于大 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们定义 $\mathsf{Smashid}(\mathcal{C}) :=$Smashid(Ho($\mathcal{C}$))】【。

我们回顾以下结果。

9.2.**定理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴。那么，*smashing* 理想的集合 $\mathrm{Smashid}(\mathcal{T})$ 是一个框架，其交和并分别由 $\mathcal{I} \wedge \mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}'$ 和 $\mathcal{I} \vee \mathcal{I}' = \mathrm{loc}\langle \mathcal{I} \cup \mathcal{I}' \rangle$ 给出。

证明。 Krause [Kra00，定理 4。9] 证明了，当 $\mathcal{T}^c$ 满足作者称为条件 (B) 的 Brown 表示定理的弱形式时，smashing 子范畴的集合构成一个集合。这一点总是成立，见 [Kra10，定理 5.1。1]Balmer–Krause–Stevenson [BKS20，定理 1。1] 随后证明了 $\mathsf{Smashid}(\mathcal{T})$ 构成一个框架，其并和交如上所述；另见 [BKS20，备注 5。12]。□

9.3. **定义**。 令 $\mathcal{T}$ 为一个大 tt-范畴。若映射 $\lambda\colon \mathbb{1} \to E$ 所诱导的映射 $\lambda \otimes E\colon \mathbb{1} \otimes E \to E \otimes E$ 是一个同构，我们称 λ为 $\mathcal{T}$ 中的幂等对象 。我们用 $\mathsf{Idem}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 中幂等对象的同构类所构成的（大）偏序集，其偏序定义为：$[\lambda\colon \mathbb{1} \to E] \leq [\lambda'\colon \mathbb{1} \to E']$ 当且仅当在 $\mathcal{T}_{\mathbb{1}/}$中存在一个态射 $\lambda \to \lambda'$。对于一个大 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们设 $\mathsf{Idem}(\mathcal{C}) := \mathsf{Idem}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))$。

9.4.**定理**。 设 $\mathcal{T}$ 是一个大 *tt*-范畴。那么偏序集 $\mathrm{Smashid}(\mathcal{T})$ 和 $\mathrm{Idem}(\mathcal{T})$在以下映射下同构：$\mathcal{I} \mapsto L_{\mathcal{I}}\mathbb{1}$ 和 $A \mapsto$ 核$(A \otimes -\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T})$。

证明。 这是 [BF11，定理 3。5]. 我们注意到，作者假设他们的 tt-范畴是刚性紧生成的，但在所引结果的证明中并未用到这一点。□

现在我们讨论∞-范畴世界中幂等代数的相应概念。

9.5. **定义**。设 $\mathcal{C}$ 是一个大 tt-∞-范畴。若 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 是一个幂等代数，则映射 $\eta \otimes A\colon A \to A \otimes A$ 是一个等价。这等价于乘法映射 $\mu\colon A \otimes A \to A$ 是一个等价。我们用 $\mathbf{CAlg}^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathbf{CAlg}(\mathcal{C})$ 中由幂等代数所张成的满子范畴。我们称 $A \leq A'$ 当且仅当存在一个交换代数映射 $h\colon A \to A'$ 当且仅当 $A' \simeq A \otimes A'$；参见 [BKS20，命题 2。4]。

9.6.**命题**。对于一个大 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$，交换代数$^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C})$的映射空间要么为空，要么是可缩的。此外，我们有以下 ∞-范畴的等价：

$$N(\mathrm{Smashid}(\mathcal{C})) \simeq N(\mathrm{Idem}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{CAlg}^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C}).$$

证明。Lurie [Lur17，命题 4.8.2。9]证明了存在一个满忠实函子

$$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{1}/}, \quad A \mapsto (\eta\colon \mathbb{1} \to A)$$

其本质像是满足 $\lambda\colon \mathbb{1} \to E$ 为等价 $\lambda \otimes E$ 的映射所成的集合。将此本质像记为 $\mathcal{E}$。在所引结果的证明中，Lurie 还证明了交换代数$^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C})$（因此 $\mathcal{E}$的映射空间也如此）要么为空，要么是可缩的。因此，根据 [Lur09，命题 2.3.4。18] 这些范畴等价于 0-范畴，而后者又可根据 [Lur09，例 2.3.4。3]识别为偏序集。现在很容易看出 $\mathcal{E} \simeq N(\mathrm{Idem}(\mathcal{C}))$。对于最后一个等价，我们应用 定理 9.4。□

9.7. **记号**。我们用 $\widehat{\mathsf{Cat}_\infty}$ 表示 ∞-范畴：大 ∞-范畴；并用 $\widehat{\mathsf{Poset}}$表示 ∞-范畴：大偏序集。后一个 ∞-范畴实际上是一个 1-范畴，定义见 [Lur09，定义 2.3.4。1]。

9.8. **构造**。设 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是大 tt-∞-范畴之间的一个 tt-函子。则赋值 $A \mapsto GA$ 定义了一个函子 G_*: 交换代数$^{\mathrm{idem}}(\mathcal{C}) \to$ 交换代数$^{\mathrm{idem}}(\mathcal{D})$。注意，由于 $A \otimes A' \simeq A'$ 蕴含 $G(A) \otimes G(A') \simeq G(A')$，且 G 是（强）对称幺半的，我们还得到相应偏序集之间一个保序映射。关于 smashing 理想偏序集的函子性则稍显神秘。不过，我们可以利用它与幂等交换代数偏序集之间的同构，推出 F_*: Smashid($\mathcal{C}$) $\to$ Smashid($\mathcal{D}$) 将 $\mathcal{I}$映为 $\ker(G(L_{\mathcal{I}}\mathbb{1}) \otimes -\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D})$。因此，我们得到定义良好的函子

$$\mathrm{Smashid}\colon \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^L_{\mathrm{st}}) \to \widehat{\mathsf{Poset}} \quad \text{and} \quad \mathrm{CAlg}^{\mathrm{idem}}\colon \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^L_{\mathrm{st}}) \to \widehat{\mathsf{Cat}_\infty}$$

以及一个自然同构 $\xi\colon N(\mathrm{Smashid}) \simeq$ 交换代数^{idem}。

9.9. **推论**。函子 交换代数^{idem}: 交换代数$(\mathsf{Pr}^L_{\mathrm{st}}) \to \widehat{\mathsf{Cat}_\infty}$ 保留所有极限。同样，函子 Smashid: 交换代数$(\mathsf{Pr}^L_{\mathrm{st}}) \to \widehat{\text{偏序集}}$ 保留所有极限。

证明。回忆一下，$\mathcal{C}$ 中的交换代数对象是一个满足 Segal 条件的函子 $\mathrm{Fin}_* \to \mathcal{C}$（这些条件断言某些映射到积的映射是等价）。由于函子范畴中的极限是逐点计算的，我们看到典范映射 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \lim_i \mathcal{C}_i) \to \lim_i \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{C}_i)$ 是一个等价。因此，要证明第一个断言，只需验证幂等代数的极限仍是幂等代数。这可以逐点验证。这是因为极限保持等价并与积交换。第二个断言由第一个断言以及等价 $\xi\colon N$ Smashid $\simeq$ 交换代数^{idem} 推出；这里用到了神经函子创建极限这一事实，因为它是保守的，并且与所有极限交换。□

9.10. **注记。** 推论9.9 也可由 Aoki 最近的工作推出 [Aok23]其中证明了函子 Smashid(–) 是右伴随，因此保持所有极限。

作为一个应用，我们得到以下结果：

9.11.**推论。** 设 $\mathcal{C}$ 为一个大 *tt*-∞-范畴，并考虑 $A \in$ 交换代数$(\mathcal{C})$ 可下降。那么由基变换诱导的图表

$$\mathrm{Smashid}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Smashid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \rightrightarrows \mathrm{Smashid}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})).$$

是偏序集的等化子。

证明。 根据 命题 7.17 ，我们知道 $\mathcal{C} \simeq \lim_{\bullet\in\Delta}$模范畴$_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})$，因此由前一个结果可得 Smashid$(\mathcal{C}) \simeq \lim_{\bullet\in\Delta}$Smashid(模范畴$_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})$)。注意 $\widehat{\text{Smashid(模范畴}}_{A^{\otimes\bullet+1}}$ $(\mathcal{C}))$ 在 Pos 中定义了一个余单纯对象。应用 [HP22命题 A.1]到 1-范畴 Pos 可得

$$\mathrm{Smashid}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Tot}_1(\mathrm{Smashid}(\mathrm{Mod}_{A^{\otimes\bullet+1}}(\mathcal{C})))$$

这就证明了该断言。 □

10. Descent for thick ideals and the telescope conjecture

现在我们转向紧对象的厚理想，以及它们与此前关于 smashing 理想和局部化理想的结果之间的联系。我们将特别证明，望远镜猜想沿着紧的可下降交换代数下降。

10.1. **记号。** 设 $\mathcal{T}$ 为刚性紧生成 tt-范畴。我们用 Thickid$(\mathcal{T}^c)$ 表示紧对象范畴 $\mathcal{T}^c$的厚理想偏序集。

10.2. **注记。** 若 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}^c$ 是由紧对象构成的厚理想，则局部化子范畴 $\mathsf{loc}\langle\mathcal{I}\rangle \subseteq \mathcal{T}$ 自动是 $\mathcal{T}$的局部化理想；参见 [BHS23，注记 1。3]或 [HPS97，引理 1.4。6]。因此 $\mathsf{locid}\langle\mathcal{I}\rangle = \mathrm{loc}\langle\mathcal{I}\rangle$。特别地，若 $\mathcal{T}$ 的一个局部化理想作为局部化理想是紧生成的，当且仅当它作为局部化子范畴是紧生成的。

10.3.**定理** (Miller–Neeman)。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴。那么赋值 $\mathcal{I} \mapsto \mathrm{loc}\langle\mathcal{I}\rangle$ 定义了分裂单射映射。

$$\sigma\colon \mathrm{Thickid}(\mathcal{T}^c) \to \mathrm{Locid}(\mathcal{T}) \qquad \text{and} \qquad \sigma\colon \mathrm{Thickid}(\mathcal{T}^c) \to \mathrm{Smashid}(\mathcal{T}).$$

该分裂将一个 *smashing* 理想或局部化理想 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{L} \cap \mathcal{T}^c$。

证明。 由以下对象生成的局部化子范畴 $\mathsf{loc}\langle\mathcal{I}\rangle$ 是紧对象的一个厚理想 $\mathcal{I}$ 自动成为一个局部化理想（注 10.2）。有限局部化理论表明，它是一个 smashing 理想；参见 [HPS97， §3。3]。于是，由以下复合满足这一断言即可推出结论

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Thickid}(\mathcal{T}^c) & \longrightarrow & \mathrm{Smashid}(\mathcal{T}) & \subseteq & \mathrm{Locid}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathrm{Thickid}(\mathcal{T}^c) \\ \mathcal{I} & \longmapsto & \mathrm{loc}\langle\mathcal{I}\rangle & & \mathcal{L} & \longmapsto & \mathcal{L}\cap\mathcal{T}^c \end{array}$$

是恒等式。换言之，$\mathsf{loc}\langle\mathcal{I}\rangle \cap \mathcal{T}^c = \mathcal{I}$ 如 Neeman 所证明（注 5.9）。另请参见 [HPS97，定理 3.3。3] 或 [Gre19，定理 8。。□

10.4. **定义**。我们称 望远镜猜想对 $\mathcal{T}$ 成立，若映射σ: Thickid($\mathcal{T}^c$) $\to$ Smashid($\mathcal{T}$) 是双射。

10.5. **注记**。 给定一个保持紧对象的 tt-函子 F: $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$，我们得到一个保持包含关系的映射

$$F_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c) \to \operatorname{Thickid}(\mathcal{S}^c)$$

由 $\mathcal{I} \mapsto \mathsf{thickid}\langle F(\mathcal{I})\rangle$ 给出。

10.6.**例**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 tt-∞-范畴，并考虑$A \in$交换代数($\mathcal{C}$)。标量扩张函子 $\mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 根据引理 6.8保持紧对象，因此我们得到一个映射

$$F_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c) \to \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c).$$

10.7. **定理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，并且令 $A \in$交换代数($\mathcal{C}$) 可下降且紧。图表

$$\operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c) \xrightarrow{F_*^c} \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \underset{G_*^c}{\overset{H_*^c}{\rightrightarrows}} \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c)$$

由基变换（记号 *8.20*）诱导，是偏序集的等化子。

证明。 由于从偏序集到集合的遗忘函子创建极限，因此只需证明该图表是集合的等化子。考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Locid}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_*} & \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) & \underset{G_*}{\overset{H_*}{\rightrightarrows}} & \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})) \\
{\scriptstyle\sigma}\uparrow & & {\scriptstyle\sigma_A}\uparrow & & {\scriptstyle\sigma_{A\otimes A}}\uparrow \\
\operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c) & \xrightarrow{F_*^c} & \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) & \underset{G_*^c}{\overset{H_*^c}{\rightrightarrows}} & \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c).
\end{array}$$

其中垂直映射是定理 10.3 中的映射，因而是单射。利用注 10.2 和例 8.6，可以直接验证该图表交换。根据命题 8.23 以及 A 是可下降的这一假设，顶部叉形图是一个分裂等化子。回顾证明可知， F_* 的一个截面由遗忘函子 U: 模范畴$_A(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$诱导。因此我们处于引理 2.3 的情形，而底部叉形图是等化子的充要条件是：对于任意满足$H_*^c(\mathcal{J}) = G_*^c(\mathcal{J})$的厚理想 $\mathcal{J} \subseteq$ 模范畴$_A(\mathcal{C})^c$，局部化理想 $\mathsf{locid}\langle U(\mathcal{J})\rangle \subseteq \mathcal{C}$ 是紧生成的。如果 U 保持紧对象，这显然成立（回顾注 10.2）；而根据假设 A 是紧对象，这一点由推论 6.5 得出。 □

10.8. **定理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，且 $A \in \operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$ 可下降且紧。若望远镜猜想对 模范畴$_A(\mathcal{C})$成立，则它对 $\mathcal{C}$ 也成立。

证明。 应用 推论 9.11 和 定理 10.7，得到一个等化子的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Smashid}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \operatorname{Smashid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) & \rightrightarrows & \operatorname{Smashid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})) \\
{\scriptstyle\sigma}\uparrow & & {\scriptstyle\sigma}\uparrow{\scriptstyle\simeq} & & {\scriptstyle\sigma}\uparrow \\
\operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c) & \longrightarrow & \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) & \rightrightarrows & \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c).
\end{array}$$

这些垂直箭头总是分裂单射，这是由 定理 10.3得出的。现在由引理 2.5即可得到该结论。 □

10.9. 例。在素数 2 处局部化后，有一个环映射 $tmf \to tmf_1(3)$。遵循 Hopkins 和 Mahowald 的工作，Matthew [Mat16b] 证明存在一个无挠同调的 2-局部有限复形 $DA(1)$，以及一个 tmf-模$tmf \wedge DA(1)$ 的等价 $\simeq tmf_1(3)$，因此映射 $tmf \to tmf_1(3)$ 是有限的（即 $tmf_1(3)$ 是一个紧的 tmf-模）。根据厚子范畴定理，由 $DA(1)$ 生成的厚子范畴包含（2-局部）球谱，因此 $tmf \to tmf_1(3)$ 是可下降的。我们知道 $\pi_*(tmf_1(3)) = \mathsf{Z}_{(2)}[v_1, v_2]$ 的生成元位于次数 2 和 6，因此 [DS16, 推论 1.4] 意味着，模范畴 $\mathrm{Mod}_{tmf_1(3)}$ 按照 $\pi_*(tmf_1(3))$ 分层，并且望远镜猜想对模范畴 $\mathrm{Mod}_{tmf_1(3)}$ 成立。由此，根据定理 10.8，望远镜猜想对 Mod_{tmf} 也成立。

11. Descent for Balmer spectra

我们回顾 Balmer 谱的一些事实，以下内容遵循 [KP17]而非标准参考文献 [Bal05]。

回顾定义 5.2中根厚理想的概念。

11.1. **定义**。设 $\mathcal{T}$ 是一个本质小 tt-范畴。

(a) 令 $\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})$ 表示由 $\mathcal{T}$ 的根厚理想按包含关系构成的偏序集。根据 [KP17，定理 3.1，该偏序集是一个相干框架。9]其格运算由 $\mathcal{I} \wedge \mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathcal{I}'$ 和 $\mathcal{I} \vee \mathcal{I}' = \sqrt{\mathcal{I} \cup \mathcal{I}'}$给出。有限元是主根厚理想，即具有如下形式的理想 $\sqrt{a}$,_其中 $a \in \mathcal{T}$。我们用 $\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f$ 表示有限元构成的分配格。(b) Balmer 谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T})$ ***Balmer*** 谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T})$ 是与分配格 $(\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f)^{\mathrm{op}}$ 经 Stone 对偶得到的谱空间；参见 定理 3.8。

11.2. **注记**。回顾一下，如果 $\mathcal{T}$ 是刚性的，那么任意厚理想都是根的。在这种情况下，我们将相干框架中的厚理想简单记作 $\mathrm{Thickid}(\mathcal{T})$，并将其有限元构成的分配格记作 $\mathrm{Thickid}(\mathcal{T})^f$ 。

11.3.**定理**。谱空间 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T})$ 如上定义，与 [Bal05] 中定义的谱空间同构。

证明。根据 [KP17，推论 3.4。2] 在 [Bal05]中定义的 Balmer 谱是 $\mathrm{Spec}(\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f$ 的 Hochster 对偶。但分配格范畴中的 Hochster 对偶就是对偶格（注记 3.12）。□

11.4. **注记**。注意，分配格 $(\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f)^{\mathrm{op}}$ 与 Balmer 谱 $\mathrm{Spc}(\mathcal{T})$ 的拟紧开子集格同构，同构映射为$\sqrt{a} \mapsto \mathrm{supp}(a)^c$。

下面我们更具体地描述分配格 $\mathrm{Thickid}(\mathcal{T})^f$ 中的交运算：

11.5. **引理**。对于任意 a、$b \in \mathcal{T}$，我们有 $\sqrt{a} \wedge \sqrt{b} = \sqrt{a \otimes b}$。

证明。在 Stone 对偶下，$\mathcal{T}$的 Balmer 谱对应于分配格 $(\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f)^{\mathrm{op}}$。特别地，根据 注记 11.4，我们得到 $(\mathrm{RadThickid}(\mathcal{T})^f)^{\mathrm{op}}$ 与以下对象的分配格之间存在同构

拟紧开集，$\Omega(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}))^f$，在此对应关系下，$\sqrt{a}$ 对应于 $\overline{\operatorname{supp}(a)}^c$。因此，$\sqrt{a}\wedge\sqrt{b}$ 在 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f$ 中对应于

$$\operatorname{supp}(a)^c\cup\operatorname{supp}(b)^c=(\operatorname{supp}(a)\cap\operatorname{supp}(b))^c=(\operatorname{supp}(a\otimes b))^c.$$

因此 $\sqrt{a}\wedge\sqrt{b}=\sqrt{a\otimes b}$。 □

11.6. **定义**。如果 $Y\subseteq\operatorname{Spc}(\mathcal{T})$ 是一个 Thomason 子集，那么它对应于 $\mathcal{T}$ 中由 $\mathcal{T}_Y:=\{a\in\mathcal{T}\mid \operatorname{supp}(a)\subseteq Y\}$ 给出的根厚理想。我们将 $\mathcal{T};Y$ 的根厚理想构成的偏序集记为 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T};Y)$，其中这些理想包含于 $\mathcal{T}$，并按包含关系排序。注意，这是 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})$ 的一个子框架。如果 $\mathcal{T}$ 是刚性的，我们将记号简化为 $\operatorname{Thickid}(\mathcal{T};Y)$，因为所有厚理想都是根理想。

11.7. **引理**。如果 $Y\subseteq\operatorname{Spc}(\mathcal{T})$ 是一个闭 *Thomason* 子集，那么 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T};Y)$ 是一个相干框架。

证明。我们需要证明，最大元素 $1=\mathcal{T}_Y$ 是有限的，并且两个有限元素的交仍然是有限的。根据 [Bal05，命题 2。14]，存在 $z\in\mathcal{T}$ 使得 $\operatorname{supp}(z)=Y$ 因此 $\mathcal{T}_Y=\sqrt{z}$ 是有限的。两个有限元素的交仍然是有限的，这一点可直接由 引理 11.5 得出。 □

11.8. **注记**。从另一个角度看，Thomason 闭子集 $Y\subseteq\operatorname{Spc}(\mathcal{T})$ 是一个谱子空间（参见 [DST19，定理 2.1。3]），而 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T};Y)^f$ 是相应的分配格。包含关系 $Y\subseteq\operatorname{Spc}(\mathcal{T})$ 对应于映射 $\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f\to\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T};Y)^f$，该映射由与 $\mathcal{T}_Y$ 取交得到；换言之 $\sqrt{a}\mapsto\sqrt{a}\cap\mathcal{T}_Y=\sqrt{a\otimes z}$ 其中 $\operatorname{supp}(z)=Y$。

11.9. **定义**。在 $\mathcal{T}$ 上的支撑理论是一个二元组 (L,d)，其中 L 是一个分配格，且 $d\colon\operatorname{obj}(\mathcal{T})\to L$ 是一个满足以下条件的映射：

(1) $d(0)=0$ 且 $d(1)=1$；(2) $d(\Sigma a)=d(a)$，对所有 $a\in\mathcal{T}$ 均成立；
(3) $d(a\oplus b)=d(a)\vee d(b)$，对所有 $a,b\in\mathcal{T}$ 均成立；(4) $d(a\otimes b)=d(a)\wedge d(b)$，对所有 $a,b\in\mathcal{T}$ 均成立；(5) 若 $a\to b\to c\to\Sigma a$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个正合三角，则 $d(b)\leq d(a)\vee d(c)$。

从（L，d）到（L'，d'）的支撑态射是一个与 d 和 d' 兼容的格同态。

11.10. **命题**。设 $\mathcal{T}$ 为一个本质小的 *tt*-范畴。定义如下函数

$$d\colon\operatorname{obj}(\mathcal{T})\to\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f,\qquad a\mapsto\sqrt{a}.$$

于是，有序对 $(\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f,d)$ 是 $\mathcal{T}$ 上的初始支撑理论。

证明。参见 [KP17，定理 3.2。3]。 □

11.11. **注记**。设 $F\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ 是本质小的 tt-范畴之间的一个 tt-函子。则容易验证，赋值 $a\mapsto\sqrt{Fa}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个支撑理论。（关键观察是，主根厚理想的交由张量积给出；参见 [KP17，引理 3.2。2]。）因此，根据 命题 11.10，我们得到一个分配格同态

$$F_*\colon\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f\to\operatorname{RadThickid}(\mathcal{T}')^f,\quad \sqrt{a}\mapsto\sqrt{Fa}.$$

在 Stone 对偶下，这对应于由 $\mathcal{P}\mapsto F^{-1}(\mathcal{P}')$ 给出的谱映射 $\operatorname{Spc}(F)\colon\operatorname{Spc}(\mathcal{T}')\to\operatorname{Spc}(\mathcal{T})$。

11.12. **例**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 tt-∞-范畴，并考虑$A \in$ 交换代数$(\mathcal{C})$。回忆一下，标量扩张函子 $F = A\otimes -\colon \mathcal{C} \to$ 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 根据引理 6.8保持紧对象。因此我们得到一个分配格之间的映射

$$F_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c)^f \to \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c)^f$$
$$\sqrt{a} \mapsto \sqrt{Fa}$$

11.13. 注记。 若 $G\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 是任意 函子，则该对应关系

$$G_*\colon \operatorname{RadThickid}(\mathcal{T}) \to \operatorname{RadThickid}(\mathcal{T}'), \qquad \mathcal{I} \mapsto \sqrt{G(\mathcal{I})}$$

是良定义的函数，但一般而言它并非框架态射，也不保持有限元。不过，若假设 G^{-1} 保持根厚理想，则可得到一个良定义的集合映射

$$G_*\colon \operatorname{RadThickid}(\mathcal{T})^f \to \operatorname{RadThickid}(\mathcal{T}')^f, \qquad \sqrt{a} \mapsto \sqrt{Ga}$$

在分配格之间；参见 引理 8.3。

11.14. **例**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 tt-范畴之间的几何三角张量函子。假设其右伴随 U 是保守的，且 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧对象。那么 U 保持所有紧对象（由 推论 6.5 可知），并且我们断言 U^{-1} 保持紧对象的（根）厚理想。因此，右伴随给出分配格之间一个良定义的集合映射

$$U_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{S}^c)^f \to \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c)^f.$$

为证明这一断言，令 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}^c$ 为一个厚理想。则 $U^{-1}(\mathcal{J})$ 是一个厚子范畴，因为 U 是一个正合函子。右伴随 U 的保守性意味着，根据引理 6.3(c)，$\mathcal{S}^c = \operatorname{thick}\langle F(\mathcal{T}^c)\rangle$。根据投影公式， $F(\mathcal{T}^c) \otimes U^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq U^{-1}(\mathcal{J})$。因此，$\operatorname{thick}\langle F(\mathcal{T}^c)\rangle \otimes U^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq U^{-1}(\mathcal{J})$。

11.15. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何三角张量函子。假设右伴随 U 是保守的，并且 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的。那么，诱导映射的像 像 $\varphi = \operatorname{supp}(U(\mathbb{1}))$

$$\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

是 *Thomason* 闭的，且分配格之间的映射

$$F_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c; \operatorname{im}\varphi)^f \to \operatorname{Thickid}(\mathcal{S}^c)^f$$

在集合范畴中是分裂单射，其截面由 U 诱导。

证明。 首先注意，诱导映射在 Balmer 谱上的像与 Thomason 闭集合 $\operatorname{supp}(U(\mathbb{1}))$ 一致，见 [Bal18，定理 1。7]。由 例 11.12 和 例 11.14 可得集合映射

$$\operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c)^f \xrightarrow{F_*^c} \operatorname{Thickid}(\mathcal{S}^c)^f \xrightarrow{U_*^c} \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c)^f.$$

复合映射将根厚理想 $\sqrt{a} \in \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c)^f$ 映到由 $U(F(a)) = U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes a$生成的根厚理想。因此，这个复合映射的像包含于 $\operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c,\ \operatorname{im}\ \varphi)^f$，且该复合映射

$$\operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c; \operatorname{im}\varphi)^f \hookrightarrow \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c)^f \xrightarrow{U_*^c \circ F_*^c} \operatorname{Thickid}(\mathcal{T}^c, \operatorname{im}\varphi)^f.$$

是恒等式，因为 $\sqrt{a} = \sqrt[n]{U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes a}$当 $\operatorname{supp}(a) = \operatorname{supp}(U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \otimes a) = \operatorname{supp}(U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})) \cap \operatorname{supp}(a)$ 时，也就是说，当 $\operatorname{supp}(a) \subseteq \operatorname{im}\ \varphi$。□

11.16. 例。 令 $\mathcal{C}$ 为一个刚性紧生成的 tt-∞-范畴，且令$A \in$交换代数$(\mathcal{C})$为一个紧交换代数。那么分配格的映射

$$F_*^c\colon \operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c;\operatorname{supp}(A))^f \to \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c)^f$$

是集合范畴中的分裂单射。

我们终于可以证明关于 Balmer 谱的下降结果了。

11.17. **定理。** 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴。设 $A \in$交换代数$(\mathcal{C})$ 是一个支撑为 支撑$(A) \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 的紧交换代数。那么，由基变换诱导的图表（记号 *8.20*）

$$\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \underset{\operatorname{Spc}(G_*^c)}{\overset{\operatorname{Spc}(H_*^c)}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \xrightarrow{\operatorname{Spc}(F_*^c)} \operatorname{supp}(A)$$

是谱空间的余等化子。

证明。 如前所述，注意到 $\mathcal{C}^c$ 中的任意理想都是根理想，这由注记 5.4 以及分配格的实心图表可知

$$\operatorname{Thickid}(\mathcal{C}^c;\operatorname{supp}(A))^f \xrightarrow{F_*^c} \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c)^f \underset{G_*^c}{\overset{H_*^c}{\rightrightarrows}} \operatorname{Thickid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c)^f$$

$$U_*^c \qquad\qquad V_*^c$$

由……良定义例 11.12。我们将证明这个叉形图在集合范畴中是分裂的，因此特别是一个等化子。由此根据引理 3.14 可知，上述图表是 DLat中的一个极限图表。随后 Stone 对偶将给出推论陈述中的余极限图表。

与局部化理想的情形类似（见命题 8.23），我们需要构造如上图所示的映射 U_*^c和 V_*^c，使得 $U_*^c\circ F_*^c = 1$、 $V_*^c\circ G_*^c = 1$和 $V_*^c\circ H_*^c = F_*^c\circ U_*^c$。回想一下， $g = F(f)$: $A\otimes\mathbb{1} \to A\otimes A$在模范畴 $\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中是可下降的（注记 8.22）。还要注意，根据推论 6.12，$\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) \simeq \operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$。因此，由例 11.16 可知，函子 F_*^c 和 G_*^c 有截面 U_*^c和 V_*^c，它们分别由沿 f和 g限制标量诱导。于是 $U_*^c \circ F_*^c = 1$和 $V_*^c \circ G_*^c = 1$。

只需证明 $V_*^c \circ H_*^c = F_*^c \circ U_*^c$即可。这归结为验证，对于所有紧$\langle VH(M)\rangle = \operatorname{Thickid}\langle FU(M)\rangle$模 A， M。事实上，对于$V \circ H(M) \simeq (F \circ U)M$中的所有 A模 M，如记号 8.20所述，存在一个等价。结论由此得出。□

在交换代数满足额外假设时，可以证明谱余等化子实际上是拓扑空间范畴中的余等化子：

11.18.**定理**(Balmer)。设 $\mathcal{C}$ 为一个刚性紧生成的 *tt*-∞范畴。设 $A \in \operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$ 是可下降、紧且有限 *tt*-次数的可分代数。则由基变换诱导的图表

$$\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \underset{\operatorname{Spc}(G_*^c)}{\overset{\operatorname{Spc}(H_*^c)}{\rightrightarrows}} \operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \xrightarrow{\operatorname{Spc}(F_*^c)} \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)$$

是拓扑空间的余等化子。

证明。 注意 $\operatorname{supp}(A) = \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 因为 A 是可下降的。于是结论由 [Bal16，定理 3。14]。
□

11.19. 注记。严格来说，在 [Bal16] 中，Balmer 完全是在张量三角同伦范畴的层面上工作，并考察这些同伦范畴中的模范畴。（ [Bal11] 的主要结果表明，张量三角范畴中可分环对象上的模范畴具有唯一的三角范畴结构，且该结构与原有结构相容。）如果 $A \in \mathsf{CAlg}(\mathcal{C})$是一个具有高度结构的可分交换代数，我们可以援引 [DS18] 的结果（参见 [DS18，推论 1.11] 和 [San22，命题 3.8]），得出 $\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})) \cong \mathsf{Mod}_{\mathrm{Ho}\,A}(\mathsf{Ho}\ \mathcal{C})$，其中 $\mathsf{Ho}\ A \in \mathsf{CAlg}(\mathsf{Ho}\ \mathcal{C})$ 是同伦范畴中诱导出的交换可分代数。于是，定理 11.18 中的余等化子可以与 [Bal16，定理 3.6]中的余等化子相对应。另一方面，Balmer 定理成立时并不要求张量三角范畴具有底层模型。

11.20. 注记。可以考虑一种证明定理 11.18 的替代方法：从定理 11.17 出发，然后给出能保证谱余等化子与拓扑余等化子一致的条件：若 R 是由余等化子给出的 $\operatorname{Spc}(\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})^c)$ 上的等价关系，则推论 4.17 的假设均成立。Balmer [Bal16, 引理 3.8] 表明 $\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{P})) \subseteq R^{-1}(\{\mathcal{P}\})$，而 $\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{P})) \subseteq \operatorname{Spc}(\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})^c)$是一个 T_1-空间这一事实已在 [Bal16, 引理 3.10(a)] 中得到证明。因此，拓扑余等化子与谱余等化子同胚。

12. Descent for stratification

在本节中，我们将研究刚性紧生成 tt-范畴 $\mathcal{T}$，其紧对象的 Balmer 谱 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的（参见 [BHS23，定义 2。3]）。记号和术语将沿用 [BHS23、BCHS23a] 。在这些假设下， $\mathcal{T}$中的对象有一个定义良好的支撑概念，

$$\operatorname{Supp}(t) := \left\{ \mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c) \,\middle|\, g_{\mathcal{P}} \otimes t \neq 0 \right\} \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c),$$

它位于紧对象的 Balmer 谱中，并且是利用某些 $\otimes$-幂等对象 $g_{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}$定义的；参见 [BHS23，第 2]节。这个支撑概念可推广为一个映射

$$\operatorname{Supp}\colon \operatorname{Locid}(\mathcal{T}) \to \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)), \qquad \mathcal{L} \mapsto \operatorname{Supp}(\mathcal{L}) = \bigcup_{X \in \mathcal{L}} \operatorname{Supp}(X) \tag{12.1}$$

其中， $\mathcal{P}$ 表示（逆变的）幂集函子。该映射是一个分裂满射，其截面由以下给出。

$$\mathcal{L}_{(-)}\colon \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)) \to \operatorname{Locid}(\mathcal{T}), \qquad Y \mapsto \mathcal{L}_Y = \{t \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Supp}(t) \subseteq Y\};$$

参见 [BHS23，引理 3。4]。我们回顾以下结果。

12.2.**定理** ([BHS23, 定理 A])。 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-范畴，且其 $\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$ 是弱诺特的。则以下条件等价：

- 映射 (12.1) 是双射。
- 局部到整体原理对 $\mathcal{T}$ 成立；对于每个 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，局部化理想 $\operatorname{locid}\langle g_{\mathcal{P}} \rangle$ 都是 $\mathcal{T}$ 的极小局部化理想。

如果这些条件成立，我们就称 $\mathcal{T}$ 是分层的。

12.3. **注记**。 我们的目标是研究分层在多大程度上沿基变换函子下降。文献中已经研究过此类分层的“下降结果”，例如 [BCHS23a，§§15–17]，我们首先回顾该文中的一些结果。令 $F\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 表示刚性紧生成 tt-范畴之间的一个几何函子，并记

$$\varphi\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c)\to\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$$

对于 Balmer 谱上的诱导映射。回顾一下，F 有一个右伴随 U，而 U 又有一个右伴随 V。

12.4. **命题** ([BCHS23a])。 设 $F\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 是弱诺特谱的刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子。考虑以下条件：

(a) $\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\in\operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$;
(b) V 是保守的；***(c)*** F 是保守的；***(d)*** φ是满射的。

然后$(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)\Rightarrow(d)$。如果 $\mathcal{T}$ 是分层的，或者如果 $U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的，那么这四个条件彼此等价。

证明。蕴含关系 (*a*) ⇒(*b*) 由 BCHS23a 的注记 13.24]，得出。(*b*) ⇒ (*c*) 由 BCHS23a 的命题 13.21]，得出，而 (*c*) ⇒ (*d*) 由 BCHS23a 的推论 13.19] 得出。最后，若 $\mathcal{T}$ 是分层的，或者根据 BCHS23a 的推论 14.24] 和命题 13.33]，（分别），$U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})$ 是紧的，则 (*d*) ⇒ (*a*) 成立。□

12.5. **注记**。 若 $F\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 不是保守的，那么直观上，我们没有理由期待能够将分层从 $\mathcal{S}$ 下降到 $\mathcal{T}$。因此，若想有望得出 $\mathcal{T}$ 是分层的，直观上，我们预期 命题 12.4中的等价条件必须成立。从这个角度看，“可下降性”（或至少“弱可下降性”）是一个自然的假设。

12.6. **命题** ([BCHS23a])。 设 $F\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 是弱诺特谱的刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子。假设$\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\in\operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$。若 $\mathcal{S}$满足局部到整体原理，则 $\mathcal{T}$也满足该原理。

证明。 这是 [BCHS23a，命题 15。1]；另见 [BCHS23a，注记 15。4]。 □

12.7. **命题**。 设 $F\colon \mathcal{T}\to\mathcal{S}$ 是弱诺特谱的刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子。假设 $\mathcal{S}$ 是分层的。以下各项等价：

(a) $\mathcal{T}$ 是分层的，且 φ是满射的。*(*
b) $\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\in\operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$，并且对所有 $t\in\mathcal{T}$恒等式成立。 $\operatorname{Supp}(F(t))=\varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(t))$

证明。 $(a)\Rightarrow(b$：这由 命题 12.4 以及 [BCHS23a，推论 14 得出。19]。 $(b)\Rightarrow(a$：假设 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}}\in\operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}})\rangle$ 意味着，根据命题 12.4 是满射，并且根据 $\mathcal{T}$ 命题 12.6，局部到整体原理对其成立。

设 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$，并假设 $0 \neq t \in \operatorname{locid}\langle g_{\mathcal{P}} \rangle$。那么 $\operatorname{Supp}(t) = \{\mathcal{P}\}$，因此 $\operatorname{Supp}(F(t)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(t)) = \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) = \operatorname{Supp}(F(g_{\mathcal{P}}))$，这由假设以及[BCHS23a，注记 13.7]得出。由于 $\mathcal{S}$ 是分层的，这意味着 $F(g_{\mathcal{P}}) \in \operatorname{locid}\langle F(t) \rangle$，进而推出 $UF(g_{\mathcal{P}}) \in \operatorname{locid}\langle t \rangle$，依据是 [BCHS23a，(13.4)]。这就证明了 $g_{\mathcal{P}} \in \operatorname{locid}\langle t \rangle$，因为 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \rangle$ 蕴含 $g_{\mathcal{P}} \in \operatorname{locid}\langle UF(g_{\mathcal{P}}) \rangle$。□

12.8. **推论**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子，且这些范畴的谱是弱诺特的。假设 $\mathcal{S}$ 是分层的，且 $\mathbb{1}_{\mathcal{T}} \in \operatorname{locid}\langle U(\mathbb{1}_{\mathcal{S}}) \rangle$。以下条件等价：

(a) $\mathcal{T}$ *is stratified.*
(b) The identity $\operatorname{Supp}(F(t)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(t))$ *holds for all* $t \in \mathcal{T}$.

12.9. **注记**。 我们的目标是在 F 是沿可下降代数的基变换的情形下，为分层可下降提供第三个等价条件；参见定理 12.12 下文。我们需要先准备一些引理。

12.10. **引理**。 设 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ 是刚性紧生成 *tt*-范畴之间的几何函子，且这些范畴的谱是弱诺特的。假设 $\mathcal{S}$ 满足局部到整体原理。那么以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Locid}(\mathcal{T}) & \xrightarrow{F_*} & \operatorname{Locid}(\mathcal{S}) \\ {\scriptstyle \mathcal{L}_{(-)}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathcal{L}_{(-)}}\uparrow \\ \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)) & \xrightarrow{\mathcal{P}(\varphi)} & \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{S}^c)). \end{array}$$

证明。设 $Y \subseteq \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 是一个子集，使得 $\mathcal{P}(\varphi)(Y) = \varphi^{-1}(Y)$。沿顶部绕行，得到 $F_*(\mathcal{L}_Y) = \operatorname{locid}\langle F(t) \mid \operatorname{Supp}(t) \subseteq Y \rangle$；沿底部绕行，则得到 $\mathcal{L}_{\varphi^{-1}(Y)} = \{ s \in \mathcal{S} \mid \operatorname{Supp}(s) \subseteq \varphi^{-1}(Y) \}$。根据 [BCHS23a，注记 14.13]，前者包含于后者。反过来，正如 [BCHS23a，命题 15.1]，的证明中所解释的，$\mathcal{S}$ 满足局部到整体原理意味着

$$\operatorname{locid}\langle F(g_{\mathcal{P}}) \rangle = \operatorname{locid}\langle g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(\{\mathcal{P}\}) \rangle$$

对任意 $\mathcal{P} \in \operatorname{Spc}(\mathcal{T}^c)$。因此，如果 $s \in \mathcal{S}$ 满足 $\operatorname{Supp}(s) \subseteq \varphi^{-1}(Y)$，那么 $s \in \operatorname{locid}\langle s \otimes g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(Y) \rangle \subseteq \operatorname{locid}\langle g_{\mathcal{Q}} \mid \mathcal{Q} \in \varphi^{-1}(Y) \rangle = \operatorname{locid}\langle F(g_{\mathcal{P}}) \mid \mathcal{P} \in Y \rangle$。□

我们还需要下面这个简单的观察。

12.11. **引理**。 反变幂集函子 $\mathcal{P}\colon$ 集合$^{\mathrm{op}} \to$ 集合 保极限并能检测极限。

证明。首先，我们断言 $\mathcal{P}$ 是保守的。设 $f\colon X \to Y$ 是一个集合映射，并且 $\mathcal{P}(f)\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ 是双射。由于 $\mathcal{P}(f)(\emptyset) = \emptyset$ 且 $\mathcal{P}(f)$ 是单射，我们推出对所有 $y \in Y$，都有 $\mathcal{P}(f)(\{y\}) \neq \emptyset$。因此，$f$ 是满射。为证明单射性，假设存在 $x_0, x_1 \in X$，使得 $f(x_0) = f(x_1)$。那么 $\mathcal{P}(f)^{-1}(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} = \{f(x_1)\} = \mathcal{P}(f)^{-1}(\{x_1\})$，因此由 $\mathcal{P}(f)^{-1}$的单射性可得 $x_0 = x_1$。所以 f 是单射，因而是双射。我们还注意到，由于存在自然等价 $\mathcal{P}(-) \simeq \operatorname{Set}(-, \{0,1\})$，函子$\mathcal{P}$保所有极限。由于 $\mathcal{P}$ 是保守的，它也能检测极限。□

12.12.**定理**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴，且 $A \in \operatorname{CAlg}(\mathcal{C})$ 是可下降的。令 $F_A\colon \mathcal{C} \to$ 模$_A(\mathcal{C})$ 表示基变换函子。假设以下条件成立：

(i) $\mathcal{C}^c$ 和 模$_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c$ 的 *Balmer* 谱是弱诺特的。*(ii)* 模$_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 满足局部到整体原理。*(iii)* 模$_A(\mathcal{C})$ 满足极小性条件。

那么，模范畴$_A(\mathcal{C})$ 是分层的，且以下条件等价：

(a) $\mathcal{C}$ *is stratified.*
(b) *The identity* $\operatorname{Supp}(F_A(t)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(t))$ *holds for all* $t \in \mathcal{C}$.
(c) *The diagram induced by the base changed functors*

$$\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \rightrightarrows \operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \to \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c) \tag{12.13}$$

是集合的余等化子。

证明。沿着乘法映射 $m\colon A\otimes A\to A$ 进行标量扩张，得到一个函子 $M\colon \mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$。进而，这诱导出 Balmer 谱之间的一个映射 $\mathrm{Spc}(M_*)$，根据函子的函子性，该映射同时分裂 $\mathrm{Spc}(H_*)$ 和 $\mathrm{Spc}(G_*)$（采用记号 8.20 中的记号）。由此可知，$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c)$ 是弱诺特谱空间 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c)$ 的一个直缩，因此根据 BHS23，注记 2.6]，其自身也是弱诺特的。因此，定理中考虑的所有 Balmer 谱都是弱诺特的。

回顾可知，根据注记 8.22，$F_A(A) = A\otimes A$ 在模范畴 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 中是可下降的，并且根据推论 6.12，$\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$。将命题 12.6 应用于可下降代数 $A\otimes A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$，可知局部到整体原理对 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 成立，因为我们假设 $\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 满足局部到整体原理。因此，$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 是分层的，因为根据假设，$\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 满足极小性条件。随后，(a) 与 (b) 的等价性由推论 12.8 得出，尽管下文也将给出另一种证明。

现在，我们将引理 2.5 应用于图表

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Locid}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_*} & \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})) & \underset{H_*}{\overset{G_*}{\rightrightarrows}} & \operatorname{Locid}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})) \\
{\scriptstyle\mathcal{L}_{(-)}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle\operatorname{Supp}} & & {\scriptstyle\mathcal{L}_{(-)}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle\operatorname{Supp}} & & {\scriptstyle\mathcal{L}_{(-)}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle\operatorname{Supp}} \\
\mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)) & \xrightarrow{\mathcal{P}(\varphi)} & \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A^c)) & \underset{\mathcal{P}(\xi)}{\overset{\mathcal{P}(\psi)}{\rightrightarrows}} & \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}^c))
\end{array}$$

其中，各映射由标量扩张函子诱导。根据命题 8.23，条件（i）成立。如本节开头所述，条件（ii）成立。由于 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 是分层的，条件（iii）成立。最后，将引理 12.10 应用于两个水平叉形图，并利用 $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 都满足局部到整体原理，可得条件（iv）成立。考虑第四个陈述：

(d) 图表

$$\mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c)) \xrightarrow{\mathcal{P}(\varphi)} \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c)) \underset{\mathcal{P}(\xi)}{\overset{\mathcal{P}(\psi)}{\rightrightarrows}} \mathcal{P}(\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c))$$

是集合的等化子。

那么引理 2.5 告诉我们 (a)、(c) 和 (d) 等价。(c) 和 (d) 等价这一事实则由引理 12.11得出。□

12.14.**推论**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性紧生成 *tt*-∞-范畴，并设$A \in$交换代数$(\mathcal{C})$ 是可下降的。假设 模范畴$_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 的谱是诺特的，并且 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 满足极小性条件。那么 定理 *12.12* 中的三个条件 *(a)–(c)* 等价。此外，$\mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 是诺特的。

证明。 如证明开头所述，定理 12.12，模范畴$_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 是模范畴$_A(\mathcal{C})$ 中一个可下降代数的扩张。因此我们有满射

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c).$$

由于定义域空间是诺特的，另外两个空间也如此。最后回想一下，若谱是诺特的，则局部到整体原理成立（[BHS23，定理 3。22]），因此我们应用定理 12.12。□

12.15. **注记**。若可下降代数 $A \in$ 交换代数$(\mathcal{C})$ 是紧的，则图表（12.13）根据定理 11.17是谱空间的余等化子，但请注意，这并不一定意味着它是拓扑空间或集合的余等化子。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) & \rightrightarrows & \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c) \\ & & & \searrow & \uparrow{\scriptstyle p} \\ & & & & T^{\mathsf{Top}} \end{array} \tag{12.16}$$

它联系了谱余等化子 $\mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 和拓扑余等化子 T^{Top}。注意，映射 φ 根据 [BCHS23a，注记 13。26] 以及注 6.9是闭且满射的，且由此可知（注记 4.9）比较映射 p 也是闭且满射的。

12.17.**推论**。 在 定理 *12.12* 的情形下，假设可下降代数 $A \in$ 交换代数$(\mathcal{C})$ 是紧的，并且 φ: Spc(模范畴$_A(\mathcal{C})^c$) $\to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 具有离散纤维。那么 (12.13) 是拓扑空间的余等化子。

证明。 牢记 命题 7.8，分层可通过拟有限下降从模范畴$_A(\mathcal{C})$ 下降到 $\mathcal{C}$ [BCHS23a，定理 17。16]。因此，定理 12.12表明 (12.13) 是集合的余等化子。由此可知，比较映射 $p\colon T^{\mathsf{Top}} \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$ 从拓扑余等化子到谱余等化子的映射是连续双射，因此是同胚，因为它是闭映射（注记 12.15）。□

12.18. **例**。 假设我们处于定理 12.12 所述的情形，但进一步假设 A 是紧的、可分的，且具有有限 tt-次数。那么，根据定理 11.18，该定理中的条件 (c) 得以满足，因此我们可以下降分层。换言之，我们可以沿着满射紧可分离扩张下降分层（参见 命题 12.4）。这为沿有限 ´étale 扩张的下降结果提供了另一种视角；参见 [San 22] 和 [BHS23，第 6]节。

13. Faithful Galois extensions

在本节中，我们将证明分层可以沿忠实伽罗瓦扩张下降。我们首先研究一般大 tt-∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中有限群 G 的忠实 G-伽罗瓦扩张，然后将讨论具体化为交换环谱的忠实 G-伽罗瓦扩张。在后一种情况下，我们允许 G 为紧李群。

我们先讨论有限群的情形。

13.1. **定义**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个大 tt-∞-范畴， G 是一个有限群。考虑带有 G 作用 $A \in \mathsf{Fun}(BG, \mathsf{CAlg}(\mathcal{C}))$ 的交换代数对象。$\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 范畴继承了 G 的作用；对于任意 $M \in \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 和 $g \in G$，记 $g.M \in \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 为 M 在同构 $g\colon \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C}) \simeq \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 下的像。非正式地说， $g.M$ 的底层对象为 M，但其模结构由下式给出

$$A \otimes M \xrightarrow{g \otimes M} A \otimes M \to M.$$

G 在 A 上的作用诱导出格 G 上的作用，该作用定义在 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$ 的厚理想、局部化理想和 smashing 理想的格上。给定一个局部化理想 $\mathcal{L} \subseteq \mathsf{Mod}_A(\mathcal{C})$，我们有

$$g.\mathcal{L} = \mathrm{locid}\langle g.M \mid M \in \mathcal{L} \rangle$$

对于 thick 和 smashing 理想也类似。若对所有 $g \in G$ 都有 $g.\mathcal{L} = \mathcal{L}$，则称 $\mathcal{L}$ 是 G-不变的。我们记作

$$\mathrm{Locid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \quad \mathrm{Thickid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \quad \mathrm{Smashid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$$

分别对应 G-不变局部化、厚和 smashing 理想的偏序集。

13.2. **定义**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个大的 tt-∞-范畴，且设 G 是一个有限群。在 $\mathcal{C}$ 中的一个忠实 G-伽罗瓦扩张 是一个带有 G-作用$A \in \mathsf{Fun}(BG, \mathsf{CAlg}(\mathcal{C}))$ 的交换代数对象，并满足：

(a) 自然映射 $\mathbb{1} \to A^{hG}$ 是等价。 (b) 自然映射 $A \otimes A \to \prod_G A$ 是等价（非正式地由 $a \otimes a' \mapsto (g \mapsto a \cdot (ga'))$ 给出）。 (c) $A \otimes -\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是保守的。

13.3.**命题**。 设 A 是刚性紧生成 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的忠实 G-*Galois* 扩张。那么， A 在 $\mathcal{C}$ 中是紧且可下降的。

证明。 根据 [Mat16a，命题 6，14] 并且根据 [Mat16a，定理 3，具有可下降性。38]。 □

13.4.**命题**。 设 A 是刚性紧生成 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$中的忠实 G-伽罗瓦扩张。那么基变换诱导偏序集的同构

$$\mathrm{Locid}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Locid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$$
$$\mathrm{Thickid}(\mathcal{C}^c) \simeq \mathrm{Thickid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c)$$
$$\mathrm{Smashid}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Smashid}^G(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})).$$

如果望远镜猜想对 模范畴$_A(\mathcal{C})$成立，那么它对 $\mathcal{C}$ 也成立。

证明。 这是我们的下降结果以及任何忠实G-Galois 扩张都是可下降且紧的这一事实的推论。下面我们展开说明理想局部化的论证。由于 A 是 Galois 的，我们有自然的恒等 $A \otimes A \simeq \prod_G A$。展开定义后可见，两个典范映射 $\mathsf{Mod}_A(\mathcal{C}) \rightrightarrows \mathsf{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})$ 对应于

$$\phi_0, \phi_1 \colon \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) \rightrightarrows \mathrm{Mod}_{\prod_G A}(\mathcal{C})$$

给定为

$$\phi_0(M) = \prod_G M \quad \text{and} \quad \phi_1(M) = \prod_{g \in G} g.M. \tag{13.5}$$

因此我们有一个等化子

$$\mathrm{Locid}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})) \rightrightarrows \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_{\prod_G A}(\mathcal{C}))$$

由映射 ϕ_0 和 ϕ_1 以及通常的基变换函子所诱导。这意味着，$\mathcal{L} \in \mathrm{Locid}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))$ 属于 $\mathrm{Locid}(\mathcal{C})$，当且仅当

$$\mathrm{locid}\langle \phi_0(M) \mid M \in \mathcal{L}\rangle = \mathrm{locid}\langle \phi_1(M) \mid M \in \mathcal{L}\rangle.$$

这显然等价于 $\mathcal{L} = \mathrm{locid}\langle g.M \mid g \in G\ M \in \mathcal{L}\rangle$，也就是说，等价于 $\mathcal{L}$ 是G-不变的。类似的证明也可得出关于厚理想和 smashing 理想的结论。关于望远镜猜想的最后一个结论由 定理 10.8 得出。□

13.6.**命题**。设 A 是一个忠实的 G-伽罗瓦扩张，且属于刚性紧生成 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$。由基变换诱导的图表

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \to \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$$

是拓扑空间范畴中的余等化子。此外，存在一个典范同胚 $\mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c) \cong \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c)/G$。

证明。这可以从 Pauwels 关于拟伽罗瓦理论的工作中推导出来；参见 [Pau17，定理 9。1]。这里我们给出一个使用点集拓扑的不同证明。在 $A \otimes A \simeq \prod_G A$的识别下，我们可以将上述叉形图重写为

$$\coprod_G \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \underset{\mathrm{Spc}(\phi_0)}{\overset{\mathrm{Spc}(\phi_1)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c)$$

其中 ϕ_0 和 ϕ_1 与（13.5）中的定义相同。根据 定理 11.17，该叉形图在谱空间范畴中是一个余等化子图表。我们注意到，在拓扑空间范畴中，余等化子由 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c)/G$给出。因此，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_G \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) & \underset{\mathrm{Spc}(\phi_0)}{\overset{\mathrm{Spc}(\phi_1)}{\rightrightarrows}} & \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spc}(\mathcal{C}^c) \\ & & & \searrow^{\varphi_{\mathrm{top}}} & \uparrow p \\ & & & & \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}))/G. \end{array}$$

由 命题 4.10 可知，比较映射 p 是一个同胚，前提是 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A(\mathcal{C})^c)/G$ 是一个谱空间，且映射 φ_{top} 是谱的。这由 [Far，例 1.7 得出。2] (另见 [Sch17a，引理 2。10])。□

13.7.**定理**。设 A 是刚性紧生成 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$中的忠实 G-伽罗瓦扩张。假设模范畴$_A(\mathcal{C})$ 是分层的，且其 *Balmer* 谱是诺特的。那么 $\mathcal{C}$ 也具有分层结构，其诺特 *Balmer* 谱由Spc(模范畴$_A(\mathcal{C})^c)/G$给出。

证明。根据假设，推论 12.14 的条件均已满足（注意，Spc(模范畴$_{A\otimes A}(\mathcal{C})^c) \simeq \coprod_G \mathrm{Spc}$(模范畴$_A(\mathcal{C})^c$) 是诺特的）。于是，命题 13.6表明，*c*) 定理 12.12 中的条件成立，这等价于 $\mathcal{C}$ 是分层的。□

事实上，我们可以沿着忠实的伽罗瓦扩张下降更强的分层概念。

13.8. **定义**。 我们称刚性紧生成 tt-∞-范畴是上同调分层的，如果 $\mathcal{C}$ 是分层的，并且 Balmer 比较映射 [Bal10，定义 5。1] $\rho\colon \operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c) \to \operatorname{Spec}^h(\pi_* \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1}))$ 是一个同胚。

13.9. **注记**。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个诺特的 tt-范畴，按照 [BCH+23，定义 2。9]那么 $\mathcal{C}$ 是上同调分层的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 按分次环 End 的作用进行分层$^*_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$，其含义见 Benson、Iyengar 和 Krause [BIK11]；参见 [BCH+23，注记 2。20]以及 [Zou23]。因此我们总能得到以下蕴含关系：

$$\text{BIK-stratified} \overset{+\text{Noether.}}{\Longleftrightarrow} \text{cohomologically stratified} \Longrightarrow \text{stratified.}$$

13.10.**命题**。 设 A 是一个忠实的 G-伽罗瓦扩张，且处于刚性紧生成的 *tt*-∞-范畴 $\mathcal{C}$中。假设 模范畴$_A(\mathcal{C})$ 是上同调分层的。那么 $\mathcal{C}$也是如此。

证明。 对于任意 $X \in \mathcal{C}$，令 $\pi_* X := \pi_* \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, X)$。存在一个下降谱序列，其 E_2项为 $H^*(G; \pi_*(A))$，并收敛到 $\pi_*(\mathbb{1})$。由 [Mat16a，推论 4，4]下降谱序列在有限阶段处退化，并具有一条水平消失线。

为证明 $\mathcal{C}$ 是上同调分层的，考虑下降谱序列的边缘同态α： $\pi_*(\mathbb{1}) \to \pi_*(A)^G$，其核是一个幂零理想 [Mat16a，定理 4.5]。由于下降谱序列中正滤过的每个元素都是 $|G|$-挠元，我们可推得，对于每个 $y \in \pi_*(A)^G$，都存在 $k > 0$ 使得 y^k 属于 α 的像（参见 [Mat15a，引理 4.9]）。换言之，映射 α 是一个 $\mathcal{N}$-同构，因此在 Zariski 谱上诱导出一个同胚α^*: $\operatorname{Spec}^h((\pi_*(A)^G)) \cong \operatorname{Spec}^h(\pi_*(A))/G \to \operatorname{Spec}^h(\pi_*(\mathbb{1}))$；例如，这可由 [MNN19，命题 3.24]的分次版本得到。

根据 Balmer 比较映射的自然性，我们得到图 1中所示的交换图。这里我们用到了同胚 $\operatorname{Spc}(\operatorname{Mod}_A(\mathcal{C})^c) \to$

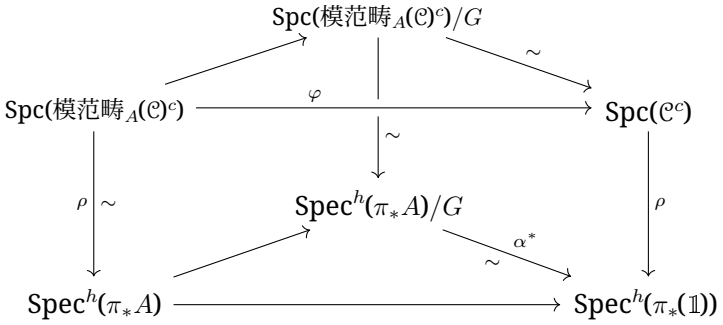


FIGURE 1. 比较映射的相容性

$\operatorname{Spec}^h(\pi_*(A))$ 与 G-作用相容，这同样可由比较映射的自然性推出。该图表表明， ρ: $\operatorname{Spc}(\mathcal{C}^c) \to \operatorname{Spec}^h(\pi_*(\mathbb{1}))$ 是一个同胚，正如所需。□

13.11. 例。设 G 是一个有限群， KU_G 和 KO_G 分别表示等变 K理论的复形式和实形式，而 $\mathrm{Mod}_{KU_G}(\mathrm{Sp}_G)$ 和 $\mathrm{Mod}_{KO_G}(\mathrm{Sp}_G)$ 表示 G-谱范畴 Sp_G 中相应的模范畴。等变复化映射 $KO_G \to KU_G$ 是 Sp_G 中一个忠实的 C_2-伽罗瓦扩张，参见 [MNN17，定理 9.17]。 [BCH+23 的定理 8.12] 证明，$\mathrm{Mod}_{KU_G}(\mathrm{Sp}_G)$ 是分层的，其诺特 Balmer 谱为 $\mathrm{Spec}(\mathrm{RU}(G))$，即 G的复表示环的 Zariski 谱。于是定理 13.7 适用，并表明 $\mathrm{Mod}_{KO_G}(\mathrm{Sp}_G)$ 也是分层的，其 Balmer 谱为 $\mathrm{Spec}(\mathrm{RU}(G))/C_2 \cong \mathrm{Spec}(\mathrm{RU}(G)^{C_2})$。注意

$$\rho\colon \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{KU_G}(\mathrm{Sp}_G)^c) \to \mathrm{Spec}^h(\pi_*^G(KU_G)) \cong \mathrm{Spec}^h(RU(G)[\beta^{\pm 1}])$$

在此情形下是一个同胚 [BCH+23，注记 2.6 和引理 8。11], 因此，上同调分层的下降意味着

$$\rho\colon \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{KO_G}(\mathrm{Sp}_G)^c) \to \mathrm{Spec}^h(\pi_*^G(KO_G))$$

也是一个同胚。

13.12. **例**。 令 E_n 为 Morava E-理论，令 $\mathbb{G}_n$ 为 Morava 稳定子群。对于任意有限子群 $G \subseteq \mathbb{G}_n$，我们有一个忠实的 G-伽罗瓦扩张 $E_n^{hG} \to E_n$，由 [HMS17，命题 3。6]。由于 Mod_{E_n} 由 [DS16，定理 11], 进行上同调分层，因此 $\mathrm{Mod}_{E_n^{hG}}$也如此。

13.13. **注记**。 在上一节中，我们在一般的大 tt- G-范畴中讨论了忠实的 ∞-伽罗瓦扩张。现在，我们根据 GRog [专门讨论交换环谱的忠实08]-伽罗瓦扩张。

13.14. **定义**。 设 G 是一个同伦型为有限 CW 复形的拓扑群（例如，紧李群），并设 $B \in \mathrm{Fun}(BG,$交换代数$_A)$。那么，如果满足以下条件， $A \to B$ 就是一个忠实 G-伽罗瓦扩张：

(a) 典范映射 $A \to B^{hG}$ 是一个等价；(b) 典范映射 h: $B \otimes_A B \to \mathrm{Hom}(G_+, B)$ 与

$$B \otimes_A B \otimes G_+ \xrightarrow{B\otimes \mathrm{act}} B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B$$

相伴，是一个等价；(c) $B \otimes_A -$: 模范畴 $_A \to$ 模范畴$_A$ 是保守的。

13.15. **注记**。 设 $A \to B$ 是一个忠实的 G-伽罗瓦交换环谱扩张。与命题 13.3 中相同的论证表明， $A \to B$ 是有限且可下降的。

13.16. **记号**。 设 G 是一个紧李群。记 G_e 为 G的恒等分支；它是一个正规子群，其商为 $G/G_e = \pi_0 G$。注意， $\pi_0 G$ 是一个有限群。

13.17. **引理**。 正规子群 $G_e \subseteq G$ 按照 [Rog08，定义 7.2 的意义上是可容许的。1]。

证明。 我们需要验证三个条件：

(a) 塌缩映射 $G \times_{G_e} EG_e \to G/G_e$ 在悬挂谱上诱导出稳定等价；(b) 投影映射 $G \to G/G_e$ 存在一个同伦意义下的截面；

(c) G_e 是稳定可对偶的。

对于 (a)，只需注意到 G 分解为 G_e 的轨道的不交并，因此即使在取谱之前，塌缩映射也是等价。要构造 (b) 中的截面，只需在 G的每个连通分支中选取一个点。所得映射 $\pi_0 G \to G$ 在同伦意义下分裂了投影。最后，条件 (c) 由 [Rog08，例 3.4 得出。2]。□

13.18. **引理.** 假设 $f\colon A \to B$ 是交换环谱的忠实 G-伽罗瓦扩张。那么 f 是忠实伽罗瓦扩张的复合。

$$A \xrightarrow{\pi_0 G} B^{hG_e} \xrightarrow{G_e} B$$

其中箭头的标签表示相应的伽罗瓦群。

证明。这由 Rognes 的正向伽罗瓦对应 [Rog08，定理 7.2。3] 应用于 $K = G_e$，根据引理13.17，它是 G 的一个允许的正规子群。□

13.19. **命题**。设 H 是一个连通的紧李群。若 $f\colon A \to B$是交换环谱的忠实 H-伽罗瓦扩张，则沿 f的诱导会给出一个同胚

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A^c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c).$$

证明。回顾 注记 13.15 ， $f\colon A \to B$ 是有限且可下降的。因此，由 定理 11.17，我们得到一个谱空间的余等化子图表

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \longrightarrow \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A^c)$$

其中两条平行箭头由 $B \rightrightarrows B \otimes_A B$ 给出的两个映射诱导，它们分别由左单位和右单位给出，直观地说，分别将 b 映到 $b \otimes 1$ 和 $1 \otimes b$。这些映射被乘法映射 $B \otimes_A B \to B$分裂，因此我们得到一个诱导的单射 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c)$，它分裂了 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$。现在我们断言，$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c)$是一个满射。这是因为乘法映射可以识别为映射

$$B \otimes_A B \simeq \mathrm{Hom}(H_+, B) \to B$$

由 $\{e\} \to H$ 诱导。由于在同伦意义下， H 是一个连通有限 CW 复形，因此根据 [Mat16a, 命题 3.36]，此映射是可下降的。结合 [Mat16a, 命题 3.27] 与 [Bal18, 定理 1.3]，，我们得出 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c)$ 是满射。由此可知，$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \to \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c)$ 是双射，而两个映射 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$ 与其互为逆映射。特别地，这两个平行箭头在集合范畴中相等。因此，$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$ 的拓扑余等化子可识别为 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$，它是一个谱空间。由命题 4.10 可知，谱余等化子与拓扑余等化子必定相等，从而得到等价 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A^c) \cong \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$。□

13.20. **注记**。前一个命题的论证表明，图表

$$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_{B\otimes_A B}^c) \rightrightarrows \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c) \longrightarrow \mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_A^c)$$

是拓扑空间中的余等化子。

13.21. **推论**。 设 H 是一个连通的紧李群，且 $A \to B$是交换环谱的一个忠实 H-伽罗瓦扩张。如果模范畴$_B$ 是分层的，且 $\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$ 是诺特的，那么模范畴$_A$也是如此。

证明。 结合 推论 12.14与注记 13.20。 □

13.22. **定理**。 设 $A \to B$ 是一个交换环谱的忠实 G-伽罗瓦扩张，其中 G 是一个紧李群。若模范畴$_B$ 是分层的，且$\mathrm{Spc}(\mathrm{Mod}_B^c)$是诺特的，那么模范畴$_A$也是如此。

证明。 根据 引理 13.18，我们可以将问题分解为有限群和连通群的忠实伽罗瓦下降。因此，结果由 定理 13.7和推论 13.21得出。 □

References

[Aok23] Ko Aoki, *The sheaves-spectrum adjunction*, arXiv 电子印本（2023年2月），arXiv:2302.04069，可见于 2302.04069。[Bal05] Paul Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, 《J. Reine Angew. Math.》588（2005），149–168。MR2196732[Bal07] , *Supports and filtrations in algebraic geometry and modular representation theory* **129** 2007 5, 1227 1250 2354319 , 《Amer. J. Math.》（），第 – 期。MR[Bal10] , *Spectra spectra spectra—tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings* **10** 2010 3, 1521 1563 , , , 《Algebr. Geom. Topol.》（），第 – 期。MR 2661535 [11] *Separability and triangulated categories* **226** 2011 5, 4352 Bal, , , 《Adv. Math.》（），第 – 4372 期。MR2770453[Bal16] , *Separable extensions in tensor-triangular geometry and generalized Quillenstratification*, 《Ann. Sci. Éc. Norm. Sup ér.》（第4辑）49（2016），第4期，907–925。MR3552016[Bal18] , *On the surjectivity of the map of spectra associated to a tensor-triangulated functor* **50** 2018 3, 487 495 3829735 , 《Bull. Lond. Math. Soc.》（），第 – 期。MR[BCHS23a] Tobias Barthel、Natalia Castellana、Drew Heard 和 Beren Sanders, , 。arXiv: 。可见于 ` *Cosupport in tensor triangular geometry* 2023 2303 13480, 。[BCHS23b] , *On surjectivity in tensor triangular geometry*, 2023年。准备中。[BCH+23] Tobias Barthel、Natalia Castellana、Drew Heard、Niko Naumann 和 Luca Pol, 。arXiv: 。可见于https://arxiv.org/pdf/2301.02212.pdf。[BD74] Raymond Balbes 和 Philip Dwinger, *Distributive lattices*，密苏里大学出版社，密苏里州哥伦比亚，1974年。MR0373985[BDS15] Paul Balmer、Ivo Dell'Ambrogio 和 Beren Sanders, *Restriction to finite-index subgroups as étale extensions in topology KK-theory and geometry* , 《Algebr. Geom. Topol.》 **15** 2015 5, 3025 3047 3426702 （），第 – 期。MR BDS , [16] *Grothendieck–Neeman duality and the Wirthmüller isomorphism*, 《Compos. Math.》152（2016），第8期，1740–1776。MR3542492[BF11] Paul Balmer 和 Giordano Favi, *Generalized tensor idempotents and the telescope conjecture* 3 **102** 2011 6, 1161 1185 2806103 , 《Proc. Lond. Math. Soc.》（） （），第 – 期。MR[BHN22] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Niko Naumann, *On conjectures of Hovey–Strickland and Chai* **28** 2022 4405748 , 《Selecta Math.》（新系列）（），第3期，论文编号56，31页。MR[BHS23] Tobias Barthel、Drew Heard 和 Beren Sanders, *Stratification in tensor triangular geometry with applications to spectral Mackey functors* 2023 59 , 。预印本，页数。即将发表于 *Cambridge Journal of Mathematics*。[BIK11] Dave Benson、Srikanth B. Iyengar 和 Henning Krause, *Stratifying triangulated categories* **4** 2011 3, 641 666 2832572 , 《J. Topol.》（），第 – 期。MR[Bir67] Garrett Birkhoff, *Lattice theory*，第三版，美国数学会学术丛书，第XXV卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1967年。MR0227053

[BKS20] Paul Balmer、Henning Krause 和 Greg Stevenson, *The frame of smashing tensor-ideals*, **168**, 2020, 343–4064108, 《剑桥哲学学会数学论文集》（），第 2 期，323–。MR[BˇS17a] Silvana Bazzoni 和 Jan ˇSˇtov´ ıˇcek，，《数学进展》（），– *Smashing localizations of rings of weak global dimension at most one*, **305**, 2017, 351–401, 3570139。MR[BS17b] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze, *Projectivity of the Witt vector affine Grassmannian*, 《数学发明》（Invent. Math.）209（2017），第 2 期，329–423。MR3674218[DS16] Ivo Dell'Ambrogio 和 Donald Stanley, *Affine weakly regular tensor triangulated categories*, **285**, 2016, 1, 93–109, 3554244, 《太平洋数学杂志》（），第 – 期。MR[DS18] Ivo Dell'Ambrogio 和 Beren Sanders, *A note on triangulated monads and categories of module spectra*, **356**, 2018, 8, 839–842, 3851535, 《巴黎科学院数学报告》（），第 – 期。MR[DST19] Max Dickmann、Niels Schwartz 和 Marcus Tressl, *Spectral spaces*, 《新数学专著》，第 35, 2019, 3929704 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。MR Far L. Fargues，。可从作者的个人网页 https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/smfDiamants.pdf 获取。[FHM03] H. Fausk、P. Hu 和 J. P. May, *Isomorphisms between left and right adjoints*, 《范畴论及其应用》（Theory Appl. Categ.）**11**, 2003, 4, 107–131, 1988072（），第 – 期。MR Gre J. P. C. Greenlees, [19] *The Balmer spectrum of rational equivariant cohomology theories*, 《纯粹与应用代数杂志》（J. Pure Appl. Algebra）223（2019），第 7 期，2845–2871。MR3912951[HMS17] Drew Heard、Akhil Mathew 和 Vesna Stojanoska, *K-theory spectra at height p − 1*, **153**, 2017, 9, 1820–1854, 《组合数学》（Compos. Math.）（），第 – 期。MR3705278[Hoc69] M. Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, 《美国数学会汇刊》（Trans. Amer. Math. Soc.）142（1969），43–60。MR251026[HP22] Lars Hesselholt 和 Piotr Pstragowski, *Dirac geometry I: Commutative algebra*, arXiv 电子预印本（2022 年 7 月），arXiv:2207.09256，可从 2207.09256 获取。[HPS97] Mark Hovey、John H. Palmieri 和 Neil P. Strickland, *Axiomatic stable homotopy theory*, **128**, 1997, 610, +114, 《美国数学会回忆录》（Mem. Amer. Math. Soc.）（），第 x 期。MR 1388895 [86] *Stone spaces*, Joh Peter T. Johnstone，，《剑桥高等数学研究》，第 3 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1986, 1982, 861951。该书为该版本的重印本。MR Kel Bernhard Keller，，《数学手稿》（Manuscripta Math.）84（1994），第 2 期，193–198。[KP17] Joachim Kock 和 Wolfgang Pitsch, *Hochster duality in derived categories and point-free reconstruction of schemes*, **369**, 2017, 1, 223–261, 《美国数学会汇刊》（Trans. Amer. Math. Soc.）（），第 – 期。MR3557773[Kra00] Henning Krause, *Smashing subcategories and the telescope conjecture – an algebraic approach*, **139**, 2000, 1, 99–133, 1728877, 《数学发明》（Invent. Math.）（），第 – 期。MR[Kra10]，*Localization theory for triangulated categories*, 《三角范畴》，2010 年，第 161–235 页。MR2681709[LMSM86] L. G. Lewis Jr.、J. P. May、M. Steinberger 和 J. E. McClure, *Equivariant stable homotopy theory*, 1213, 《数学讲义》，第 卷，Springer-Verlag，柏林，1986 年。J. E. McClure 对本书亦有贡献。MR866482[Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, 《数学年鉴研究》，第 170 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009, 2522659。MR Lur J. Lurie，，。可从作者的个人网页 http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf 获取。[Mat15a] Akhil Mathew, *A thick subcategory theorem for modules over certain ring spectra*, 《几何与拓扑》（Geom. Topol.）19（2015），第 4 期，2359–2392。MR3375530[Mat15b]，*Torus actions on stable module categories Picard groups and localizing subcategories*, 2015，，，。[Mat16a]，*The Galois group of a stable homotopy theory*, 《数学进展》（Adv. Math.）291（2016），403–541。MR3459022[Mat16b]，*The homology of tmf*, 《同调、同伦与应用》（Homology Homotopy Appl.）18（2016），第 2 期，1–29。MR3515195[Mat18]，*Examples of descent up to nilpotence*, 《有限群表示论的几何与拓扑方面》，2018 年，第 269–311 页。MR3901164[ML98] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 第二版，《数学研究生教材》，第 5 卷，Springer-Verlag，纽约，1998 年。MR1712872

[MNN17] Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel, *Nilpotence and descent in equivariant stable homotopy theory* **305** 2017 994 1084 , 《Adv. Math.》（），–。3570153 MR[19] *Derived induction and restriction theory* **23** MNN, , 《Geom. Topol.》（2019 2, 541 636 3939042），第 – 期。MR[Nee92] Amnon Neeman, *The connection between the K-theory localization theorem of Thoma-son, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, 《Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.》（4）25（1992），第5期，547–566。MR1191736（93k:18015）[Nee96] *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability* **9** 1996 1, 205 236 , 《J. Amer. Math. Soc.》（），第 – 期。[Pau17] Bregje Pauwels, *Quasi-Galois theory in symmetric monoidal categories*, 《Algebra Number Theory》 **11** 2017 8, 1891 1920 3720934 （），第 – 期。[08] MR Rog John Rognes, *Galois extensions of structured ring spectra. Stably dualizable groups*, 《Mem. A mer. Math. Soc.》192（2008），第898期，viii+137。MR2387923[San22] Beren Sanders, *A characterization of finite étale morphisms in tensor triangulargeometry*, ´《Epijournal G´eom. Alg´ebrique》6（2022），第18篇，25页。MR4526266[Sch17a] Peter Scholze, *Etale cohomology of diamonds*, arXiv 电子预印本（2017年9月），arXiv:1709.07343，可于1709.07343获取。[Sch17b] Niels Schwartz, *Spectral reflections of topological spaces*, 《Appl. Categ. Structures》25（ 2017 6, 1159 1185 3720406 ），第 – 期。MR Sto M. H. Stone, [37] *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》41（1937），第3期，375–481。MR1501905[Zou23] Changhan Zou, *Support theories for non-Noetherian tensor triangulated categories*, 2023年。准备中。

Tobias Barthel, Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn,Germany

Email address: tbarthel@mpim-bonn.mpg.de

URL: https://sites.google.com/view/tobiasbarthel/home

Natàlia Castellana, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain

Email address: natalia@mat.uab.cat

URL: http://mat.uab.cat/∼natalia

Drew Heard, Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim

Email address: drew.k.heard@ntnu.no

URL: https://folk.ntnu.no/drewkh/

Niko Naumann, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg,Germany

Email address: niko.naumann@mathematik.uni-regensburg.de

URL: https://homepages.uni-regensburg.de/˜nan25776/

Luca Pol, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Ger-many

Email address: luca.pol@ur.de*URL*: https://sites.google.com/view/lucapol/

Beren Sanders, Mathematics Department, UC Santa Cruz, 95064 CA, USA

Email address: beren@ucsc.edu*URL*: http://people.ucsc.edu/∼beren/