arXiv:2305.02351v1 [cond-mat.dis-nn] 3 May 2023

短程无关联无序模型中迁移率边缘的缺失：局域态与延展态共存

Adway KumarDas[1]* 和 Anandamohan Ghosh[1]†
[1] Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur, 741246 India

IvanM. Khaymovich[2], 3‡ [2] Nordita, Stockholm University and KTH Royal Institute of Technology Hannes Alfvéns väg 12, SE-106 91 Stockholm, Sweden and [3] Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, 603950 Nizhny Novgorod, GSP-105, Russia（日期：2023年5月5日）

与广为人知的莫特论证不同，莫特论证认为，在一般随机势中，延展态和局域态不应在同一能量下共存。我们给出了一个最近邻紧束缚无序模型的实例，该模型同时具有局域态和延展态，且不形成迁移率边（ME）。出乎意料的是，这一实例似乎由一个研究充分的 β系综给出，其中随机对角势和非均匀动能跃迁项彼此独立地分布。为了解析处理这一问题，我们将上述模型局部映射到具有依赖矩阵尺寸和位置的跃迁的一维安德森模型，并证实局域态和延展态共存；由于上述态在空间上彼此分离，这种共存对势能项和动能项的扰动都具有鲁棒性。此外，该映射表明延展态是非遍历的，并使我们能够解析估算其分形维数。

关键词： β-系综、非遍历延展态、局域化

迁移率边（ME） [1]，将无序系统中的局域态与延展态分隔开来，数十年来一直得到确立和研究。人们已知，迁移率边存在于各种半导体、非晶介质，甚至无序液态金属中；它已成为安德森 [2]以及多体 [3]局域化转变的标志。人们普遍认为，在任何具有随机无关联矩阵元的短程模型中，略低于局域化转变时，迁移率边会在能谱中将局域态与延展态分隔开来。因此，对于同一系统参数，具有不同局域化性质的本征态不可能在相同能量处共存。Nevill F. Mott 提出的论据 [1]，十分直接：如果延展态和局域态在相同能量处共存，那么对无序势的任何扰动都会立即使它们发生杂化，从而使二者都变为延展态。在这封短文中，我们给出一个一维（1D）短程无序模型的实例，其中在任意一次实现中，给定能量处都可能出现延展态或局域态。因此，无序平均会阻止迁移率边的形成。在这项工作中，我们确定了要观察到这种共存必须满足的条件。

首先，系统应避免能级简并或吸引，即应具有某种（残余的）能级排斥。事实上，能级中对应于局域态和延展态的任何共振都应受到抑制，以便在不.....的情况下观察到它们的共存。

* akd19rs062@iiserkol.ac.in
† anandamohan@iiserkol.ac.in
‡ ivan.khaymovich@gmail.com

杂化。在短程非关联模型中，可调控能级排斥的自然系综是所谓的 β系综，由实对称三对角矩阵表示，其随机元素相互独立 [4]。这类系综由 Dyson 指数 β 参数化，其本征值联合概率分布与著名的高斯随机矩阵系综相同 [5]，，但对于任意实数 β 以及 $\beta = 1$、2、4。极限 $\beta \to 0$会产生如可积系统中所观察到的非关联本征值 [6]，，而 $\beta \geq 1$ 则会产生如混沌系统中的关联谱 [7]。

其次，为了抑制局域态与延展态之间的重叠，后者应当是非遍历的，其支撑集小于整个希尔伯特空间。众所周知，无序可能会破坏某些量子系统中的遍历性，而这些系统仍然是非可积的，因此处于离域状态 [8–14]。这种非遍历扩展（NEE）相与本征态涨落的非平凡标度关系相关 [15]，可通过各种随机矩阵模型 [16–26]，层级图 [27]，以及多体无序系统 [3, 12, 28]加以描述。令人颇感意外的是，最近的研究表明，上述 β-系综在较宽的参数范围内也存在 NEE 相 [29]。

最后，同样重要的是，NEE 态应当与局域态在空间上彼此分离。 β-系综 [4]引入了非均匀性，其中跃迁矩阵元的分布 y_n显著依赖于晶格坐标 n，见图 1(a) 和式（2）。因此，β-系综的本征态在空间上彼此分离。

在这篇论文中，我们表明，通过满足以下

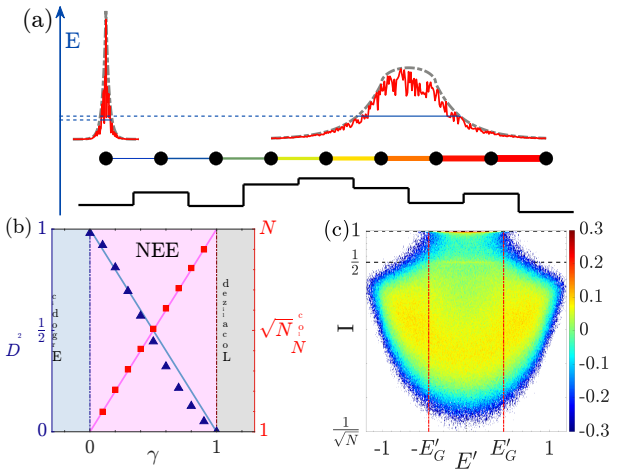

图1。（a） β系综示意图，由方程（1）中的一维晶格给出。跃迁沿晶格方向逐渐增强（由连线的粗细和颜色表示），从而产生局域态（左侧）和延展态（右侧）；它们在相同能量下共存，但分布在系统中不同的空间区域。（b） β系综的相图，包含三个不同的相，以及非遍历扩展相中的典型分形维数 $D_2^{\mathrm{typ}} \approx 1-\gamma$和强局域态的数量 $N_{\mathrm{loc}} \sim N^{\gamma}$， $|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$。（c）逆参与率 I 与能量 (的联合密度 P E') I， $E' = E/\epsilon_\beta$按带宽ϵ_β重新缩放，适用于 $\gamma = 0.7$。色条表示联合密度的对数$_N$ 值，$(-E'_{\mathrm{G}},\ E'_{\mathrm{G}})$ 是共存态的重缩放能带。数值结果对应于 $N = 8192$ 和128次实现。

三个关键要素， β-系综为实现局域态与延展本征态共存提供了理想平台。我们通过数值计算确认，$\mathcal{O}(\beta^{-1})$ 局域态与延展态在谱带中部共存，且不会形成迁移率边。此外，β-系综的非遍历扩展相表现出反常的谱统计：相邻本征值仍不相关，而相隔 $\Delta E > (N\beta)^{-\frac{1}{2}}$的两个远距离本征值则可能相关。这里及下文中， N 表示系统尺寸。这一特征与典型的 Rosenzweig-Porter系综（ -RPE）中观察到的非遍历延展态 [16, 19, 30]截然不同。后一特征揭示了迁移率边缺失的起因，并可通过 β-系综与具有 N依赖跃迁强度的一维安德森模型在局部上的等价性加以解析解释。这种等价性表明， β-系综可分解为近乎独立的块，其中局域本征态与（非遍历）延展本征态似乎分别位于空间上相互分离的块中，却具有几乎相同的谱能量。

β-系综由矩阵 H 组成，其非零元素如下 [4]。

$$H_{n,n} = x_n, \quad H_{n,n+1} = H_{n+1,n} = y_n$$
$$x_n \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \sqrt{2}y_n \sim \chi_{n\beta} \tag{1}$$

其中， $\mathcal{N}(0,\ 1)$ 是正态分布， χ_k是自由度为 k 的卡方分布。H 表示具有开放边界的一维晶格，粒子可在无序格点势的作用下随机跃迁至最近邻，见图 1(a)。格点势的相对强度 $\{x_n\}$和跃迁振幅 $\{y_n\}$使得将 β 重新参数化为 $\beta = N^{-\gamma}$十分方便，由此得到跃迁振幅的典型行为，见附录 A

$$y_n^{\mathrm{typ}} \sim \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{N^\gamma}{n}\right), & n < N^\gamma \\ \sqrt{\dfrac{n}{N^\gamma}}, & n > N^\gamma \end{cases}. \tag{2}$$

因此，平均而言， y_n 在晶格上逐渐增大，使系统呈现高度非均匀性。由于这种非均匀性， β系综存在三个不同的相：遍历相（$\gamma \le 0$）、非遍历延展相（$0 < \gamma < 1$）和局域相（$\gamma \ge 1$），它们由二级相变分隔 [29]。在局域相中，由于热力学极限下本征态局域于有限支撑范围内，所有能级彼此不相关且服从泊松分布（$N \to \infty$），见图1(a)中的左侧状态。相反，在遍历相中，无论彼此距离多远，所有能量都相互关联，且体态本征态延展于整个希尔伯特空间。 β系综中不同相的存在源于其非均匀的跃迁项；否则，在具有不相关短程跃迁的一般一维系统中不会出现相变 [32, 33]。

非遍历扩展相中的希尔伯特空间结构，可以通过逆参与比（IPR）随系统尺寸的标度关系来理解：能量为 E_j、具有第 n 个分量 $\Psi_j(n)$ 的本征态，其逆参与比为 $\mathrm{I}_j = \sum_{n=1}^{N} |\Psi_j(n)|^4$ 。观察发现， $\langle \log \mathrm{I}_j \rangle \simeq -D_2^{\mathrm{typ}} \log N$，其中 $D_2^{\mathrm{typ}} \approx 1-\gamma$ 是表征本征态支撑集的典型分形维数，见图1(b)。因此，在非遍历扩展相中，大多数本征态占据希尔伯特空间中数量广延但比例趋于零的部分。然而，逆参与比密度在 $\mathrm{I} = 1$ 附近出现峰值，表明存在强局域态 $|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$，同时还存在有限比例的延展态，其 $\mathrm{I} \ll 1$，见附录B。我们取一个较小的容差值 $\delta\mathrm{I} \ll 1$，并将满足 $\mathrm{I} > 1-\delta\mathrm{I}$ 的态识别为 $|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$ 。图1(b)显示，与有限比例的非遍历延展态共存的强局域态的系综平均数为 $N_{\mathrm{loc}} \propto N^{\gamma}$ 。

现在，观察逆参与比与能量的联合密度，图 1(c)，我们揭示了 $|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$的谱结构。在 β-系综的非遍历扩展相中，$|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$ 仅出现在一个能量窗口（$-E_{\mathrm{G}},\ E_{\mathrm{G}}$）内，该窗口以谱的中间位置（$E = 0$）为中心。系综平均 $\langle E_{\mathrm{G}} \rangle \propto N^{\alpha_G}$ 几乎与 N无关，无论 $\alpha_G \ll 1$为何，$\delta\mathrm{I} \ll 1$的情况见附录 C。重要的是，图 2(c)表明，在（$-E_{\mathrm{G}},\ E_{\mathrm{G}}$）范围内，逆参与率取值范围很广，从 $\mathcal{O}(1)$ 到 N^{-D_2}，有力地证明了局域态与延展态共存。

这种共存会形成迁移率边吗？在 L´évy 系综、[20, 34]， 准周期晶格 [11, 35–41]，3维 Anderson 模型中都观察到了迁移率边 [42]，

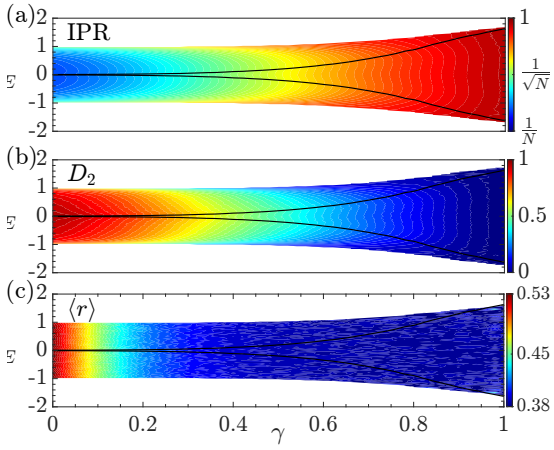

图2。(a) 逆参与率，(b) 分形维数 D_2，(c) $N = 8192$ 在 γ-E' 平面上的平均能级间距比 r。黑色实线表示$(-E'_G,\ E'_G)$，即局域态的能带。

量子随机能量模型 [43]和多体局域化 [3]。为了在β系综中寻找迁移率边，首先，我们计算能量依赖的逆参与率

$$\mathrm{I}(E) = \frac{1}{N\rho(E)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{I}_j \delta\left(E - E_j\right) \ , \tag{3}$$

其中 $\rho(E)$ 是全局态密度（DOS）。对于给定能量 $\mathrm{I}(E) \to 0$ ($\simeq \mathcal{O}(1)$) 分别对应扩展态（局域态）。因此，若存在 ME，就意味着 $\mathrm{I}(E)$ 会在 $(\mathcal{O}, -E_G)$ 范围内随能量从 0 向 $E_G(1)$ 发生交叉变化。图 2(a) 展示了能量 γ-E' 平面中的逆参与率（IPR），并以全局能带宽 $E' = E/\epsilon_\beta$ 进行了重标度；该图未显示任何 $\epsilon_\beta = 2\sqrt{\langle E^2\rangle} = \sqrt{4 + 2N^{1-\gamma}}$ 值下存在 ME 的证据。$\gamma_\circ$

然而，逆参与率在β-系综中呈肥尾分布，可能不是自平均量 [29]，因此需要更有说服力的测量指标。由此，我们通过能谱上各小窗口内 median(I) 随系统尺寸的标度关系，提取依赖于能量的分形维数 $D_2(E)$。图2(b) 显示，$D_2(E)$ 在 $(-E_G, E_G)$ 中与能量无关，且不受 γ的影响。这有力地表明，尽管 β-系综的非遍历扩展相中同时存在$\mathcal{O}(N^\gamma)$ 局域态，且它们分布在 $E = 0$附近，但其中并不存在迁移率边。

除了局域化性质的谱均匀性之外，还可以考虑整个能谱范围内的能级关联。系综平均能级间距比 $\langle r\rangle$ [44, 45] 在$\gamma = 0$附近表现出临界性，这意味着在热力学极限下，非遍历扩展相中的相邻本征值通常不相关 [29]，但在有限尺寸下仍存在一定程度的残余能级排斥 $\beta = N^{-\gamma}$。为了理解短程能量关联的能量依赖性

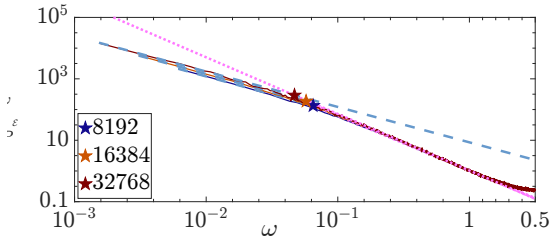

图3. $\gamma = 0.4$ 在随机选取的能量窗口（宽度为 $\Delta\mathcal{E} = \frac{N}{8}$）内的系综平均功率谱与无量纲频率的关系。虚线（点线）表示 ω^{-1} (ω^{-2})拟合，星号表示临界频率。

我们计算

$$r(E) = \frac{1}{N\rho\left(E\right)} \sum_{n=1}^{N} r_n \delta\left(E - E_n\right) \\ r_n = \min\left(\tilde{r}_n, \frac{1}{\tilde{r}_n}\right),\ \tilde{r}_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}} \tag{4}$$

在 γ-E' 平面中，系综平均 r 的图2(c) 也显示，对于所有 γ，统计特性均不存在从泊松统计 $\langle r\rangle \approx$0.38到维格纳-戴森统计 $\langle r\rangle \approx 0.53$的依赖能量交叉 [44, 45]。因此，能谱主体中的短程能量关联也具有均匀性。

除了短能量尺度上的谱均匀性外，还需要表征长程双能级关联。这可以通过以下方式刻画：考察 n个展开能级 $\mathcal{E}_n$ [46] 相对于其平均位置的涨落 n，即功率谱 $P(\omega)$ 随频率 ω的变化；它与 n傅里叶对偶。对于泊松（Wigner-Dyson）统计，涨落的功率谱 $\delta_n \equiv \mathcal{E}_n - n$ 按 ω^{-2} (ω^{-1}) [47–49]衰减。在 β-系综中，$P(\omega)$ 在频率域呈现非均匀行为，见图3:

$$P(\omega) \propto \begin{cases} \omega^{-1}, & \omega < \omega_c \\ \omega^{-2}, & \omega > \omega_c \end{cases}, \quad \omega_c = \frac{\pi}{N^\gamma}. \tag{5}$$

临界频率 ω_c对应的展开能量尺度 N^γ 使得两个展开能级 $\mathcal{E}_{1,\ 2}$ 在 $|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2| > N^\gamma$时相关，否则不相关。因此，在能量窗口$\left(\mathcal{E} - \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}, \mathcal{E} + \frac{\Delta\mathcal{E}}{2}\right)$内，$P_{\mathcal{E}}(\omega) \sim \omega^{-2}$ 仅在 $\Delta\mathcal{E} < N^\gamma$时表现出泊松行为，而与 $\mathcal{E}$无关。这种长程关联十分罕见，并且与 RPE、变形泊松系综 [16, 50, 51], 或受驱动的 Aubry-André 模型 [21], 中通常观察到的能量关联形成互补 [10]。通常，本征态在 Thouless能量 $\mathcal{E}_{\mathrm{Th}}$ [52]以下发生杂化，而相距 $\Delta\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\mathrm{Th}}$的远距离本征值仍保持不相关 [23, 53]。

上述数值结果明确表明，局域态与延展态的共存无法形成任何迁移率边。这可以从 β 系综与 Anderson模型的局部等价性在解析上得到理解。

确实，在 β系综中，前 $\mathcal{O}(N^{\gamma})$ 个格点之间的跃迁振幅与典型的格点势相比，其幅值要小得多 $x_n^{\mathrm{typ}} \sim \mathcal{O}(1)$。因此，格点 1、2、$\cdots$、$n \lesssim N^{\gamma}$可以被视为与晶格的其余部分有效断开，并承载 $|\Psi_{\mathrm{loc}}\rangle$。相应的态密度服从正态分布，而短程和长程能量关联均由泊松统计给出 [31]。

剩余格点上的本征态结构可以如下理解。格点 $n > N^{\gamma}$的跃迁振幅由式（2给出，具有自平均性，且较为均匀，相对涨落较小 $|y_{n+\delta n} - y_n| \ll y_n$ 对于 $\delta n \ll n$。因此，可以将整个晶格划分为空间块 $n \in \Delta_l$，其中跃迁近似相同，且

$$\Delta_l \equiv [N^{\gamma+\zeta_l}, N^{\gamma+\zeta_{l+1}}] \ . \tag{6}$$

这里 $\zeta_l \equiv l\delta\zeta$，其中 $\delta\zeta \simeq \mathcal{O}(1)\log N$，且 $0 \le l < \frac{1-\gamma}{\delta\zeta}$。$\Delta_l$ 中的格点数为 $N_l \approx N^{\gamma+\zeta_l}$，跃迁振幅可以写成 $y_l^{\mathrm{typ}} \approx \sqrt{N^{\gamma+\zeta_l}} = N^{\frac{\zeta_l}{2}}$。因此，在 Δ_l 内，跃迁振幅实际上是常数，该模型等价于跃迁强度为 $N^{\frac{\zeta_l}{2}}$、在位势为 $\mathcal{O}(1)$ 的一维安德森模型。因此，在每个块内，本征态呈指数衰减，$|\Psi(j)| \sim \exp\left(-\frac{|j-j_{\mathrm{loc}}|}{\xi}\right)$，见附录 D，其局域化长度为 $\xi_l \sim \frac{\langle y_n^2\rangle}{\langle x_n^2\rangle} = N^{\zeta_l}$ [54]，局域化中心 j_{loc} 在 Δ_l 中随机分布。此外，由于长度为 $\xi_l \sim N^{\zeta_l}$ 的每个子块有 N^{ζ_l} 个本征态，因此，每个块 Δ_l 可容纳 $N_l/\xi_l \approx N^{\gamma}$ 个子块。子块内的本征态会发生杂化，但子块之间不会。局部安德森等价性意味着，每个子块都具有高斯态密度，其带宽为 [55]

$$\Delta E_l \simeq \sqrt{\frac{1}{N^{\zeta_l}} \sum_{i_l \in \Delta_l} N^{\zeta_l}} = N^{\frac{\zeta_l}{2}} \tag{7}$$

相应的平均能级间距为 $\delta_l = \frac{\Delta E_l}{N^{\zeta_l}} = N^{-\frac{\zeta_l}{2}}$。上述等价关系解释了如下所示的 β-系综非遍历扩展相的性质。

首先，$\mathcal{O}(N^{\gamma})$ 态被限制在第一个空间块中Δ_0，均为局域态，其 $\xi_0 \sim N^{\delta\zeta} \sim \mathcal{O}(1)$ $(\delta\zeta \simeq \mathcal{O}(1)\log N)$。式 (7) 还证明了，这些 δ-局域态的能带宽度为 $E_{\mathrm{G}} \approx \mathcal{O}(1)$，不随 N [31]而变化。

其次，最后一个最大的块中的本征态局域化程度最低，其局域化长度为 $\xi \sim N^{1-\gamma}$。该块包含所有格点的有限比例，即 $N_l \sim \mathcal{O}(N)$，从而定义了N-系综非遍历扩展相中的典型分形维数 $D_2^{\mathrm{typ}} = 1-\gamma$。由于局域化长度为 1 的本征态数量，

$\le \xi_l \le N^{1-\gamma}$，并且带宽，公式（7），随之增加

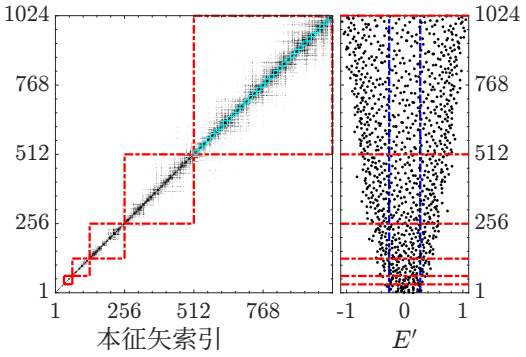

图4。（左）阈值筛选后的协方差矩阵 $\tilde{M}$，公式（8），对应于 $N = 1024$，$\gamma = 0.5$，以及 $\delta M = 0.5$ 红色虚线表示形如 Δ_l（公式（6））的空间块，$\delta\zeta = 0.1$ 且 $l = 0, 1, \ldots, 5$，而青色线表示最后一个块中的N^{γ} 空间子块。（右）按空间位置排序的本征态能量。蓝色竖直虚线表示$(-E'_{\mathrm{G}}, E'_{\mathrm{G}})$，即局域态的能量边界。

l，任何局域化度量的分布都呈现出肥尾特征 [31]。因此，在 $(-E_{\mathrm{G}}, E_{\mathrm{G}})$ 范围内，所有能带均相互重叠，各种局域化长度皆有可能。这种具有不同ξ_l 的空间分离态结构，解释了 β系综中迁移率边的缺失以及局域态与延展态的共存。

第三，安德森等价性解释了 β系综的非遍历扩展相中异常的长程能量关联。所有块的本征值共同构成全局态密度，因此带宽 ϵ_β 由 $l_{\max} \simeq \frac{1-\gamma}{\delta\zeta}$ 处最大块的带宽 $N^{\frac{1-\gamma}{2}}$ 决定。因此，全局平均能级间距为 $\delta \sim \frac{N^{\frac{1-\gamma}{2}}}{N} = N^{-\frac{1+\gamma}{2}}$。相反，子块中的最小局部能级间距为 $\delta_{\min} = \delta_{l_{\max}} \sim N^{-\frac{1-\gamma}{2}}$ 由于 $\delta_{\min} > \delta$，相邻本征值来自不同的子块，因此彼此不相关；而相关本征值之间的能量差至少为$\delta_{\min}$。展开过程对 $\delta \to 1$进行重标度，将临界无量纲能量设为 $\delta_{\min}/\delta = N^{\gamma}$，这与数值结果一致。任意两个展开能级$\mathcal{E}_{1,\,2}$ 若 $|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2| \lesssim N^{\gamma}$，则它们来自不同子块，彼此不相关；而当 $|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2| \gtrsim N^{\gamma}$（实际能级间距为$\gtrsim N^{\gamma-1}$）时，它们可能属于同一子块，因而彼此相关。这解释了 β系综中能量涨落功率谱异常行为的起源，见公式（5）。

最后，我们通过数值计算确认，在非遍历扩展相中，β-系综的本征态会按照 [31, 56]中定义的度量呈指数衰减。因此，我们可以根据局域化中心而非能量对本征态排序。为了理解按空间位置排序的此类本征态之间的关联，我们考察

协方差矩阵

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{N} |\Psi_i(k)\Psi_j(k)| = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{2}{\pi}, & \text{ergodic} \\ \to 0, & \text{localized} \end{cases} . \quad (8)$$

协方差矩阵能够较为全面地反映希尔伯特空间结构。通过绘制经阈值˜过滤的协方差矩阵 $M_{ij} = \Theta(M_{ij} - \delta M)$，其中海维赛德阶跃函数为 $\Theta(x)$，阈值为 $\delta M < \frac{2}{\pi}$，我们揭示了本征态空间关联结构。$M_{ij} = 1$意味着 i态与 j态高度重叠，即它们相互杂化，反之亦然。在遍历相中，M 是一个稠密矩阵，而在局域化区间则是稀疏矩阵。对于 β-系综，见˜图4，M 呈现出带状结构，空间带宽随指标 i增大 j，证实了关于块 Δ_l的解析图像。我们还展示了按空间位置排序的本征态的能级。这进一步表明，在 β-系综中，局域化态和非遍历延展态可以出现在几乎相同的能量处，最终在热力学极限下共存。

总而言之，在这封信中，我们提出了避免短程无序模型中出现迁移率边的一系列基本原则，并以一个著名的 β系综为例加以说明。借助各种谱学和局域化测度，我们揭示了此类模型中局域态与延展态共存的结构，并通过将其空间局域映射到具有依赖系统尺寸的跃迁的一维安德森模型，从解析上证实了这些结果。本文提出并在 β系综中验证的一般原则，使人们能够在同一能量区间内实现局域态与延展态共存，而无需精细调节；这种共存对扰动和无序实现具有鲁棒性。此类系统可用于量子存储器和容错量子计算，其中与浴的延展模解耦的局域态不受退相干影响。展望未来，寻找上述概念的多体实现将尤为有趣。

致谢。A. K. D. 获得了印度 DST 的 INSPIRE Fellowship 资助。I. M. K. 感谢俄罗斯科学基金会的支持，资助编号：21-12-00409。

[1] N. Mott，《无序结构中的电子》，《物理学进展》16，49（1967）。[2] P. W. Anderson，《某些随机晶格中扩散的缺失》，《物理评论》109，1492（1958）。[3] D. J. Luitz、N. Laflorencie 和 F. Alet，随机场海森堡链中的多体局域化边，《物理评论B》91，081103（2015）。[4] I. Dumitriu 和 A. Edelman，《β系综的矩阵模型》，《数学物理学杂志》43，5830（2002），https://doi.org/10.1063/1.1507823。[5] M. Mehta，*Random Matrices*，《纯粹与应用数学》（Elsevier Science，2004）。[6] M. Berry 和 M. Tabor，《规则谱中的能级聚集》，《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》356，375 1977( )。[7] O. Bohigas、M. J. Giannoni 和 C. Schmit，混沌量子谱的表征与能级涨落定律的普适性，《物理评论快报》52，1（1984）。[8] A. De Luca、B. L. Altshuler、V. E. Kravtsov 和 A. Scardicchio，贝特晶格上的安德森局域化：延展态的非遍历性，《物理评论快报》113，046806（2014）。[9] I. Garc´ıa-Mata、O. Giraud、B. Georgeot、J. Martin、R. Dubertrand 和 G. Lemari´e，随机图中安德森转变的标度理论：遍历性与普适性，《物理评论快报》118，166801（2017）。[10] S. Ray、A. Ghosh 和 S. Sinha，Aubry-Andr´e模型中的驱动诱导去局域化，《物理评论E辑》97，010101（2018）。[11] Y. Wang、L. Zhang、W. Sun、T.-F. J. Poon 和 X.-J. Liu，共存局域态与延展态的量子相，及临界区域，《物理评论B》106，L140203（2022）。[12] M. Pino、V. E. Kravtsov、B. L. Altshuler 和 L. B. Ioffe，〈无序约瑟夫森结阵列中的多重分形金属〉，《物理评论B》96，214205（2017）。[13] M. Pino、L. B. Ioffe 和 B. L. Altshuler，〈约瑟夫森结链的非遍历金属相和绝缘相〉，《美国国家科学院院刊》113，536（2016）。[14] A. K. Das 和 A. Ghosh，〈变形中心对称网络中的输运〉，《物理评论E辑》106，064112（2022）。[15] Y. V. Fyodorov 和 O. Giraud，〈无序诱导的多重分形及对数相关过程的高阶值〉，《混沌、孤子与分形》74，15（2015），《极端事件及其应用》。[16] V. E. Kravtsov、I. M. Khaymovich、E. Cuevas 和 M. Amini，〈具有局域化和遍历转变的随机矩阵模型〉，《新物理学杂志》17，122002（2015）。[17] P. A. Nosov、I. M. Khaymovich 和 V. E. Kravtsov，〈关联诱导的局域化〉，《物理评论B》99，104203（2019）。[18] P. A. Nosov 和 I. M. Khaymovich，〈在长程随机模型中加入软约束对离域的稳健性〉，《物理评论B》99，224208（2019）。[19] I. M. Khaymovich、V. E. Kravtsov、B. L. Altshuler 和 L. B. Ioffe，〈对数正态罗森茨威格–波特模型中的脆弱扩展相〉，《物理评论研究》2，043346（2020）。[20] P. Cizeau 和 J. P. Bouchaud，〈L´evy 矩阵理论〉，《物理评论E辑》50，1810（1994）。[21] A. K. Das 和 A. Ghosh，〈变形泊松系综中由对称性破缺引发的混沌〉，《

《统计力学：理论与实验》2022，063101（2022）。[22] V. E. Kravtsov、I. M. Khaymovich、B. L. Altshuler 和 L. B. Ioffe，〈随机正则图上的局域化转变：对数正态 Rosenzweig-Porter 随机矩阵系综中的不稳定三临界点〉，arXiv:2002.02979（2020）。[23] I. M. Khaymovich 和 V. E. Kravtsov，〈“多重分形”罗森茨威格–波特模型中的动力学相〉，SciPost Phys. 11，45（2021）。[24] A. G. Kutlin 和 I. M. Khaymovich，〈能量分层随机模型中的涌现分形相〉，SciPost Phys. 11，101（2021）。[25] W. Tang 和 I. M. Khaymovich，〈具有泊松能级统计的非遍历离域相〉，Quantum 6，733（2022）。[26]V. Motamarri、A. S. Gorsky 和 I. M. Khaymovich，〈无序俄罗斯套娃模型中的局域化与分形性〉，arXiv:2112.05066（2021）。[27] K. S. Tikhonov 和 A. D. Mirlin，〈凯莱树上波函数的分形性：树与无边界局部树状图之间的差异〉，《物理评论B》94，184203（2016）。[28] D. J. Luitz、I. M. Khaymovich 和 Y. B. Lev，〈无序 XXZ 自旋链中的多重分形性及其在反常输运中的作用〉，SciPost Phys. Core 2，006（2020）。[29] A. K. Das 和 A. Ghosh，〈系综中的非遍历扩展态〉，《物理评论E辑》105，054121（2022）。 β N. Rosenzweig 和 C. E. Porter，〈复杂原子光谱中的能级排斥〉，《物理评论》120，1698（1960）。[30] 参见补充材料。[31] J. A. Cuesta 和 A. S[32] anchez，〈具有短程相互作用的一维系统中相变的一般不存在定理及此类相变的物理实例〉，《统计物理学杂志》115，869（2004）。´ M. Albert 和 P. Leboeuf，〈双色势引起的局域化与安德森局域化〉，《物理评论A辑》81，013614（2010）。[33] F. L. Metz、I. Neri 和 D. Boll[34] e，〈对称随机矩阵中的局域化转变〉，《物理评论E辑》82，031135（2010）。´S. Gopalakrishnan，〈具有幂律跃迁的自对偶准周期系统〉，《物理评论B》96，054202（2017）。[35] X. Deng、S. Ray、S. Sinha、G. V. Shlyapnikov 和 L. Santos，〈具有幂律跃迁的一维准晶体〉，《物理评论快报》123，025301（2019）。[36] Y. Wang、X. Xia、L. Zhang、H. Yao、S. Chen、J. You、Q. Zhou 和 X.-J. Liu，〈具有精确迁移率边的一维准周期镶嵌晶格〉，《物理评论快报》125，196604（2020）。[37] S. Das Sarma、S. He 和 X. C. Xie，〈一维模型势中的迁移率边〉，《物理评论快报》61，2144（1988）。[38] J. Biddle 和 S. Das Sarma，〈一维非公度光晶格中预测的迁移率边：安德森局域化的一个可精确求解模型〉，《物理评论快报》104，070601（2010）。[39] S. Ganeshan、J. H. Pixley 和 S. Das Sarma，〈一维具有精确迁移率边的最近邻紧束缚模型〉，《物理评论快报》114，146601（2015）。

[41] A. Ahmed、A. Ramachandran、I. M. Khaymovich 和 A. Sharma，《全平带菱形链中基于平带的多重分形》，《物理评论B》106，205119（2022）。[42] B. Bulka、B. Kramer 和 A. MacKinnon，《三维安德森模型中的迁移率边》，Zeitschrift f¨ur Physik B Condensed Matter 60，13（1985）。[43] C. R. Laumann、A. Pal 和 A. Scardicchio，《平均场量子自旋玻璃中的多体迁移率边》，《物理评论快报》113，200405（2014）。[44] V. Oganesyan 和 D. A. Huse，《高温下相互作用费米子的局域化》，《物理评论B》75，155111（2007）。[45] Y. Y. Atas、E. Bogomolny、O. Giraud 和 G. Roux，《随机矩阵系综中连续能级间距之比的分布》，《物理评论快报》110，084101（2013）。[46] T. Guhr、A. M¨uller–Groeling 和 H. A. Weidenm¨uller，《量子物理中的随机矩阵理论：共同概念》，《物理报告》299，189（1998）。[47] E. Faleiro、J. M. G. G´omez、R. A. Molina、L. Mu˜noz、A. Rela˜no 和 J. Retamosa，《量子混沌中$1/f$ 噪声的理论推导》，《物理评论快报》93，244101（2004）。[48] R. Riser、V. A. Osipov 和 E. Kanzieper，《量子混沌系统中长本征能级序列的功率谱》，《物理评论快报》118，204101（2017）。[49] A. Rela˜no、L. Mu˜noz、J. Retamosa、E. Faleiro 和 R. A. Molina，《连续高斯系综的功率谱表征》，《物理评论E辑》77，031103（2008）。[50] R. Berkovits，《非遍历扩展区间中罗森茨威格–波特模型的超泊松行为》，《物理评论B》102，165140（2020）。[51] A. K. Das 和 A. Ghosh，《广义对称矩阵和厄米矩阵的本征值统计》，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52，395001（2019）。[52] B. L. Altshuler 和 V. E. Kravtsov，《量子系统局域谱中的随机康托尔集和迷你带》（2023）。[53] G. D. Tomasi、M. Amini、S. Bera、I. M. Khaymovich 和 V. E. Kravtsov，《广义罗森茨威格–波特随机矩阵系综中的生存概率》，SciPost Phys. 6，14（2019）。[54] L. Sanchez-Palencia、D. Cl´ement、P. Lugan、P. Bouyer、G. V. Shlyapnikov 和 A. Aspect，《随机势中膨胀玻色–爱因斯坦凝聚体的安德森局域化》，《物理评论快报》98，210401（2007）。[55] Z. F¨uredi 和 J. Koml´os，《随机对称矩阵的本征值》，Combinatorica 1，233（1981）。[56] T. Prosen 和 M. Robnik，《稀疏带状随机矩阵系综中的能级统计与局域化》，Journal of Physics A: Mathematical and General 26，1105 1993( )。[57] J. T. Albrecht、C. P. Chan 和 A. Edelman，《斯图姆序列与随机本征值分布》，《计算数学基础》9，461（2009）。[58] R. Allez、J.-P. Bouchaud 和 A. Guionnet，《不变β系综与高斯–维格纳交叉》，《物理评论快报》109，094102（2012）。[59] T. K. Duy 和 F. Nakano，《高温下的高斯β系综：本征值涨落与体区

统计(2016). [60] S. Sorathia, F. M. Izrailev, V. G. Zelevinsky, and G. L. Celardo, 从封闭到开放的一维安德森模型：输运与谱统计的比较，《物理评论E辑》86，011142（2012）。

附录 A：跃迁振幅

β-系综中的第 n 个跃迁项记为 y_n，其中 $\sqrt{2}y_n \sim \chi_{n\beta}$，即自由度为 $n\beta = \frac{n}{N^\gamma}$ 的卡方分布。然后，y_n 的第 m 阶矩为

$$\langle y_n^m \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{n\beta+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n\beta}{2}\right)} \tag{A1}$$

那么，对于 $n\beta \gg 1$ 和 $n\beta \approx 1$，分别有 $y_n \sim \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{n\beta}{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 和 $y_n \sim \mathcal{O}(1)$。相反，对于 $n\beta \ll 1$，$z \equiv \log\, y_n$ 具有宽分布 $\sim \exp\left(-z - \frac{e^{2z}}{2}\right)$，其均值为 $\langle z \rangle = \frac{1}{2}\left(\log\, 2 + \text{digamma}\left(\frac{n\beta}{2}\right)\right)$，其中 $\text{digamma}\,(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ 是 Gamma 函数的对数导数，它具有泰勒级数展开 $\text{digamma}\,(x) = -\frac{1}{x} - \gamma_{\text{Euler}} + \frac{\pi^2}{6}x + \mathcal{O}(x^2)$，其中 $\gamma_{\text{Euler}} \approx 0.5772$ 是欧拉-马歇罗尼常数。因此，y_n 的典型值为 $\exp\left(\langle \log\, y_n \rangle\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{n\beta}\right)$，对于 $n\beta \ll 1$。由此，跃迁项的典型行为可概括为

$$y_n \sim \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{n\beta}\right), & n\beta < 1 \Rightarrow n < N^\gamma \\ \mathcal{O}(1), & n\beta \approx 1 \Rightarrow n \approx N^\gamma \\ \sqrt{n\beta}, & n\beta > 1 \Rightarrow n > N^\gamma \end{cases}. \tag{A2}$$

然而，$\log y_n$ 的密度在 $n\beta \ll 1$ 处呈现长尾，此时 y_n 的高阶矩变得重要。利用斯特林近似 $\left(x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\right)$，可得 $\left\langle \frac{y_n^m}{m!} \right\rangle^{\frac{1}{m}} \sim \sqrt{\frac{e}{2m}}\left(\frac{n\beta}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$，其最大值出现在 $m = 2\log\frac{2}{n\beta}$ 处。因此，y_n 中可能出现的最大涨落为

$$\max_m \left\langle \frac{y_n^m}{m!} \right\rangle^{\frac{1}{m}} \sim \frac{1}{\sqrt{-4\log n\beta}} \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma \log N}}.$$

因此，对于 $n\beta \ll 1$，y_n 可以呈现出 $\sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\, N$ 的数值，而典型的 $y_n \sim \exp\left(-\frac{1}{n\beta}\right)$ 则要小得多。

附录B：识别局域态

图 I(a) 显示了 β 系综在 $N = 8192$ 和不同 γ 条件下 $\log_2$(I) 的密度。我们观察到 0 处有一个峰（即 $\text{I} = 1$），这表明非遍历扩展相中存在局域态，因此我们需要找出特定 γ 下这类局域态的数量。给定容差值 $\delta\text{I} \ll 1$，我们将满足 $\text{I} > 1 - \delta\text{I}$ 的态视为强局域态，并记为 $|\Psi_{\text{loc}}\rangle$。设 N_{loc} 为根据上述定义，β 系综单个实现中的 $|\Psi_{\text{loc}}\rangle$ 数量。我们观察到，系综平均的 N_{loc} 随系统尺寸呈幂律行为，即 $\langle N_{\text{loc}} \rangle \propto N^{\alpha_{\text{loc}}}$。图 I(b) 展示了不同 δI 下 α_{loc} 随 γ 的变化，并观察到对于任意 δI. 接下来，我们考察 N_{loc} 的变异系数（CV），$\text{CV}(N_{\text{loc}}) = \frac{\sqrt{\langle N_{\text{loc}}^2 \rangle - \langle N_{\text{loc}} \rangle^2}}{\langle N_{\text{loc}} \rangle}$，它刻画了 $|\Psi_{\text{loc}}\rangle$ 数量的样本间涨落。我们发现 $\text{CV}(N_{\text{loc}}) \propto N^{\alpha_{\text{CV}}}$，其中 $\alpha_{\text{CV}} \approx -\frac{\gamma}{2}$ 对任意 δI 均成立，因为

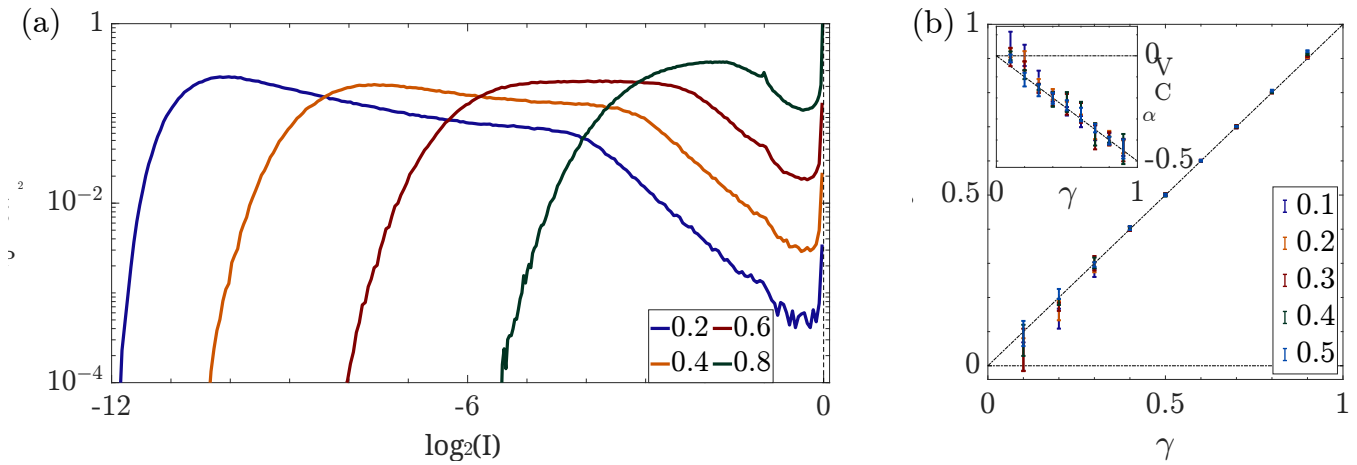

图 I. (a) 不同 γ 和系统尺寸 $N = 8192$ 下的逆参与比密度。(b) $\langle N_{\rm loc}\rangle$（即局域态的系综平均数，也就是 $\langle N_{\rm loc}\rangle \propto N^{\alpha_{\rm loc}}$）随 γ 变化的系统尺寸标度指数。插图显示了 $N_{\rm loc}$ 的变异系数的标度指数，即 $\mathrm{CV}(N_{\rm loc}) \propto N^{\alpha_{\rm CV}}$。误差棒表示通过双对数坐标下线性拟合得到的 99.9% 置信区间。

如图 I(b) 的插图所示。由于 $N_{\rm loc}$ 和 $\mathrm{CV}(N_{\rm loc}) \sim \mathcal{O}$对 $\gamma \to 0$而言为 (1)，某些有限样本在靠近 $|\Psi_{\rm loc}\rangle$ 的非遍历扩展相中可能不存在任何 $\gamma_{\rm ET}$。然而，在非遍历扩展区的深处， $N_{\rm loc}$ 的样本间涨落在热力学极限下消失，并且我们总能发现 $\mathcal{O}(N^{\gamma})$，也就是说，有广延数量的本征态是局域化的，但它们在所有本征态中所占比例为零。

附录C：局域态的能量关联

我们将局域态的能级记为 $E_{\rm loc}$。在图 II(a) 中，我们展示了不同 γ 下 $E_{\rm loc}$ 的密度，其中 $N = 8192$ 且 $\delta\mathrm{I} = 0.1$。我们观察到，对于固定的 δI， $E_{\rm loc}$ 的密度呈高斯分布形状，且与 N 和 γ 均无关；随着我们减小 δI，该分布变得更加尖锐。在图 II(a) 的插图中，我们展示了 σ，即高斯拟合的标准差随 δI 的变化情况，并且可以看到，当 $\delta\mathrm{I} \to 0$ 时，$\sigma \to 1$ 。因此，对于 $\mathrm{I} \to 1$ 的 $|\Psi_{\rm loc}\rangle$ ，态密度（DOS）遵循正态分布。然而，DOS 的整体形状并不能反映 $E_{\rm loc}$ 之间存在的关联性质。局部能量窗口内的关联程度由 r 表征，即能级间距 [45] 的比值。在图 II(b) 中，我们展示了不同 γ 下 r 的密度，其中 $N = 8192$ 且 $\delta\mathrm{I} = 0.3$。

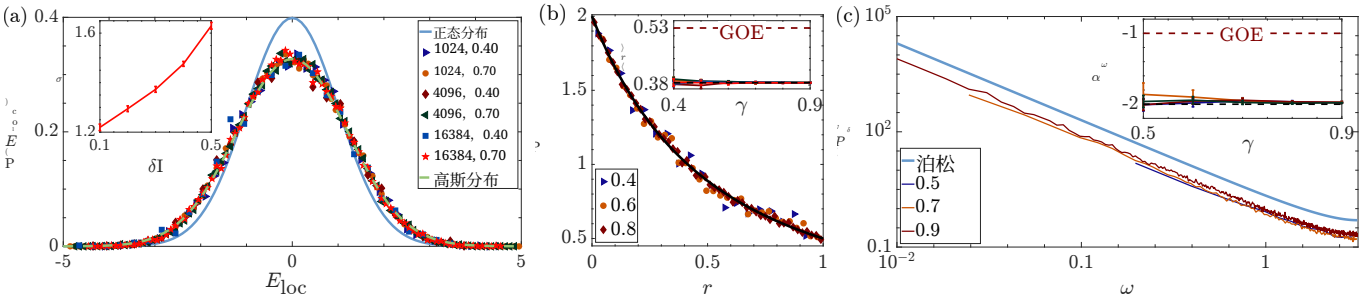

图 II。（a）对于不同的 N 和 γ，局域态能量 $E_{\rm loc}$ 的密度，其中 $\delta\mathrm{I} = 0.1$。虚线表示均值为 0、标准差为 $\sigma = 1.219 \pm 0.013$ 的高斯分布拟合，实线表示正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$。插图显示 σ 随 δI 的变化。（b）对于不同的 γ， $E_{\rm loc}$ 的 r 密度，其中 $N = 8192$ 和 $\delta\mathrm{I} = 0.3$。实线表示泊松系综 [45] 的 r 密度。插图显示 r 的系综平均值随 γ 的变化，对应 $N = 2048$、8192、32768 和 $\delta\mathrm{I} = 0.2$, 0.4。（c）对于不同的 γ，噪声的功率谱，其中 $N = 8192$ 和 $\delta\mathrm{I} = 0.3$。实线表示泊松系综 [47] 的功率谱。插图显示功率谱的斜率 α_ω 随 γ 的变化，其中 $N = 8192$, 16384, 32768 和 $\delta\mathrm{I} = 0.3$, 0。。误差棒表示 95%置信区间。

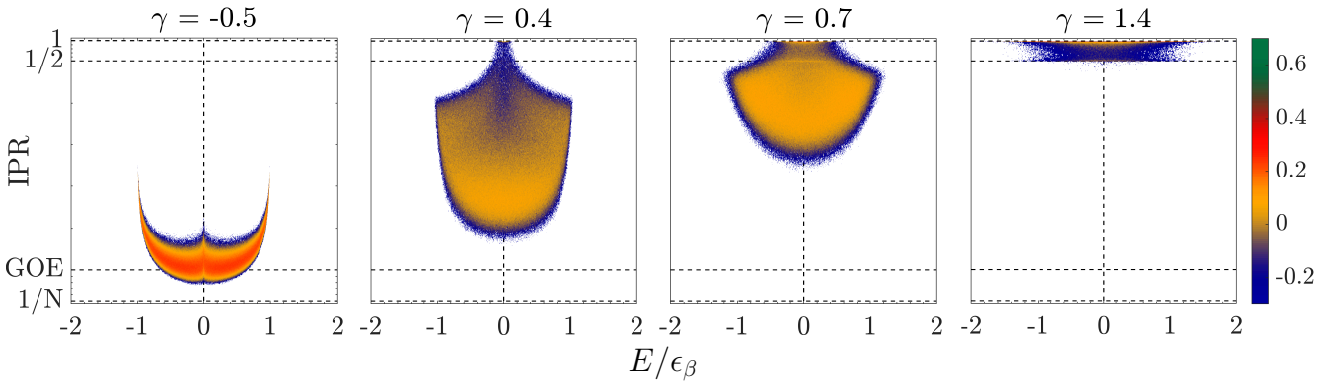

图 III. 由 128 个无序样本得到的不同 γ 和 $N = 8192$ 下逆参与比与能量的联合密度。色条表示以 $\log_N$ 标度显示的 $\mathrm{P}\left(\mathrm{I}\ \frac{E}{\epsilon_\beta}\right)$ 值，其中 $\epsilon_\beta \equiv \sqrt{4 + 2N^{1-\gamma}}$ 为全局带宽。

我们观察到，所有的密度都与 $\mathrm{P}_{\mathrm{Poisson}}(r) = \frac{2}{(1+r)^2}$很好地吻合。在图 II(b) 的插图中，我们展示了不同 N 和 $\delta\mathrm{I}$ 条件下，系综平均 r 随 γ 的变化。我们观察到，无论 N、γ 还是 $\delta\mathrm{I}$，$\langle r\rangle \approx 0.38$，这正是泊松系综的预期。因此，局域态的能级中不存在短程关联。与能级间距比等短程度量互为补充的是，长程谱关联由 P_ω^δ 捕获，即 δ_n 统计量的功率谱（傅里叶变换的模平方）。由于 E_{loc}/σ 服从正态分布，展开变得简单，此时展开能量 $\mathcal{E}_{\mathrm{loc}} = \frac{N_{\mathrm{loc}}}{2}\left(1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{E_{\mathrm{loc}}}{\sqrt{2}}\right)\right)$。这类展开能级中噪声的系综平均功率谱随 ω 呈幂律行为，如图 II(c) 所示，即 $\left\langle P_\omega^\delta \right\rangle \propto \omega^{\alpha_\omega}$。图 II(c) 的插图表明，无论 N、γ 还是 $\delta\mathrm{I}$，指数$\alpha_\omega \approx -2$，与泊松系综类似。因此，我们可以得出结论：局域态的能级在任意距离上都不相关。

在图 III中，我们展示了不同 γ取值下逆参与率与能量的联合密度。这些图不仅展示了非遍历扩展相中局域态与扩展态的共存，还帮助我们确定（$-E_{\mathrm{G}}$，E_{G}），即局域态的能量边界。图 IV(b) 表明，对于任意 γ 取值，系综平均 $\langle E_{\mathrm{G}}\rangle$ 均不随系统尺寸变化，与 $\delta\mathrm{I}$ 无关。

在图 IV(a) 中，我们展示了在遍历相和局域相中，长程能量关联在整个能谱上均匀分布。

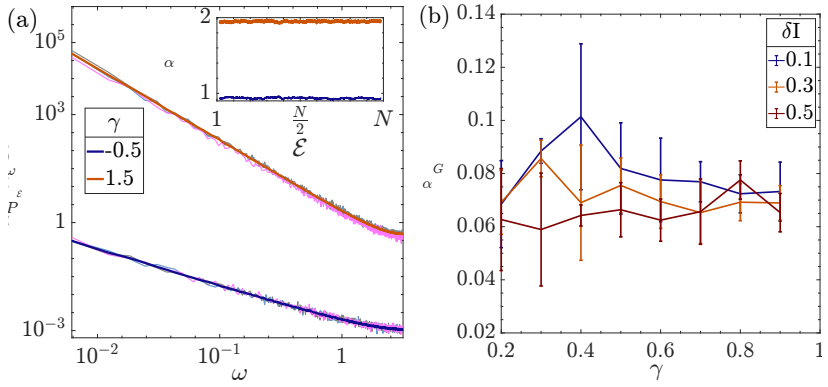

图 IV. (a) 噪声的系综平均功率谱与无量纲频率的关系，ω 对于不同的 γ，其中 $\Delta\mathcal{E} = 1024$ 和 $N = 32768$。对于每个 γ，实线表示在三个随机选取的 $\mathcal{E}$ 处的 $\left\langle P_{\mathcal{E}}(\omega)\right\rangle$，虚线曲线表示对 $\mathcal{E}$取平均后的 $\left\langle P_{\mathcal{E}}(\omega)\right\rangle$。插图显示了指数 α 与展开能量的关系，其中 $\left\langle P_{\mathcal{E}}(\omega)\right\rangle \propto \omega^{-\alpha}$。(b) 对于不同 $\delta\mathrm{I}$，$\langle E_{\mathrm{G}}\rangle \propto N^{\alpha_G}$ 的系统尺寸标度，其中 $(-E_{\mathrm{G}},\ E_{\mathrm{G}})$ 是局域态的能量边界（具有 $\mathrm{I} > 1 - \delta\mathrm{I}$）。

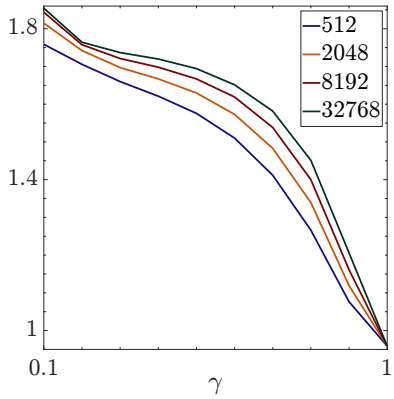

图 V. 度量 μ 由公式（D1）给出，随 γ 在不同 N条件下的变化。

附录 D：本征态的指数衰减

在局部空间窗口中与一维安德森模型的等价性表明， β-系综在非遍历扩展相中的本征态呈指数衰减。为了验证这一点，我们考察以下度量。

$$\mu = \frac{8\xi_g}{\xi_{\mathrm{S}}}, \quad \begin{array}{rcl} \xi_g & = & \sqrt{\sum_j j^2 \left|\Psi(j)\right|^2 - \left(\sum_j j \left|\Psi(j)\right|^2\right)^2} \\ \xi_{\mathrm{S}} & = & 2.07 \exp\left(\mathrm{S}\right) \end{array} \tag{D1}$$

其中 ξ_g 和 ξ_{S} 分别为几何局域长度和熵局域长度。对于指数局域态，$\xi_{\mathrm{S}} \approx 8\xi_g$，即 $\mu \approx 1$。相反，对于稀疏局域态（即在单个局域长度内存在多个占主导地位的分量）， $\xi_{\mathrm{S}} \ll 8\xi_g$，即 $\mu \gg 1$。在图 V中，我们展示了 μ 随 γ 变化的中位数，其中 N。由于 $\mu \sim \mathcal{O}\left(1\right)$无论 γ和 N如何， β系综的本征态确实呈指数衰减。