arXiv:2305.02370v1 [physics.class-ph] 3 May 2023

对称性破缺导致的单个开放式声学谐振器中的例外点

Vladimir Igoshin、MariiaTsimokha、Anastasia Nikitina、Mihail Petrov，* Ivan Toftul 和 Kristina Frizyuk†俄罗斯圣彼得堡 *197101*，*ITMO* 大学物理与工程学院

例外点（例外点）已在量子力学、凝聚态物理、光学和光子学领域得到广泛研究。然而，由于声学超材料的快速发展，例外点在声学领域的潜力直到最近才受到关注。本文提出了一种通过降低声学谐振器的对称性并促成谐振模态相互作用来实现例外点条件的方法。通过直接数值模拟预测了例外点的形成，并结合耦合模理论和谐振态展开进行了验证。这些发现对声学超材料的设计与优化具有重要意义，可用于声学传感和噪声降低等应用。

I. 引言

声学超材料是一类很有前景的材料，能够以独特的方式调控声波的性质 [1–3] 以及实现机械操控 [4–6]。尽管谐振在声学超材料中发挥着核心作用，但仍有许多受阻的物理效应和机制尚未得到揭示。例外点是参数空间中的特殊点，在这些点上，系统的特征值发生简并，特征向量合并，从而形成不可对角化的若尔当块 [7–10]。与例外点相关的谱奇异性对系统参数高度敏感，因此在传感应用中具有很大潜力 [11, 12]。尽管该领域已取得进展，但单个声学谐振器中例外点出现的问题仍需深入研究，本文将对此展开讨论。

例外点仅出现在非厄米系统中 [10]，且常在 PT 对称系统的语境下被提及 [8, 13–15] ，这些系统已在电子学 [16]，、光学和光子学 [11, 13, 15]，以及近期的声学领域 [17, 18]中得到研究。然而，要实现 PT 对称性，就需要对声学系统中的增益和损耗进行特殊设计。另一种方式是在开放谐振器中观察到例外点；开放谐振器是一类特殊的非厄米系统，已在光学和光子学领域得到广泛研究 [15, 19, 20]。形成例外点的一种可能机制是破坏谐振器的对称性 [21]。虽然这并非唯一的方法，但我们将其他方法留待当前工作的范围之外，并请读者参阅文献 8 和22。然而，尽管人们已对光学中的例外点开展了广泛研究，但在声学领域，关于例外点的研究仍然很少。

在本工作中，我们展示了通过设计谐振器的形状，并借助相关的对称性破缺，可以实现模式耦合机制，从而形成例外点条件，如图1所示：在具有扰动对称性的系统中，两个最初互不相互作用的模式转变为两个不同的模式，并处于简并状态。这一过渡状态似乎是例外点状态。

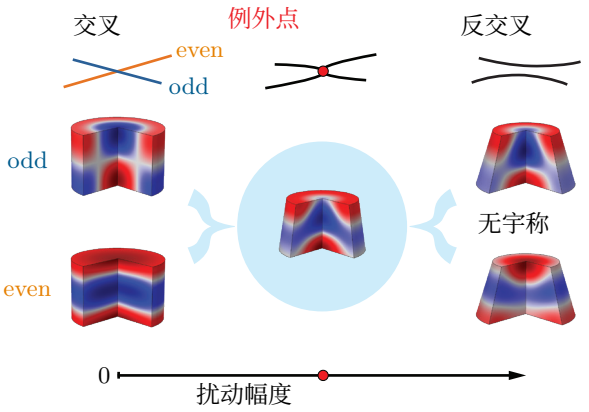


图 1. 本工作的主要思想。对称性破缺微扰将由对称性考虑所诱导的两组模式合并为一组。图的底部展示了这一点。通过改变对称性破缺微扰的幅度，我们可以调节耦合强度。如图顶部所示，这使我们能够观察能量项从交叉到避免交叉的转变。该转变会经过一个以特征子空间并合为特征的例外点。

我们改进并调整多极分析这一强大方法 [23–25]，以 *(i)* 预测由特定对称性破缺导致的例外点出现，并 *(ii)* 通过耦合模理论和共振态展开（RSE）方法更深入地理解模式之间的相互作用。

探索声学谐振器中例外点形成背后的物理机制，可能为面向广泛应用的声学超材料设计与优化解锁新方法，例如声音聚焦 [26],光机械学 [27], 传感 [28–31], 噪声隔离 [32],地震隐身 [33, 34]。通过解决围绕声学超材料物理机制的重要问题，我们或许能够为声学和材料科学领域开启新的、令人振奋的机遇。

本文的组织结构如下。在第II节中，我们基于线性声学方程构建一个简单模型，并讨论例外点出现的简单机制。

* m.petrov@metalab.ifmo.ru
† k.frizyuk@metalab.ifmo.ru

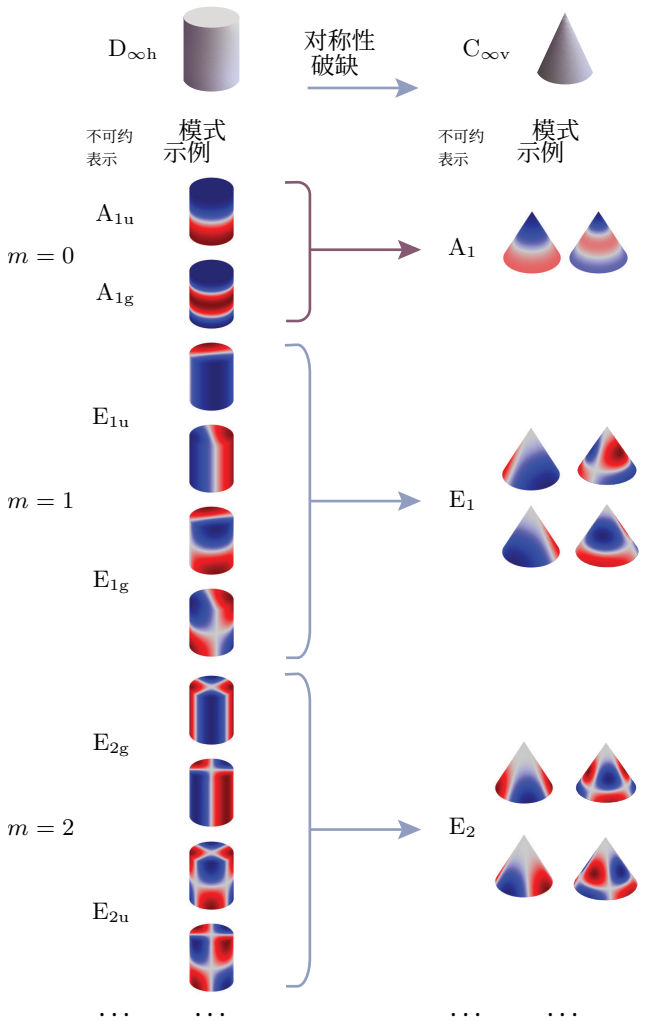


图 2. 对称群 $D_{\infty h}$ 和 $C_{\infty v}$ 的不可约表示表，以及按这些不可约表示变换的本征模示例。这里只展示了前几个不可约表示。单极模按不可约表示 A_{1g} 变换，但为展示更具说明性的模式，图中未将其列出。图中给出了按特定不可约表示变换的模式示例。箭头表示两个群的不可约表示之间的对应关系。

现。在第III 节中，我们将这一方法扩展到更复杂的对称性，并对该方法进行推广。最后，在第IV节中，我们总结所得结果。

II. 声学谐振器中的模式耦合

A. 模型物理与参数

我们聚焦于频域线性声学框架下谐振器的研究。这些谐振器由均匀声学材料制成，并置于均匀环境（流体或气体）中该环境仅支持纵波。两种介质均由其压缩率 β 和质量密度 ρ 表征（声速为 $c = 1/\sqrt{\beta\rho}$）。复速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 和压力 $p(\mathbf{r})$ 场满足波动方程 [35]

$$\mathrm{i}\omega\beta p = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}, \qquad \mathrm{i}\omega\rho\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}p. \tag{1}$$

采用简谐约定 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 并应用索末菲辐射条件后，可得到一个广义特征值问题

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\nabla}\cdot \\ \boldsymbol{\nabla} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbb{D}}} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\mathbf{v} \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbb{F}}} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} \beta(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & \rho(\mathbf{r}) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbb{P}}} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ \mathrm{i}\mathbf{v} \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbb{F}}}, \tag{2}$$

该问题描述开放式声学谐振器的本征模 $\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r})$，其中为方便后续处理，引入了算子 $\mathbb{D}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbb{P}(\mathbf{r})$。所建立的特征值问题与光学中的问题完全类似 [36]。

该系统的本征模可以按照谐振器 [23, 37, 38] 对称群的不可约表示进行分类，这与光学谐振器 [24]的情况类似。为了说明本文的一般性结论，我们需要选取一些特定的材料参数；但这些结论通常并不依赖于这一选择。对于大多数在空气中进行的声学实验，散射体中的波长比宿主介质中的波长更长。然而，为了确保数值稳定性，我们选择了相应的参数，因为所有结论都不取决于声学折射率 $\sqrt{\beta_1\rho_1/\beta_0\rho_0}$是大于还是小于 1。具体而言，我们为各介质采用密度 $\rho_0 = 1$ kg/m^3 和声速 $c_0 = 1$ m/s，为谐振器采用 $\rho_1 = \rho_0/2$、$c_1 = c_0/2$。毋庸置疑，类似的情形在实践中也可能出现：高折射率谐振器材料常见于米氏共振声学超原子，可用于构造超材料 [5, 39–41]。不过，我们再次强调，下面介绍的理论并不依赖于介质和谐振器的材料参数。

本征模的计算借助 COMSOL Multiphysics 中的数值模拟完成®，并采用附录中简要介绍的方法 C。

B. 例外点的出现

为了阐明对称性与例外点形成之间的联系，我们首先将详细说明谐振器形状变化对谐振器谱的影响。我们从具有高度对称性的结构（例如圆柱体）开始 [42]，随后再转向更复杂的形状。我们固定圆柱体的初始几何结构，使其高径比为 $h_0/R_0 = 2$ [见图 3（插图）]。

圆柱体对应于$D_{\infty h}$ 对称群，因此具有一组可数无限的有限维不可-约表示 [43–45]如图2所示，其中

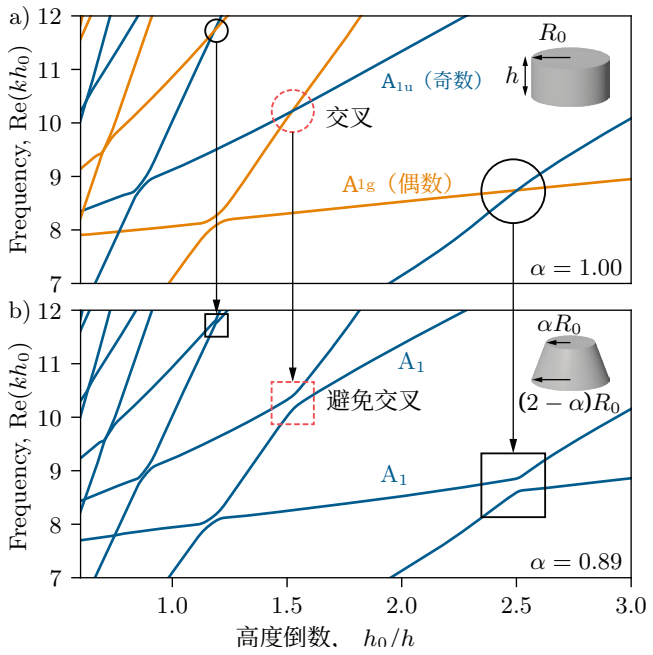


图 3. 圆柱体的特征值实部 k 缩放至 h_0，其中圆柱体的 $\alpha = 1$（a）以及圆锥台的 $\alpha = 0.89$（b）随 h_0/h变化。圆柱体各模式的分支根据其不可约表示以不同颜色标示。不同不可约表示下变换的模式交点以圆圈标出。对应的避免交叉以及弱耦合下的交叉以方框标出。图4 所示的交叉和避免交叉以虚线标示。所用几何参数为 $h_0 = 1$ 米、$R_0 = 0.5$ 米。

每种表示均配有相应的数值计算压力场示例。圆柱体对称群的每个不可约表示都对应一个方位角数 m。下文中，我们将讨论范围缩小至 $m = 0$ 仅考虑，或者更具体地说，考虑在不可约表示A_{1u} 和A_{1g}下变换的本征模。这些本征模具有旋转对称性，但在水平反射（σ_h 变换）下具有不同的宇称。所得结果可直接推广至其他方位角数 m。我们省略了在不可约表示A_{1g} 下变换的单极模，转而选取另一个更具说明性的示例。不过，我们强调，在对称性破缺$D_{\infty h} \to C_{\infty v}$ 时（例如从圆柱体变为圆锥体），单极模和偶极模开始在圆锥体对称群的同一个不可约表示A_1下变换，因此彼此相互作用。具有这一特征的谐振器通常以Willis耦合 [6, 46–48]来表征。

图中展示了 $m = 0$ 模式的本征频率实部随谐振器高度的变化。图3 (a)中，每种线条颜色对应一个不可约表示 A_{1u} 或 A_{1g}。下文将不可约表示 A_{1u} 和 A_{1g} 下变换的本征模分别称为模式 A_{1u} 和模式 A_{1g} 。此处需要指出，按照不同不可约表示变换的模式彼此正交，因此它们之间不会发生耦合 [37, 38]。在图 3 (a)中，这一说法可以直观地体现出来：圆柱体中两个正交模式 A_{1u} 和 A_{1g}发生了交叉。事实上，对本征模场的显式分析表明，这些模式具有不同的宇称，分别为奇和偶（相对于 σ_h （水平面反射）变换）。另一方面，图3(a)显示了属于同一不可约表示的模式能量线呈现避免交叉的行为。

接下来，可以通过将谐振器的形状从圆柱体扰动为圆锥体来改变其对称性，这会破坏水平面内的镜像对称性。为了仔细追踪模式结构的变化，应逐步进行这种对称性变化，因此我们选取谐振器形状的“圆柱度”参数 α，见图3 （b），该参数表示形状扰动的幅度。改变 α 从 1 到 0 会减小圆柱体的顶部半径，同时增大底部半径。因此，减小 α 参数会破坏关于 σ_h 的对称性，并使系统的对称群从 $D_{\infty h}$ 变为 $C_{\infty v}$。根据图2 ，先前讨论的 A_{1u} 和 A_{1g}模式失去了其特有的 σ_h 宇称属性，现在在同一个不可约表示 A_1下变换。因此，在圆锥对称性下，这些模式之间会出现耦合，表现为图3 （b）所示频率线之间出现避免交叉。箭头标出了由对称性破缺引起的交叉向避免交叉的转变。

到目前为止，讨论的几乎完全是本征频率的实部。本征频率的虚部如图4 （b）所示。虽然实部中可以观察到交叉行为 [图4 （a）]，但虚部并不相等，模式也不简并。然而，通过改变谐振器的高度h和圆柱度参数 α，在某一耦合强度下，可以观察到两个模式的实部和虚部同时简并 [，见图4 （c、d）]。现在，图4 （a、c、e）中的序列可以理解如下：从左到右展示了谐振器由圆柱体变为圆锥体的三个不同变形阶段。在最左侧（a、b），谐振器的 $D_{\infty h}$ 对称性确保所考察的两个模式之间完全不存在任何相互作用；在最右侧（e、f），相互作用足够强，使这两个模式彼此完全分离。显然，基于这种特定对称性破缺的平滑性，在（c、d）所示的中间参数下，可以找到一个对应于这两个模式完全简并的点。在图4（c、d）中，无论是频率的实部还是虚部，两条线都合并为一个点，这对应于例外点的形成。需要注意的是，两个模式通常发生的简并出现在所谓的二重点[10]，，它们对应于二维或更高维的不可约表示；但这里 A_1 不可约表示是一维的

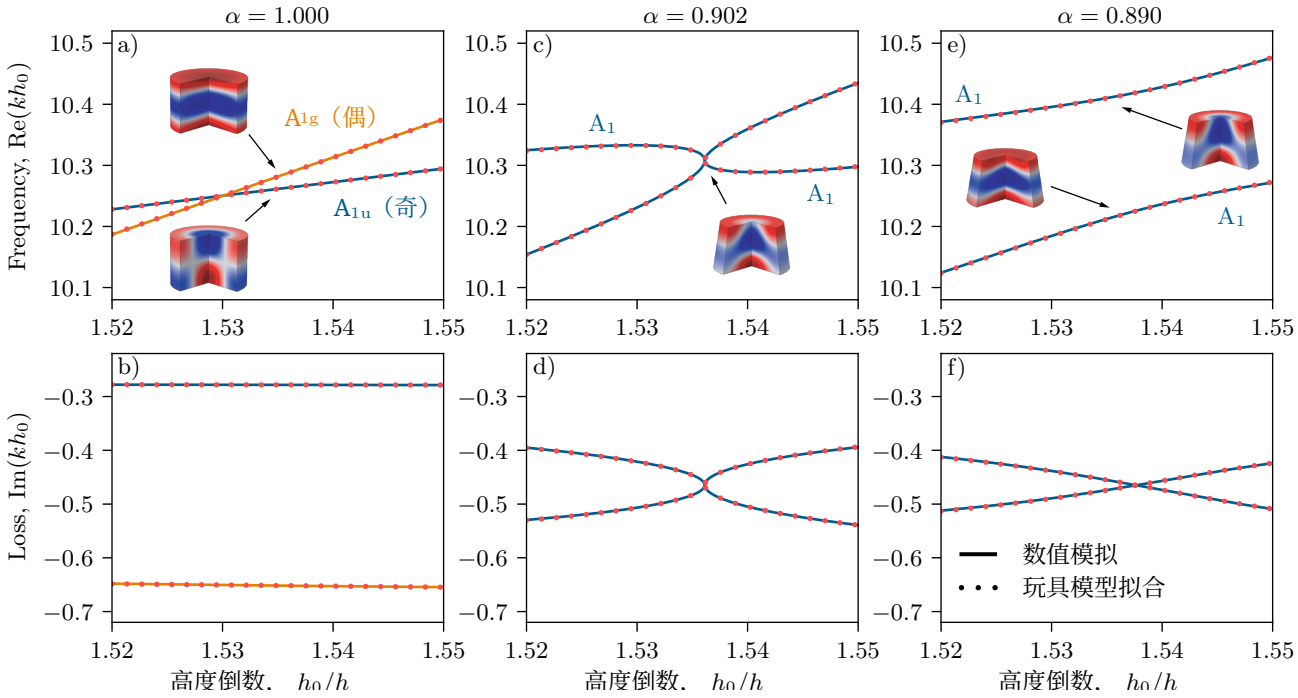


图4. 声学谐振器的特征值实部和虚部图谱 k （缩放至 h_0）。给出了谐振器中场的示例。(a) 两个互不作用且按不同不可约表示 A_{1u} 和 A^{1g} 变换的模式，其实部在“圆柱度”参数 $\alpha = 1.000$处交叉。(e) 在 $\alpha = 0.890$ 处，按相同不可约表示 A_1 变换的模式实部发生反交叉（强耦合）。在 $\alpha = 0.902$ 处达到一个例外点，此时特征值的实部 (c) 和虚部 (d) 均发生交叉，因此模式简并。附录B讨论了玩具模型拟合。

这使其甚至成为不可能的事情。简单来说，我们无法获得两个频率相同且场线性无关的模式 [11, 13, 49, 50]。还应注意，如图4 （b、d、f）所示，对于实部和虚部，交叉到避免交叉的机制恰好相反：系统从反交叉经过简并后转变为交叉。通过对称性破缺观察到的模式相互作用可以扩展到其他形状的谐振器，详见附录A。

C. 耦合模理论与材料参数微扰

量子力学和光学中例外点的出现，通常可以在标准耦合模理论的框架下解释，该理论由 2×2二能级系统的哈密顿量 [8, 11, 13, 49, 50]描述。尽管多个声学谐振器之间的耦合已通过标准耦合模理论进行了分析 [51, 52], ，但尚未讨论单个声学谐振器因形状扰动而产生的模式耦合。本节将介绍一种基于共振态展开（RSE）或准正规模展开的两个本征模相互作用唯象模型 [36, 53–55]。RSE 已证明在确定受扰光学系统的本征模以及强耦合机制 [56], 和多极耦合 [24]。然而，据我们所知，尚未有人针对由方程（2）描述的线性声学进行此类分析。这些方程可以改写为与参考文献36类似的紧凑形式：

$$\hat{\mathbb{D}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r}) \tag{3}$$

其中 $\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r}) = (p_n, \mathbf{i}v_n)$ 是一个本征模， ω_n 是一个特征值。对于经过微扰的谐振器，有一组新的本征模 $\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r})$和特征值 Ω

$$\hat{\mathbb{D}}(\mathbf{r})\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}) = \Omega\left(\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})\right)\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

其中， $\Delta\hat{\mathbb{P}}(\mathbf{r})$ 是材料参数的微扰，例如由改变谐振器的形状所引起。

假设所有本征模都是未扰动系统的本征模 $\vec{\mathbb{F}}(\mathbf{r}) = \sum c_n\vec{\mathbb{F}}_n(\mathbf{r})$ 的线性组合。在这种方法下，微扰理论形式 [36] 立即给出耦合方程组

$$\sum_n \left((\Omega - \omega_n)\delta_{mn} + \Omega V_{mn}\right)c_n = 0 \tag{5}$$

其中， $V_{mn} \propto \int_{\mathbb{T}} \vec{\mathbb{F}}_m \Delta\hat{\mathbb{P}}\vec{\mathbb{F}}_n$ 是矩阵元。在这

方程（5）的双模近似，我们得到特征值问题

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 0 & \omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\Omega\begin{pmatrix}1+V_{11} & V_{12}\\ V_{12} & 1+V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \tag{6}$$

该方程的特征值为

$$\Omega_{\pm}=\frac{\xi\omega_2+\gamma\omega_1\pm\sqrt{(\xi\omega_2-\gamma\omega_1)^2+4\kappa^2\omega_1\omega_2}}{2(\xi\gamma-\kappa^2)} \tag{7}$$

其中 $\kappa=V_{12}=V_{21}$、$\xi=1+V_{11}$、$\gamma=1+V_{22}$。可以看出，非对角元素 κ 负责模式之间的耦合。

观察到例外点的主要条件可概括为 $\Omega_-=\Omega_+$。或者，更完整地写作 $(\xi\omega_2-\gamma\omega_1)^2+4\kappa^2\omega_1\omega_2=0$。可以看出，若满足这一条件且 $\kappa\neq 0$，特征子空间便会合并。

这里，我们展示了该系统可用于描述对称性破缺声学谐振器中例外点的形成。要精确确定控制参数 κ，ξ 和 γ，需要引入恰当的标量积和归一化，这超出了当前工作的范围。尽管如此，我们通过拟合图 4 中的实部和虚部频率曲线，在数值上确定了这些参数，其拟合依据为式（7）（详见附录B ）。所得结果以圆点标示于图 4 中，与数值结果吻合良好。

在耦合模方法中可以清楚地看出，按照同一个不可约表示变换的两个模式之间可能发生耦合，因为积分 $\kappa\propto\int\vec{\mathbb{F}}_1\Delta\hat{}\mathbb{P}\vec{\mathbb{F}}_2\neq 0$ 完全符合维格纳定理 [57]。这也可以由 [37, 38]中给出的选择定则推导出来。

III. 将该方法推广到其他对称性

所示的例外点形成机制可以扩展到任意形状的谐振器。具体步骤如下：

1. 必须选择两个相互之间不存在相互作用、且在不同不可约表示下变换的本征模。2. 接下来，需要通过特定的对称性破缺，确保这些模式出现在同一个不可约表示中。这一步至关重要，因为所选择的对称性将触发例外点态的形成。3. 现在，必须平滑地破坏原始对称性，使物体从具有原始对称性的形状逐渐过渡到具有所选新对称性的形状。换句话说，这两种形状之间应存在同伦等价关系。因此，形状变化由一个参数控制。通过这种方式，可以轻松追踪例外点的出现。

按照该算法，可以观察到谐振器在更复杂形状和对称性下形成例外点。例如，除了已考虑的 $D_{\infty h}$到 $C_{\infty v}$ 对称性破缺外，还可以观察到 C_{4v} 到 C_{2v} 对称性破缺下形成例外点，详见附录 A，并有数值模拟结果支持。例如，B_1 和 A_1 不可约表示合并为 A_1即可形成例外点。

IV. 结论

在本研究中，我们提出了一种在复杂声学系统中获得例外点的一般机制。我们发现，通过破坏谐振器的特定对称性，可以实现例外点条件，并使原本正交的本征模发生耦合。对非对称参数进行平滑变化，可以找到模式合并的确切条件。我们通过破坏单个均匀声学谐振器的对称性，将其从 $D_{\infty h}$ 变为 $C_{\infty v}$，从 C_{4v} 变为 C_{2v}，展示了这一机制。研究结果得到了直接数值模拟的支持。此外，我们基于共振态展开方法和微扰理论，提出了一个描述两个本征模相互作用的唯象模型。我们验证了，在双模近似下，所提出的描述可用于对本征频率进行定性分析。

致谢

数值和解析模拟得到了俄罗斯科学基金会第 20-72-10141 号资助。该研究获得了「Priority 2030」计划的经费支持。MP 感谢 BASIS 基金会的资助。

附录 A：C_{4v} →C_{2v} 转变示例

上述例外点形成机制具有普遍性，并以对称性要求为基础。

若未扰动系统中有两个模式呈现交叉行为，我们可以通过破坏对称性使这两个模式发生相互作用（即将两个不可约表示合并为一个，因此原本按不同不可约表示变换的两个模式，在微扰后将按同一个不可约表示变换）。上述已讨论过的 $D_{\infty h}\to C_{\infty v}$ 对称性破缺所导致的例外点态，也可以推广到更复杂的情况，例如 C_{4v} →C_{2v} 转变。

正方形正棱锥 C 中 A_1 和 B_1 模式向$_{4v}$ A_1 模式的合并过程$_{2v}$如图5所示，而图6 则展示了正方形正棱锥中两个正交模式 A_1 和 B_1 之间的交叉，以及矩形直棱锥中两个

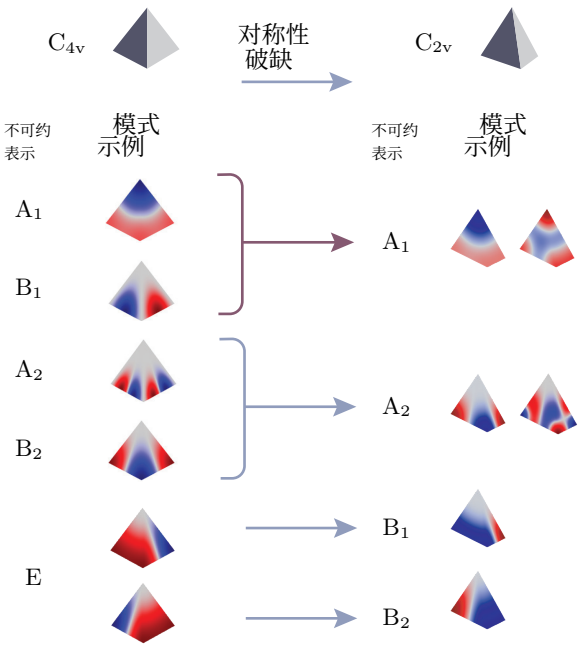


图 5. 对称群 C_{4v} 和 C_{2v}的不可约表示表。给出了按特定不可约表示变换的模式示例。箭头表示两个群的不可约表示之间的对应关系。

模式之间的避免交叉；这两个模式均按同一个不可约表示 A_1变换。在这种情况下，由于对称性破缺并恰当选择参数，可以轻松实现避免交叉和例外点。

附录 B：玩具模型拟合

为了检验该模型（第 IIC 节）描述图 4 所示效应的能力，我们对其参数 ξ、γ、κ 进行了拟合。采用了一系列高度 h_0/h，范围从 1.52 到 1.55，并假设模型参数保持不变。未扰动系统的本征频率近似表示为

$$\omega_1(h_0/h) = (2.224724 - \mathrm{i}0.023396) \cdot h_0/h + 6.846411 - \mathrm{i}0.242355$$

and

$$\omega_2(h_0/h) = (6.302923 - \mathrm{i}0.221363) \cdot h_0/h + 0.606508 - \mathrm{i}0.31179$$

每个 α 值的拟合结果列于表I中。我们选择的模型参数能够与数值实验结果充分吻合。

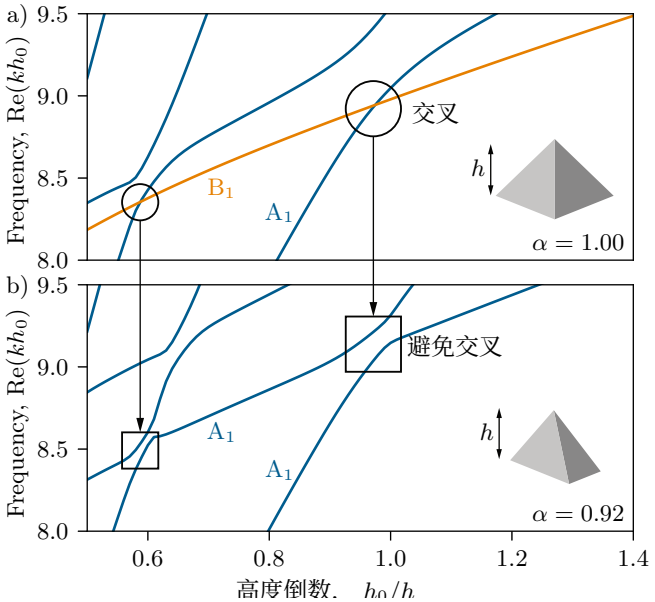


图 6. 正方形直棱锥（$\alpha = 1$）和矩形直棱锥（$\alpha = 0.92$）的缩放后 h_0 特征值 k 实部随 h_0/h的变化。正方形棱锥模式的分支根据其不可约表示以不同颜色标示。将按不同不可约表示变换的模式交点圈出。相应的避免交叉用方框标记。所用几何参数为 $h_0 = 1$ m、$a = 1$ m。

附录 C：数值建模

所有模拟均使用 COMSOL Multiphysics 声学模块中的压力声学分支完成® 软件。模拟区域为一个由介质材料构成的球体，谐振器位于其内部。搜索图4中的本征模时，使用完美匹配层（PML）模拟球形区域表面的开放边界条件。计算图 3 和图6 中的本征模时，为加快计算，使用球面波的辐射边界条件代替 PML。后处理时去除了所有数值模式（也称为 PML 模式） [54]。

[1] S. A. Cummer、J. Christensen 和 A. Al`u，利用声学超材料控制声音，Nat.Rev. Mater. 1, 1 (2016年)。

表 I. 不同 α 值对应的模型参数及其拟合相对误差。

α	ξ	γ	κ	最大相对误差，%
1.000	1	1	0	0.0044
0.902	$0.993783 + \mathrm{i}0.000728$	$1.000755 - \mathrm{i}0。001037$	$0.017148 - \mathrm{i}0.001479$	0.0534
0.890	$0.992245 + \mathrm{i}0。000903$	$1.000909 - \mathrm{i}0。001272$	$0.019272 - \mathrm{i}0。001574$	0.0113

[2] L. Fok、M. Ambati 和 X. Zhang，《声学超材料》，《MRS Bull.》33，931（2008）。[3] G. Ma 和 P. Sheng，《声学超材料：从局域共振到广阔前景》，《Sci. Adv.》2，e1501595（2016）。[4] I. D. Toftul、K. Y. Bliokh、M. I. Petrov 和 F. Nori，《以正则动量和自旋密度为指标的小颗粒声辐射力与力矩》，《物理评论快报》123，183901（2019）。[5] C. Shi、R. Zhao、Y. Long、S. Yang、Y. Wang、H. Chen、J. Ren 和 X. Zhang，《声自旋的观测》，《Natl. Sci. Rev.》6，707（2019）。[6] S. Sepehrirahnama、S. Oberst、Y. K. Chiang 和 D. A. Powell，《Willis耦合诱导的声辐射力与力矩反转》，《物理评论快报》129，174501（2022）。[7] T. Kato，《线性算子的微扰理论》（施普林格，柏林，海德堡）。[8] W. D. Heiss，《例外点的物理学》，《J. Phys. A: Math. Theor.》45，444016（2012）。[9] R. Sch¨afer、J. C. Budich 和 D. J. Luitz，《相互作用费米子的对称性保护例外点》，《Phys. Rev. Res.》4，033181（2022）。[10] N. Moiseyev，《非厄米量子力学》（剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，英国，2011）。[11] J. Wiersig，《基于例外点的传感器综述》，《Photonics Res.》8，1457（2020）。[12] J.-H. Park、A. Ndao、W. Cai、L. Hsu、A. Kodigala、T. Lepetit、Y.-H. Lo 和 B. Kant´e，《对称性破缺诱导的等离激元例外点与纳米尺度传感》，《Nat. Phys.》16，462（2020）。[13] M.-A. Miri 和 A. Al`u，《光学与光子学中的例外点》，《Science》363，eaar7709（2019）。[14] R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Musslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides，《非厄米物理与 PT 对称性》，《Nat. Phys.》14，11（2018）。[15] L. Feng、R. El-Ganainy 和 L. Ge，《基于宇称-时间对称性的非厄米光子学》，《Nat. Photonics》11，752（2017）。[16] J. Schindler、A. Li、M. C. Zheng、F. M. Ellis 和 T. Kottos，《具有 $\mathcal{PT}$对称性的有源 LRC 电路实验研究》，《物理评论A辑》84，040101（2011）。[17] V. Achilleos、G. Theocharis、O. Richoux 和 V. Pagneux，《非厄米声学超材料：例外点在吸声中的作用》，《物理评论B》95，144303（2017）。[18] R. Fleury、D. Sounas 和 A. Al`u，《基于宇称-时间对称性的隐形声学传感器》，《自然·通讯》6，1（2015）。[19] B. Midya、H. Zhao 和 L. Feng，《非厄米光子学有望实现光的例外拓扑》，《自然·通讯》9，1（2018）。[20] M. Pan、H. Zhao、P. Miao、S. Longhi 和 L. Feng，《非厄米光子晶格中的光子零模》，《Nat. Commun.》9, 1 (2018). [21] A. C. Valero, V. Bobrovs, D. Redka, A. S. Shalin, and Y. Kivshar，《孤立全介电纳米粒子中的磁电例外点》，arXiv 10.48550/arXiv.2205.05735 (2022), 2205.05735。[22] H. Cao and J. Wiersig，《介电微腔：波混沌和非厄米物理的模型系统》，《现代物理评论》87, 61 (2015)。[23] M. Tsimokha, V. Igoshin, A. Nikitina, I. Toftul, K. Frizyuk, and M. Petrov，《声学谐振器：本征模的对称性分类与多极分量》，《物理评论B》105, 165311 (2022)。[24] S. Gladyshev, K. Frizyuk, and A. Bogdanov，《电磁谐振器本征模的对称性分析与多极分类及其光学性质设计》，《物理评论B》102, 075103 (2020)。[25] Z. Sadrieva, K. Frizyuk, M. Petrov, Y. Kivshar, and A. Bogdanov，《连续谱中的束缚态的多极起源》，《物理评论B》100, 115303 (2019)。[26] S. Guenneau, A. Movchan, G. P´etursson, and S. A. Ra-makrishna，《用于声音聚焦和约束的声学超材料》，《新物理学杂志》9, 399 (2007)。[27] M. Eichenfield, J. Chan, R. M. Camacho, K. J. Vahala, and O. Painter，《光力晶体》，《自然》462, 78 (2009)。[28] M. Nirschl, A. Bl¨uher, C. Erler, B. Katzschner, I. Vikholm-Lundin, S. Auer, J. V¨or¨os, W. Pompe, M. Schreiter, and M. Mertig，《用于DNA和蛋白质检测及体外细菌S层形成研究的薄膜体声波谐振器》，《传感器与执行器A辑》156, 180 (2009)。[29] S. Thomas, M. Cole, F. H. Villa-L´opez, and J. W. Gard-ner，《用于颗粒物检测的高频表面声波谐振器传感器》，《传感器与执行器A辑》244, 138 (2016)。[30] T. Lee, T. Nomura, X. Su, and H. Iizuka，《用于亚波长定向传感的类法诺声学共振：0–360度测量》，《先进科学》7, 1903101 (2020)。[31] M. Moler´on and C. Daraio，《用于亚波长边缘检测的声学超材料》，《自然·通讯》6, 1 (2015)。[32] M. Krasikova, S. Krasikov, A. Melnikov, Y. Baloshin, S. Marburg, D. A. Powell, and A. Bogdanov，《Metahouse：基于周期结构的隔声舱》，《先进材料技术》8, 2200711 (2023)。[33] Muhammad and C. W. Lim，《从光子晶体到地震超材料：通过声子晶体和声学超材料进行综述》，Arch. Comput. Meth-ods Eng. 29, 1137 (2022)。[34] A. Gupta, R. Sharma, A. Thakur, and P. Gulia，《用于低频宽频带地震波衰减的超材料基础》，《科学报告》13, 1 (2023)。[35] L. D. Landau and E. M. Lifshitz，《流体力学》（Pergamon，牛津，英格兰，英国，1987年）。

[36] E. A. Muljarov and T. Weiss, 《开放光学系统的共振态展开：向磁性、手性和双各向异性材料的推广》, 《光学快报》43, 1978 (2018)。[37] A. Zee, 《物理学家速成群论》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，美国，2016年）。[38] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 《量子力学》（Pergamon，牛津，英格兰，英国，1977）。[39] Y. Cheng, C. Zhou, B. G. Yuan, D. J. Wu, Q. Wei, and X. J. Liu, 《基于人工米氏共振、用于高反射低频声的超稀疏超表面》, 《自然·材料》14, 1013 (2015)。[40] Z. Liang and J. Li, 《通过盘绕空间实现极端声学超材料》, 《物理评论快报》108, 114301 (2012)。[41] A. Melnikov, Y. K. Chiang, L. Quan, S. Oberst, A. Al`u, S. Marburg, and D. Powell, 《经实验验证具有最大Willis耦合的声学超原子》, 《自然·通讯》10, 1 (2019)。[42] M. Tsimokha, V. Igoshin, A. Nikitina, I. Toftul, K. Frizyuk, and M. Petrov, 《声学谐振器：本征模的对称性分类与多极分量》, 《物理评论B》105, 165311 (2022)。[43] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 《量子力学》（Pergamon，牛津，英格兰，英国，1977）。[44] 点群D∞h的特征标表（2021）， [在线；访问日期：3月21日。[45] 非晶体学：Dinfh（2001）， [在线；访问日期：3月21日。[46] L. Quan, Y. Ra'di, D. L. Sounas, and A. Al`u, 《声学散射体中的最大Willis耦合》, 《物理评论快报》120, 254301 (2018)。[47] C. F. Sieck, A. Al`u, and M. R. Haberman, 《通过源驱动均匀化探究声学超材料中Willis耦合和声学双各向异性的起源》, 《物理评论B》96, 104303 (2017)。[48] J. R. Willis, 《复合材料中密度变化的非局域影响》, 《国际固体与结构杂志》21，805（1985）。[49] H. Cao 和 J. Wiersig, 《介电微腔：波混沌与非厄米物理的模型系统》, 《现代物理评论》87，61（2015年）。[50] J. Wiersig, 《在例外点处工作的传感器：一般理论》, 《物理评论A辑》93, 033809（2016年）。[51] D. N. Maksimov、A. F. Sadreev、A. A. Lyapina 和 A. S. Pilipchuk, 《声学谐振器的耦合模理论》, 《波动》56，52（2015年）。[52] M. A. Miroliubov、A. K. Samusev、I. D. Toftul 和 M. I. Petrov, 《强耦合区间内可调谐声学谐振器的谱特性与时间动力学》, 《实验与理论物理学杂志快报》113，547（2021）。[53] M. B. Doost、W. Langbein 和 E. A. Muljarov, 《共振态展开在三维开放光学系统中的应用》, 《物理评论A辑》90，013834（2014）。[54] C. Sauvan、T. Wu、R. Zarouf、E. A. Muljarov 和 P. Lalanne, 《开放系统准正规模的归一化、正交性与完备性：以电磁学为例》 [特邀], 《光学快报》30，6846（2022年）。[55] W. Yan、R. Faggiani 和 P. Lalanne, 《等离激元纳米谐振器的严格模态分析》, 《物理评论B》97，205422（2018年）。[56] A. A. Bogdanov、K. L. Koshelev、P. V. Kapitanova、M. V. Rybin、S. A. Gladyshev、Z. F. Sadrieva、K. B. Samusev、Y. S. Kivshar 和 M. F. Limonov, 《强模耦合区间内的连续谱中的束缚态与法诺共振》, 《先进光子学》1(1), Adv. Photonics 1，016001（2019年）。[57] J. S´olyom, 《对称性的后果》, 载于《固体物理学基础：第一卷 结构与动力学》, 第6章（施普林格，柏林，德国，2007年），第171–201页。