arXiv:2305.02384v1 [cs.LO] 3 May 2023

组合组合性质：稳定无限性、凸性和礼貌性的分析

Guilherme V. Toledo[1], Yoni Zohar[1], 和 Clark Barrett[2]

[1]巴伊兰大学 [2]斯坦福大学

摘要。我们对可满足性模理论中的理论组合研究作出两项贡献。第一项贡献是列出一张示例表，涵盖理论组合中最常见的模型论性质的组合，即稳定无限性、光滑性、凸性、有限见证性和强有限见证性（因而也包括礼貌性和强礼貌性）。我们的所有示例都是严格的，因为我们还证明了在更简单的签名中不存在可用的理论。这张表显著推进了目前对各种性质及其相互作用的理解。表中最引人注目的例子是一个定义在单排序上的理论：它具有礼貌性，但不具有强礼貌性（此前已知这类理论只存在于双排序签名中）。第二项贡献是一条新的组合定理，表明若要应用礼貌理论组合，只需其中一个理论是稳定无限且强有限可见证的；这说明光滑性并不是该组合方法的关键性质。这一结果有望大幅简化证明哪些理论可以用于礼貌组合的过程，因为证明稳定无限性比证明光滑性简单得多。[1]

1 引言

理论组合关注以下问题：给定用于判定各个理论中公式可满足性的过程，我们能否为组合后的理论找到一个过程？该领域的一项奠基性成果见于 Nelson 和 Oppen 在 1979, [10], 发表的论文，作者在其中展示了如何组合具有不相交签名的理论，前提是它们都是稳定无限的；也就是说，对于理论中满足的每个无量词公式，都存在一个满足该公式的该理论的无限解释。

随着稳定无限性的引入，识别能够实现理论组合的模型论性质这一概念也随之诞生。然而，很快便清楚地发现，这第一步并不足够，因为一些具有实际应用价值的重要理论（例如位向量理论和有限数据类型理论）最终被证明并非稳定无限。早期为理论组合寻找稳定无限性替代方案的尝试，包括引入温和的 [6], shiny [14], 和灵活的 [8] 理论。本文重点关注礼貌性这一概念，它构成了最先进水平的 SMT 求解器 cvc5 [1] 中理论组合的基础。

最初在 [11], 中被提出的礼貌理论，最初定义为同时满足光滑和有限可见证的理论。这两个概念都比稳定无限性更难检验，但一旦确认某个理论是礼貌的，就可以将它与任何其他理论组合，即使对方不是稳定无限的理论。

本文主要结果证明中的一个小问题在后续工作 [7] 中得到了纠正。他们的论文引入了一个略有不同、更加严格的礼貌性定义，并给出了正确的证明，表明礼貌理论可以与任意理论组合。遵循 [5], , 我们将满足新定义的理论称为强礼貌理论，其定义为同时满足光滑和强有限可见证；据此，我们将满足早期定义的理论称为礼貌理论。

[1] 本研究部分由 NSF-BSF 项目资助，项目编号为 2110397（NSF）和 2020704（BSF），并获得 ISF 项目资助，项目编号为 619/21。

长期以来，人们一直不清楚是否存在一种礼貌但非强礼貌的理论。随后，在 2021年，S heng 等人 [13] 给出了一个实例。这表明，有必要对稳定无限性、光滑性、有限见证性和强有限见证性等性质进行更深入的分析，因为它们之间的相互作用有时会以令人惊讶或难以预料的方式呈现。我们将凸性也加入这一列表，因为已有研究表明，凸性与稳定无限性密切相关 [2]。

本文对这些性质能否共存以及如何共存进行了详尽分析，并在可能的情况下给出示例。有些组合显然不可能，例如一个强有限可见证但并非有限可见证的理论；其他组合的可行性则不那么明显。例如，起初并不清楚是否存在一个单排序、非稳定无限且同时并非有限可见证的理论（我们证明这同样是不可能的）。本文的主要结果之一是一张全面的表格，说明了关于这些性质所有可能组合的已知情况。

在努力填充该表格的过程中，我们还改进了礼貌组合：通过使相关证明稍微复杂一些，我们可以简化礼貌理论组合的主要结果。我们证明，为了组合理论，只需其中一个理论是稳定无限且强有限可见证的；并不需要光滑性。这一结果简化了判定一个理论是否适用于礼貌组合的过程，因为证明稳定无限性比证明光滑性要简单得多。

本文组织如下。第2节定义了全文将使用的基本概念。第3节证明了若干定理，表明某些性质组合不可行。第4节介绍了填充表中可行项的示例理论。第5节提出一个新的组合定理。最后，第6节给出总结性意见，并指出未来工作的方向。[2]

2 预备概念

2.1 一阶签名与结构

多排序签名 Σ 是一个三元组，由一个可数的排序集合 $\mathcal{S}_\Sigma$ 、一个可数的函数符号集合 $\mathcal{F}_\Sigma$以及一个可数的谓词符号集合 $\mathcal{P}_\Sigma$ 构成。对于每个排序 $\sigma \in \mathcal{S}_\Sigma$，该谓词符号集合都包含一个等号符号 $=_\sigma$（通常记作 $=$）；每个函数符号的元数为 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$，每个谓词符号的元数为 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$，其中 σ_1、.....、σ_n、 $\sigma \in \mathcal{S}_\Sigma$和 $n \in \mathbb{N}$。每个等号符号 $=_\sigma$的元数为 $\sigma \times \sigma$。除等号外，不含任何函数符号或谓词符号的签名称为空签名。

如果 Σ 只有一个元素，则称多排序签名 $\mathcal{S}_\Sigma$ 为单排序签名；我们也可以将多排序签名简称为签名。如果两个签名仅共享排序和等号符号，则称它们互不相交。

我们假设对于 $\mathcal{S}_\Sigma$ 中的每个排序，都有一个不同的可数无限变量集，并以通常方式定义项、文字和公式（原子公式或非原子公式）。如果 s 是一个元数为 $\sigma \to \sigma$ 的函数符号，且 x 是排序为 σ的变量，则我们递归地定义项 $s^k(x)$（对于 $k \in \mathbb{N}$）如下： $s^0(x) = x$，以及 $s^{k+1}(x) = s(s^k(x))$。我们用$\mathrm{vars}_\sigma(\varphi)$表示公式 φ 中排序为 σ 的自由变量集；给定 $S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$，$\mathrm{vars}_S(\varphi) = \bigcup_{\sigma \in S} \mathrm{vars}_\sigma(\varphi)$（我们使用$\mathrm{vars}(\phi)$作为$\mathrm{vars}_{\mathcal{S}_\Sigma}$的简写）。

Σ-结构 $\mathcal{A}$ 由每种排序 $\sigma \in \mathcal{S}_\Sigma$对应的集合 $\sigma^\mathcal{A}$ 组成，这些集合称为 σ的论域，并配有函数符号和谓词符号的解释 $f^\mathcal{A}$和 $P^\mathcal{A}$，且符合它们的元数。此外，$=_\sigma^\mathcal{A}$必须是 $\sigma^\mathcal{A}$上的恒等映射。

Σ-解释 $\mathcal{A}$ 是对 Σ-结构的扩展，它也解释变量，其中排序为 σ 的变量 x 的值是 $\sigma^\mathcal{A}$中的一个元素 $x^\mathcal{A}$；有时我们会说，解释 $\mathcal{B}$ 是结构 $\mathcal{A}$ 上的解释（在相同签名下），意指 $\mathcal{B}$ 以 $\mathcal{A}$ 作为其底层结构。我们用 $\alpha^\mathcal{A}$ 表示项 α 在 $\mathcal{A}$下的解释；若 Γ是项的集合，我们定义 $\Gamma^\mathcal{A} = \{\alpha^\mathcal{A} \colon \alpha \in \Gamma\}$。若 $\mathcal{A}$ 满足 φ，我们记作 $\mathcal{A} \vDash \varphi$。公式 φ 称为可满足的，如果存在某个解释 $\mathcal{A}$满足它。

[2] 由于篇幅有限，证明收录于附录中。

$$\psi^{\sigma}_{\geq n} = \exists x_1.\cdots\exists x_m.\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\neg(x_i = x_j) \qquad \psi^{\sigma}_{\leq n} = \exists x_1.\cdots\exists x_n.\forall y.\bigvee_{i=1}^{n} y = x_i \qquad \psi^{\sigma}_{=n} = \psi^{\sigma}_{\geq n}\wedge\psi^{\sigma}_{\leq n}$$

图 1：基数公式

我们将使用图 1 中给出的标准基数公式。只有当结构 $\mathcal{A}$ 的 $|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 至少为 n 时，$\psi^{\sigma}_{\geq n}$ 才成立；只有当 $\mathcal{A}$ 的 $|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 至多为 n 时，$\psi^{\sigma}_{\leq n}$ 才成立；只有当 $\mathcal{A}$ 的 $|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 恰好为 n 时，$\psi^{\sigma}_{=n}$ 才成立。在单排序签名中，我们可以从公式中省略 σ，从而得到 $\psi_{\geq n}$、$\psi_{\leq n}$ 和 $\psi_{=n}$。

以下引理将一阶逻辑中的标准紧致性定理和向下斯科伦–勒文海姆定理推广到了多排序情形。这些引理在 [9] 中得到证明。

引理 1（**[9]**）。设 Σ 是一个签名；一组 Σ 公式 Γ 可满足，当且仅当其每个有限子集 Γ_0 都可满足。

引理 2（**[9]**）。设 Σ 是一个签名，Γ 是一组 Σ 公式：如果 Γ 可满足，则存在一个解释 $\mathcal{A}$，它满足 Γ，且当 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 为无限集时，$\sigma^{\mathcal{A}}$ 是可数的。

理论 $\mathcal{T}$ 是所有满足某组闭公式（即不含自由变量的公式）的 Σ 结构构成的类；这组公式称为 $\mathcal{T}$ 的公理化，记作 $\mathbf{Ax}(\mathcal{T})$。这类结构称为 $\mathcal{T}$ 的模型；若某个排序 σ 在 $\mathcal{S}_\Sigma$ 中的 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 是单元素集，则称该模型为平凡模型。底层结构属于 $\mathcal{T}$ 的 Σ 解释 $\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{T}$ 解释。如果存在一个满足公式的 $\mathcal{T}$ 解释，则称该公式是 $\mathcal{T}$ 可满足的；如果存在一个满足一组公式中每个元素的 $\mathcal{T}$ 解释，则称该组公式是 $\mathcal{T}$ 可满足的。若每个 $\mathcal{T}$ 解释满足其中一个公式当且仅当满足另一个公式，则称这两个公式是 $\mathcal{T}$ 等价的。我们写作 $\vdash_{\mathcal{T}}\varphi$，并称 φ 是 $\mathcal{T}$ 有效的，如果对于每个 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$，都有 $\mathcal{A}\vDash\varphi$。设 Σ_1 和 Σ_2 是不相交签名；$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 表示由 Σ_1 和 Σ_2 的排序、函数符号及谓词符号的并集构成的签名，所有元数均保持不变。给定一个 Σ_1 理论 $\mathcal{T}_1$ 和一个 Σ_2 理论 $\mathcal{T}_2$，$\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 理论 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_1\oplus\mathcal{T}_2$ 是由 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的公理化的并集公理化得到的理论。

2.2 模型论性质

设 Σ 是一个签名。若一个 Σ-理论 $\mathcal{T}$ 满足以下条件，则称其相对于 $S\subseteq\mathcal{S}_\Sigma$ 稳定无限：对于每个 $\mathcal{T}$-可满足的无量词公式 ϕ，都存在一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，使得对每个 $\sigma\in S$，$\sigma^{\mathcal{A}}$ 都是无限的。当对于每个无量词公式 ϕ，若 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足ϕ，且存在一个函数 κ，从 S 映射到基数类，并且对于每个 $\sigma\in S$，$\kappa(\sigma)\geq|\sigma^{\mathcal{A}}|$，那么都存在一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，使得对于每个 $\sigma\in S$，$|\sigma^{\mathcal{B}}|=\kappa(\sigma)$，则称 $\mathcal{T}$ 相对于 $S\subseteq\mathcal{S}_\Sigma$ 光滑。注意，根据引理 2，光滑性蕴含稳定无限性（取对于每个 $\sigma\in S$，$\kappa(\sigma)=\omega$）。我们用一个定理来陈述这一点。

定理 1. 设 Σ 是一个签名，$S\subseteq\mathcal{S}_\Sigma$，且 $\mathcal{T}$ 是一个 Σ 理论。若 $\mathcal{T}$ 关于 S 是光滑的，则它关于 S 也是稳定无限的。

对于一个排序集合 S、每个 $\sigma\in S$ 对应的 σ 类型的有限变量集合 V_σ，以及定义在 V_σ 上的等价关系 E_σ，由 $E=\bigcup_{\sigma\in S}E_\sigma$ 诱导的 $V=\bigcup_{\sigma\in S}V_\sigma$ 上的排列（记作 δ_V 或 δ^E_V）是该公式

$$\delta_V=\bigwedge_{\sigma\in S}\Big[\bigwedge_{xE_\sigma y}(x=y)\wedge\bigwedge_{x\overline{E_\sigma}y}\neg(x=y)\Big],$$

其中，$\overline{E_\sigma}$ 表示等价关系 E_σ的补集。

如果存在一个从无量词公式到其自身的可计算函数 wit（称为见证），并且对于每个无量词公式 ϕ，均满足以下条件，则称理论 $\mathcal{T}$ 关于排序集合 $S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$ 是有限可见证的：(i) ϕ 和 $\exists \vec{w}.\text{wit}(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的，其中 $\vec{w} = \text{vars}(\text{wit}(\phi)) \setminus \text{vars}(\phi)$；以及 ($ii$) 如果 wit($\phi$) 是 $\mathcal{T}$-可满足的，那么存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，满足 wit(ϕ)，且满足 $\sigma^{\mathcal{A}} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}(\phi))^{\mathcal{A}}$，对每个 $\sigma \in S$ 均成立。如果理论具有一个强见证 wit，且该强见证具有见证的各项性质，但 (ii) 除外，并且满足以下条件，则称该理论是强有限可见证的：(ii') 给定一个有限变量集合 V 和其上的一个排列 δ_V，如果 wit(ϕ) $\wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的，那么存在一个 $\mathcal{T}$-解释$\mathcal{A}$，满足 wit(ϕ) $\wedge \delta_V$，并且满足 $\sigma^{\mathcal{A}} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{A}}$，对所有 $\sigma \in S$ 均成立。

根据定义，可以直接得出以下定理：

定理2. 设 Σ 为一个签名，$S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$，且 $\mathcal{T}$ 是一个 Σ-理论。如果 $\mathcal{T}$ 关于 S 是强有限可见证的，那么它关于 S 也是有限可见证的。

如果一个理论关于（某个排序集合）$\mathcal{S}$ 既光滑又有限可见证，则称其关于 $\mathcal{S}$ 礼貌；如果一个理论关于 $\mathcal{S}$ 既光滑又强有限可见证，则称其关于 $\mathcal{S}$ 强礼貌。对于单排序空签名上的理论，我们有以下来自 [13] 的定理：

定理 3（**[13]**）。每个关于其唯一排序为礼貌的空签名上的单排序理论，关于该排序都是强礼貌的。

如果单排序理论 $\mathcal{T}$ 满足以下条件，则称其为凸的：对于任意文字合取 ϕ 和任意有限变量集 $\{u_1, v_1, ..., u_n, v_n\}$，$\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} u_i = v_i$ 蕴含 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to u_i = v_i$，其中存在某个 $i \in [1, n]$。

给定一个单排序理论 $\mathcal{T}$，其最小基数函数接受一个无量词公式 ϕ，并返回可数基数 $\min\{|\sigma^{\mathcal{A}}| : \mathcal{A}$ 是满足 $\phi\}$ 的 $\mathcal{T}$ 解释。[3]

在本文中，我们用 SI 表示稳定无限，用 SM 表示光滑，用 FW 表示有限可见证，用 SW 表示强有限可见证，用 CV 表示凸。

3 负面结果

如果可能的话，我们会仅使用单排序空签名（也就是能想象到的最简单签名），给出具有所有性质组合（稳定无限性、光滑性、凸性、有限见证性和强有限见证性）的例子。

当然，这并非总是可能：光滑理论必然是稳定无限的，而强有限可见证理论也必然是有限可见证的。不过，我们接下来还将展示其他几种联系，它们进一步限制了可能的性质组合。

在第3.1节中，我们将证明，在合理条件下，凸理论必定是稳定无限的；而在空签名下，反过来也成立。在第3.2节中，我们将证明，在空单排序签名下，非稳定无限理论必定是有限可见证的（这一结果有些违背直觉，因为我们通常寻找的是同时光滑且强有限可见证的理论）；更重要的是，稳定无限且强有限可见证的单排序理论也是强礼貌的。

[3] 请注意，这一定义以两种不同的方式推广到了多排序情形，见 [5] 和 [11]。不过，对于我们的研究，单排序情形就足够了。

3.1 稳定无限性与凸性

凸性是　　通常在单排序签名上定义。这里我们将其推广到任意签名　　上。

定义 1. 若理论 $\mathcal{T}$ 满足以下条件，则称其关于排序集合 $S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$ 是凸的：对于任意文字合取 ϕ 和任意有限变量集 $\{u_1, v_1, ..., u_n, v_n\}$，若其中变量的排序属于 S，且 $\vdash_\mathcal{T} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} u_i = v_i$，则对于某个 $i \in [1, n]$，有 $\vdash_\mathcal{T} \phi \to u_i = v_i$。

如果我们作如下假设（这通常也是自然而然的）：我们的理论没有平凡模型，那么凸性就蕴含稳定无限性。对于单排序情形，[2], 已证明了这一点；而对于多排序情形，正如我们在此所示，结论同样成立。证明思路相似，不过这里需要同时考虑多个排序。具体而言，我们在证明中依赖引理 1。

定理 4. 若 Σ理论 $\mathcal{T}$相对于某个由排序 S 构成的集合具有凸性，并且对每个 $\sigma \in \mathcal{S}$、$\vdash_\mathcal{T} \psi^{\sigma}_{\geq 2}$，那么 $\mathcal{T}$相对于 S是稳定无限的。

反过来，我们也可以从稳定无限性推出凸性，但仅限于空签名。

定理 5. 任何空签名上的理论，若相对于其所有排序构成的集合是稳定无限的，则相对于任意排序集合都具有凸性。

正如我们将在第4节看到的，这一结果是紧的：存在一些非空签名上的理论，它们是稳定无限的，但不具有凸性。

3.2 更多联系

接下来，我们将介绍这些不同性质之间的更多联系。首先，对于单排序空签名，理论要么是稳定无限的，要么是有限可见证的。

定理 6。每个带空签名的非稳定无限单排序理论 $\mathcal{T}$，相对于其唯一排序都是有限可见证的。

以下定理表明，对于单排序理论，强礼貌性是强有限见证性和稳定无限性的推论（而非光滑性的推论）。

定理 7。每个相对于其唯一排序稳定无限且强有限可见证的单排序理论都是光滑的，因此相对于该排序也是强礼貌的。

将此定理推广到多排序签名的情形留待未来工作。

最后，结合先前的结果，我们还可以得到以下定理，它揭示了稳定无限性、强有限见证性和凸性之间的联系。

定理 8. 一个空签名的单排序理论 $\mathcal{T}$，相对于其唯一排序既不是强有限可见证的，也不是稳定无限的，因此不可能是凸的。

总而言之，虽然定理 4 仅适用于不存在基数为 1 的论域的结构，但本节其余定理并不受此限制。定理 5 适用于空签名，定理 7 适用于单排序签名，而定理 6 和 8 适用于既为空又为单排序的签名。综合来看，对于单排序空签名上的理论，许多性质组合实际上是不可能的。这一点如图 2 所示，其中除白色区域外，其余区域均为空。例如，定理 6 表明，SI 圆和 FW 圆之外的区域（表示既非稳定无限也非有限可见证的理论）为空，因为（在空单排序签名上）每个理论都必须具有这两种性质之一。同样，定理 8 进一步表明，在 CV（凸）圆内，空白区域更多，即 SI 圆和 SW 圆之外的所有区域。

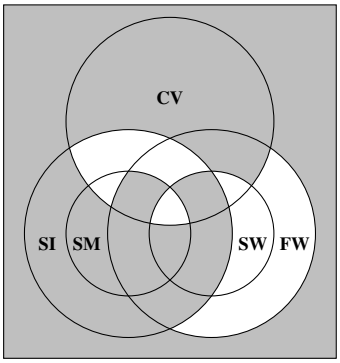

图 2：单排序空签名上各种可能组合的示意图：灰色区域为空 y.

4 正面结果

现在，我们将系统地讨论稳定无限性、光滑性、有限见证性、强有限见证性和凸性的所有可能组合。

结果汇总于表 1。每一行对应一种可能的性质组合，这由前五列中的真值决定。例如，第一行的前五列均为真，表示该行中的所有理论示例都必须是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证且凸的。其余各列对应理论签名的不同可能性：空或非空，以及单排序或多排序。同样看第一行，我们可以看到列出了四个不同的理论，每一种签名可能性各对应一个。

表中的一些条目列出的是定理，而非理论示例。这些定理表明，这些条目不存在任何理论示例。例如，由于定理 3，第 3 行和第 4 行无法提供单排序空签名上的示例。

如果有示例，则会在表格对应的单元格中给出其名称。各个理论本身定义于第 4.1 至 4.4 节。由于定理 4，第 25、27 和 31 行的示例必须至少有一个结构具有平凡论域（即恰好包含一个元素的论域）。

第 9、10、13 和 14 行涵盖了稳定无限且强有限可见证、但并非光滑的理论。我们将这些理论称为独角兽理论，因为我们未能找到任何此类理论，也不认为它们确实存在；但是（忽略定理 2、5 和 7 所排除的显而易见的情况），我们无法证明它们不存在。

定义 2. 独角兽理论是稳定无限且强有限可见证的，但并非光滑。

定理7表明，不存在单排序独角兽理论。我们认为，或许可以将向上Löwenheim-Skolem定理推广到多类型逻辑，从而证明独角兽理论不存在，这引出了以下猜想：

猜想 1：不存在单角理论。

在定义表 1 中使用的理论之前，我们先介绍以下签名。

定义 3。 Σ_1 是排序为 σ的空单排序签名， Σ_2 是排序为 σ 和 σ_2的空双排序签名，而 Σ_s 是带有单个一元函数符号 s的单排序签名。

稳定无限	强有限可见证	有限可见证	强有限可见证	凸性	空 单排序	空 多排序	非空 单排序	非空 多排序	N^o
T	T	T	T	T	$\mathcal{T}_{\geq n}$	$(\mathcal{T}_{>n})^2$	$(\mathcal{T}_{\geq n})_s$	$((\mathcal{T}_{>n})^2)_s$	1
				F	定理 5		$(\mathcal{T}_{\geq n})_\vee$	$((\mathcal{T}_{>n})^2)_\vee$	2
			F	T	定理 3	$\mathcal{T}_{2,3}$	$\mathcal{T}_f$	$(\mathcal{T}_f)_s$	3
				F		定理 5	$\mathcal{T}_f^s$	$(\mathcal{T}_{2,3})_\vee$	4
		F	T	T	定理 2				5
				F					6
			F	T	$\mathcal{T}_\infty$	$(\mathcal{T}_\infty)^2$	$(\mathcal{T}_\infty)_s$	$((\mathcal{T}_\infty)^2)_s$	7
				F	定理 5		$(\mathcal{T}_\infty)_\vee$	$((\mathcal{T}_\infty)^2)_\vee$	8
	F	T	T	T	定理 7	独角兽	定理 7	独角兽	9
				F		定理 5			10
			F	T	$\mathcal{T}_{even}^\infty$	$(\mathcal{T}_{even}^\infty)^2$	$(\mathcal{T}_{even}^\infty)_s$	$((\mathcal{T}_{even}^\infty)^2)_s$	11
				F	定理 5		$(\mathcal{T}_{even}^\infty)_\vee$	$((\mathcal{T}_{even}^\infty)^2)_\vee$	12
		F	T	T	定理 2				13
				F					14
			F	T	$\mathcal{T}_{n,\infty}$	$(\mathcal{T}_{n,\ \infty})^2$	$(\mathcal{T}_{n,\ \infty})_s$	$((\mathcal{T}_{n,\infty})^2)_s$	15
				F	定理 5		$(\mathcal{T}_{n,\infty})_\vee$	$((\mathcal{T}_{n,\infty})^2)_\vee$	16
F	T	T	T	T	定理 1				17
				F					18
			F	T					19
				F					20
		F	T	T	定理 1 和定理 2				21
				F					22
			F	T	定理 1				23
				F					24
	F	T	T	T	$\mathcal{T}_{\leq 1}$	$(\mathcal{T}_{<1})^2$	$(\mathcal{T}_{\leq 1})_s$	$((\mathcal{T}_{<1})^2)_s$	25
				F	$\mathcal{T}_{\leq n}$	$(\mathcal{T}_{<n})^2$	$(\mathcal{T}_{\leq n})_s$	$((\mathcal{T}_{<n})^2)_s$	26
			F	T	定理 8	$\mathcal{T}_1^{odd}$	$\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$	$(\mathcal{T}_1^{odd})_s$	27
				F	$\mathcal{T}_{m,n}$	$(\mathcal{T}_{m,\ n})^2$	$(\mathcal{T}_{m,\ n})_s$	$((\mathcal{T}_{m,n})^2)_s$	28
		F	T	T	定理 2				29
				F					30
			F	T	定理 6	$\mathcal{T}_1^\infty$	$\mathcal{T}_{1,\infty}^{\neq}$	$(\mathcal{T}_1^\infty)_s$	31
				F		$\mathcal{T}_2^\infty$	$\mathcal{T}_{2,\infty}^{\neq}$	$(\mathcal{T}_2^\infty)_s$	32

表 1：所有可能的理论性质组合汇总。红色单元格表示不可能的组合。第 26 行：$n > 1$；第 28 行：$m > 1$、$n > 1$ 和 $|m - n| > 1$。

我们现在介绍这些理论：第 4.1 节介绍基于空单排序签名的理论；第 4.2 节接着介绍下一列，即基于多排序空签名的理论。其中一些理论建立在前一列理论的基础上，但也有一些是全新的。第 4.3 节介绍下一列，即基于非空签名的单排序理论。在这里，我们使用两种构造方法，从先前介绍的理论中生成新的理论。第一种构造方法向空签名添加一个函数符号（以保留所有性质的方式），第二种构造方法则保留除凸性之外的所有性质，从而使得.....

Name	公理化
$\mathcal{T}_{\geq n}$	$\{\psi_{\geq n}\}$
$\mathcal{T}_{\infty}$	$\{\psi_{\geq k} : k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}^{\infty}_{even}$	$\{\neg\psi_{=2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_{n,\ \infty}$	$\{\psi_{=n} \vee \psi_{\geq k} :\ k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_{\leq n}$	$\{\psi_{\leq n}\}$
$\mathcal{T}_{m,n}$	$\{\psi_{=m} \vee \psi_{=n}\}$

图 3： Σ_1-理论。

Name	公理化
$\mathcal{T}_{2,\ 3}$	$\{\ (\psi^{\sigma}_{=2} \wedge \psi^{\sigma_2}_{\geq k})\ \vee (\psi^{\sigma}_{\geq 3} \wedge \psi^{\sigma_2}_{\geq 3}) :\ k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_1^{odd}$	$\{\psi^{\sigma}_{=1}\} \cup \{\neg\psi^{\sigma_2}_{=2k} :\ k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_1^{\infty}$	$\{\psi^{\sigma}_{=1}\} \cup \{\psi^{\sigma_2}_{\geq k} :\ k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}_2^{\infty}$	$\{\psi^{\sigma}_{=2}\} \cup \{\psi^{\sigma_2}_{\geq k} :\ k \in \mathbb{N}\}$

图4： Σ_2-理论。

以统一的方式构造非凸示例。当这些构造不足以满足要求时，我们还提出了新的理论。最后，第4.4节描述了基于非空多排序签名的理论。[4]

4.1 单排序空签名上的理论

单排序空签名 Σ_1 上的理论的公理化见图 3。下面对其作简要描述。

对于每个 $n > 0$， $\mathcal{T}_{\geq n}$ 包含论域基数至少为 n的所有结构； $\mathcal{T}_{\infty}$ 是包含论域为无限集的所有结构的理论； $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 包含其论域中的元素数量为偶数或无限的结构，该理论在 [13], 中定义，并在那里证明其为有限可见证的，但既不光滑，也不强有限可见证。支持表 1 的证明还表明，它是稳定无限且凸的。$\mathcal{T}_{n,\ \infty}$ 包含论域中恰好有 n 个元素或有无限多个元素的结构； $\mathcal{T}_{\leq n}$ 包含其论域中至多有 n 个元素的所有结构；对于正整数 m 和 n， $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 包含论域中恰好有 m 个元素或恰好有n 个元素的结构。理论示例的第一列至此完成。

例 1。理论 $\mathcal{T}_{\geq n}$ 具备所有考察的性质，而 $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 仅具备有限见证性。

4.2 空双排序签名上的理论

接下来，我们介绍空双排序签名上的理论。在许多情况下，只需向第 4.1 节中定义的某个理论添加一个平凡排序即可。如果无法做到这一点，我们就引入新的理论。

4.2.1 向理论添加一个排序 任何 Σ_1-理论都可以通过将排序 σ_2 添加到签名中（不改变公理化），直接用于生成一个 Σ_2-理论。形式化表述如下：

定义 4. 设 $\mathcal{T}$ 是一个 Σ_1-理论。$(\mathcal{T})^2$ 是由 Ax($\mathcal{T}$) 公理化的 Σ_2-理论。

[4] 各理论具有所述性质的证明见附录。

引理 3. 设 $\mathcal{T}$ 是一个 Σ_1-理论。那么： $\mathcal{T}$ 关于 $\{\sigma\}$ 是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸，当且仅当 $(\mathcal{T})^2$ 分别关于 $\{\sigma, \sigma_2\}$ 是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸。

利用定义 4 和引理 3，我们可以通过扩展前一列中的相应理论，补充示例第二列中的许多行。

例 2。$(\mathcal{T}_{\geq n})^2$ 是一个关于两个排序 σ 和 σ_2的理论，其结构必须在 σ 的论域中至少包含 n 个元素（但对 σ_2的论域大小没有限制）。如表 1 的第一行所示，$\mathcal{T}_{\geq n}$ 满足所有所考察的性质。根据引理 3，$(\mathcal{T}_{\geq n})^2$也满足这些性质。

4.2.2 关于 $\boldsymbol{\Sigma_2}$ 的其他理论 在某些行中，例如第 3 行，并不存在可供扩展的关于 Σ_1 的理论。在这种情况下，我们无法利用定义 4 构造多排序变体。

我们引入图 4 所示的理论来涵盖这些情况。理论 $\mathcal{T}_{2,\ 3}$ 包含两类结构：(i) 两个论域都至少包含 3 个元素的结构；以及 (ii) σ 的论域中恰好包含两个元素、而 σ_2 的论域中包含无限多个元素的结构。理论 $\mathcal{T}_1^{odd}$的结构中， σ 的论域恰好包含一个元素，而 σ_2的论域包含奇数个或无限多个元素。理论 $\mathcal{T}_1^{\infty}$与之类似：其结构中 σ 的论域恰好包含一个元素，而 σ_2的论域包含无限多个元素。最后，$\mathcal{T}_2^{\infty}$与 $\mathcal{T}_1^{\infty}$类似，只是其结构在 σ的论域中恰好包含 2 个元素。

例 3。理论 $\mathcal{T}_{2,3}$ 最初在 [5] 中定义，后来在 [13], 中使用，并证明它是礼貌的（因此也是光滑、稳定无限且有限可见证的），但并非强礼貌的（因此不是强有限可见证的）。表 1 的论证证明表明，$\mathcal{T}_{2,3}$ 也是凸的。[5]

4.3 T 关于单排序非空符号的理论 性质

我们继续查看表 1 的下一列，即单排序非空签名。第 4.3.1 节展示了如何从空签名上的单排序理论构造非空理论，同时保留它们的所有性质。在第 4.3.2 节中，我们提供了一种类似的构造，该构造从示例第一列中的理论生成非凸理论。在第 4.3.3 节中，我们介绍了上述构造未涵盖的其他理论。其中两个理论将在第 4.3.4 节中作更详细的描述。

4.3.1 扩展理论时加入一元函数符号并保留性质 对于空签名上的理论，我们总能通过引入一个函数符号并将其解释为恒等函数，在非空签名上构造出相应的变体。这种扩展保留了我们所考虑的所有性质。下面将这一点形式化。

定义5. 设 Σ_n 是一个带有排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的空签名，且 $\mathcal{T}$ 是一个 Σ_n-理论。签名 Σ_s^n 具有排序 S，以及一个元数为 $\sigma_1 \to \sigma_1$ 的一元函数符号 s；$(\mathcal{T})_s$ 是由 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T}) \cup \{\forall x.\, [s(x) = x]\}$ 公理化的 Σ_s^n-理论，其中 x 是排序为 σ_1 的变量。

引理 4. 对于每个在带有排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的空签名 Σ_n 上的理论 $\mathcal{T}$： $\mathcal{T}$ 关于 S 稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸，当且仅当 $(\mathcal{T})_s$ 分别关于 S 稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸。

[5] 我们感谢 Oded Padon 提出了这样一个问题：是否存在一种礼貌且凸、但并非强礼貌的理论。

$$\psi_\vee = \forall x.\, \left[\left(s^2(x) \;= x\right) \vee \left(s^2(x) \;= s(x)\right)\right]$$

图 5：非凸理论的公式 $\psi_\vee$。

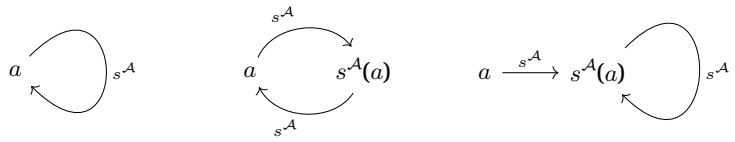

图 6： $\psi_\vee$ 成立时的可能情形

我们在表 1 的多个地方使用运算符 $(\cdot)_s$，以便从基于 Σ_1 和 Σ_2的现有示例中，获得非空签名中的示例。

示例 4。（$\mathcal{T}_{\geq n}$）$_s$ 是一个单排序理论，其结构至少具有 n 个元素，并将函数符号 s 解释为恒等映射。如表 1示例的第一列所示， $\mathcal{T}_{\geq n}$ 满足所有所考虑的性质。根据引理 4，（$\mathcal{T}_{\geq n}$）$_s$也满足这些性质。

4.3.2 使理论成为非凸理论 我们介绍的最后一种通用构造，旨在通过对理论进行变换，创建一个非凸变体，同时保留我们所考虑的其他性质。只需添加一个一元函数符号 s 即可实现。为定义这样的理论，我们使用图5中的公式$\psi_\vee$。直观地说， $\psi_\vee$ 表示，在满足该公式的解释 $\mathcal{A}$ 中， $s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a))$ 必须等于 $s^{\mathcal{A}}(a)$ 或其自身 a ；换句话说，要么 $a = s^{\mathcal{A}}(a) = s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a))$，要么 $a = s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a)) \neq s^{\mathcal{A}}(a)$，要么$a \neq s^{\mathcal{A}}(a) = s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a))$，如图6所示。

这对于定义非凸理论尤其有用，因为 $(s^2(x) = x) \vee (s^2(x) = s(x))$ 在该理论中有效，但 $s^2(x) = x$ 和 $s^2(x) = s(x)$ 都无效。当然请注意，只有当论域中至少有两个可用元素时，才可能存在非凸性——否则，所有等式都得到满足。

定义 6. 设 $\mathcal{T}$是一个带有排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的空签名上的理论。那么 $(\mathcal{T})_\vee$ 是由 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T}) \cup \{\psi_\vee\}$ 公理化的Σ_s^n理论。

引理 5. 设 $\mathcal{T}$是一个带有排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的空签名 Σ_n 上的理论。那么：$(\mathcal{T})_\vee$ 相对于 S 稳定无限、光滑、有限可见证或强有限可见证，当且仅当 $\mathcal{T}$相对于 S 分别稳定无限、光滑、有限可见证或强有限可见证。此外，若 $\mathcal{T}$有一个满足 $|\sigma_1^{\mathcal{A}}| \geq 2$ 的模型 $\mathcal{A}$，则 $(\mathcal{T})_\vee$ 相对于 S 不是凸的。

例5。理论 $(\mathcal{T}_{\geq n})_\vee$ 是一个单排序理论，其结构至少具有 n 个元素，并以满足 $\psi_\vee$ 的方式解释符号 s（即，对于论域中的每个元素 a，图6中的某一种情形成立）。如前所述， $\mathcal{T}_{\geq n}$ 满足所有性质。根据引理 5，理论 $(\mathcal{T}_{\geq n})_\vee$满足除凸性以外的所有性质。

Name	Axiomatization
$\mathcal{T}_f$	$\{[\psi^{=}_{\geq f_1(k)} \wedge \psi^{\neq}_{\geq f_0(k)}] \vee \bigvee_{i=1}^{k} [\psi^{=}_{=f_1(i)} \wedge \psi^{\neq}_{=f_0(i)}] : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
$\mathcal{T}_f^s$	$Ax(\mathcal{T}_f) \cup \{\psi_\vee\}$
$\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$	$\{\psi_{=1} \vee [\neg\psi_{=2k} \wedge \forall x.\, \neg(s(x) = x)] : k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}^{\neq}_{1,\infty}$	$\{\psi_{=1} \vee [\psi_{\geq k} \wedge \forall x.\, \neg(s(x) = s)] : k \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{T}^{\neq}_{2,\infty}$	$\{[\psi_{=2} \wedge \forall x.\, (s(x) = x)] \vee [\psi_{\geq k} \wedge \forall x.\, \neg(s(x) = x)] : k \in \mathbb{N}\}$

Fig. 7: Σ theories

4.3.3 关于 Σ_s 的其他理论每当存在具有某些性质的 Σ_1 理论时，我们都可以使用上述技术之一，得到具有相同性质的 Σ_s 理论。为了涵盖不存在相应 Σ_1 理论的情况，我们使用图 7 中展示并在下文描述的理论。

我们从 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$, $\mathcal{T}^{\neq}_{1,\infty}$ 和 $\mathcal{T}^{\neq}_{2,\infty}$ 开始，将关于 $\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{T}_f^s$的讨论留到第 4.3.4 节。理论$\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$ 具有结构 $\mathcal{A}$，其元素数量要么是无限多个，要么是奇数，并且具有如下性质：如果$\mathcal{A}$ 并非平凡，则对于所有 $a \in \sigma^{\mathcal{A}}$, $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$。理论 $\mathcal{T}^{\neq}_{1,\infty}$ 的所有结构 $\mathcal{A}$ 要么：(i) 是平凡的；要么 (ii) 具有无限多个元素，且对于每个 $a \in \sigma^{\mathcal{A}}$, $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$。类似地，$\mathcal{T}^{\neq}_{2,\infty}$ 具有结构 $\mathcal{A}$，这些结构要么：(i) 恰有两个元素，并将 s 解释为恒等映射；要么 (ii) 具有无限多个元素，并以这样的方式解释 s：对于所有 $a \in \sigma^{\mathcal{A}}$, $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$。

4.3.4 关于理论 T_f 和 T_f^s现在我们来介绍理论 $\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{T}_f^s$。这些理论的重要之处在于，它们都是礼貌但非强礼貌的单排序理论（第一个还是凸的，第二个则不是）。它们的存在完善了 [13], 的结果；该结果引入了一种礼貌但非强礼貌的双排序理论（即 $\mathcal{T}_{2,\,3}$）。

在公理化中，我们使用图 8 中的公式，其中 s 是一个一元函数符号。$\psi^{=}_{\geq n}$ ($\psi^{=}_{=n}$)表示结构 $\mathcal{A}$ 中至少（恰好）有 n 个元素 a 满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$；类似地，$\psi^{\neq}_{\geq n}$($\psi^{\neq}_{=n}$)表示结构 $\mathcal{A}$ 中至少（恰好）有 n 个元素 a 满足 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$。

此外，公理化还要求一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数 f，它是不可计算的，并且具有这样的性质：对于 $k > 0$, f 将区间 $[1, 2^k]$ 中的一半数字映射为 1，另一半映射为 0。下面将形式化这种函数的存在性。我们先定义计数函数 f_0 和 f_1。

定义 7. 设 $f\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$. 对于 $i \in \{0,1\}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, $f_i(n)$ 定义如下：$f_i(n) = |f^{-1}(i) \cap [1,n]|$.

直观地说，$f_0(n)$ 统计了 1 到 n （含）之间有多少个数经 f 映射为 0，而 $f_1(n)$ 统计了有多少个数映射为 1。由于 $f(n)$ 总是等于 0 或 1，因此很容易看出，对于每个 $n > 0$, $n = f_1(n) + f_0(n)$.

引理 6. 存在一个函数 $f\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$，使得 $f(1) = 1$，并具有以下两个性质：

1. f 不可计算；2. 对每个 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$f_0(2^k) = f_1(2^k)$。

$$\psi^{=}_{\geq n} = \exists x_1.\cdots\exists x_n.\,\big[\bigwedge_{i=1}^{n}\big(s(x_i)=x_i\big)\wedge\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\neg(x_i=x_j)\big]$$

$$\psi^{\neq}_{\geq n} = \exists x_1.\cdots\exists x_n.\,\big[\bigwedge_{i=1}^{n}\neg\big(s(x_i)=x_i\big)\wedge\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\neg(x_i=x_j)\big]$$

$$\psi^{=}_{=n} = \exists x_1.\cdots\exists x_n.\,\big[\bigwedge_{i=1}^{n}\big(s(x_i)=x_i\big)\wedge\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\neg(x_i=x_j)\wedge\forall x.\,\big[\big(s(x)=x\big)\rightarrow\bigvee_{i=1}^{n}x=x_i\big]\big]$$

$$\psi^{\neq}_{=n} = \exists x_1.\cdots\exists x_n.\,\big[\bigwedge_{i=1}^{n}\neg\big(s(x_i)=x_i\big)\wedge\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}\neg(x_i=x_j)\wedge\forall x.\,\big[\neg\big(s(x)=x\big)\rightarrow\bigvee_{i=1}^{n}x=x_i\big]\big].$$

图 8：带有一元函数符号 s 的签名的基数公式。

例 6. 将所有自然数都映射为 0 的常值函数，既不满足引理 6 的第一个条件，也不满足第二个条件。将偶数映射为 0、奇数映射为 1 的函数满足第二个条件，但不满足第一个条件。当然，任何不可计算函数都满足第一个条件。例如，在某种编码下，可以定义一个函数：如果给定数字所编码的图灵机停机，则返回 1，否则返回 0。要找到一个同时满足这两个条件的函数，则更具挑战性。

设 f 是具有引理 6 中所列性质的某个函数。现在我们可以定义 Σ_s 上的 $\mathcal{T}_f$（注意，f 本身不是签名的一部分，而是用于帮助定义 $\mathcal{T}_f$ 的公理）。$\mathcal{T}_f$ 由满足以下条件的结构 $\mathcal{A}$ 组成：或者（i）具有有限基数 n，其中有 $f_1(n)$ 个元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a)=a$，且有 $f_0(n)$ 个元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a)\neq a$（因此，对于 $k\leq n$，$\mathcal{A}$ 满足 $\psi^{=}_{\geq f_1}(k)\wedge\psi^{\neq}_{\geq f_0}(k)$，并且 $\psi^{=}_{=f_1}(n)\wedge\psi^{\neq}_{=f_0}(n)$，进而 $\bigvee_{i=1}^{k}[\psi^{=}_{=f_1}(i)\wedge\psi^{\neq}_{=f_0}(i)]$ 对所有 $k\geq n$ 均成立）；或者（ii）有无限多个元素，并且满足每个条件的元素也有无限多个，$s^{\mathcal{A}}(a)=a$ 且 $s^{\mathcal{A}}(a)\neq a$（因此，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，$\mathcal{A}$ 满足 $\psi^{=}_{\geq f_1}(k)\wedge\psi^{\neq}_{\geq f_0}(k)$）。注意，这一描述是良定义的，因为一个元素总是必须满足 $s^{\mathcal{A}}(a)=a$ 或 $s^{\mathcal{A}}(a)\neq a$，但绝不会两者都满足，也不会两者都不满足。理论 $\mathcal{T}^s_f$ 与 $\mathcal{T}_f$ 类似，但除了 Ax（$\mathcal{T}_f$）之外，其结构还必须满足 $\psi_{\vee}$。

备注 1。由 $\mathcal{T}_f$ 构造 $\mathcal{T}^s_f$与定义 6 中的一般构造非常相似。然而，相应的结果——即除凸性之外的所有性质都能通过该操作得到保留——仅在引理 5 中针对原签名为空的情况得到了证明，而 $\mathcal{T}_f$并不属于这种情况。由 $\mathcal{T}_f$ 得到 $\mathcal{T}^s_f$并不是通过添加一个函数符号实现的，而是通过改变已有函数符号的公理化实现的。尽管我们确实证明了 $\mathcal{T}^s_f$具备所需的性质，但对于任意签名，能够保留已有函数符号而非添加新函数符号的、类似于引理 5 的一般结果，仍有待未来工作完成。

例 7。设 $\mathcal{A}_n$ 是一个 Σ_s-模型，其论域为 $\{a_1,\ldots,a_n\}$，满足：

$$s^{\mathcal{A}_n}(a_i)=\begin{cases}a_i & \text{if } 1\leq i\leq f_1(n);\\ a_1 & \text{if } f_1(n)<i\leq n\end{cases}$$

（如果 $n = 1$，则第二个条件可以为空。）那么 $\mathcal{A}_n$ 既是 $\mathcal{T}_f$ 的模型，也是 $\mathcal{T}_f^s$的模型 .

如果 κ 是一个无限基数，令 $\mathcal{A}_\kappa$ 为论域 $A \cup \{a_n$ 上的一个 Σ_s-模型： $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$（其中 A 是一个与 $\{a_n$ 不相交且基数为 κ 的集合： $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$），使得对于每个 $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$， $s^{\mathcal{A}_\kappa}(a_i) = a_i$，并且对于每个 $a \in A$， $s^{\mathcal{A}_\kappa}(a) = a_1$。那么 $\mathcal{A}_\kappa$ 是 $\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{T}_f^s$ 的模型。

为了证明 $\mathcal{T}_f$ 是光滑且有限可见证的，我们在给定一个 $\mathcal{T}_f$-解释的情况下，通过（可能）向该解释中添加两个不相交的元素集合来构造另一个 $\mathcal{T}_f$-解释：其中一个集合的元素将满足 $s(a) = a$，另一个集合的元素将满足 $s(a) \neq a$。

为了证明它不是强有限可见证的，我们使用以下引理；这些引理本身也很有趣。根据第一个引理，$\mathcal{T}_f$ 的最小基数函数不是可计算的。

引理 7。 $\mathcal{T}_f$ 的最小基数函数不可计算。

为了证明 $\mathcal{T}_f$ 不是强有限可见证，还需要第二个引理，而这个引理相当令人惊讶。事实证明，对于无量词公式， $\mathcal{T}_f$可满足公式的集合与可满足公式的集合相同。也就是说，尽管 $\mathcal{T}_f$ 的定义非常复杂，但在无量词公式上，它所诱导的可满足性关系与最简单的理论——由空集公理化的理论（或者等价地，由所有有效的一阶语句公理化的理论）——相同。

引理 8。每个可满足的无量词 Σ_s公式都是 $\mathcal{T}_f$可满足的。

请注意，引理 8 对一般的带量词公式并不成立。例如，公式 $\forall x.\, s(x) \neq x$可满足，但不是 $\mathcal{T}_f$可满足的：因为 $f(1) = 1$，每个 $\mathcal{T}_f$解释 $\mathcal{A}$都必须至少有一个元素 a 满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$。

关于 $\mathcal{T}_f^s$的论证非常相似，只需对 $\mathcal{T}_f$的相应证明稍作修改。

注释2. 我们说明关于 $\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{T}_f^s$的结果与 [4]的结果之间的联系。这里我们证明， $\mathcal{T}_f$（$\mathcal{T}_f^s$）是礼貌的，但并非强礼貌。 [4] 的图 1 总结了单排序情形下这两种性质之间的关系。图中表明，由公理的全称集合公理化、且其无量词可满足性问题可判定的礼貌理论都是强礼貌的。尽管 $\mathcal{T}_f$ 的无量词公式可判定（这是引理 8 的推论），但这里给出的表述显然不是全称理论。另一方面， [4] 还表明，对于那些判定一个有限解释是否属于该理论的问题可判定的可判定礼貌理论，它们也都是强礼貌的。然而，给定一个解释，判定其是否属于 $\mathcal{T}_f$ （以及 $\mathcal{T}_f^s$）是不可判定的：这样的算法也会导出一个计算 f 的算法。因此，理论 $\mathcal{T}_f$ 和 $\mathcal{T}_f^s$是礼貌的，但不符合 [4]中强礼貌性的判据。事实上，它们并非强礼貌。

4.4 多排序非空签名上的理论

对于表 1 的最后一列，所有可能的理论都可以通过结合定义 4 至 6，从已经定义的理论中得到，因此无需专门针对多排序非空签名介绍其他理论。

例 8. 第 1 行的最后一列包含理论 $((\mathcal{T}_{\geq n})^2)_s$，它是根据定义5从 $(\mathcal{T}_{\geq n})^2$ 得到的；而后者则是根据定义 4 从 $\mathcal{T}_{\geq n}$ 得到的。该理论具有所有这些性质，包括凸性。若要得到一个非凸变体，可以用类似的方法构造理论 $((\mathcal{T}_{\geq n})^2)_\vee$，但改用定义 6，而非定义5。

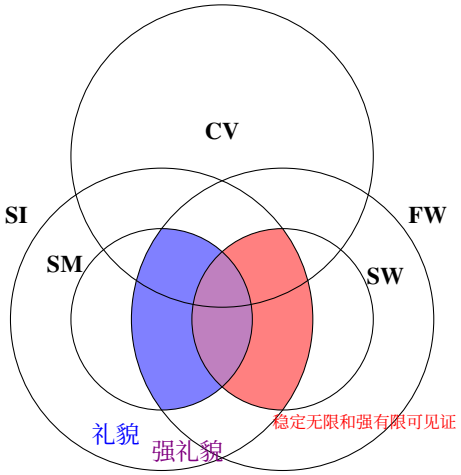

图 9：本文研究的各种概念示意图。

对于多排序非空签名，除了定理 1 和定理 2 所导致的显然不可能的情况之外，我们总能为每种性质组合找到一个例子（即强有限可见证但非有限可见证的理论，以及光滑但非稳定无限的理论）。图9对此作了清晰的展示。定理 1 和定理 2 在图中通过圆圈的位置表示：光滑理论对应的圆圈完全位于稳定无限理论对应的圆圈内；强有限可见证理论与有限可见证理论也同样如此。因此，对于图中的每个区域，表 1 最右列都有一个例子，唯一的例外是代表独角兽理论的区域。

注释 3。对于非空签名，我们选择包含函数而非谓词。这并非本质上的，因为我们可以通过将函数符号替换为谓词符号来实现：把函数结果的排序作为谓词元数的最后一个分量，然后添加一个迫使该谓词成为函数的公理。

5 不具备光滑性的礼貌组合

理论的礼貌组合在 [11] 中被提出。其中声称，为了使用礼貌组合将一个理论$\mathcal{T}$与任意其他理论进行组合，只需 $\mathcal{T}$ 具备光滑性和有限见证性（即礼貌）。后来，在 [7], 中，这一条件得到了修正，并表明实际上对 $\mathcal{T}$有更强的要求：它必须具备光滑性和强有限见证性（即强礼貌），才能适用于该组合方法。

鉴于将强有限见证性弱化为有限见证性会导致条件不足，自然会问，是否还有其他方式可以弱化礼貌组合所需的条件。这里我们不将强有限见证性弱化为有限见证性，而是考虑另一种选择：将光滑性条件弱化为稳定无限性。因此，本节的主要结果是：对于具备稳定无限性和强有限见证性的理论，即使它们不具备光滑性，也可以进行礼貌组合。

通过观察图9（忽略代表凸性这一性质的圆形区域，因为凸性与本节无关），可以理解我们的贡献。 [7] 表明，对于代表光滑且强有限可见证理论的紫色

区域，可以进行礼貌组合。 [7] 还给出了一个例子，表明将同一组合方法扩展到代表光滑且有限可见证理论的蓝色区域会导致错误。这里，我们转而将礼貌理论组合扩展到代表稳定无限且强有限可见证理论的红色区域。现在，红色区域若非空，其中就只有独角兽理论（见第4节）。如果这类理论不存在，那么结论便可直接得出。不过，在此问题得到解决之前，我们仍给出一个直接证明，而不论独角兽理论是否存在。

下一个定理表明，礼貌理论组合不仅可以用于必然不是强礼貌（光滑且强有限可见证）的理论，也可以用于仅仅是稳定无限且强有限可见证的理论。

定理 9。设 Σ_1 和 Σ_2 是不相交的签名，其排序为 S_1 和 S_2；设 $\mathcal{T}_1$ 是一个 Σ_1-理论，$\mathcal{T}_2$ 是一个 Σ_2-理论，并且 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$；再设 ϕ_1 是一个无量词的 Σ_1-公式，ϕ_2 是一个无量词的 Σ_2-公式。

假设 $\mathcal{T}_2$ 关于 $S = S_1 \cap S_2$ 是稳定无限且强有限可见证的，并具有强见证 wit。令 $\psi = \text{wit}(\phi_2)$，对于每个 $\sigma \in S$ 和 $V = \bigcup_{\sigma \in S} \text{vars}_\sigma(\psi)$，令 $V_\sigma = \text{vars}_\sigma(\psi)$。则以下各项等价：

1. $\phi_1 \wedge \phi_2$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的；2. 存在一个关于 V 的排列 δ_V，使得 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}_1$-可满足的，且 $\psi \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}_2$-可满足的。

这一结果大幅提升了礼貌理论组合的最先进水平；以往需要证明其中一个理论既光滑又强有限可见证。得益于这一定理，证明光滑性可以改为证明稳定无限性，而后者通常要容易得多。

6 结论

如前所述，本文提出了两项主要贡献，二者均围绕理论组合这一主题展开。在第4节中，我们提供了一张表格，其中列举了几乎所有已知并非不可能的稳定无限性、光滑性、凸性、有限见证性和强有限见证性的组合示例。第3节则给出了定理，证明了所提供示例的紧确性。第二项贡献是一条新的组合定理，根据该定理，只要以稳定无限性取代光滑性，就可以在不具备光滑性的情况下进行礼貌理论组合。

本文所述研究引出了许多未来工作方向。首先需要解决独角兽理论是否存在这一问题：如果不存在，证明可能需要对多类型逻辑的向上 Löwenheim–Skolem 定理作出有趣的推广，并由此推出强礼貌理论不过是稳定无限且强有限可见证的理论，从而大大简化定理 9 的证明；如果独角兽理论确实存在，则值得探究能否以某种有意义的方式将它们组合起来。另一个未来工作方向是考察表格中的其他模型论性质，例如闪耀性、温和性、灵活性等，以及对于包含多个排序的签名，取排序的真子集会产生何种影响。

参考文献

[1] Haniel Barbosa、Clark W. Barrett、Martin Brain、Gereon Kremer、Hanna Lachnitt、Makai Mann、Abdalrhman Mohamed、Mudathir Mohamed、Aina Niemetz、Andres Nötzli、Alex Ozdemir、Mathias Preiner、Andrew Reynolds、Ying Sheng、Cesare Tinelli 和 Yoni Zohar。cvc5：一款通用且达到工业级水平的 SMT 求解器。载于 TACAS（1），《计算机科学讲义》第 13243 卷，第 415–442 页。Springer，2022年。[2] Clark W. Barrett、David L. Dill 和 Aaron Stump。Shostak 决策过程组合方法的推广。载于 Alessandro Armando 编，《第 4 届组合系统前沿国际研讨会论文集》（FroCoS '02），《人工智能讲义》第 2309 卷，第 132–146 页。Springer-Verlag，2002年4月。意大利圣玛格丽塔利古雷。[3] Aaron R. Bradley 和 Zohar Manna。《计算演算》。Springer Berlin Heidelberg，2007年。[4] Filipe Casal 和 João Rasga。重新审视闪耀性与礼貌性的等价关系。载于 LPAR，《计算机科学讲义》第 8312 卷，第 198–212 页。Springer，2013年。[5] Filipe Casal 和 João Rasga。闪耀理论与强礼貌理论的多排序等价关系。《自动推理杂志》，60(2)：221–236，2018年2月。[6] Pascal Fontaine。用于一阶逻辑可判定片段的理论组合。载于 Silvio Ghilardi 和 Roberto Sebastiani 编，《组合系统前沿》，第 263–278 页，柏林、海德堡，2009年。Springer Berlin Heidelberg。[7] Dejan Jovanovi´c 和 Clark Barrett。重新探讨礼貌理论。技术报告 TR2010-922，纽约大学计算机科学系，2010年1月。[8] Sava Krsti´c、Amit Goel、Jim Grundy 和 Cesare Tinelli。参数化理论下的组合可满足性。载于 O. Grumberg 和 M. Huth 编，《第 13 届系统构造与分析工具和算法国际会议论文集》（葡萄牙布拉加），《计算机科学讲义》第 4424 卷，第 618–631 页。Springer，2007年。[9] María Monzano。多类型逻辑导论。载于 K. Meinke 和 J. V. Tucker 编，《多排序逻辑及其应用》，Wiley 专业计算丛书。Wiley，1993年。[10] Greg Nelson 和 Derek C. Oppen。通过协作决策过程进行简化。《ACM 编程语言与系统汇刊》，1(2)：245–257，1979年10月。[11] Silvio Ranise、Christophe Ringeissen 和 Calogero G. Zarba。使用多类型逻辑组合数据结构与非稳定无限理论。载于 Bernard Gramlich 编，《第 5 届组合系统前沿国际研讨会论文集——FroCoS'05》，《人工智能讲义》第 3717 卷，第 48–64 页，奥地利维也纳，2005年9月。Springer。[12] Ying Sheng、Yoni Zohar、Christophe Ringeissen、Jane Lange、Pascal Fontaine 和 Clark W. Barrett。代数数据类型的礼貌组合。《自动推理杂志》，66(3)：331–355，2022年。[13] Ying Sheng、Yoni Zohar、Christophe Ringeissen、Andrew Reynolds、Clark Barrett 和 Cesare Tinelli。礼貌性与稳定无限性：强强联合。载于 André Platzer 和 Geoff Sutcliffe 编，《自动演绎——CADE 28》，第 148–165 页，Cham，2021年。Springer International Publishing。[14] Cesare Tinelli 和 Calogero Zarba。排序逻辑中理论决策过程的组合。技术报告 04-01，爱荷华大学计算机科学系，2004年2月。

A 附录的其他概念

我们提供一些将在附录中使用的其他概念。

如果将公式 φ 中变量 x 的每次出现替换为 y，则将所得公式记为 $\varphi[x/y]$；如果将 φ 中从变量 x_1 到变量 x_n 分别替换为从 y_1 到 y_n，则将所得公式记为 $\varphi[x_1/y_1, \cdots, x_n/y_n]$。

以下结果是 [3] 第 10 节中习题 10.5 的推论。

定理 10。如果 $\mathcal{T}$ 是一个建立在仅含一个一元函数的单排序签名上的理论，并且 $\mathcal{T}$ 由空集公理化（即其函数未作解释），那么 $\mathcal{T}$ 是凸的。

B 定理 4 的证明

定理 4. 如果 Σ-理论 $\mathcal{T}$ 关于某个排序集合 S 是凸的，并且对于每个 $\sigma \in \mathcal{S}$，$\vdash_{\mathcal{T}} \psi^{\sigma}_{\geq 2}$，那么 $\mathcal{T}$ 关于 S 是稳定无限的。

证明。假设 $\mathcal{T}$ 相对于 S 不是稳定无限的：那么存在一个无量词公式 ϕ'，它是 $\mathcal{T}$-可满足的，但每个满足 ϕ' 的 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$ 都会使某个 $\sigma \in S$ 的 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 有限。由于每个无量词公式都等价于若干文字合取的析取，这些文字合取称为其析取范式（DNF），而文字合取称为立方体，我们断言 ϕ' 的 DNF 中存在一个立方体 ϕ 也具有这一性质：假设这实际上不成立，因此 ϕ' 的 DNF 中每个 $\mathcal{T}$-可满足的立方体，都由一个 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$ 满足，且对每个 $\sigma \in S$，$\sigma^{\mathcal{A}}$ 都是无限的；由于 ϕ' 等价于这些立方体的析取，因此也必定由这些 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$ 满足，这就导致矛盾。总而言之，存在一个文字合取 ϕ，它是 $\mathcal{T}$-可满足的，但每个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$ 都必须满足 $\min\{|\sigma^{\mathcal{A}}| : \sigma \in S\}$ 有限。

取 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\phi)$ 后可知，对于任意 $\mathcal{T}'$-解释 $\mathcal{B}$，对于采用公理化 $\mathrm{Ax}' = \mathrm{Ax}(\mathcal{T}) \cup \{\exists \vec{x}.\, \phi\}$ 的理论，其 $\min\{|\sigma^{\mathcal{B}}| : \sigma \in S\}$ 是有限的。因此，集合

$$Ax' \cup \{\psi^{\sigma}_{\geq k} : \sigma \in S, k \in \mathbb{N}\}$$

是不可满足的，因为后一个公式集合表明，对于每个$\sigma \in S$，解释的 σ 排序的论域是无限的。根据引理 1，对于每个 $\sigma \in S$，必然存在某个 K_σ 以及 Ax' 的一个有限子集，使得该子集与集合 $\{\psi^{\sigma}_{\geq K_\sigma} : \sigma \in S\}$ 一起是不可满足的（注意，由于当 $k' \geq k$ 时公式 $\psi^{\sigma}_{\geq k'} \to \psi^{\sigma}_{\geq k}$ 得到满足，因此确实如此；所以取 K_σ 作为这些指标中的最大值就足够了）。当然，这意味着 $\mathrm{Ax}' \cup \{\psi^{\sigma}_{\geq K_\sigma} : \sigma \in S\}$ 是不可满足的，因此，如果 $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{T}'$-解释，并且对于每个排序 $\tau \in S \setminus \{\sigma\}$都有 $|\tau^{\mathcal{B}}| \geq K_\tau$，那么 $|\sigma^{\mathcal{B}}| < K_\sigma$。

令 $z_{\sigma,1}$ 至z_{σ,K_σ} 为每个 $\sigma \in S$ 的排序 σ 上的新变量：现在我们希望证明

$$\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{\sigma \in S} \bigvee_{1 \leq i < j \leq K_\sigma} z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$$

但对于任意 $\sigma \in S$ 和 $1 \leq i < j \leq K_\sigma$，$\nvdash_{\mathcal{T}} \phi \to z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$，这与假设 $\mathcal{T}$ 是凸的这一事实相矛盾，因此可以得出结论：$\mathcal{T}$ 是稳定无限的。

因此，假设 $\mathcal{C}$ 是满足 ϕ 的一个 $\mathcal{T}$-解释（因而也是一个 $\mathcal{T}'$-解释），我们通过反证法证明它也必须满足 $\bigvee_{\sigma \in S} \bigvee_{1 \leq i < j \leq K_\sigma} z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$：假设对于所有 $\tau \in S \setminus \{\sigma\}$，$\mathcal{C}$ 都不满足 $\bigvee_{1 \leq i < j \leq K_\tau} z_{\tau,i} = z_{\tau,j}$，因此每种这些排序至少有 K_τ 个元素。根据我们对 $\mathcal{T}'$ 的分析，这意味着 $\sigma^{\mathcal{C}}$ 的元素少于 K_σ 个；由鸽巢原理，$\mathcal{C}$ 满足 $\bigvee_{1 \leq i < j \leq K_\sigma} z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$，因此 $\bigvee_{\sigma \in S} \bigvee_{1 \leq i < j \leq K_\sigma} z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$，正如我们先前所述。

但是，根据引理的一条假设，对于每个 $\sigma \in S$，任意 $\mathcal{T}$-解释在排序为 σ 的论域中都至少有两个元素；因此，如果 $\mathcal{C}$ 还满足 ϕ，那么对于每个 $\sigma \in S$ 以及每一对元素 $1 \leq i < j \leq K_\sigma$，鉴于 $z_{\sigma,i}$ 和 $z_{\sigma,j}$ 是未在 ϕ 中出现的变量，我们可以构造一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{C}_{\sigma,i,j}$，它与 $\mathcal{C}$ 的唯一区别在于赋予 $z_{\sigma,i}$ 和 $z_{\sigma,j}$ 的值；在这里，我们改为令 $z^{\mathcal{C}_{\sigma,i,j}}_{\sigma,i} \neq z^{\mathcal{C}_{\sigma,i,j}}_{\sigma,j}$。由于 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_{\sigma,i,j}$ 对 ϕ 中变量所赋的值一致，而且 ϕ 被 $\mathcal{C}$ 满足，因此 $\mathcal{C}_{\sigma,i,j}$ 满足 ϕ，但不满足 $z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$，这意味着

$$\nvdash_{\mathcal{T}} \phi \to z_{\sigma,i} = z_{\sigma,j}$$

对每个 $\sigma \in S$ 和 $1 \leq i < j \leq K_\sigma$，从而完成证明。 □

C 定理 5 的证明

定理 5：任何定义在空签名上的理论，若相对于其所有排序的集合是稳定无限的，则相对于任意排序集合都是凸的。

证明。固定一个空签名上的理论 $\mathcal{T}$，该理论相对于其所有排序的集合 S 是稳定无限的。假设 ϕ 是文字的合取，且 u_1、v_1、...、u_n、v_n 是排序属于 S 的某个子集的变量（例如，u_i 和 v_i 的排序均为 σ_i），并且满足 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} u_i = v_i$。

现在，很容易看出，对于 u_i 或者 v_i 不属于 ϕ 的情形，不可能有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to (u_i = v_i)$：事实上，取一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$。由于 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的，存在一个同样满足 ϕ 的无限 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$；分别将其在 u_i 和 v_i 上的取值改为不同于 $v_i^{\mathcal{A}'}$ 和 $u_i^{\mathcal{A}'}$ 的值，就得到第三个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}''$，它仍满足 ϕ，但不满足 $u_i = v_i$。因此，我们可以将范围限制为 $\{(u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)\}$ 中的配对 $(x_1, y_1) \dots (x_m, y_m)$：其中 x_i 和 y_i 均为 ϕ 中的变量，同时仍有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{m} x_i = y_i$；为简便起见，我们继续用 σ_j 表示 x_j 和 y_j 的排序。

现在，反设对于所有 $1 \le i \le m$ 都有 $\nvdash_{\mathcal{T}} \phi \to (x_i = y_i)$，则存在满足 ϕ 但不满足 $x_i = y_i$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}_i$；不失一般性地，依据 $\mathcal{T}$ 的稳定无限性，我们可以假设所有 $\mathcal{B}_i$ 在其所有排序上都是无限的，并且根据引理 2，我们还可以假设 $\mathcal{B}_1$ 至 $\mathcal{B}_m$ 在所有排序上都具有相同的可数论域（例如 $\mathbb{N}$）。这意味着，由于我们没有函数或谓词符号，所有解释 $\mathcal{B}_i$ 都基于同一个模型 $\mathcal{B}$，且该模型在每个论域中都是可数的。

现在，对于 $\mathcal{B}$ 上的任意 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}_\lambda$，我们通过规定当且仅当 $x^{\mathcal{B}_\lambda} = y^{\mathcal{B}_\lambda}$ 时，使 $xE_\lambda^\sigma y$ 成立，从而在 ϕ 中排序为 σ 的变量上定义一个等价关系 E_λ^σ；对于所有满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}_\lambda$，我们还定义一个等价关系 $xE^\sigma y$，当且仅当 $xE_\lambda^\sigma y$ 时成立。由于这些解释 $\mathcal{B}_i$，对于每个 i，都有 $x_i \overline{E^{\sigma_i}} y_i$，其中 E^{σ_i} 的补集为 $\overline{E^{\sigma_i}}$。现在，我们断言，可以在 $\mathcal{B}$ 上定义一个解释 $\mathcal{B}'$，使得对于 ϕ 中的变量 x 和 y，当且仅当 $x^{\mathcal{B}'} = y^{\mathcal{B}'}$ 时 $xE^\sigma y$：此外，$\mathcal{B}'$ 是一个满足 ϕ 但不满足 $\bigvee_{i=1}^{m} x_i = y_i$ 的 $\mathcal{T}$-解释，这就导致了矛盾。

定义 $\mathcal{B}'$相当容易：只需将 E^σ 的同一个等价类中的所有变量映射到同一个元素，并将不同等价类中的变量映射到不同元素即可；这显然可行，因为 $\mathcal{B}$ 的每个论域中都有可数多个元素。当然，此时 $x^{\mathcal{B}'} = y^{\mathcal{B}'}$ 当且仅当 $xE^\sigma y$。此外，由于我们讨论的是空签名，ϕ 是等式与不等式的合取：如果 x 和 y 的排序分别为 σ 和 $x = y$，且 $\neg(x = y)$ 是 ϕ中的一个文字，那么对于任何满足 ϕ的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}_\lambda$，我们必定也有其满足 $x = y$（$\neg(x = y)$），因此 $xE^\sigma y$（$x\overline{E^\sigma}y$）；这意味着 $x^{\mathcal{B}'} = y^{\mathcal{B}'}$（$x^{\mathcal{B}'} \neq y^{\mathcal{B}'}$），因此 $\mathcal{B}'$ 确实满足 ϕ。

最后，我们得出一个矛盾：由于 $\mathcal{B}'$ 对任何 $1 \le i \le m$ 都不满足 $x_i = y_i$，它不可能满足 $\bigvee_{i=1}^{m} x_i = y_i$，尽管它确实满足 ϕ。结论必定是，对于某个介于 1 和 m 之间的 i，$\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_i = y_i$。□

D 定理 6 的证明

引理 9. 如果 Σ 是一个不包含函数或谓词符号的签名，S 是一个排序集合，并且 $\mathcal{T}$ 是一个具有模型 $\mathcal{A}$ 的理论，其中所有论域都是无限的，那么 $\mathcal{T}$ 关于 S 是稳定无限的。

证明。设 ϕ 是一个无量词的 Σ 公式，$\mathcal{B}$ 是满足 ϕ 的一个 $\mathcal{T}$ 解释。对于每个 $\sigma \in S$，$\mathrm{vars}_\sigma(\phi)$ 是有限的，$\mathrm{vars}_\sigma(\phi)^{\mathcal{B}}$ 也是有限的，这意味着存在 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 的一个子集 $C(\sigma)$，其基数与 $\mathrm{vars}_\sigma(\phi)^{\mathcal{B}}$ 相同；令 $h_\sigma : \mathrm{vars}_\sigma(\phi)^{\mathcal{B}} \to C(\sigma)$ 为每个 $\sigma \in S$ 对应的双射。

我们定义一个在 $\mathcal{A}$ 上的解释 $\mathcal{A}'$，使得对于每个 $x \in \mathrm{vars}_\sigma(\phi)$，$x^{\mathcal{A}'} = h_\sigma(x^{\mathcal{B}})$；对于每个不在 ϕ 中的变量 x，我们可以任意定义 $x^{\mathcal{A}'}$。现在，设 $x = y$ 是 ϕ 的一个原子子公式，其中 x 和 y 的排序为 σ：由于 h_σ 是一个双射，$x^{\mathcal{A}'} = y^{\mathcal{A}'}$ 当且仅当 $x^{\mathcal{B}} = y^{\mathcal{B}}$；由于 ϕ 的所有原子子公式在 $\mathcal{A}'$ 或 $\mathcal{B}$ 中获得的真值完全相同，并且无量词公式的真值完全由其原子子公式的真值决定，因此我们得到 $\mathcal{A}'$ 满足 ϕ，所以 $\mathcal{T}$ 关于 S 是稳定无限的。□

引理 10. 如果一个空签名上的单排序理论不是稳定无限的，那么它具有一个基数为最大有限基数的模型。

证明。设 $\mathcal{T}$ 是一个单排序、非稳定无限且基于空签名的理论；由于引理 9， $\mathcal{T}$ 不可能具有无限模型；并且它具有有限模型，否则它将空泛地满足稳定无限性。因此，假设 $\mathcal{T}$ 具有任意有限大小的模型：由于 $\Gamma = \{\psi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$ 仅由具有无限论域的结构满足，因此我们有 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T}) \cup \Gamma$ 不可满足。根据引理 1，必然存在有限子集 $\mathrm{Ax}_0 \subseteq \mathrm{Ax}(\mathcal{T})$ 和 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，使得 $\mathrm{Ax}_0 \cup \Gamma_0$ 不可满足。设 N 为公式 $\psi_{\geq n}$ 在 Γ_0 中出现时的最大索引。由 $\psi_{\geq j}$ 对于 $j > i$ 蕴含 $\psi_{\geq i}$ 这一事实，我们可以推导出 $\mathrm{Ax}_0 \cup \{\psi_{\geq N}\}$ 不可满足，这意味着不存在满足 Ax_0 且其论域中元素数量超过 N 的结构。然而，$\mathrm{Ax}(\mathcal{T})$ 的模型同时也是 Ax_0，的模型，这意味着 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T})$ 不存在元素数量超过 N 的模型，这与我们的假设相矛盾。 □

定理 6. 每个具有空签名的单排序非稳定无限理论 $\mathcal{T}$，相对于其唯一排序都是有限可见证的。

证明。根据引理 10，空签名上的单排序、非稳定无限理论必定存在一个具有最大大小的模型。令 M 为该有限基数；于是我们可以证明，对于一个无量词公式 ϕ 以及新变量 x_1 至 x_M，$\mathrm{wit}(\phi) = \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{M} x_i = x_i$ 是一个见证。我们首先注意到，$\exists \vec{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$ 和 ϕ 是 $\mathcal{T}$-等价的，其中 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$。现在，假设 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi)$：由于 $\mathcal{T}$ 的模型的最大大小为 M，我们有 $|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq M$。我们通过仅改变 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{x}$ 的变量上的取值来定义另一个 T-解释 $\mathcal{A}'$，使得 $x_i \mapsto x_i^{\mathcal{A}'}$ 是满射的。$\mathrm{wit}(\phi)$ 在 $\mathcal{A}'$ 中仍然成立，并且此外，$\mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi))^{\mathcal{A}'} = \sigma^{\mathcal{A}'}$。 □

E 定理 7 的证明

定理 7. 每个关于其唯一排序稳定无限且强有限可见证的单排序理论都是光滑的，因此关于该排序是强礼貌的。

证明. 假设 $\mathcal{T}$ 关于其唯一排序 σ 是稳定无限且强有限可见证的；设 $\mathcal{A}$ 是一个满足无量词公式 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释，并取一个基数 $\kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{A}}|$。

若 $\kappa(\sigma)$ 是无限的：由于假定 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的，因此存在一个满足 ϕ 且 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 无限的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$；随后，根据单排序逻辑的勒文海姆–斯科伦定理（若 $\kappa(\sigma) > |\sigma^{\mathcal{B}}|$，则向上；若 $\kappa(\sigma) < |\sigma^{\mathcal{B}}|$，则向下），存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{C}$，其 $|\sigma^{\mathcal{C}}| = \kappa(\sigma)$ 且满足 φ。

因此，假设 $\kappa(\sigma)$ 是有限的，并将其称为 m：当然，在这种情况下，$|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 也必然是有限的。令 wit 为 $\mathcal{T}$ 的强见证，并且我们知道，由于 ϕ 和 $\exists \vec{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的（对于 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$），存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$，其底层结构与 $\mathcal{A}$ 的底层结构相同，并且满足 $\mathrm{wit}(\phi)$。令 $W = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi))$，并在 W 上定义等价关系 F，使得 xFy 当且仅当 $x^{\mathcal{A}'} = y^{\mathcal{A}'}$（相应的排列为 δ_W），并令 n 为 $W^{\mathcal{A}'}$ 中元素的数量，即 W/F 中等价类的数量。

如果 $m = n$，我们有 $m = \kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{A}}| = |\sigma^{\mathcal{A}'}| \geq |W^{\mathcal{A}'}| = n$，这意味着 $W^{\mathcal{A}'}$ 实际上等于 $\sigma^{\mathcal{A}'}$，因此 $\mathcal{A}'$ 已经是一个满足 $\mathrm{wit}(\phi)$ 的 $\mathcal{T}$-解释，且 $\sigma^{\mathcal{A}'} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi))^{\mathcal{A}'}$；否则，取一个由 $m - n$ 新变量组成的集合 U，并在 $V = W \cup U$ 上定义等价关系 E，使得 xEy 当且仅当 xFy 或 $x = y$，于是它有 m 个等价类，对应的排列为 δ_V，定义在 V 上。

公式 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$ 由一个无限的 $\mathcal{T}$-解释满足：这是因为，$\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_W$ 是无量词的且由 $\mathcal{A}'$满足，而 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的，因此必定存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_W$的无限 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$；由于 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$等价于

$$\mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_W \wedge \bigwedge_{y \in U} \bigwedge_{x \in V \setminus \{y\}} \neg(x = y),$$

并且由于 $\mathcal{B}$ 是无限的，且 U 中的变量都是新变量，我们可以仅在 U上改变 $\mathcal{B}$ 的取值，从而构造一个满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$的 T-解释 $\mathcal{B}'$。

由于无量词公式 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的，因此必定存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$ 且满足 $\sigma^{\mathcal{C}} = V^{\mathcal{C}}$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{C}$。由于 V/E 有 m 个等价类，根据 $\mathcal{C}$ 满足 δ_V，可知$|\sigma^{\mathcal{C}}| = m$；又由于 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi)$，它也满足 $\exists \vec{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$（对于 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$），并且鉴于后一个公式与 ϕ 是 $\mathcal{T}$-等价的，我们可知 $\mathcal{C}$ 满足 ϕ，因此 $\mathcal{T}$ 是光滑的。 □

F 定理 8 的证明

定理 8。一个具有空签名的单排序理论 $\mathcal{T}$，若既不是强有限可见证的，也不是相对于其唯一排序稳定无限的，则不可能是凸的。

证明。假设 $\mathcal{T}$ 是空签名上的单排序凸理论，但既不是强有限可见证的，也不是稳定无限的。根据引理 10，我们知道 $\mathcal{T}$ 必定有一个最大有限基数的模型，记作 M。现在我们可以断定 $M > 1$，也就是说，$\mathcal{T}$ 的最大模型包含多个元素；否则 $\mathcal{T}$ 将只包含平凡模型，而在这种情况下很容易证明 wit(ϕ) $= \phi$ 是强见证：如果 $\phi \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的，那么它在论域仅含一个元素的 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$ 中成立，而且显然 vars($\phi \wedge \delta_V$) $^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{A}}$。

但现在我们可以导出矛盾：假设 ϕ 是一个永真式文字合取，例如 $x = x$；我们有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{M+1} x = y_i$，因为根据鸽巢原理，蕴含式右侧的析取在 $\mathcal{T}$ 解释中必定始终为真。但对于任何 $1 \leq i \leq M+1$，我们都没有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x = y_i$，因为 ϕ 是永真式，而且存在定义在含有 $M > 1$ 个元素的结构上的 $\mathcal{T}$ 解释。因此 $\mathcal{T}$ 不是凸的，这与我们的假设——它实际上是凸的——相矛盾。 □

G 引理 3 的证明

定义 8。若存在一个从变量集合到公式的函数 χ，使得对于每个公式 ϕ，$wit(\phi) = \phi \wedge \chi(\text{vars}(\phi))$，则称见证 wit 是变量依赖的。

引理 11。对于关于 $S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$ 的、定义在空签名 Σ 上且有限可见证（分别为强有限可见证）的任意理论 $\mathcal{T}$，都存在一个变量依赖的见证（强见证）。

证明。取一个无量词公式 ϕ。令 $V = \text{vars}(\phi)$，取 $E(V)$ 上的等价关系集合 V，对于 a$E \in E(V)$，令 δ_V^E 为 E 在 V 上诱导的排列；然后我们定义

$$\chi(V) = \bigvee_{E \in E(V)} wit(\delta_V^E) \quad \text{and} \quad wit_0(\phi) = \phi \wedge \chi(V),$$

并且我们断言，如果 wit 是一个见证，分别是一个强见证，那么 wit_0 也分别是一个见证，分别是一个强见证。

1. 我们首先证明，如果 $\vec{x} = \text{vars}(\text{wit}_0(\phi)) \setminus \text{vars}(\phi)$，$\phi$ 和 $\exists \vec{x}.\, \text{wit}_0(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的；当然，如果 $\exists \vec{x}.\, \text{wit}_0(\phi) = \phi \wedge \exists \vec{x}.\, \chi(V)$（这是可以做到的，因为 ϕ 不包含 $\vec{x}$ 中的任何变量）由一个 a$\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足，那么 ϕ 也成立，因此我们转而关注另一个方向。

因此，假设 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，并令 E_0 为 V 上的等价关系，使得 xE_0y 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$，也就是说，$\mathcal{A}$ 满足 $\delta_V^{E_0}$。那么 $\mathcal{A}$ 也必须满足带有 $\delta_V^{E_0}$ 的 $\exists \vec{y}.$，因为 $\vec{y} = \text{vars}(\text{wit}(\delta_V^{E_0})) \setminus \text{vars}(\phi)$，因此存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$，它与 $\mathcal{A}$ 至多在 $\vec{y}$ 上不同，并且满足 wit($\delta_V^{E_0}$)（从而也满足 $\exists \vec{y}.\, \text{wit}(\delta_V^{E_0})$ 和 $\delta_V^{E_0}$）。

由于我们处于空签名中，ϕ 的所有原子子公式都是变量等式 $x = y$：该公式在 $\mathcal{A}'$ 中得到满足，当且仅当 xE_0y，而这又当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$；这意味着，$\phi$的原子子公式在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$中获得相同的真值，并且由于 ϕ 是无量词的，我们得到 $\mathcal{A}'$ 满足 ϕ。当然，$\mathcal{A}'$也满足 wit($\delta_V^{E_0}$)，从而满足 $\phi \wedge \chi(V)$，这意味着 $\mathcal{A}$满足 $\exists \vec{y}.\, \phi \wedge \chi(V)$；由于 $\vec{y}$中的变量是 $\vec{x}$中的变量的子集，我们得到 $\mathcal{A}$满足 $\exists \vec{x}.\, \phi \wedge \chi(V)$。因此，$\phi$和 $\exists \vec{x}.\, \text{wit}_0(\phi)$ 确实是 $\mathcal{T}$-等价的。

2. (a) 假设 wit 是一个见证，并令 $\mathcal{A}$ 为满足 $\text{wit}_0(\phi)$ 的 $\mathcal{T}$-解释。令 E_0 为 V 上的等价关系，使得 xE_0y 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$，并且我们知道 $\mathcal{A}$ 也满足 $\delta_V^{E_0}$，因此对于 $\vec{y} = \text{vars}(\text{wit}(\delta_V^{E_0})) \setminus \text{vars}(\delta_V^{E_0})$（包含于 $\vec{x} = \text{vars}(\text{wit}_0(\phi)) \setminus \text{vars}(\phi)$）而言，$\exists \vec{y}.\, \text{wit}(\delta_V^{E_0})$。至多改变变量 $\vec{y}$ 上的 $\mathcal{A}$ 的值，我们得到第二个满足 wit($\delta_V^{E_0}$) 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$；但显然 $\mathcal{A}'$ 也满足 $\exists \vec{y}.\, \text{wit}(\delta_V^{E_0})$，因此满足 $\delta_V^{E_0}$。

现在，由于 wit 是一个见证，必定存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，满足 wit($\delta_V^{E_0}$)，其中

$$\sigma^{\mathcal{B}} = vars_\sigma(wit(\delta_V^{E_0}))^{\mathcal{B}}$$

对每个 $\sigma \in S$ 都成立。但是，由于 $\mathcal{B}$ 满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，它也满足 $\exists \vec{y}.\, \mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，因而满足 $\delta_V^{E_0}$；同样，由于我们使用的是空签名，这意味着 ϕ 的原子子公式在 $\mathcal{A}$或 $\mathcal{B}$中的真值相同，因此 $\mathcal{B}$ 满足 ϕ（而且，由于 $\mathcal{B}$ 也满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，因而满足 $\bigvee_{E \in E(V)} \mathrm{wit}(\delta_V^E)$，$\mathcal{B}$ 因此满足$\phi \wedge \chi(V)$）。此外，$\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})) \subseteq \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi))$，这意味着 $\sigma^{\mathcal{B}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi))^{\mathcal{B}}$，因此，$\mathrm{wit}_0$ 也是一个见证。

(b) 现在假设 wit 是一个强见证，U 是一个变量集合，F 是 U 上的一个等价关系，δ_U^F 是相应的排列，并且 $\mathcal{A}$ 是一个满足 $\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_U^F$ 的 $\mathcal{T}$-解释。

令 E_0 为 V 上的等价关系，使得 xE_0y 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$：这意味着 $\mathcal{A}$ 满足 $\delta_V^{E_0}$，因此 $\exists \vec{y}.\, \mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，对于 $\vec{y} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})) \setminus \mathrm{vars}(\delta_V^{E_0})$；正如我们在 wit 仅为见证的情形中所做的那样，我们有一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$，它与 $\mathcal{A}$ 的差异至多在 $\vec{y}$ 上，并且满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$（当然，$\mathcal{A}'$ 也满足 $\exists \vec{y}.\, \mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，因此满足 $\delta_V^{E_0}$）。

定义变量集 $W = U \cup V$，其等价关系为 G，使得 xGy 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$，并注意到 $\mathcal{A}$ 满足 δ_W^G，这是一个同时蕴含 $\delta_V^{E_0}$ 和 δ_U^F 的公式。

由于 $\mathcal{A}$满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0}) \wedge \delta_W^G$，且 wit 是强见证，因此必定存在一个满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0}) \wedge \delta_W^G$ with 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$。

$$\sigma^{\mathcal{B}} = vars_\sigma(wit(\delta_V^{E_0}) \wedge \delta_W^G)^{\mathcal{B}}$$

对于每个 $\sigma \in S$。

由于 $\mathcal{B}$ 满足 δ_W^G，它必然满足 $\delta_V^{E_0}$，这意味着 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A}$ 恰好满足 ϕ的相同原子子公式，因此 $\mathcal{B}$ 满足 ϕ（因为那是一个无量词公式），并且因此 $\mathrm{wit}_0(\phi)$（因为 $\mathcal{B}$ 也满足 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$，从而 $\chi(V)$）；此外，由于 $\mathcal{B}$满足 δ_W^G，它也满足 δ_U^F。最后，注意 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0}) \wedge \delta_W^G$ 中排序为 σ 的变量是 $\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_U^F$中排序为 σ 的变量集的子集：首先，因为 $\mathrm{wit}(\delta_V^{E_0})$是 $\chi(V)$的子公式，从而 $\mathrm{wit}_0(\phi)$；其次，因为 δ_W^G($W = U \cup V$)的变量也是 δ_U^F和 ϕ的变量（从而 $\mathrm{wit}_0(\phi)$）。因此，我们有 $\sigma^{\mathcal{B}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_U^F)^{\mathcal{B}}$，这证明 wit 确实是一个强见证。 □

为简化记号，在引理12和引理 3 的证明中，符号 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 将保留用于 Σ_1-解释，而 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 将表示 Σ_2-解释。在以下结果中，给定一个 Σ_2-解释$\mathcal{C}$，我们仍用 $\mathcal{C}_1$ 表示满足 $\sigma^{\mathcal{C}_1} = \sigma^{\mathcal{C}}$的 Σ_1-解释，并且对排序为 σ的每个变量 x，$x^{\mathcal{C}_1} = x^{\mathcal{A}}$。

引理12。取一个 Σ_2-解释 $\mathcal{C}$。于是，对于任意 Σ_1-公式 φ，$\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当 $\mathcal{C}$满足 φ。

证明。我们通过对 φ的复杂度进行归纳，证明 $\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 满足 φ。

1. 假设 φ 是 $x = y$，其中 x 和 y 是排序为 σ的变量；那么，由于 $x^{\mathcal{C}_1} = x^{\mathcal{C}}$ 和 $y^{\mathcal{C}_1} = y^{\mathcal{C}}$，$\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 也满足该式。2. 假设 $\varphi = \neg\psi$ 或 $\varphi = \psi \vee \xi$，联结词 $\wedge$ 和 $\rightarrow$ 的证明类似。对于第一种情况，$\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当它不满足 ψ；根据归纳假设，这当且仅当 $\mathcal{C}$ 不满足 ψ，而这等价于 $\mathcal{C}$满足 φ。对于第二种情况，$\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当它满足 ψ 或 ξ；根据归纳假设，这当且仅当 $\mathcal{C}$ 满足 ψ 或 ξ；显然，这等价于 $\mathcal{C}$ 满足 φ。3. 最后，假设 $\varphi = \exists x.\, \psi$，量词 $\forall$ 的情况非常类似。$\mathcal{C}_1$ 满足 φ 当且仅当存在另一个Σ_1-解释 $\mathcal{A}$，它与 $\mathcal{C}_1$ 至多在 x上不同，并且满足 $\mathcal{A}$。取与 $\mathcal{C}$ 至多在 x上不同的 Σ_2-解释 $\mathcal{D}$，其中 $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{A}}$，则有 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$；因此，根据归纳假设，显然 $\mathcal{A}$满足 ψ 当且仅当 $\mathcal{D}$ 满足 ψ。这等价于 $\mathcal{C}$ 满足 φ。

□

在接下来的内容中，我们还需要考虑这样一种情形：给定一个无量词的 Σ_2-公式 ϕ 以及一个满足它的解释$\mathcal{C}$，通过以下方式得到一个无量词的 Σ_1-公式 $\phi_{\mathcal{C}}$：将 ϕ上的每个原子子公式 $u = v$（其中 u 和 v 都是 σ_2排序）替换为 Σ_1 中的一个永真式（例如，对于 ϕ中已有的 σ 排序的 x，可用 $x = x$），若 $u^{\mathcal{C}} = v^{\mathcal{C}}$；或者替换为 Σ_1 中的一个矛盾（例如 $\neg(x = x)$），若 $u^{\mathcal{C}} \neq v^{\mathcal{C}}$；注意，$\mathcal{C}_1$ 满足 $\phi_{\mathcal{C}}$ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 满足 ϕ。

引理 3. 设 $\mathcal{T}$是一个 Σ_1-理论。那么：$\mathcal{T}$相对于 $\{\sigma\}$ 是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸，当且仅当 $(\mathcal{T})^2$ 相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$分别是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证或凸。

证明。正如预期，我们必须反复使用引理12。

1. 如果 $\mathcal{T}$是稳定无限的，则取一个无量词的 Σ_2-公式 ϕ 以及一个满足 ϕ的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}$；于是我们有，$\mathcal{C}_1$ 是一个满足 $\phi_{\mathcal{C}}$的 $\mathcal{T}$-解释（因为，如果 $\mathcal{C}$ 满足 ψ，那么对于 Ax(T) 中的 ψ，$\mathcal{C}_1$ 当然也满足 ψ）。由于假设 $\mathcal{T}$是稳定无限的，因此存在一个满足 $\phi_{\mathcal{C}}$的无限 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$。然后选取一个满足以下条件的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{D}$：$\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$；$|\sigma_2^{\mathcal{D}}| \geq \omega$；并且对于排序为 σ_2的变量 u 和 v，$u^{\mathcal{D}} = v^{\mathcal{D}}$ 当且仅当 $u^{\mathcal{C}} = v^{\mathcal{C}}$，由此可得 $\mathcal{D}$ 在两个论域中都是无限的，并且满足 ϕ。

   反之，现假设 $(\mathcal{T})^2$ 是稳定无限的，并取一个无量词的 Σ_1-公式 ϕ 以及一个满足 ϕ的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$；由此可知，任何满足 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$ 的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}$ 都必须满足 ϕ；又由于 $(\mathcal{T})^2$ 是稳定无限的，因此存在一个在两个论域中都无限且满足 ϕ的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{D}$。于是，$\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{D}_1$ 具有无限论域并满足 ϕ，从而证明 $\mathcal{T}$是稳定无限的。

2. 首先假设 $\mathcal{T}$是光滑的；然后取一个无量词的 Σ_2-公式 ϕ、一个满足 ϕ的（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{C}$，以及基数 κ（σ）$\geq |\sigma^{\mathcal{C}}|$ 和 κ（σ_2）$\geq |\sigma_2^{\mathcal{C}}|$。我们知道，$\mathcal{C}_1$ 是一个满足 $\phi_{\mathcal{C}}$的 $\mathcal{T}$-解释，因此存在一个满足 $\phi_{\mathcal{C}}$ 且具有 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = \kappa$（$\sigma$）的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$。取一个满足以下条件的（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{D}$：$\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$；$|\sigma_2^{\mathcal{D}}| = \kappa$（$\sigma_2$）；并且对于排序为 σ_2 的所有变量 u 和 v，$u^{\mathcal{D}} = v^{\mathcal{D}}$ 当且仅当 $u^{\mathcal{C}} = v^{\mathcal{C}}$。由此可得，$\mathcal{D}$ 满足 ϕ，且$|\sigma^{\mathcal{D}}| = \kappa$（$\sigma$）和 $|\sigma_2^{\mathcal{D}}| = \kappa$（$\sigma_2$）。

   反过来，若（$\mathcal{T}$）^{2} 是光滑的，则取一个无量词的 Σ_1-公式 ϕ、一个满足 ϕ的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，以及一个基数 $\kappa \geq |\sigma^{\mathcal{A}}|$。任何满足 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$ 的（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{C}$ 都必须满足 ϕ；因此，由于该理论是光滑的，必定存在一个（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{D}$，它具有 $|\sigma^{\mathcal{D}}| = \kappa$、$|\sigma_2^{\mathcal{D}}| = |\sigma_2^{\mathcal{C}}|$，并且满足 ϕ。显然，此时 $\mathcal{D}_1$ 是一个具有 $|\sigma^{\mathcal{D}_1}| = \kappa$ 且满足 ϕ的 $\mathcal{T}$-解释。

3. 假设 $(\mathcal{T})^2$ 是有限可见证的，其见证为 wit，并且我们继续证明 $\mathcal{T}$也是有限可见证的，其见证为

$$wit_1(\phi) = wit(\phi)[u_1/x, \ldots u_n/x],$$

   其中 vars$_{\sigma_2}$(wit(ϕ)) $= \{u_1, \ldots, u_n\}$，且 x是 ϕ中的任意一个变量（例如第一个变量，因此它是唯一的）。首先，选取一个 Σ_1-公式 ϕ和一个满足 ϕ的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$；我们知道，$(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}$（其中 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$和 $|\sigma_2^{\mathcal{C}}| = 1$）满足 ϕ。由于 wit 应当是 $(\mathcal{T})^2$的一个见证，因此 $\mathcal{C}$还必须满足 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)，因为 vars(wit(ϕ)) $\setminus$ vars(ϕ)；于是存在一个解释 $\mathcal{C}'$，它与 $\mathcal{C}$的差异至多体现在 $\vec{x}$上，并且满足 wit(ϕ)，因此 $\mathcal{C}_1'$ 也满足 wit$_1$(ϕ)（鉴于对于任意两个 u、$v \in$vars$_{\sigma_2}$(wit(ϕ))，$u^{\mathcal{C}} = v^{\mathcal{C}}$）。由于 $\mathcal{C}_1'$与 $\mathcal{A}$的差异至多体现在赋予 $\vec{x}$的值上，因此 $\mathcal{A}$满足 $\exists \vec{x}.$wit$_1$(ϕ)。反过来，如果 $\mathcal{A}$ 是一个满足 $\exists \vec{x}.$wit$_1$(ϕ) 的 $\mathcal{T}$- 解释，那么上述相同的 $\mathcal{C}$ 满足 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)，进而满足 ϕ，这意味着 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$ 满足 ϕ。综合这两种情况，我们证明了 ϕ和 $\exists \vec{x}.$wit$_1$(ϕ)是 $\mathcal{T}$-等价的。

   现在，假设 $\mathcal{A}$ 是一个满足 wit$_1$(ϕ) 的 $\mathcal{T}$-解释，因此，具有 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$ 和$|\sigma_2^{\mathcal{C}}| = 1$ 的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}$ 满足 wit(ϕ)。于是，必然存在一个满足 wit(ϕ) 的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{D}$，从而有 ϕ，且 $\sigma^{\mathcal{D}} =$vars$_\sigma$(wit(ϕ))$^{\mathcal{D}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{D}} =$vars$_{\sigma_2}$(wit(ϕ))$^{\mathcal{D}}$；那么 $\mathcal{D}_1$ 就是一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释，并且 $\sigma^{\mathcal{D}_1} =$vars$_\sigma$(wit(ϕ))$^{\mathcal{D}_1}$。将 $\mathcal{D}_1$ 赋予 $\vec{x}$ 上变量的值进行更改，使得 $\mathcal{D}_1'$ 满足 wit$_1$(ϕ)。根据 vars$_\sigma$(wit(ϕ)) $=$ vars$_\sigma$(wit$_1$(ϕ)) 这一事实，我们可以得出 $\mathcal{T}$ 是有限可见证的。

   反过来，假设 $\mathcal{T}$ 是有限可见证的，并且根据引理 11，我们可以取一个见证（此处，ϕ 是一个无量词的 Σ_1-公式）wit(ϕ) $= \phi \wedge \psi$(vars(ϕ))，其中 ψ(vars(ϕ)) 是一个只依赖于 vars(ϕ) 的公式；我们希望证明，此时 $(\mathcal{T})^2$ 也是有限可见证的，其见证为（此处，ϕ 是一个无量词的 Σ_2-公式）

$$wit_2(\phi) = \phi \wedge \psi(vars_\sigma(\phi)) \wedge (u = u),$$

   其中 u 是排序为 σ_2 的变量。首先取一个无量词的 Σ_2公式 ϕ和一个满足$\mathcal{C}$的（$\mathcal{T}$）^{2}解释，ϕ，我们有 $\mathcal{C}_1$满足 $\phi_{\mathcal{C}}$，因此 $\exists \vec{x}.$wit($\phi_{\mathcal{C}}$) $= \phi_{\mathcal{C}} \wedge \exists \vec{x}.\, \psi$(vars($\phi_{\mathcal{C}}$))，对于

$$\vec{x} = vars(wit(\phi_{\mathcal{C}})) \setminus vars(\phi_{\mathcal{C}}) = vars(wit_2(\phi)) \setminus \big(vars(\phi) \cup \{u\}\big),$$

   因为 vars($\phi_{\mathcal{C}}$) $=$vars$_\sigma$(ϕ)。必定存在一个解释 $\mathcal{A}$，它与 $\mathcal{C}_1$ 的差异至多在于 $\vec{x}$，并且满足$\phi_{\mathcal{C}} \wedge \psi$(vars($\phi_{\mathcal{C}}$))；接着取解释 $\mathcal{D}$，它在 $\vec{x}$ 中与 $\mathcal{C}$ 的差异至多在于 x，其中 $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{A}}$，且满足 $\phi \wedge \psi$(vars($\phi_{\mathcal{C}}$)) $\wedge\, u = u$。由于 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{C}$ 的差异至多在于 $\vec{x}$ 的变量，因此我们完成了双条件命题的一个方向。但是，如果我们假设 $(\mathcal{T})^2$- 解释 $\mathcal{C}$ 满足 $\exists \vec{x}.$wit$_2$(ϕ)（即 $\phi \wedge (u = u) \wedge \exists \vec{x}.\, \psi$(vars$_\sigma$($\phi$))），那么我们已经知道它满足 ϕ，因此 ϕ 和 $\exists \vec{x}.$wit$_2$(ϕ) 是 $(\mathcal{T})^2$-等价的。现在，如果 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}$ 满足 wit$_2$(ϕ)，且 $\mathcal{C}_1$ 满足 $\phi_{\mathcal{C}} \wedge \psi$(vars$_\sigma$($\phi$)) $=$wit($\phi_{\mathcal{C}}$)，那么就存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，它满足 $\phi_{\mathcal{C}} \wedge \psi$(vars$_\sigma$($\phi$))，且 $\sigma^{\mathcal{A}} =$ vars$_\sigma$($\phi_{\mathcal{C}}$)$^{\mathcal{A}} =$ vars$_\sigma$(ϕ)$^{\mathcal{A}}$。取满足 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$ 和 $|\sigma_2^{\mathcal{D}}| = 1$ 的 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{D}$，我们可以看到，不仅 $\mathcal{D}$ 满足 $\phi \wedge \psi$(vars$_\sigma$(ϕ)) $\wedge (u = u) =$ wit$_2$(ϕ)，而且还具有以下性质：$\sigma^{\mathcal{D}} =$ vars$_\sigma$(wit$_2$(ϕ))$^{\mathcal{D}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{D}} =$ vars$_{\sigma_2}$(wit$_2$(ϕ))$^{\mathcal{D}}$，因为 $\sigma_2^{\mathcal{D}}$ 只包含一个元素，而 vars$_{\sigma_2}$(wit$_2$(ϕ))$^{\mathcal{D}}$ 至少包含 $u^{\mathcal{D}}$。

4. 假设$(\mathcal{T})^2$ i　　现在是强有限可见证的，且具有强见证 wit。接下来我们将证明.....

$$wit_1(\phi) = wit(\phi)[u_1/x, \dots u_n/x],$$

其中，$\text{vars}_{\sigma_2}(\text{wit}(\phi)) = \{u_1, \dots, u_n\}$，且 x 是 ϕ中的任意变量，是 $\mathcal{T}$的一个强见证。我们知道，根据如下证明：如果 $(\mathcal{T})^2$ 是有限可见证的，那么 $\mathcal{T}$也是有限可见证的，因此 ϕ 和 $\exists \vec{x}.\, \text{wit}_1(\phi)$，对于 $\vec{x} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}_1(\phi)) \setminus \text{vars}_\sigma(\phi)$，是 $\mathcal{T}$等价的。因此，取一个变量集（排序为 σ） V、 V上的一个排列 δ_V，以及一个满足 $\text{wit}_1(\phi) \wedge \delta_V$的 $\mathcal{T}$解释$\mathcal{A}$；那么，具有 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}$和 $|\sigma_2^{\mathcal{C}}| = 1$的 $(\mathcal{T})^2$解释 $\mathcal{C}$将满足 $\text{wit}(\phi) \wedge \delta_U$，其中 δ_U是 $U = V \cup \text{vars}_{\sigma_2}(\phi)$上的一个排列，它扩展了 δ_V，并且使所有 u_i 都相等。鉴于 wit 是 $(\mathcal{T})^2$, 的一个强见证，因此存在一个满足 $\text{wit}(\phi) \wedge \delta_U$的 $(\mathcal{T})^2$解释 $\mathcal{D}$，其中 $\sigma^{\mathcal{D}} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_U)^{\mathcal{D}}$且 $\sigma_2^{\mathcal{D}} = \text{vars}_{\sigma_2}(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_U)^{\mathcal{D}}$。显然，我们必须有 $|\sigma_2^{\mathcal{D}}| = 1$，因此 $\mathcal{D}_1$是一个满足 $\text{wit}_1(\phi) \wedge \delta_V$的 $\mathcal{T}$解释，其中 $\sigma^{\mathcal{D}_1} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}_1(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{D}}$。

反过来，假设 $\mathcal{T}$是强有限可见证的，且有一个强见证 $\text{wit}(\phi) = \phi \wedge \psi(\text{vars}(\phi))$，其中$\psi(\text{vars}(\phi))$是一个仅依赖于 $\text{vars}(\phi)$ 的公式。我们将证明

$$wit_2(\phi) = \phi \wedge \psi(vars_\sigma(\phi)) \wedge (u = u),$$

其中 u 是一个排序为 σ_2的变量，是（$\mathcal{T}$）^{2}的强见证。当然，我们无需证明 ϕ 和 $\exists \vec{x}.\, \text{wit}_2(\phi)$是（$\mathcal{T}$）^{2}-等价的，因为 $\vec{x} = \text{vars}(\text{wit}_2(\phi)) \setminus \text{vars}(\phi)$：这在有限可见证的情形下已经证明过了。因此，取一个变量集合 V，其排序为 σ 和 σ_2，一个定义在 V上的排列 δ_V，以及一个满足 $\text{wit}_2(\phi) \wedge \delta_V$ 的（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{C}$；于是我们必须写出

$$\delta_V = \delta_W \wedge \delta_U \wedge \bigwedge_{x \in W} \bigwedge_{u \in U} \neg(x = u),$$

其中 W是 V中排序为 σ的变量子集，而 $U = V \setminus W$是所有排序为 σ_2的变量。于是，$\mathcal{C}_1$ 满足$\phi_{\mathcal{C}} \wedge \psi(\text{vars}_\sigma(\phi)) \wedge \delta_W$，且它等于 $\text{wit}(\phi_{\mathcal{C}}) \wedge \delta_W$；因此存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，满足 $\sigma^{\mathcal{A}} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}(\phi_{\mathcal{C}}) \wedge \delta_W)^{\mathcal{A}}$，并且满足 $\text{wit}(\phi_{\mathcal{C}}) \wedge \delta_W$。接着，取（$\mathcal{T}$）^{2}-解释 $\mathcal{D}$，使得 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}$, $\sigma_2^{\mathcal{D}} = \text{vars}_{\sigma_2}(\text{wit}_2(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{C}}$，并且对每个排序为 σ_2的变量 u，都有 $u^{\mathcal{D}} = u^{\mathcal{C}}$。我们有： $\mathcal{D}$ 满足 $\phi \wedge \psi(\text{vars}_\sigma(\phi)) \wedge \delta_U$，因为 $\mathcal{D}_1$ 满足$\phi_{\mathcal{C}} \wedge \psi(\text{vars}_\sigma(\phi)) \wedge \delta_W$； $\mathcal{D}$满足 $u = u$和 δ_U，因为 $\mathcal{C}$满足 δ_U；并且 $\sigma^{\mathcal{D}} = \text{vars}_\sigma(\text{wit}_2(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{D}}$和$\sigma_2^{\mathcal{C}} = \text{vars}_{\sigma_2}(\text{wit}_2(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{D}}$。由此完成证明：（$\mathcal{T}$）^{2} 是强有限可见证的。

5. 假设 $\mathcal{T}$是凸的，令 ϕ 为 Σ_2 中的一个立方体，并假设

$$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i \vee \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j,$$

其中 x_i和 y_i 的排序为 σ，而 u_j和 v_j的排序为 σ_2；由于 ϕ 是由文字构成的合取，且每个文字只能包含一种排序的变量，我们可以写成 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$，其中 ϕ_1只包含排序为 σ的变量，而ϕ_2只包含排序为 σ_2的变量。

由此可得，$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi_1 \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$或$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi_2 \to \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$：事实上，假设这不成立，那么就存在 $(\mathcal{T})^2$-解释 $\mathcal{C}_1$和 $\mathcal{C}_2$，其中 $\phi_1 \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$和 $\phi_2 \to \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$分别不满足；因此 $\mathcal{C}_1$满足 ϕ_1但不满足$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$，而 $\mathcal{C}_2$ 满足 ϕ_2但不满足$\bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$。于是定义 $(\mathcal{T})^2$- 解释 $\mathcal{D}$，其中： $\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{C}_1}$、 $\sigma_2^{\mathcal{D}} = \sigma_2^{\mathcal{C}_2}$、 $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{C}_1}$ 对每个排序为 σ的变量 x均成立，而 $u^{\mathcal{D}} = u^{\mathcal{C}_2}$对每个排序为 σ_2的变量 u均成立。由于 $\mathcal{D}$在排序为 σ的变量上与 $\mathcal{C}_1$一致，它满足 ϕ但不满足 $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$；又由于 $\mathcal{D}$在排序为 σ_2的变量上与 $\mathcal{C}_2$一致，它满足 ϕ_2但不满足 $\bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$。显然， $\mathcal{D}$因此满足 ϕ但不满足 $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i \vee \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$，从而导致矛盾。

若有 $\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi_2 \to \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$，由于 $(\mathcal{T})^2$ 有一个不含排序σ_2变量的公式公理化，因此可得 $\vdash_{\mathcal{T}'} \phi_2 \to \bigvee_{j=1}^{m} u_j = v_j$。对于 $\mathcal{T}'$，该理论是在仅含一个排序 σ_2且不含符号的签名之上的理论，由空集公理化；由于 $\mathcal{T}'$是凸的，根据定理 10，这意味着对于某个 $1 \le j \le m$，有 $\vdash_{\mathcal{T}'} \phi_2 \to u_j = v_j$，从而$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi \to u_j = v_j$；在这种情况下，我们就完成了。

那么，假设$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi_1 \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$。由于 $\phi_1 \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$不含排序 σ_2的变量，我们得到$\vdash_{\mathcal{T}} \phi_1 \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$；又由于该理论是凸的，对于某个 $1 \le i \le n$，有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi_1 \to x_i = y_i$，从而$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi \to x_i = y_i$。

反过来，这次假设 $(\mathcal{T})^2$ 是凸的，并设 ϕ为一个文字合取，使得 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$，其中 x_i和 y_i（对于 $i \in [1, n]$）是排序为 σ的变量。因此，$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$，于是$\vdash_{(\mathcal{T})^2} \phi \to x_i = y_i$对于某个 $1 \le i \le n$成立，这意味着 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_i = y_i$。 □

H 引理 4 的证明

在引理 13 和 4 的证明中，鉴于证明过程中涉及的解释数量极其庞大，我们约定 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 表示 Σ_n-解释（它们通常还会是 $\mathcal{T}$-解释），而 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 表示 Σ_s^n-解释（它们很多时候也会是 $(\mathcal{T})_s$-解释）。

引理 13. 设 Σ_n 是具有 n 个排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的空签名，Σ_s^n 是具有排序 S 且仅含一个元数为 $\sigma_1 \to \sigma_1$ 的函数符号 s 的签名。给定一个 Σ_n-解释 $\mathcal{A}$，我们通过如下方式定义一个 Σ_s^n-解释 $s(\mathcal{A})$：

1. $\sigma^{s(\mathcal{A})} = \sigma^{\mathcal{A}}$ 对于每个 $\sigma \in S$；2. $s^{s(\mathcal{A})}$ $(a) = a$ 对于所有 $a \in \sigma_1^{\mathcal{A}}$；3. 并且 $x^{s(\mathcal{A})} = x^{\mathcal{A}}$ 对于每个变量 x。

反过来，给定任意 Σ_s^n 解释 $\mathcal{C}$，我们可以考虑带有的 Σ_n 解释 $\theta(\mathcal{C})$ ：

1. $\sigma^{\theta(\mathcal{C})} = \sigma^{\mathcal{C}}$ 对于每个 $\sigma \in S$；2. 以及 $x^{\theta(\mathcal{C})} = x^{\mathcal{C}}$，对于每个变量 x。

最后，给定一个 Σ_s^n-公式 φ，我们反复将 φ 中每个出现的 $s(x)$ 替换为 x，直到得到一个 Σ_n-公式φ_θ。于是，可以断言，一个满足 $\forall x.\, [s(x) = x]$ 的 Σ_s^n-解释 $\mathcal{C}$（其中 x 的排序为 σ_1）也满足 φ，当且仅当 $\theta(\mathcal{C})$ 满足 φ_θ；当然，这是基于以下条件：对于任意 Σ_n-解释 $\mathcal{A}$，$\theta(s(\mathcal{A})) = \mathcal{A}, \mathcal{A}$ 满足一个 Σ_n-公式 φ，当且仅当 $s(\mathcal{A})$ 满足 φ（因为 $\varphi_\theta = \varphi$）。

证明。我们通过对公式复杂度进行归纳法来证明该引理。

1. 如果 φ 是一个原子公式，那么它要么具有如下形式：$s^i(x) = s^j(y)$，其中 x 和 y 的排序为 σ_1；要么具有如下形式：$u = v$，其中 u 和 v 的排序属于 $S \setminus \{\sigma_1\}$。在第一种情况下，$\mathcal{C}$ 满足 φ 当且仅当 $x^{\mathcal{C}} = y^{\mathcal{C}}$，因为 $(s^{\mathcal{C}})^i(x^{\mathcal{C}}) = x^{\mathcal{C}}$ 且 $(s^{\mathcal{C}})^j(y^{\mathcal{C}}) = y^{\mathcal{C}}$；当然，这当且仅当 $\theta(\mathcal{A})$ 满足 $x = y$，而这正是 φ_θ。在第二种情况下，显然 $\mathcal{C}$ 满足此 φ 当且仅当 $\theta(\mathcal{A})$ 满足 $\varphi_\theta = \varphi$。2. 如果 $\varphi = \neg\psi$ 或 $\varphi = \psi \vee \xi$，那么 $\mathcal{C}$ 满足 φ 当且仅当它分别不满足 ψ，或者满足 ψ 或 ξ；由归纳假设，这分别当且仅当 $\theta(\mathcal{A})$ 不满足 ψ_θ（等价于它满足 φ_θ），或者 $\theta(\mathcal{C})$ 满足 ψ_θ 或 ξ_θ（同样等价于它满足 φ_θ）。联结词 $\wedge$ 和 $\to$ 的情形完全类似。3. $\mathcal{C}$ 满足 $\varphi = \exists x.\, \psi$ 当且仅当存在一个 Σ_s^n-解释 $\mathcal{D}$，它至多在 x 处与 $\mathcal{C}$ 不同，并且满足 ψ；由归纳假设，且由于 $\mathcal{D}$ 也必须满足 $\forall x.\, [s(x) = x]$，我们得到：$\mathcal{D}$ 满足 ψ 当且仅当 $\theta(\mathcal{D})$ 满足 ψ_θ，这等价于 $\theta(\mathcal{A})$ 满足 $\varphi_\theta = \exists x.\, \psi_\theta$。量词 $\forall$ 的情形完全类似。 □

引理 4. 对于任意具有空签名 Σ_n 和排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的理论 $\mathcal{T}$：$\mathcal{T}$ 是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证，或关于 S 凸，当且仅当 $(\mathcal{T})_s$ 分别是稳定无限、光滑、有限可见证、强有限可见证，或关于 S 凸。

证明。整个证明过程中，我们多次大量使用引理 13。首先注意到，$\mathcal{C}$ 是一个 $(\mathcal{T})_s$-解释，当且仅当 $\theta(\mathcal{C})$ 是一个 $\mathcal{T}$-解释，因为对于 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T})$ 中的任意公式 φ，$\varphi = \varphi_{\theta\theta}$。

1. 假设 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的：给定一个无量词的 Σ_s^n 公式 ϕ 和一个满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$，我们有 $\theta(\mathcal{C})$ 是一个满足 ϕ_θ 的 $\mathcal{T}$-解释；由于 ϕ_θ 也是无量词的，因此必定存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，其所有论域均为无限域，且满足 ϕ_θ；于是，$s(\mathcal{A})$ 是一个 $(\mathcal{T})_s$-解释，其所有论域均为无限域，且满足 ϕ。

   反过来，假设 $(\mathcal{T})_s$ 是稳定无限的，设 ϕ 是一个无量词的 Σ_n-公式，$\mathcal{A}$ 是一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释；由于 $\phi = \phi_\theta$, $s(\mathcal{A})$ 满足 ϕ，必定存在一个满足 ϕ 且所有论域均为无限的 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$。当然，$\theta(\mathcal{C})$ 随后满足 ϕ。

2. 假设 $\mathcal{T}$ 是光滑的：给定一个无量词的 Σ_s^n-公式 ϕ、一个满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$，以及一个从 S 到基数类的函数κ，使得对于每个 $\sigma \in S$，$\kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{C}}|$，那么 $\theta(\mathcal{C})$ 是一个满足 ϕ_θ 的 $\mathcal{T}$-解释。已知假设 $\mathcal{T}$ 是光滑的，ϕ_θ 是无量词的，并且对每个 $\sigma \in S$，$|\sigma^{\theta(\mathcal{C})}| = |\sigma^{\mathcal{C}}| \leq \kappa(\sigma)$，则存在一个满足 ϕ_θ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，且 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = \kappa(\sigma)$（同样，对每个 $\sigma \in S$）；当然，对于任意 $\sigma \in S$，$s(\mathcal{A})$ 随后是一个满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释，且 $|\sigma^{s(\mathcal{A})}| = |\sigma^{\mathcal{A}}| = \kappa(\sigma)$。

   反过来，假设 $(\mathcal{T})_s$ 是光滑的：那么，对于任意无量词的 Σ_n-公式 ϕ、满足ϕ的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，以及从 S 到基数类的函数 κ，若对所有 $\sigma \in S$都有 $\kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{A}}|$，则有 $s(\mathcal{A})$ 满足 ϕ，因为 $\phi = \phi_\theta$；鉴于 $|\sigma^{s(\mathcal{A})}| = |\sigma^{\mathcal{A}}| \leq \kappa(\sigma)$，必定存在一个 $(\mathcal{T})_s$-解释$\mathcal{C}$，满足 ϕ，且对每个 $\sigma \in S$都有 $|\sigma^{\mathcal{C}}| = \kappa(\sigma)$。于是，$\theta(\mathcal{C})$ 是一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释，并且$|\sigma^{\theta(\mathcal{C})}| = \kappa(\sigma)$ $\forall \sigma \in S$。

3. 现在假设 $\mathcal{T}$ 是有限可见证的，其见证为 wit：我们将证明 $(\mathcal{T})_s$ 也是有限可见证的，其见证为

$$wit_s(\phi) = \phi \wedge wit(\phi_\emptyset).$$

首先，给定一个无量词的 Σ_s^n-公式 ϕ， $\phi_\emptyset$ 也无量词，因此 $\phi_\emptyset$ 和 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的，因为 $\overrightarrow{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)) \setminus \mathrm{vars}(\phi_\emptyset) = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$。如果 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$ 满足 ϕ，则 $\emptyset\ \mathcal{C}$ $\mathcal{C}$ () 满足 $\phi_\emptyset$，从而满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$；由于 $(\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi_\emptyset))_\emptyset = \exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$，我们有 满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$，从而 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_s(\phi) = \exists \overrightarrow{x}.(\phi \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset))$，因为 ϕ 不含 $\overrightarrow{x}$ 中的任何变量。当然，如果 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$ 满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_s(\phi)$，则它必定满足 ϕ，因此这两个公式是 $(\mathcal{T})_s$-等价的。

现在假设某个 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathrm{wit}_s(\phi)$，并且我们有 $\mathbb{0}(\mathcal{C})$ 是一个满足 $(\mathrm{wit}_s(\phi))_\emptyset = \phi_\emptyset \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$ 的 $\mathcal{T}$-解释；由以下事实：$\mathcal{T}$ 是有限可见证的，见证为 wit，且 $\mathbb{0}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$，可知存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$、因而也满足 $\phi_\emptyset$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，其中对每个 $\sigma \in S$，都有 $\sigma^{\mathcal{A}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset))^{\mathcal{A}}$。接着，由于 $(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset))_\emptyset = \mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$， $s(\mathcal{A})$ 是一个满足 $\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释；由于$\mathcal{A}$ 也满足 $\phi_\emptyset$， $s(\mathcal{A})$ 满足 ϕ，因此 $\mathrm{wit}_s(\phi) = \phi \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$ 也成立；并且，鉴于 $\sigma^{s(\mathcal{A})} = \sigma^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset)) = \mathrm{vars}_\sigma(\phi \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset))$（对任意 $\sigma \in S$ 均成立），我们得到对所有 $\sigma \in S$ 都有 $\sigma^{s(\mathcal{A})} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}_s(\phi))^{s(\mathcal{A})}$，从而证明 $(\mathcal{T})_s$ 确实是有限可见证的。

反过来，假设 $(\mathcal{T})_s$ 是有限可见证的，且其见证为 wit，我们希望证明 $\mathcal{T}$ 是有限可见证的，其见证为 $\mathrm{wit}_0(\phi) = (\mathrm{wit}(\phi))_\emptyset$。我们首先取一个无量词的 Σ_n-公式 ϕ，由于 ϕ 也是一个无量词的 Σ_s^n-公式，因此 ϕ 和 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi)$ 是 $(\mathcal{T})_s$-等价的，其中 $\overrightarrow{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$。因此，假设 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 $\phi = \phi_\emptyset$：那么 $s(\mathcal{A})$ 满足 ϕ，进而满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi)$，这意味着 $\mathcal{A}$ 满足

$$(\exists \overrightarrow{x}.wit(\phi))_\emptyset = \exists \overrightarrow{x}.wit(\phi)_\emptyset = \exists \overrightarrow{x}.wit_0(\phi).$$

如果 $\mathcal{T}$ 的解释 ion $\mathcal{A}$ 满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_0(\phi)$， $s(\mathcal{A})$ 满足 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}(\phi)$，因此 ϕ，这意味着 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ a
并证明 ϕ 和 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_0(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的。

现在假设 $\mathcal{A}$ 是满足 $\mathrm{wit}_0(\phi)$ 的 $\mathcal{T}$-解释，因此 $s(\mathcal{A})$ 是满足 $\mathrm{wit}(\phi)$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释，因为 $\mathrm{wit}_0(\phi) = (\mathrm{wit}(\phi))_\emptyset$。由于 $(\mathcal{T})_s$ 是有限可见证的，见证为 wit，因此存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi)$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释 $\mathcal{C}$，其中对于任意 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{C}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi))^{\mathcal{C}}$。由此可得，$\mathbb{0}(\mathcal{C})$ 是满足 $(\mathrm{wit}(\phi))_\emptyset = \mathrm{wit}_0(\phi)$ 的 $\mathcal{T}$-解释，其中 $\sigma^{\mathbb{0}(\mathcal{C})} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}_0(\phi))^{\mathbb{0}(\mathcal{C})}, \forall \sigma \in S$ （因为 $\sigma^{\mathbb{0}(\mathcal{C})} = \sigma^{\mathcal{C}}$ 且 $\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi)) = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi))$，两者对所有 $\sigma \in S$ 均成立）。

4. 现在，让我们考察强有限见证性。如果 $\mathcal{T}$ 是强有限可见证的，其见证为 wit，我们指出 $(\mathcal{T})_s$ 也具有强有限见证性，其见证为 $\mathrm{wit}_s(\phi) = \phi \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset)$。根据上文关于有限见证性的讨论，我们已经知道 ϕ 和 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_s(\phi)$ 是 $(\mathcal{T})_s$-等价的。因此，设 V 为一个变量集， δ_V 为 V 上的一个排列， $\mathcal{C}$ 为一个满足 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释。由于 $(\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V)_\emptyset = \phi_\emptyset \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V$，$\mathbb{0}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V$；由 $\mathcal{T}$ 具有强见证 wit 这一事实可知，对于任意 $\sigma \in S$，都存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V$（因此也满足 $\phi_\emptyset$）的 $\mathcal{T}$-解释$\mathcal{A}$，且其满足 $\sigma^{\mathcal{A}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V)^{\mathcal{A}}$。因此，$(\mathcal{A})$ 是一个满足 $\phi \wedge \mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释，这相当于 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V$。注意到，对于 S 中的所有排序 σ， $\sigma^{s(\mathcal{A})} = \sigma^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V) = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi_\emptyset) \wedge \delta_V)$ 均成立，因此有 $\sigma^{s(\mathcal{A})} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V)^{s(\mathcal{A})}$。由此可知，$(\mathcal{T})_s$ 确实具有强有限见证性。

反过来，假设 $(\mathcal{T})_s$ 具有强有限可见证性，其强见证为 wit，我们将证明 $\mathcal{T}$也具有强有限可见证性，其强见证为

$$wit_0(\phi) = (wit(\phi))_\emptyset.$$

当然，根据我们关于有限见证性的讨论，我们已经知道， ϕ和 $\exists \overrightarrow{x}.\mathrm{wit}_0(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的，其中 $\overrightarrow{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}_0(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$。因此，取一个变量集合 V、其上的一个排列 $\delta_V$on V，以及一个满足 $\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V$ 的$\mathcal{T}$-解释$\mathcal{A}$。由于 $(\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V)_\emptyset$ 等于 $\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V$，我们有 $s(\mathcal{A})$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$，因此存在一个满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$ 的 $(\mathcal{T})_s$-解释$\mathcal{C}$，并且对于 σ 中的每一个 $\sigma^{\mathcal{C}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{C}}$。然后 $\mathbb{0}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V$，并且由于对于 S 中的任意 σ， $\sigma^{\mathbb{0}(\mathcal{C})} = \sigma^{\mathcal{C}}$ 和 $\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V) = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V)$，所以对于 S 中的任意 σ， $\sigma^{\mathbb{0}(\mathcal{C})} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{C}}$，从而完成证明。

5. 最后，假设 $\mathcal{T}$ 是凸的。令 ϕ 为 Σ_s^n 中的文字合取（注意 $\phi_\emptyset$ 是 Σ_n 中的文字合取），并假设 $\vdash_{(\mathcal{T})_s} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$（蕴含 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi_\emptyset \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$）：由此可得，对于某个 $1 \le i \le n$，有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi_\emptyset \to x_i = y_i$；又因为 $(x_i = y_i)_\emptyset = (x_i = y_i)$，所以 $\vdash_{(\mathcal{T})_s} \phi \to x_i = y_i$，这证明了 $(\mathcal{T})_s$ 是凸的。

反过来，假设 $(\mathcal{T})_s$ 是凸的，并设 ϕ 是 Σ_n 中的一个立方体（因此 $\phi_\emptyset = \phi$），满足 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$（因此 $\vdash_{(\mathcal{T})_s} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$）；那么我们必须有$\vdash_{(\mathcal{T})_s} \phi \to x_i = y_i$，其中某个 $1 \le i \le n$，再次利用 $(x_i = y_i)_\emptyset = (x_i = y_i)$，我们得到 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_i = y_i$，从而证明$\mathcal{T}$是凸的。 □

I 引理 5 的证明

在引理 14 和 5 的证明中，我们将采用引理 13 和 4 的证明中使用的相同约定： $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$将是 Σ_n-解释（通常还会是 $\mathcal{T}$-解释），而 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$将是 Σ_s^n-解释（通常也会是 $(\mathcal{T})_\vee$-解释）。此外，接下来还要注意：给定一个 Σ_s^n公式 ϕ 和一个满足 ϕ的 Σ_s^n-解释 $\mathcal{C}$，要考虑公式 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$。要定义这个公式，令 $\mathrm{vars}_{\sigma_1}(\phi) = \{z_1, \ldots, z_n\}$，其中 M_i是满足 $s^j(z_i)$ 出现在 ϕ中的最大值，并令 $\{y_{i,j} : 1 \leq i \leq n、\ 0 \leq j \leq M_i + 2\}$ 为 σ_1排序的新变量。

1. 我们通过将 ϕ 中的每个原子子公式 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 替换为 $y_{i,j} = y_{p,q}$ 来定义 $\phi^\dagger$； 2. δ_V 是由变量集 $V = \{y_{i,j}$ 上的 $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq M_i + 2\}$ 诱导的排列：令 x 与 y 相关当且仅当 $x^{\mathcal{C}} = y^{\mathcal{C}}$。

然后我们得到 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger = \phi^\dagger \wedge \delta_V$。

引理 14. 设 Σ_n 为具有 n 个排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$的空签名， Σ_s^n为具有排序 S 且仅包含一个元数为 $\sigma_1 \to \sigma_1$的函数符号 s 的签名。给定一个 Σ_n-解释 $\mathcal{A}$，我们通过如下方式定义一个 Σ_s^n-解释 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$：

1. $\sigma^{\mathfrak{s}(A)} = \sigma^{\mathcal{A}}$ foreach $\sigma \in S$; 2. $s^{\mathfrak{s}(A)}$ $(a) = a$ forall $a \in \sigma_1^{\mathcal{A}}$; 3. 且 $x^{\mathfrak{s}(A)} = x^{\mathcal{A}}$ 对所有变量 x。

反过来，给定任意 Σ_s^n-解释 $\mathcal{C}$，我们可以考虑满足以下条件的 Σ_n-解释 $\theta(\mathcal{C})$： :

1. $\sigma^{\theta(\mathcal{C})} = \sigma^{\mathcal{C}}$ 对每个 $\sigma \in S$； 2. 并且 $x^{\theta(\mathcal{C})} = x^{\mathcal{C}}$ 对所有变量 x。

那么， Σ_n-解释 $\mathcal{A}$ 满足 σ_n-公式 φ，当且仅当 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 满足 φ。

证明。参见引理 13。 □

引理 5. 设 $\mathcal{T}$ 是空签名 Σ_n 上具有排序 $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 的一个理论。那么：$(\mathcal{T})_\vee$ 相对于 S 稳定无限、光滑、有限可见证或强有限可见证，当且仅当 $\mathcal{T}$ 分别相对于 S 稳定无限、光滑、有限可见证或强有限可见证。此外，若 $\mathcal{T}$ 有一个满足 $|\sigma_1^{\mathcal{A}}| \geq 2$ 的模型 $\mathcal{A}$，则 $(\mathcal{T})_\vee$ 相对于 S 不是凸的。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是一个 Σ_n-结构， $\mathcal{C}$ 是一个 Σ_s^n-结构：显然，根据引理 14， $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{T}$ 的模型，当且仅当 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 是 $(\mathcal{T})_\vee$ 的模型；而 $\mathcal{C}$ 是 $(\mathcal{T})_\vee$ 的模型，当且仅当它满足 $\psi_\vee$，且 $\theta(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{T}$ 的模型。最后这一观察成立，因为尽管 $\mathfrak{s}(\theta(\mathcal{C}))$ 在赋给 s 的函数上可能不同于 $\mathcal{C}$，但 $\mathcal{T}$ 的公理化中的任何公式都不含符号，因此在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathfrak{s}(\theta(\mathcal{C}))$ 中取值相同（因而在 $\theta(\mathcal{C})$ 中也相同）。

1. 假设 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的，令 ϕ 为一个无量词的 Σ_s^n-公式， $\mathcal{C}$ 为一个满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释。那么，由 $\mathcal{C}$ 得到的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}'$（通过令 $y_i^{\mathcal{C}'}$、$_j = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$），满足无量词且不含符号的公式 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$，也就是说， $\theta(\mathcal{C}')$ 满足 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$。由于假设 $\mathcal{T}$ 是稳定无限的，因此存在一个在所有论域上均为无限的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，使其满足 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$。通过如下方式定义 $(\mathcal{T})_\vee$- 解释 $\mathcal{D}$：对所有 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{A}}$ ；对所有 $a = y_i^{\mathcal{A}}$、$_j \in V^{\mathcal{A}}$、 $s^{\mathcal{D}}(a) = y_i^{\mathcal{A}}$、$_{j+1}$；以及对所有 $a \in \sigma_1^{\mathcal{A}} \setminus V^{\mathcal{A}}$、 $s^{\mathcal{D}}(a) = a$；并且对所有变量 x、$x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{A}}$，可见 $\mathcal{D}$ 是一个在所有论域上均为无限且满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释。反过来，假设 $(\mathcal{T})_\vee$ 是稳定无限的，取一个无量词的 Σ_n-公式 ϕ，以及一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，也就是说， $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 满足 ϕ。于是必定存在一个在所有论域上均为无限且满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$；并且由于 ϕ 不含符号， $\theta(\mathcal{C})$ 满足 ϕ，且对于所有 $\sigma \in S$， $\sigma^{\theta(\mathcal{C})}$ 都是无限的。

2. 现在假设 $\mathcal{T}$ 是光滑的，令 ϕ 为一个无量词的 Σ_s^n-公式， $\mathcal{C}$ 为满足 ϕ 的一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释，并令 κ 为从 S 到基数类的一个函数，使得对每个 $\sigma \in S$， $\kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{C}}|$。我们取满足无量词且无符号公式 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}'$（由 $\mathcal{A}$ 通过改变 $y_i^{\mathcal{C}'}$、$_j$ 得到，使其等于 $(s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$），这意味着 $\theta(\mathcal{C}')$ 满足 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$。由于 $\mathcal{T}$ 是光滑的，必定存在一个满足 $\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$ 且对每个 $\sigma \in S$ 都有 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = \kappa(\sigma)$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$。最后，我们定义一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{D}$，使得：对所有 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{A}}$；对所有 $a = y_i^{\mathcal{A}}$、$_j \in V^{\mathcal{A}}$， $s^{\mathcal{D}}(a) = y_i^{\mathcal{A}}$、$_{j+1}$；并且对所有变量 x， $s^{\mathcal{D}}(a) = a$、 $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{A}}$。鉴于 $\mathcal{D}$ 满足 ϕ 的一个原子子公式，当且仅当 $\mathcal{C}$ 也满足该子公式，因此它满足 ϕ；它也是一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释，且对每个 $\sigma \in S$， $|\sigma^{\mathcal{D}}| = \kappa(\sigma)$。

反过来，假设 $(\mathcal{T})_\vee$ 是光滑的，于是取一个无量词的 Σ_n-公式 ϕ、一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，以及一个从 S 到基数类的函数 κ，使得对所有 $\sigma \in S$，$\kappa(\sigma) \geq |\sigma^{\mathcal{A}}|$；由此可知 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 满足 ϕ。又由于 $(\mathcal{T})_\vee$ 是光滑的，必定存在一个满足 ϕ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$，且对每个 $\sigma \in S$ 都有 $|\sigma^{\mathcal{C}}| = \kappa(\sigma)$。由于 ϕ 不含函数符号，$\theta(\mathcal{C})$ 因而是一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释，且对任意 $\sigma \in S$ 都有 $|\sigma^{\theta(\mathcal{C})}| = \kappa(\sigma)$，由此完成 $\mathcal{T}$ 也是光滑的这一证明。

3. 我们首先假设$(\mathcal{T})_\vee$ 是有限可见证的，其见证为 wit，然后指出

$$wit_0(\phi) = \phi \wedge wit(\phi)^\dagger \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (y_{i,0} = z_i) \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge Fun(\overrightarrow{y})$$

是 $\mathcal{T}$ 的一个见证，其中：$\mathrm{vars}_{\sigma_1}(\mathrm{wit}(\phi)) = \{z_1, \ldots, z_n\}$；$M_i$ 是满足以下条件的 j 的最大值：$s^j(z_i)$ 出现在 $\mathrm{wit}(\phi)$ 中；$\overrightarrow{y} = \{y_{i,j} : 1 \leq i \leq n、1 \leq j \leq M_i + 2\}$ 是排序为 σ_1 的新变量；$\mathrm{wit}(\phi)^\dagger$ 由 $\mathrm{wit}(\phi)$ 得到，在此情形下，是通过将 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 替换为 $y_{i,\,j} = y_{p,\,q}$，其中 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_i$；

$$\Psi_\vee(\overrightarrow{y}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \left[(y_{i,2} = y_{i,1}) \vee (y_{i,2} = y_{i,0})\right]$$

and

$$Fun(\overrightarrow{y}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{p=1}^{n} \bigwedge_{j=0}^{M_i} \bigwedge_{q=0}^{M_p} \left[(y_{i,j} = y_{p,q}) \to (y_{i,j+1} = y_{p,q+1})\right].$$

我们先取一个无量词的 Σ_n 公式 ϕ 以及一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，然后 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 满足 ϕ，因此满足 $\exists \overrightarrow{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$，其中

$$\overrightarrow{x} = vars(wit(\phi)) \setminus vars(\phi) = vars(wit_0(\phi)) \setminus [vars(\phi) \cup \overrightarrow{y}].$$

必定存在一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$，它与 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 的差异至多在于 $\overrightarrow{x}$，且满足 $\mathrm{wit}(\phi)$，此外还满足ϕ，因为 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 确实满足 ϕ，而 $\mathcal{C}$ 不会改变 ϕ 中变量的取值。接着，取与 $\theta(\mathcal{C})$ 的差异至多在于 $\overrightarrow{x} \cup \overrightarrow{y}$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，使得对于 $\overrightarrow{x}$ 中的 x，有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{C}}$；而对于 $\overrightarrow{y}$ 中的 y_i、$_j$，有 $y_i^{\mathcal{B}}$、$_j = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$。很容易看出：$\mathcal{B}$ 满足 $\phi \wedge \mathrm{wit}(\phi)^\dagger$，因为 $\mathcal{C}$ 满足 $\phi \wedge \mathrm{wit}(\phi)$；并且 $\mathcal{B}$ 也满足 $\Psi_\vee(\overrightarrow{y})$ 和 $\mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})$，因为对于每个 $1 \leq i \leq n$，$z_i^{\mathcal{B}} = y_i^{\mathcal{B}}$、$_0 = \cdots = y_i^{\mathcal{B}}$、$_{M_i+2}$。因此，$\mathcal{A}$ 满足 $\exists \overrightarrow{x}.\exists \overrightarrow{y}.\, \mathrm{wit}_0(\phi)$。现在，若 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足的不是 $\exists \overrightarrow{x}.\exists \overrightarrow{y}.\, \mathrm{wit}_0(\phi)$，鉴于 $\overrightarrow{x}$ 和 $\overrightarrow{y}$ 中的变量没有出现在 ϕ 中，可推出 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，因此 ϕ 与 $\exists \overrightarrow{x}.\exists \overrightarrow{y}.\, \mathrm{wit}_0(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的。

现在，假设 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{T}$-解释，满足 $\mathrm{wit}_0(\phi)$；那么 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 必须满足 $\mathrm{wit}(\phi)$，因此存在一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$，满足 $\mathrm{wit}(\phi)$，且对每个 $\sigma \in S$，都有 $\sigma^{\mathcal{C}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi))^{\mathcal{C}}$。然后，我们取 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，它与 $\theta(\mathcal{C})$ 的差异至多在于 $\overrightarrow{y}$，并满足 $y_i^{\mathcal{B}}{}_{,j} = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$。这样，$\mathcal{B}$满足 ϕ，因为 $\mathcal{C}$也满足它；根据其定义，它满足 $\mathrm{wit}(\phi)^\dagger$和 $\bigwedge_{i=1}^{n} y_{i,0} = z_i$；此外，它满足 $\Psi_\vee(\overrightarrow{y})$ 和 $\mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})$，因为 $\mathcal{C}$ 满足 $\psi_\vee$，且 $s^{\mathcal{C}}$ 是一个函数。此外，对于任意 $\sigma \in S$，$\mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi)) \subset \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi))$，因此 $\sigma^{\mathcal{B}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_0(\phi))^{\mathcal{B}}$。

反过来，假设 $\mathcal{T}$是有限可见证的，其见证为 $\mathrm{wit}(\phi) = \phi \wedge \psi(\mathrm{vars}(\phi))$，其中 $\psi(\mathrm{vars}(\phi))$ 是一个仅依赖于 ϕ中变量的公式；如引理 11 中所证明的，这样的见证总是存在的。我们指出，$(\mathcal{T})_\vee$ 同样是有限可见证的，其见证为

$$wit_s(\phi) = \phi \wedge \psi(vars(\phi) \cup \overrightarrow{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=0}^{M_i+2} [y_{i,j} = s^j(z_i)] \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge Fun(\overrightarrow{y}),$$

其中，ϕ可以是一个 Σ_s^n-公式，$\mathrm{vars}_{\sigma_1}(\phi) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, M_i是满足 $s^j(z_i)$出现在 ϕ中的条件的 j的最大值，并且 $\overrightarrow{y} = \{y_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq M_i + 2\}$是排序为 σ_1的新变量。取一个 Σ_s^n-公式 ϕ和一个满足 ϕ的$(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$。如果我们取与 $\theta(\mathcal{C})$在 $\overrightarrow{y}$上不同的解释 $\mathcal{A}$，其中$y_i^{\mathcal{A}}{}_{,j} = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$，则它满足 $\Psi_\vee(\overrightarrow{y})$（因为 $\mathcal{C}$满足 $\psi_\vee$）、$\mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})$（因为 $s^{\mathcal{C}}$是 $\mathcal{C}$中的一个函数）以及$\phi_{\mathcal{C}}^\dagger$，因此 $\exists \overrightarrow{x}.\, \mathrm{wit}(\phi_{\mathcal{C}}^\dagger) = \phi_{\mathcal{C}}^\dagger \wedge \exists \overrightarrow{x}.\, \psi(\mathrm{vars}(\phi_{\mathcal{C}}^\dagger))$，对于

$$\overrightarrow{x} = vars(wit(\phi_{\mathcal{C}}^\dagger)) \setminus vars(\phi_{\mathcal{C}}^\dagger) = vars(wit_s(\phi)) \setminus \left[vars(\phi) \cup \overrightarrow{y}\right];$$

于是，存在一个解释 $\mathcal{A}'$，它至多在 $\vec{x}$上与 $\mathcal{A}$不同，并满足 $\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger} \wedge \psi(\text{vars}(\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger}))$。现在我们取一个$(\mathcal{T})_{\vee}$-解释 $\mathcal{D}$，它至多在 $\vec{x} \cup \vec{y}$上与 $\mathcal{C}$不同，且 $\theta(\mathcal{D}) = \mathcal{A}'$，于是 $\mathcal{D}$满足： ϕ，因为$\mathcal{C}$满足 ϕ，且 $\mathcal{D}$与 $\mathcal{C}$至多只在 $\vec{x} \cup \vec{y}$上不同，而这些变量都不出现在 ϕ中； $\psi(\text{vars}(\phi) \cup \vec{y})$，因为 $\mathcal{A}'$满足这个公式，且该公式没有函数符号； $\Psi_{\vee}(\vec{y})$和Fun($\vec{y}$)，因为两者都由$\mathcal{A}$ 满足，而 $\mathcal{D}$ 仅在 $\mathcal{A}$ 中的变量在 $\vec{x}$上的取值处不同；以及 $\bigwedge_{j=0}^{M_i+2}[y_{i,j} = s^j(z_i)]$, ，因为

$$y_{i,j}^{\mathcal{D}} = y_{i,j}^{\mathcal{A}'} = y_{i,j}^{\mathcal{A}} = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}}) = (s^{\mathcal{D}})^j(z_i^{\mathcal{D}}).$$

这当然意味着 $\mathcal{C}$满足 $\exists \vec{x}.\exists \vec{y}.\,\text{wit}_s(\phi)$，正如我们需要证明的那样。反过来，如果 $(\mathcal{T})_{\vee}$-解释 $\mathcal{C}$满足 $\exists \vec{x}.\exists \vec{y}.\,\text{wit}_s(\phi)$，显然它满足 ϕ（因为 $\vec{x} \cup \vec{y}$中的变量不会出现在 ϕ中），这意味着 ϕ和 $\exists \vec{x}.\exists \vec{y}.\,\text{wit}_s(\phi)$ 是 $(\mathcal{T})_{\vee}$-等价的。

因此，假设 $\mathcal{C}$是一个满足 $\text{wit}_s(\phi)$ 的 $(\mathcal{T})_{\vee}$-解释，也就是说 $\mathcal{A}$与 $\theta(\mathcal{C})$ 的差异至多在 $y_{i,j} \in \vec{y}$，其中$y_{i,j} = (s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$，满足

$$\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger} \wedge \psi(\mathit{vars}(\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger}) \cup \vec{y}) \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \mathit{Fun}(\vec{y}) = \mathit{wit}(\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger} \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \mathit{Fun}(\vec{y})).$$

因此，存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，它满足 $\text{wit}(\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger} \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \text{Fun}(\vec{y}))$，且对于每个 $\sigma \in S$，$\text{vars}_{\sigma}(\text{wit}_s(\phi))^{\mathcal{B}}$，其中集合 $\text{vars}_{\sigma}(\text{wit}_s(\phi))$ 恰好与 $\text{vars}_{\sigma}(\text{wit}(\phi_{\mathcal{C}}^{\dagger} \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \text{Fun}(\vec{y})))$ 相同。然后我们构造一个 $(\mathcal{T})_{\vee}$-解释 $\mathcal{D}$，使得：对于每个 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{B}}$；对于每个变量 x， $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{B}}$；对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_i$中的每一项， $s^{\mathcal{D}}(y_{i,j}^{\mathcal{D}}) = y_{i,j+1}^{\mathcal{D}}$；对于 $\sigma_1^{\mathcal{D}}$ 中的所有其他元素， $s^{\mathcal{D}}(a) = a$。确实， $s^{\mathcal{D}}$ 是一个函数，因为 $\mathcal{B}$ 满足 $\text{Fun}(\vec{y})$，而且 $\mathcal{D}$ 满足 $\psi_{\vee}$，因为 $\mathcal{B}$ 满足 $\Psi_{\vee}(\vec{y})$。由此可知， $\mathcal{D}$不仅满足 $\text{wit}_s(\phi)$，还具有 $\sigma^{\mathcal{D}} = \text{vars}_{\sigma}(\text{wit}_s(\phi))^{\mathcal{D}}$ 这一性质，这证明 wit_s 确实是 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 的一个见证。4. 现在假设 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 是强有限可见证的，且有一个强见证 wit，我们将证明

$$\mathit{wit}_0(\phi) = \phi \wedge \mathit{wit}(\phi)^{\dagger} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(y_{i,0} = z_i) \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \mathit{Fun}(\vec{y})$$

是 $\mathcal{T}$ 的强见证，其中我们再次有：$\text{vars}_{\sigma_1}(\text{wit}(\phi)) = \{z_1, \ldots, z_n\}$； M_i是满足以下条件的 j 的最大值： $s^j(z_i)$ 出现在 $\text{wit}(\phi)$ 中； $\vec{y} = \{y_{i,j} : 1 \leq i \leq n、 1 \leq j \leq M_i + 2\}$ 是排序为 σ_1的新变量；而 $\text{wit}(\phi)^{\dagger}$ 是由 $\text{wit}(\phi)$ 得到的，在本例中，方法是将 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 替换为 $y_{i、j} = y_{p、q}$，其中 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_i$。正如我们已经知道的， ϕ 和 $\exists \vec{x}.\exists \vec{y}.\,\text{wit}_0(\phi)$ 是 $\mathcal{T}$-等价的，因为 $\vec{x} = \text{vars}(\text{wit}(\phi)) \setminus \text{vars}(\phi)$；因此，取一个变量集 V、定义在 V 上的排列 δ_V，以及一个满足 $\text{wit}_0(\phi) \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{A}$。由此可得， $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ 满足 $\text{wit}(\phi) \wedge \delta_W$，其中 $W = V \cup \text{vars}(\text{wit}_0(\phi))$，而 δ_W 是通过令 x 与 y 相关当且仅当 $x^{\mathfrak{s}(\mathcal{A})} = y^{\mathfrak{s}(\mathcal{A})}$，在 W 上诱导出的排列；由于 wit 是 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 的强见证，因此存在一个满足 $\text{wit}(\phi) \wedge \delta_W$ 的 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 解释 $\mathcal{C}$，并且对于每个 $\sigma \in S$，都有 $\sigma^{\mathcal{C}} = \text{vars}_{\sigma}(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_W)^{\mathcal{C}}$。现在，考虑 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 解释 $\mathcal{D}$，其中对每个 $\sigma \in S$ 都有 $\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{C}}$，对每个变量 x 都有 $x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{C}}$，并且 $s^{\mathcal{D}}$ 除了在这些元素上之外都等于 $s^{\mathcal{C}}$

$$\{y_{i,j}^{\mathcal{B}} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq M_i + 2\} \cup \{(s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq M_i + 2\},$$

其中，我们改为定义： $s^{\mathcal{D}}(y_{i,j}^{\mathcal{C}}) = y_{i,j+1}^{\mathcal{C}}$，对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $j \leq M_i + 1$；并且，如果尚未定义 $s^{\mathcal{D}}((s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}}))$，我们就令其等于 $(s^{\mathcal{C}})^j(z_i^{\mathcal{C}})$（注意，在这些条件下，$s^{\mathcal{D}}(y_{i,M_i+2}^{\mathcal{C}})$必定已经定义，因为要么 $y_{i,M_i+2}^{\mathcal{C}} = y_{i,M_i}^{\mathcal{C}}$，要么 $y_{i,M_i+2}^{\mathcal{C}} = y_{i,M_i+1}^{\mathcal{C}}$）。由于 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$满足 $\text{Fun}(\vec{y})$，如果 $\mathcal{C}$满足 $y_{i,j} = y_{p,q}$，它也满足 $y_{i,j+1} = y_{p,q+1}$，这意味着 $s^{\mathcal{D}}$ 确实是一个良定义函数；此外，鉴于 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$也满足 $\Psi_{\vee}(\vec{y})$，我们有 $\mathcal{C}$ 要么满足 $y_{i,2} = y_{i,1}$，要么满足 $y_{i,2} = y_{i,0}$，因此 $\mathcal{D}$ 满足 $\psi_{\vee}$，故而是一个 $(\mathcal{T})_{\vee}$-解释。显然， $\mathcal{D}$ 满足 ϕ, $\bigwedge_{i=1}^{n} y_{i,0} = z_i$、$\text{Fun}(\vec{y})$ 和 $\Psi_{\vee}(\vec{y})$；我们还需证明它满足 $\text{wit}(\phi)^{\dagger}$。因此，设 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 是其中一个原子公式；根据 $s^{\mathcal{D}}$ 的定义，我们有 $(s^{\mathcal{D}})^j(z_i^{\mathcal{D}}) = y_{i,j}^{\mathcal{D}}$，且 $(s^{\mathcal{D}})^q(z_i^{\mathcal{D}}) = y_{p,q}^{\mathcal{D}}$。此外， $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$满足 $y_{i,j} = y_{p,q}$ 当且仅当 $\mathcal{C}$，因此 $\mathcal{D}$ 也满足同一个公式；这意味着 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$满足 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 当且仅当 $\mathcal{D}$ 满足该公式。因此，$\mathcal{D}$ 满足 $\text{wit}(\phi)^{\dagger}$，因为 $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$满足该公式，且该公式是无量词的。鉴于 $\sigma^{\mathcal{C}} = \text{vars}_{\sigma}(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_W)^{\mathcal{C}}$，并且 $\sigma^{\mathcal{D}} = \text{vars}_{\sigma}(\text{wit}(\phi) \wedge \delta_W)^{\mathcal{D}} = \text{vars}_{\sigma}(\text{wit}_0(\phi))^{\mathcal{D}}$，因此 wit_0 确实是 $\mathcal{T}$的一个强见证。

反过来，现设 $\mathcal{T}$ 是强有限可见证的，其见证为 $\text{wit}(\phi) = \phi \wedge \psi(\text{vars}(\phi))$，其中 $\psi(\text{vars}(\phi))$ 是一个只依赖于 ϕ 的变量的公式。我们断言，此时 $(\mathcal{T})_{\vee}$ 也是有限可见证的，其见证为

$$\mathit{wit}_s(\phi) = \phi \wedge \psi(\mathit{vars}(\phi) \cup \vec{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=0}^{M_i+2}[y_{i,j} = s^j(z_i)] \wedge \Psi_{\vee}(\vec{y}) \wedge \mathit{Fun}(\vec{y}),$$

此时 ϕ 可以是一个 Σ^n_s-公式，$\mathrm{vars}_{\sigma_1}(\phi) = \{z_1, \ldots, z_n\}$，$M_i$ 是满足以下条件的 j 的最大值：$s^j(z_i)$ 出现在 ϕ 中，并且 $\overrightarrow{y} = \{y_{i,j} \colon 1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i + 2\}$ 是排序为 σ_1 的新变量。由于这与我们证明若 $\mathcal{T}$ 是有限可见证的，则 $(\mathcal{T})_\vee$ 也必然是有限可见证的证明中所使用的见证相同，我们已经知道 ϕ 和 $\exists \overrightarrow{x}.\exists \overrightarrow{y}.\,\mathrm{wit}_s(\phi)$ 是 $(\mathcal{T})_\vee$-等价的，其中 $\overrightarrow{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$。因此，取一个变量集合 V、一个在 V 上的排列 δ_V，以及一个满足 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V$ 的 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$；令 W 为 $V \cup \overrightarrow{x} \cup \overrightarrow{y} \cup \mathrm{vars}(\phi)$，令 δ_W 为 W 上的排列，使得当且仅当 $x^{\mathcal{C}} = y^{\mathcal{C}}$ 时，x 与 y 相关，并且我们有 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_W$。那么 $\theta(\mathcal{C})$ 满足

$$\phi^\dagger_{\mathcal{C}} \wedge \psi(\mathit{vars}(\phi^\dagger_{\mathcal{C}}) \cup \overrightarrow{y}) \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge \mathit{Fun}(\overrightarrow{y}) \wedge \delta_W = \mathit{wit}(\phi^\dagger_{\mathcal{C}} \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge \mathit{Fun}(\overrightarrow{y})) \wedge \delta_W,$$

因此，鉴于 wit 是一个强见证，必定存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，使得对于每个 $\sigma \in S$，$\sigma^{\mathcal{A}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_s(\psi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{A}}$（注意，$\mathrm{wit}(\phi^\dagger_{\mathcal{C}} \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge \mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})) \wedge \delta_W$中的变量与 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_W$中的变量相同，而后者又与 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V$中的变量相同），并且 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi^\dagger_{\mathcal{C}} \wedge \Psi_\vee(\overrightarrow{y}) \wedge \mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})) \wedge \delta_V$。最后，我们定义一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{D}$，使得：对于每个 $\sigma \in S$，$\sigma^{\mathcal{D}} = \sigma^{\mathcal{A}}$；对于每个变量 x，$x^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{A}}$；并且对于每个 $1 \le i \le n$ 和 $0 \le j \le M_i + 1$，$y_i^{\mathcal{D}}{}_{,j} = y_i^{\mathcal{D}}{}_{,j+1}$；对于 $\sigma_1^{\mathcal{D}}$中的所有其他元素，$a = a$（再次注意，必须在这些条件下定义 $y_i^{\mathcal{D}}{}_{,M_i+2}\ s^{\mathcal{D}}$）。确实，$s^{\mathcal{D}}$ 是一个函数，因为 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathrm{Fun}(\overrightarrow{y})$；并且 $\mathcal{D}$ 满足 $\psi_\vee$，因为 $\mathcal{A}$ 满足 $\Psi_\vee(\overrightarrow{y})$。当然，$\mathcal{D}$ 满足 $\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V$，此外还具有这样的性质：对于每个 $\sigma \in S$，$\sigma^{\mathcal{D}} = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}_s(\phi) \wedge \delta_V)^{\mathcal{D}}$，由此证明 wit_s 是 $(\mathcal{T})_\vee$的强见证。

最后，我们讨论凸性。考虑文字合取 $\phi = (y = s(x)) \wedge (z = s(y))$，其中 x、y 和 z 的排序为 σ_1，并且有

$$\vdash_{(\mathcal{T})_\vee} \phi \to (x = y) \vee (x = z) \vee (y = z).$$

为说明这一点，假设我们有一个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释 $\mathcal{C}$，它满足 ϕ，但既不满足 $x = y$ 也不满足 $x = z$；因此，$s^{\mathcal{C}}(a) \neq a$ 且 $s^{\mathcal{C}}(s^{\mathcal{C}}(a)) \neq a$，其中 $a = x^{\mathcal{C}}$。由于 $s^{\mathcal{C}}(s^{\mathcal{C}}(a)) \neq a$，我们必须有 $s^{\mathcal{C}}(s^{\mathcal{C}}(a)) = s^{\mathcal{C}}(a)$，这意味着 $\mathcal{C}$ 满足 $y = z$。

然而，我们并没有 $(\mathcal{T})_\vee$ 蕴涵 $\phi \to (x = y)$、$\phi \to (x = z)$ 或 $\phi \to (y = z)$，因为我们假设 $\mathcal{T}$ 拥有一个模型 $\mathcal{A}$，其中有 $|\sigma_1^{\mathcal{A}}| \ge 2$；例如，$a$、$b \in \sigma_1^{\mathcal{A}}$。为理解其中原因，考虑 $(\mathcal{T})_\vee$ 的解释 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，满足：对于每个 $\sigma \in S$，$s^{\mathcal{C}}(a) = b$、$s^{\mathcal{C}}(b) = b$、$s^{\mathcal{D}}(a) = b$、$s^{\mathcal{D}}(b) = a$，以及对于每个 $c \in \sigma_1^{\mathcal{A}} \setminus \{a, b\}$，$s^{\mathcal{C}}(c) = s^{\mathcal{D}}(c) = c$；并且

$$x^{\mathcal{C}} = a \quad \text{and} \quad y^{\mathcal{C}} = z^{\mathcal{C}} = b, \quad \text{and} \quad x^{\mathcal{D}} = z^{\mathcal{D}} = a \quad \text{and} \quad y^{\mathcal{D}} = b.$$

我们可以看到，两个 $(\mathcal{T})_\vee$-解释都满足 ϕ；然而，$\mathcal{C}$ 不满足 $x = y$ 和 $x = z$，而 $\mathcal{D}$ 不满足$y = z$（也不满足 $x = y$）。

□

J 引理 6 的证明

定义 9。设 $n > 2$。$\kappa(n)$ 定义为满足 $2^{k+1} + 1 \le n \le 2^{k+2}$的唯一数 k。

引理 15。κ 是从 $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ 到 $\mathbb{N}$的良定义函数。

证明。我们证明，对于每个 $n > 2$，都存在唯一的 k 使得 $2^{k+1} + 1 \le n \le 2^{k+2}$。

存在性：通过对 n 进行归纳法证明。对于 $n = 3$，取 $k = 0$，然后取 $2^1 + 1 \le 3 \le 2^2$。对于 $n > 2$，根据归纳假设，存在唯一的 k'，使得 $2^{k'+1} + 1 \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le 2^{k+2}$。特别地，$2^{k'+1} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，因此 $2^{k+1} = 2^{k'+2} < 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le n$，这意味着 $2^{k+1} + 1 \le n$。现在，如果 n 是偶数，那么 $n = 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，进而得到 $n = 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le 2 \cdot 2^{k'+2} = 2^{k'+3} = 2^{k+2}$。如果 n 是奇数，那么 $n = 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$，进而得到 $2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le 2 \cdot 2^{k'+2} = 2^{k'+3} = 2^{k+2}$。反设 $2^{k+2} < n$。因此 $2^{k+2} < 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$，这意味着 $2^{k+2} \le 2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。但我们还有 $2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le 2^{k+2}$。这意味着 $2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2^{k+2}$，特别是 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2^{k+1}$。然而，$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ge 2^{k+1} + 1$，这就产生了矛盾。

唯一性：如果存在 k、k'，使得 $2^{k+1}+1 \le n \le 2^{k+2}$、$2^{k'+1}+1 \le n \le 2^{k'+2}$ 和 $k \ne k'$ 成立，则我们可以通过以下方式得到矛盾。不失一般性，假设 $k < k'$，因此 $k+1 \le k'$，这意味着 $2^{k+2} = 2 \cdot 2^{k+1} \le 2 \cdot 2^{k'} = 2^{k'+1}$。由此得到：$2^{k+1}+1 \le n \le 2^{k+2} \le 2^{k'+1} < 2^{k'+1}+1 \le n$，这与假设矛盾。

□

注释 4. $\kappa(n)$ 就是 $\lceil log_2 n \rceil - 2$

定义 10. 给定一个函数 $F\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$，满足 $F(1) = 1$，函数 $FF\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$ 定义如下：$FF(1) = F(1) = 1$，$FF(2) = 0$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$，

$$FF(n) = \begin{cases} F(n - 2^{\kappa(n)}) & \textit{for } 2^{\kappa(n)+1}+1 \le n \le 2^{\kappa(n)+1}+2^{\kappa(n)} \\ 1 & \textit{for } 2^{\kappa(n)+1}+2^{\kappa(n)}+1 \le n \le 2^{\kappa(n)+2}+2^{\kappa(n)} - FF_1(2^{\kappa(n)+1}+2^{\kappa(n)}); \\ 0 & \textit{for } 2^{\kappa(n)+2}+2^{\kappa(n)} - FF_1(2^{\kappa(n)+1}+2^{\kappa(n)})+1 \le n \le 2^{\kappa(n)+2}. \end{cases}$$

其中，对于 $i \in \{0,1\}$，

$$FF_i(n) = |\{m : 1 \le m \le n \quad \textit{and} \quad FF(m) = i\}|,$$

.

引理 16. 对于每个 $F\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$，满足 $F(1) = 1$，我们有 FF 是从 $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$ 到某个集合的（良定义）函数。

证明. 对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，如果 $n \le 2$，则 $FF(n)$ 显然是良定义的。对于 $n > 2$，$2^{\kappa(n)+1}+1 \le n \le 2^{\kappa(n)+2}$ 对于唯一的 $\kappa(n)$ 成立。这一点由定义 9 和引理 15 得出。显然，一旦 $\kappa(n)$ 确定，该函数的定义就区分出 3 种彼此不同的情形，而这 3 种情形恰好覆盖该范围。还需确保在这些情形中的第一种情形下，F 在 $n - 2^{\kappa(n)}$ 上有定义。这是因为 $n \ge 2^{\kappa(n)+1}+1 > 2^{\kappa(n)}$，所以 $n - 2^{\kappa(N)} \ge 1$。 □

引理 17. 对于每个 $F\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0,1\}$，满足 $F(1) = 1$，$FF_1(2^{k+1}) = 2^k$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$.

证明. 对 k 使用归纳法。对于 $k = 0$，我们有 $((F)(2^0) = ((F)(1) = 1$，并且 $((F)(2^1) = ((F)(2) = 0$。因此 $((F)_1(2^1) = ((F)_1(2) = 1 = 2^0$。

对于 $k = 1$，我们证明 $((F)(4) = 2$。回顾一下，$((F)(2^0) = ((F)(1) = 1$，并且 $((F)(2^1) = ((F)(2) = 0$。接下来只需计算 $((F)(3)$，以及 $((F)(4)$（它们依赖于此）。显然，$\kappa(3) = 0$，且 $2^1+1 \le 3 \le 2^1+2^0$，因此 $((F)(3) = F(3-1) = F(2)$。我们分两种情况讨论：

1. 如果 $F(2) = 1$，那么 $((F)(3) = 1$，因此 $((F)_1(3) = 2$。在这种情况下，$2^2+2^0 - ((F)_1(2^1+2^0) + 1 = 4+1 - ((F)_1(3) + 1 = 4 \le 4 \le 2^2$，因此 $((F)(4) = 0$，进而 $((F)_1(4) = 2$。2. 如果 $F(2) = 0$，那么 $((F)(3) = 0$，因此 $((F)_1(3) = 1$。在这种情况下，$2^1+2^0+1 \le 4 \le 4 = 4+1-1 = 4+1-((F)_1(3) = 2^2+2^0-((F)_1(2^1+2^0)$。因此，$((F)(4) = 1$，从而 $((F)_1(4) = 2$。

现在假设 $FF_1(2^{k+1}) = 2^k (*)$ 成立。我们证明 $FF_1(2^{k+2}) = 2^{k+1}$。记 $|\{2^{k+1}+1 \le n \le 2^{k+2} \mid f(n) = 1\}|$ 为 M。显然，$FF_1(2^{k+2}) = FF_1(2^{k+1}) + M$。根据（$*$），我们有 $FF_1(2^{k+2}) = 2^k + M$。由于我们希望证明 $FF_1(2^{k+2}) = 2^{k+1}$，因此只需证明 $M = 2^k$。

令 m 表示从 $2^{k+1}+1$ 到 $2^{k+1}+2^k$（含端点）之间满足 $F(n-2^k) = 1$ 的数的个数。注意，对于每个这样的 n，都有 $\kappa(n) = k$。因此，$FF_1(2^{k+1}+2^k) = FF_1(2^{k+1}) + m = 2^k + m$。于是，根据 FF 的定义，从 $2^{k+1}+2^k+1$ 到 $2^{k+2}+2^k - FF_1(2^{k+1}+2^k)$ 之间的数的个数为 $(2^{k+2}+2^k - FF_1(2^{k+1}+2^k)) - (2^{k+1}+2^k+1) + 1 = (2^{k+2}+2^k-2^k-m) - (2^{k+1}+2^k+1) + 1 = 2^{k+2}-m-2^{k+1}-2^k-1+1 = 2^k(4-2-1) - m = 2^k \cdot 1 - m = 2^k - m$。此外，根据 FF 的定义，从 $2^{k+2}+2^k - FF_1(2^{k+1}+2^k)+1$ 到 2^{k+2}（含端点）之间的数的个数为 0。综上，我们得到 $M = m + 2^k - m + 0 = 2^k$。

□

直观地说，假设 FF 已针对 n 定义到某个二的幂 2^{k+1}。由于我们希望尽可能多地让 FF 与 F 相等（不一定使用相同的参数，而只需它们输出的 0 和 1 序列相同），因此在下一个二的幂的后四分之一范围内，也就是 $2^{k+1}+1 \le n \le 2^{k+1}+2^k$，我们定义 $FF(n) = F(n-2^k)$。请注意，我们是从上次停下的地方继续：也就是说，上一次我们将 FF 定义为 F 的函数时，对应的最后一个值是 $m = 2^{(k-1)+1}+2^{k-1}$，此时 $FF(m)$ 等于 $F(2^k+2^{k-1}-2^{k-1}) = F(2^k)$；而 n 的下一个值是 $n = 2^{k+1}+1$，此时我们得到 $FF(n)$ 等于 $F(2^{k+1}+1-2^k) = F(2^k+1)$。

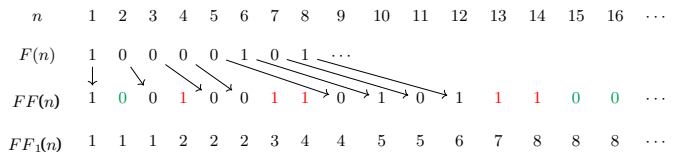

图 10：函数 f 的示意图。

然而，完成这一步后，我们还必须处理另一个要求：同时，我们希望 FF 等于 1 的次数与等于 0 的次数大致相同。为此，我们要求，对于不超过 2^{k+2} 的数，FF 恰好等于 1 共 2^{k+1} 次，也就是 $FF_1(2^{k+2}) = 2^{k+1}$。为实现这一点，我们令 $FF(n)$ 在 $n > 2^{k+1}+2^k$ 范围内等于 1，直到 $FF_1(n)$ 变为 2^{k+1}；之后，直到下一个二的幂，我们都令 FF 等于 0。

例如，取某个 $F\colon\ \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$，其中 $F(1)=1$；比如，$F(1)=1$，$F(2)=0$，$F(3)=0$，$F(4)=0$，$F(5)=0$，$F(6)=1$，$F(7)=0$，以及 $F(8)=1$。然后，我们可以在附录 J 中绘制这个说明性示意图。

引理18。给定一个函数 $F\colon\ \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$，其中 $F(1)=1$，若我们将 f 定义为 FF，那么对于每个 $n\geq 2$，都有 $F(n)=f(n+2^{\kappa(n)}+1)$。

证明。由于 $2^{\kappa(n)+1}+1\leq n\leq 2^{\kappa(n)+2}$，我们也有 $2^{(\kappa(n)+1)}+1\leq n+2^{\kappa(n)+1}\leq 2^{(\kappa(n)+1)+1}+2^{\kappa(n)+1}\leq 2^{(\kappa(n)+1)+2}$。因此，$\kappa(n+2^{\kappa(n)+1})=\kappa(n)+1$。根据 FF 的定义，我们由此得到 $F(n)=F(n+2^{\kappa(n)+1}-2^{\kappa(n)+1})=FF(n+2^{\kappa(n)+1})$。

□

引理 6。　　存在一个函数 $f\colon\ \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$，使得 $f(1)=1$，并具有以下两个性质：

1. f 不可计算；2. 对任意 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，
$f_0(2^k)=f_1(2^k)$。

证明。我们先取一个不可计算函数 $F\colon\ \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$，满足 $F(1)=1$（例如：给定所有图灵机的一个枚举 $\{T_n\colon\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$，若且唯若 T_n 停机，则 $F(n)=1$；我们可以调整枚举，使第一台图灵机停机）。

根据定义 10，我们可以定义 $f\colon\ \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$，令其等于 FF。这个函数不可计算，否则根据引理18，F也将是可计算的（因为 κ 也是可计算的）。此外，根据定义 10，若我们令 $k\geq 2$ 在 $k'\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$时等于 $k'+1$，则 $f_1(2^k)=FF_1(2^{k'+1})=2^{k'}$（根据引理 17），且 $f_0(2^k)=2^k-f_1(2^k)=2^{k'}$；对于 $k=1$，根据 FF（因而也根据 f）的定义 10，我们知道 $f(1)=1$且 $f(2)=0$，因此可推出 $f_0(2^0)=f_1(2^0)$。总而言之，对于任意 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，$f_0(2^k)=f_1(2^k)$。

□

K 引理 7 的证明

引理19. 每个可由 $\mathcal{T}_f$ 满足的无量词公式都由一个有限的 $\mathcal{T}_f$ 解释满足　　n.

证明。假设 ϕ 是一个无量词公式，并设 $\mathcal{A}$ 是满足 ϕ的 $\mathcal{T}_f$解释：我们可以假设它是无限的。集合 $\{\alpha\colon\ \alpha\text{ 是 }\phi\}$ 中的一个项，且因此是有限的；所以 $A=\{\alpha\colon\ \alpha\text{ 是 }\phi\}^{\mathcal{A}}$中的一个项。令

$$m_0=|\{a\in A: s^{\mathcal{A}}(a)\neq a\}|\quad\text{and}\quad m_1=|\{a\in A: s^{\mathcal{A}}(a)=a\}|,$$

并取一个 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 使得 $2^k>\max\{m_0,m_1\}$。同时取集合 B 和 C，其元素分别为 2^k-m_1 和 2^k-m_0 个，且与 A不相交，并定义一个 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{B}$，其中：$\sigma^{\mathcal{B}}=A\cup B\cup C$；

$$s^{\mathcal{B}}(a)=\begin{cases}a & \text{if } a\in A \text{ and } s^{\mathcal{A}}(a)=a, \text{ or } a\in B;\\ s^{\mathcal{A}}(a) & \text{if } s^{\mathcal{A}}(a)\neq a \text{ but } s^{\mathcal{A}}(a)\in A;\\ \text{any element in } B & \text{if } s^{\mathcal{A}}(a)\neq a \text{ and } s^{\mathcal{A}}(a)\notin A, \text{ or } a\in C\end{cases};$$

并且对于 ϕ 中的任意变量 x，$x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$；否则则任意。$\mathcal{B}$ 在 A 中有 m_1 个元素，加上 B 中所有满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$ 的 $2^k - m_1$，总计 2^k；而 A 中有 m_0 个元素，加上 C 中所有满足$s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$ 的元素，共计 2^k，这意味着 $\mathcal{B}$ 是一个含有 2^{k+1} 个元素的 $\mathcal{T}_f$-解释，因此是有限的。

此外，设 $s^j(x)$ 是 ϕ 中的一个项：若 $j = 0$，则 $(s^j(x))^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}} = (s^j(x))^A$，因此假设该结果对任意 j均成立；在这种情况下，若 $s^{j+1}(x)$ 仍是 ϕ 中的一个项，

$$(s^{j+1}(x))^{\mathcal{B}} = s^{\mathcal{B}}\big((s^j(x)^{\mathcal{B}}\big) = s^{\mathcal{A}}\big((s^j(x)^{\mathcal{A}}\big) = (s^{j+1}(x))^{\mathcal{A}},$$

证明对于 ϕ、$\alpha^{\mathcal{B}} = \alpha^{\mathcal{A}}$ 中的任意项 α；由于 ϕ 是一个不含谓词的签名中的无量词公式，其中所有项在 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 中都取相同的值，并且 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，我们有 $\mathcal{B}$ 也满足 ϕ，从而完成证明。

□

引理 7。$\mathcal{T}_f$ 的最小基数函数是不可计算的。

证明。我们首先证明，对于

$$\phi_n = \bigwedge_{i=1}^{f_1(n)+1} \big(s(x_i) = x_i\big) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq f_1(n)+1} \neg(x_i = x_j)$$

一个仅在模型 $\mathcal{B}$ 中为真、且当存在至少 $f_1(n) + 1$ 个元素满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$ 时成立的公式。

注意，理论 $\mathcal{T}_f$具有所有有限非零基数的模型：事实上，给定一个 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，这样一个模型 $\mathcal{A}$的论域为 $\{a_1, \ldots, a_n\}$，其中 $s^{\mathcal{A}}(a_i) = a_i$对每个 $1 \leq i \leq f_1(n)$ 都成立（记住 $f_1(n) \geq 1$对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$都成立），并且如果存在这样的 j，则对每个 $f_1(n)$ 都有 $s^{\mathcal{A}}(a_j) = a_1$（只要 $n > 1$ 满足 $f_1(n) < n$即可）。还要注意，对于所有 $p \geq q$，$\psi^{=}_{=p} \to \psi^{=}_{\geq q}$ 和 $\psi^{\neq}_{=p} \to \psi^{\neq}_{\geq q}$，因此理论 $\mathcal{T}_f$ 的模型 $\mathcal{A}$ 必须满足：要么对某个 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，有 $\psi^{=}_{=f_1(k)} \wedge \psi^{\neq}_{=f_0(k)}$；要么对所有 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，都有 $\psi^{=}_{\geq f_1(k)} \wedge \psi^{\neq}_{\geq f_0(k)}$，此时 $\mathcal{A}$是无限的；如果我们的模型 $\mathcal{A}$是有限的，那么它必须满足对某个 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，有 $\psi^{=}_{=f_1(k)} \wedge \psi^{\neq}_{=f_0(k)}$，因此恰有 $f_1(k)$ 个元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$，且有 $f_0(k)$ 个元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$。由于 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 a 必须满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$ 或 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，而不能两者兼具，因此 $\mathcal{A}$ 必定恰有 $f_1(k) + f_0(k) = k$ 个元素；所以，理论 $\mathcal{T}_f$ 的模型 $\mathcal{A}$ 的论域中有 k个元素，当且仅当它包含 $f_1(k)$ 个满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$ 的元素，以及 $f_0(k)$ 个满足 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$的元素。

因此，让我们证明双条件命题 $f(n+1) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{mincard}(\phi_n) = n+1$ 中从左到右的蕴含。若 $\mathcal{A}$ 是满足 ϕ_n 的 $\mathcal{T}_f$ 的一个模型，并且在满足该公式的模型中具有最小的基数 $\mathrm{mincard}(\phi_n)$（根据引理19，该基数是有限的），那么 $\mathcal{A}$ 至少有 $f_1(n)+1$ 个元素 a 满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$，这意味着 $f_1(\mathrm{mincard}(\phi_n)) \geq f_1(n)+1$。由于我们假设 $f(n+1) = 1$, $f_1(n+1) = f_1(n)+1$，并且任何具有 $n+1$ 个元素的 $\mathcal{T}_f$ 模型都必须有 $f_1(n+1) = f_1(n)+1$ 个元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$，因而实际上满足 ϕ_n，所以我们有 $n+1 \geq \mathrm{mincard}(\phi_n)$。如果 $\mathrm{mincard}(\phi_n)$ 严格小于 n，就会得到 $n \geq \mathrm{mincard}(\phi_n)$；又因为 f_1 是非递减的，所以 $f_1(n) \geq f_1(\mathrm{mincard}(\phi_n)) \geq f_1(n) + 1$，这显然荒谬：因此我们必须有 $\mathrm{mincard}(\phi_n) = n+1$。

反过来，假设 $\mathrm{mincard}(\phi_n) = n+1$，并且我们知道某个 $\mathcal{T}_f$的模型 $\mathcal{A}$ 具有 $n+1$ 个元素且满足ϕ_n，因此至少有 $f_1(n)$ 个 $+1$元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$。由此可得 $f_1(n+1) \geq f_1(n)+1$，于是这两个值相等（因为 $f_1(n)$ 和 $f_1(n+1)$ 之差只能是 0 或 1）。因此，$f(n+1) = 1$。

总而言之，如果 $\mathcal{T}_f$具有可计算的最小基数函数，并且我们知道 $f(1) \ldots, f(n)$ 的值（因而也知道 $f_0(n)$ 和 $f_1(n)$ 的值），那么我们也可以通过算法计算 $f(n+1)$。

□

L 引理 8 的证明

引理 8. 每个可满足的无量词 Σ_s 公式都是 $\mathcal{T}_f$-可满足的。

证明。如果无量词公式 ϕ 可满足，那么它必然由某个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$满足，其中 $\mathcal{T}$是这样一个理论：所有 Σ_s-结构都是其模型，并且该理论由空集公理化。于是取可枚举集合 A 和 B，使它们与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 及彼此互不相交，并构造解释 $\mathcal{B}$，满足：$\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}} \cup A \cup B$;

$$\sigma^{\mathcal{B}}(a) = \begin{cases} s^{\mathcal{A}}(a) & \text{if } a \in \sigma^{\mathcal{A}}; \\ a & \text{if } a \in A; \\ \text{any element of } A & \text{if } a \in B; \end{cases}$$

并且对所有变量 x都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$。显然， $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{T}_f$-解释，因为它包含无限多个元素，使每个条件 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$ 或 $s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$ 分别得到满足（所有这些元素分别属于 A 和 B）。此外，对于 ϕ中的任意项 α， $\alpha^{\mathcal{B}} = \alpha^{\mathcal{A}}$，因为对每个变量 x 都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$，并且根据归纳假设，对于某个 j，有（$s^j(x))^{\mathcal{B}} = (s^j(x))^{\mathcal{A}}$，

$$(s^{j+1}(x))^{\mathcal{B}} = s^{\mathcal{B}}\big((s^j(x))^{\mathcal{B}}\big) = s^{\mathcal{A}}\big((s^j(x))^{\mathcal{A}}\big) = (s^{j+1}(x))^{\mathcal{A}}.$$

由于 ϕ 是一个定义在不含谓词的签名上的无量词公式，我们得出 ϕ 由 $\mathcal{T}_f$-解释$\mathcal{B}$ 满足（因为 $\mathcal{A}$满足它）。 □

M 表 1 的证明

M.1 T≥n

$\mathcal{T}_{\geq n}$ 由一个公理定义，其形式为 $\exists \vec{x}.\, \psi$，其中 ψ是一个无量词公式。在 [12] 中，这类理论称为存在式理论，并已证明它们是强礼貌的。因此，我们得到以下引理:

引理20. $\mathcal{T}_{\geq n}$ 是平滑的，因此是稳定无限的。它还是强有限可见证的，因此也是有限可见证的 .

还需证明它是凸的:

引理 21. $\mathcal{T}_{\geq n}$ 是凸的。

证明. 根据引理20， $\mathcal{T}_{\geq n}$ 是稳定无限的；定理 5 保证它也是凸的。 □

M.2 T∞

引理 22. $\mathcal{T}_\infty$ 是光滑的，因此是稳定无限的。

证明. 给定任意 $\mathcal{T}_\infty$解释 $\mathcal{A}$，可以看出该理论是光滑的，因为每个更大的解释 $\mathcal{B}$ 必然也同时是一个 $\mathcal{T}_\infty$解释。 □

引理 23. $\mathcal{T}_\infty$ 不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。

证明。假设 wit 是一个见证。对于任意变量 x, $x = x$ 都由所有 $\mathcal{T}_\infty$-解释 $\mathcal{A}$满足，因此 wit($x = x$) 由某个 $\mathcal{A}'$ 满足，其中我们只改变 $\mathcal{A}$ 赋给 vars(wit($x = x$)) \vars($x = x$) 中变量的值。于是必定存在一个满足 wit($x = x$) 的 $\mathcal{T}_\infty$-解释 $\mathcal{B}$，其中 $\sigma^{\mathcal{B}} = \text{vars(wit}(x = x))^{\mathcal{B}}$。当然，这是不可能的：vars(wit($x = x$)) 必然是有限的，因此 vars(wit($x = x$))$^{\mathcal{B}}$ 也是有限的，而$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}_\infty$ 的模型，当且仅当其论域是无限的。 □

引理 24. $\mathcal{T}_\infty$ 是凸的。

证明。根据定理 5 和引理22可得一个推论。 □

M.3 T$^{\infty}_{even}$

引理25。 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 是稳定无限的。

证明。由.....可得 引理 9，鉴于 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 定义在只有一个排序且具有无限模型的签名上 s. □

引理 26。 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 有限可见证，但不是强有限可见证，也不光滑。

证明。参见 [13] 的第 3.4 节 □

引理 27。 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 是凸的。

证明。由于 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 是稳定无限的，根据引理25，定理 5 保证 $\mathcal{T}^{\infty}_{even}$ 是凸的。 □

M.4 $\mathbf{T}_{n,\infty}$

引理 28。$\mathcal{T}_{n,\ \infty}$ 是稳定无限的。

证明。鉴于引理 9，以及以下事实：$\mathcal{T}_{n,\infty}$ 是一个基于空签名、仅有一个排序且具有无限模型的理论，结论成立。 □

引理 29. $\mathcal{T}_{n,\ \infty}$ 不是光滑的。

证明。注意，$\mathcal{T}_{n,\ \infty}$ 有论域中包含 n 个元素的模型，但没有论域中包含 $m > n$ 个元素的模型。 □

引理 30. . $\mathcal{T}_{n,\infty}$ 不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。

证明。假设我们有一个见证 wit，并且我们将使用无量词的公式

$$\phi = \bigwedge_{1\leq i<j\leq n+1} \neg(x_i = x_j);$$

因为某些无限的 $\mathcal{T}_{n,\infty}$-解释满足 ϕ，所以 wit(ϕ) 也满足。于是必定存在一个 $\mathcal{T}_{n,\infty}$-解释 $\mathcal{A}$，它满足 wit(ϕ)（因此也满足 ϕ），并且 $\sigma^{\mathcal{A}} = \text{vars(wit}(\phi))^{\mathcal{A}}$。当然，这是荒谬的：如果 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，那么它的论域中至少有 $n+1$ 个元素；而任何有限的 $\mathcal{T}_{n,\infty}$-解释的论域中恰好有 n 个元素（记住，$\mathcal{A}$ 是有限的）。 □

引理 31. $\mathcal{T}_{n,\infty}$ 是凸的。

证明。将定理 5 与引理 28 中给出的 $\mathcal{T}_{n,\infty}$ 是稳定无限这一事实结合起来。 □

M.5 $\mathbf{T}_{\leq 1}$

引理 32. $\mathcal{T}_{\leq 1}$ 不是稳定无限的，因此也不是光滑的。

证明。显然，因为它有有限模型，却没有无限模型。 □

引理 33. $\mathcal{T}_{\leq 1}$ 是强有限可见证的，因此也是有限可见证的。

证明. 显然，wit(ϕ) $= \phi$ 是一个强见证，因为如果 $\phi \wedge \delta_V$ 由 $\mathcal{T}_{\leq 1}$解释 $\mathcal{A}$满足，则 $\mathcal{A}$ 是平凡模型，并且我们已有 vars($\phi \wedge \delta_V$)$^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{A}}$。 □

引理 34. $\mathcal{T}_{\leq 1}$ 是凸的。

证明. 对于任意一对变量 x 和 y，显然可以得出 $\vdash_{\mathcal{T}_{\leq 1}} x = y$。因此，每当 $\vdash_{\mathcal{T}_{\leq 1}} \phi \to \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y_i$成立时，对于由文字合取而成的 ϕ，任意 $1 \leq i \leq n$都满足 $\vdash_{\mathcal{T}_{\leq 1}} x_i = y_i$。 □

M.6 $\mathbf{T}_{\leq n}$

引理 35. $\mathcal{T}_{\leq n}$ 不是稳定无限的，因此也不光滑。

证明。显然如此，因为它具有有限模型，但没有无限模型。 □

引理 36. $\mathcal{T}_{\leq n}$ 是强有限可见证的，因此也是有限可见证的。

证明。考虑从无量词公式到无量词公式的函数 wit，使得 wit(ϕ) $= \phi$，显然这是可计算的。由于 $\vec{x} =$ vars(wit(ϕ)) $\setminus$ vars(ϕ) 为空，因此平凡地，ϕ 和 $\exists \vec{x}.$ wit(ϕ) $=$ wit(ϕ) 是 $\mathcal{T}_{\leq n}$-等价的。现在，给定变量集 V 和 V 上的一个排列 δ_V，假设 $\mathcal{A}$ 是一个满足 wit(ϕ) $\wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_{\leq n}$-解释。令 $W =$ vars(wit(ϕ) $\wedge \delta_V$)，并取论域为 $W^{\mathcal{A}}$ 的 $\mathcal{T}_{\leq n}$-解释 $\mathcal{B}$，且对每个 $x \in W$，令 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$（其他情形任意）。显然，$\mathcal{B}$ 确实是一个 $\mathcal{T}_{\leq n}$-解释，因为 $|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq n$，且 $\sigma^{\mathcal{B}} \subseteq \sigma^{\mathcal{A}}$。此外，由于 wit($\phi$) $\wedge \delta_V$ 的所有原子子公式必定都是等式 $x = y$，其两端 x 和 y 均属于 W，并且 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$ 和 $y^{\mathcal{B}} = y^{\mathcal{A}}$，因此 wit($\phi$) $\wedge \delta_V$ 在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$中取相同的真值。 □

引理 37. 如果 $n > 1$, $\mathcal{T}_{\leq n}$ 不是凸的。

证明. 给定变量 x_1 至 x_{n+1}，对于任何由文字构成的合取 ϕ，如果它是永真式（例如 $x = x$），

$$\vdash_{\mathcal{T}_{\leq n}} \phi \to \bigvee_{1\leq i<j\leq n+1} x_i = x_j$$

根据鸽巢原理。但是，由于 $n > 1$，对于任意一对 $1 \leq i < j \leq n+1$，我们不可能有 $\vdash_{\mathcal{T}_{\leq n}} \phi \to x_i = x_j$，因为在 $\mathcal{T}_{\leq n}$-解释 $\mathcal{A}$ 中，我们总是可以令 $x_i^{\mathcal{A}} \neq x_j^{\mathcal{A}}$。 □

M.7 $\mathbf{T}_{m,\ n}$

引理 38. $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 不是稳定无限的，因此也不光滑。

证明. $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 有有限模型，但没有无限模型，因此它不可能是稳定无限的。 □

引理 39. 若 $m > 1$ 且 $n > 1$, $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 是有限可见证的。

证明. 不失一般性，假设 $m \geq n$。考虑无量词公式 ϕ、新变量 x_1 至x_m，并定义见证 wit(ϕ) $= \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} x_i = x_i$，它显然是可计算的。由于 ϕ 与 wit(ϕ)等价，且 $\bigwedge_{i=1}^{m} x_i = x_i$ 是永真式，因此对于 $\vec{x} = \{x_1, ..., x_m\}$ =vars(wit(ϕ)) \vars(ϕ)，我们有 ϕ 与 $\exists\, \vec{x}\,.$ wit(ϕ) 是 $\mathcal{T}_{m,\ n}$-等价的。

因此，假设 wit(ϕ $\mathcal{T}_{m\,n}$ $\mathcal{A}$ $W =$ ϕ $V =$ ϕ $k =$) 被一 $m - |V^{\mathcal{A}}|$ $\mathcal{T}_{m\,n}$ $\mathcal{B}$ $V^{\mathcal{A}} \cup \{a_1, ..., a_k\}$ a_i $\sigma^{\mathcal{A}}$ $|\sigma^{\mathcal{B}}| = m$ 个 , -解释满足：令 vars(wit( ))、vars( ) 和 ；我们定义一个论域为 的 , -解释，其中 对于不在 中的 （使得 ），$x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$ 对于 $x \in V$, 以及 $\{x^{\mathcal{B}}\colon\ x \in \vec{x}\} = \sigma^{\mathcal{B}}$（这是可行的，因为 $\vec{x}$和 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 都具有 m 个元素。由于 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 在 ϕ的变量上相同，后者满足 ϕ，因此也满足 wit(ϕ)。最后，由于 $W^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{B}}$，我们得到 wit 确实是一个见证，并且 $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 是有限可见证的。

□

引理 40。如果 $|m - n| > 1$, $T_{m,\ n}$ 不是强有限可见证的。

证明。假设 wit 是一个强见证，令 x 为一个变量，并取模型 $\mathcal{A}'$，其$\mathcal{T}_{m,\ n}$ 的论域中有 n 个元素：由于任意在该结构上的解释都满足 $x = x$，因此必然存在一个在 $\mathcal{A}'$ 上的解释 $\mathcal{A}$ 满足 wit($x = x$)。令 $V =$ 为 vars(wit($x = x$)), 并在 V 上取等价关系 E，使得 xEy 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$，相应的排列为 δ_V，于是需要考虑两种情况。

1. 如果 $|V/E| < n$：由于 $\mathcal{A}$ 显然满足 wit($x = x$) $\wedge\, \delta_V$，我们必然有一个 $\mathcal{T}_{m,n}$-解释 $\mathcal{B}$ 满足 wit($x = x$) $\wedge\, \delta_V$ 且满足 $\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{B}}$。因此 $|\sigma^{\mathcal{B}}| < n$，从而 $\mathcal{B}$ 不可能是一个 $\mathcal{T}_{m,n}$-解释，导致矛盾。2. 如果 $|V/E| = n$，取一个变量 $y \notin$ vars(wit($x = x$))，定义 $W = V \cup \{y\}$，并考虑 W 上的等价关系 F，使得 xFy 当且仅当 xEy 或 $x = y$。我们断言，wit($x = x$) $\wedge\, \delta_V$随后由 $\mathcal{B}$满足，其中 $\mathcal{B}$是一个 $\mathcal{T}_{m,n}$-解释，且 $\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}} \cup \{a_1, ..., a_{m-n}\}$（其中 $\{a_1, ..., a_{m-n}\} \cap \sigma^{\mathcal{A}} = \emptyset$，这意味着 $\mathcal{B}$有 m 个元素），对于每个 $x \in V$都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$，并且 $y^{\mathcal{B}} = a_1$。我们看到，$\mathcal{B}$ 满足 wit($x = x$) $\wedge\, \delta_V$，因为该公式在 $\mathcal{A}$中为真，其所有原子子公式都是变量等式，并且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在 vars(wit($x = x$))上一致；同时，$\mathcal{B}$ 也必须满足 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_W$，因为对于每个 $x \in V$都有 $y^{\mathcal{B}} \neq x^{\mathcal{B}}$。由于我们正处于 wit 是强见证这一假设下，因此必然存在一个 $\mathcal{T}_{m,n}$-解释$\mathcal{C}$满足 wit($x = x$) $\wedge\, \delta_W$且满足 $\sigma^{\mathcal{C}} = W^{\mathcal{C}}$，但这是不可能的：由于 $|V/E| = n$, $|W/F| = n + 1$，这意味着如果 $\mathcal{C}$满足 δ_W，则 $\sigma^{\mathcal{C}} = W^{\mathcal{C}}$必须恰好有 $n + 1$ 个元素，这与以下事实相矛盾：$\mathcal{C}$是 $\mathcal{T}_{m,n}$ 的模型，因此其论域中应当有 n 个或 $m \geq n + 2$ 个元素。

□

引理 41. 如果 $m > 1$ 和 $n > 1$, $\mathcal{T}_{m,\ n}$ 不是凸的。

证明。假设 $m > 1$ 和 $n > 1$、$\mathcal{T}_{m,\ n}$ 没有基数为 1 的模型，根据定理 4，它不可能是凸的。

□

M.8 $\mathbf{T}_{2,3}$

以下结论已在 [13] 中得到证明：

Lemma 42. $\mathcal{T}_{2,3}$ 是光滑、有限可见证的，但相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$ 不是强有限可见证的。 .

引理 43。$\mathcal{T}_{2,\ 3}$ 相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$ 是凸的。

证明。由定理 5 得出。 □

M.9 $\mathbf{T}_1^{odd}$

引理 44。 $\mathcal{T}_1^{odd}$相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$ 不是稳定无限的，因此也不是光滑的。

证明。 $\mathcal{T}_1^{odd}$有 一个模型 $\mathcal{A}$，其中 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = 1$ 和 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}| = \omega$，但不存在模型 $\mathcal{B}$，其中 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$均为无限的 e. □

引理 45. $\mathcal{T}_1^{odd}$ 相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$ 有限可见证。

证明。因此，取一个无量词的 Σ_2公式 ϕ，我们希望证明

$$\mathit{wit}(\phi) = \phi \wedge (x = x) \wedge (y = y),$$

其中， x 是排序为 σ 的新变量， y 是排序为 σ_2 的新变量，是 $\mathcal{T}_1^{odd}$ 的见证。当然，如果 $\vec{x}$ =vars(wit(ϕ))\vars(ϕ) $= \{x, y\}$，那么 ϕ 和 $\exists \vec{x}$.wit(ϕ) 是 $\mathcal{T}_1^{odd}$-等价的，因为 ϕ 和 wit(ϕ) 本身是等价的。

因此，假设一个 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 wit(ϕ)，令 V =vars$_{\sigma_2}$(ϕ)，并令 E 为 V上的等价关系，使得 $y_1 E y_2$ 当且仅当 $y_1^{\mathcal{A}} = y_2^{\mathcal{A}}$。接下来需要考虑两种情况。

1. 如果 $|V/E|$ 是奇数，我们取 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释 $\mathcal{B}$，其中 $\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}}$、 $\sigma_2^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{A}}$ 和 $z^{\mathcal{B}} = z^{\mathcal{A}}$ 对除 y 之外的每个变量 z 都成立，而改为令 $y^{\mathcal{B}}$ 等于 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$ 中的任意值。不仅 $\mathcal{B}$ 满足 wit(ϕ)，而且 $\sigma^{\mathcal{B}}$ =vars$_\sigma$(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$ =vars$_{\sigma_2}$(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$。2. 如果 $|V/E|$ 是偶数，我们取具有以下条件的 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释 $\mathcal{B}$： $\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}}$；对于一个元素 $a \notin \sigma_2^{\mathcal{A}}$， $\sigma_2^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{A}} \cup \{a\}$ 因而是奇数；并且 $z^{\mathcal{B}} = z^{\mathcal{A}}$ 对除 y 之外的每个变量 z 都成立，其中 $y^{\mathcal{B}} = a$。于是 $\mathcal{B}$ 满足 wit(ϕ)，并且 $\sigma^{\mathcal{B}}$ =vars$_\sigma$(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$ =vars$_{\sigma_2}$(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$。。 □

引理 46. $\mathcal{T}_1^{odd}$相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$不是强有限可见证的。

证明。为导出矛盾，假设 $\mathcal{T}_1^{odd}$确实有一个强见证 wit。取一个 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释$\mathcal{A}$，其中有一个排序为 σ 的元素、一个排序为 σ_2 的元素，以及一个排序为 σ_2的变量 y： $\mathcal{A}$ 满足 $y = y$，因此$\exists \vec{x}$.wit($y = y$)，其中 $\vec{x}$ =vars(wit($y = y$)) \ vars($y = y$)。当然，存在一个解释 $\mathcal{A}'$，它与 $\mathcal{A}$的差异至多在于赋给 $\vec{x}$中变量的值，并且满足 wit($y = y$)；因此必定存在一个 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释$\mathcal{B}$，满足 wit($y = y$)，且 $\sigma^{\mathcal{B}}$ =vars$_\sigma$(wit($y = y$))$^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$ =vars$_{\sigma_2}$(wit($y = y$))$^{\mathcal{B}}$。

令 V为 vars$_{\sigma_2}$(wit($y = y$))，并令 E为 V上的等价关系，使得 $y_1 E y_2$ 当且仅当 $y_1^{\mathcal{B}} = y_2^{\mathcal{B}}$，其对应的排列为 δ_V。显然， $\mathcal{B}$满足 δ_V，且 V/E有奇数个等价类；令 y_0 为一个排序为 σ_2的新变量，并取 $V \cup \{y_0\}$ 上的等价关系 F，使得 $y_1 F y_2$ 当且仅当 $y_1 = y_2$ 或 $y_1 E y_2$，其对应的排列为 δ_W。首先，我们指出 wit($y = y$) $\wedge \delta_W$ 是 $\mathcal{T}_1^{odd}$-可满足的。

事实上，取解释 $\mathcal{C}$，其中： $\sigma^{\mathcal{C}} = \sigma^{\mathcal{B}}$，二者的基数均为 1； $\sigma_2^{\mathcal{C}} = \sigma_2^{\mathcal{B}} \cup \{a, b\}$，其中 a、 $b \notin \sigma_2^{\mathcal{B}}$，因此 $|\sigma_2^{\mathcal{C}}| = |\sigma_2^{\mathcal{B}}| + 2$ 是一个奇数；并且对除 y_0 外的所有变量 x，均取 $x^{\mathcal{C}} = x^{\mathcal{B}}$，而在 y_0 处改用 $y_0^{\mathcal{C}} = a$。不仅 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释，而且很容易看出它满足 wit($y = y$) $\wedge \delta_W$，这意味着我们应该能够找到一个 $\mathcal{T}_1^{odd}$-解释 $\mathcal{D}$，使其满足 wit($y = y$) $\wedge \delta_W$，且 $\sigma^{\mathcal{D}}$ =vars$_\sigma$(wit($y = y$) $\wedge \delta_W$)$^{\mathcal{D}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{D}}$ =vars$_{\sigma_2}$(wit(y =y) $\wedge \delta_W$)$^{\mathcal{D}}$，但这是不可能的：vars$_{\sigma_2}$(wit($y = y$) $\wedge \delta_W$) $= W$，而 $|W/F|$ 是一个偶数，这将迫使$\sigma_2^{\mathcal{D}}$具有偶数个元素。□

引理 47. $\mathcal{T}_1^{odd}$是凸的。

证明。假设 ϕ 是文字的合取，并且 $\vdash_{\mathcal{T}_1^{odd}} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$；如果某一对 x_i 和 y_i 的排序为 σ，由于 $\mathcal{T}_1^{odd}$ 的所有模型在 σ 排序上恰好有一个元素，因此可得 $\vdash_{\mathcal{T}_1^{odd}} \phi \to x_i = y_i$。因此，我们可以假设所有 x_i 和 y_i 的排序均为 σ_2；此外，我们可以假设 ϕ 不构成矛盾，因为在这种情况下，对于任意 $1 \le i \le n$，均有$\vdash_{\mathcal{T}_1^{odd}} \phi \to x_i = y_i$。

然后，考虑由 ϕ 删除排序为 σ 的变量所对应的文字后得到的公式 ϕ'。这些文字必然具有 $x = y$ 的形式，因为：我们没有函数或谓词；并且对于 $\mathcal{T}_1^{odd}$ 的任意模型， $\sigma^{\mathcal{A}}$ 的基数始终为 1，这意味着如果 ϕ 不是一个矛盾，那么它就不可能满足 $\neg(x = y)$。因此，我们有 $\vdash_{\mathcal{T}_{odd}} \phi' \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$，其中 $\mathcal{T}_{odd}$ 是单排序空签名上的理论（为清晰起见，在本例中令排序为 σ_2），其模型是所有具有无限个或奇数个元素的结构。

$\mathcal{T}_{odd}$ 显然是稳定无限的，并且根据定理 5，可知它是凸的，这意味着对于某个$1 \le i \le n$, $\vdash_{\mathcal{T}_{odd}} \phi' \to x_i = y_i$。当然，可得$\vdash_{\mathcal{T}_1^{odd}} \phi \to x_i = y_i$。 □

M.10 T_1^∞

引理48. $\mathcal{T}_1^\infty$相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$不是稳定无限的，因此也不是光滑的。

证明。 $\mathcal{T}_1^\infty$有一个模型 $\mathcal{A}$，其中 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = 1$ 和 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}| = \omega$，但没有模型 $\mathcal{B}$ 使得 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$都为无限。 □

引理49. $\mathcal{T}_1^\infty$相对于 $\{\sigma, \sigma_2\}$不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。

证明。 $\mathcal{T}_1^\infty$h 作为模型 $\mathcal{A}$，其中 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = 1$ 且 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}| = \omega$，但不存在模型 $\mathcal{B}$，其中 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$均为有限值 e. □

引理50。 $\mathcal{T}_1^\infty$是凸的。

证明。假设 ϕ 是一个立方体，并且 $\vdash_{\mathcal{T}_1^\infty} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$。如果某个变量对 (x_i, y_i) 的排序为 σ，我们已经有了 $\vdash_{\mathcal{T}_1^\infty} \phi \to x_i = y_i$，因此假设所有 x_i 和 y_i 的排序都是 σ_2。于是我们有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$，其中前件和后件可以看作是仅含一个排序 σ_2 的空签名中的公式，而 $\mathcal{T}$ 是该签名上的理论，只有无限模型，且稳定无限。因此可以使用定理 5 得到，对于某个 $1 \le i \le n$，有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_i = y_i$，当然也可推出 $\vdash_{\mathcal{T}_1^\infty} \phi \to x_i = y_i$：事实上，假设这不成立，于是存在一个满足 ϕ 但不满足 $x_i = y_i$ 的 $\mathcal{T}_1^\infty$-解释 $\mathcal{A}$；取满足$\sigma_2^{\mathcal{B}} = \sigma_2^{\mathcal{A}}$且对每个排序为 σ_2 的变量都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，我们便看到 $\mathcal{B}$ 必须满足 ϕ，但不满足 $x_i = y_i$，这与对于某个 $1 \le i \le n$ 有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_i = y_i$ 相矛盾。 □

M.11 T_2^∞

引理51。 $\mathcal{T}_1^\infty$关于 $\{\sigma, \sigma_2\}$不是稳定无限的，因此也不是光滑的。

证明。 $\mathcal{T}_2^\infty$有一个模型 $\mathcal{A}$，其中 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = 2$ 和 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}| = \omega$，但没有模型 $\mathcal{B}$ 能使 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$同时为无限。 □

Le引理 52. $\mathcal{T}_2^\infty$ 相对于 $\{\sigma, \sigma_2$ 不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。 $\}$.

证明。 $\mathcal{T}_2^\infty$h 作为模型 $\mathcal{A}$，其中 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = 2$ 和 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}| = \omega$，但没有模型 $\mathcal{B}$ 同时满足 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 和 $\sigma_2^{\mathcal{B}}$是有限的 e. □

引理 53. $\mathcal{T}_2^\infty$不是凸的。

证明。如果是这样，定理 4 将保证 $\mathcal{T}_2^\infty$ 也是稳定无限的，因为它没有任何模型 $\mathcal{A}$，其中 either$|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 或 $|\sigma_2^{\mathcal{A}}|$ 等于 1。 □

M.12 Tf

引理54。 $\mathcal{T}_f$ 是光滑的，因此是稳定无限的。

证明。取一个无量词公式 ϕ、一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$ 和一个基数 $\kappa \ge |\sigma^{\mathcal{A}}|$。如果 κ 是无限的，我们取两个集合 A 和 B，它们各有 κ 个元素，彼此不相交，并且与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交，然后按如下方式定义一个解释 $\mathcal{B}$：$\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}} \cup A \cup B$；当限制在 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 上时，$s^{\mathcal{B}}$ 等于 $s^{\mathcal{A}}$；当限制在 A 上时，等于恒等映射；而如果 $a \in B$，我们只要求 $s^{\mathcal{B}}(a) \ne a$，该元素处函数的具体取值无关紧要；并且，对于所有变量 x，$x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$。

显然，$\mathcal{B}$是一个 $\mathcal{T}_f$-解释，因为它具有满足 $s(a) = a$ 的无限多个元素（即 A中的所有元素），以及满足 $s(a) \ne a$ 的无限多个元素（ B中的元素）；此外，$|\sigma^{\mathcal{B}}| = |\sigma^{\mathcal{A}}| + |A| + |B| = \kappa$也是如此，因为 $|A| = |B| = \kappa$和 κ 都是无限的。最后，$\mathcal{B}$ 验证了 ϕ，因为签名 Σ_s 中的原子公式都具有 $s^i(x) = s^j(y)$的形式，其中 i、$j \in \mathbb{N}$成立；当 x、$y \in$vars(ϕ)时，这些公式在 $\mathcal{B}$中保持其真值，因为 $s^{\mathcal{B}}$限制在 $\sigma^{\mathcal{A}}$上时等于 $s^{\mathcal{A}}$。

现在，假设 κ，因此 $|\sigma^{\mathcal{A}}|$ 也有限，并令 $\kappa = m$ 和 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = n$。我们考虑两个与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交的集合 A 和 B，其元素数分别为 $f_1(m) - f_1(n)$和 $f_0(m) - f_0(n)$，并定义解释 $\mathcal{B}$ 如下：$\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}} \cup A \cup B$；$s^{\mathcal{B}}$限制在 $\sigma^{\mathcal{A}}$上时等于 $s^{\mathcal{A}}$，限制在 A上时等于恒等映射，限制在 B上时等于从 B 到 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 的任意函数；并且对每个变量 x都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$。容易看出，此时 $\mathcal{B}$是一个 $\mathcal{T}_f$-解释：它具有

$$n + (f_1(m) - f_1(n)) + (f_0(m) - f_0(n)) = m$$

其论域中的元素；$f_1(n)$ 个元素位于 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 中，且 A 中所有 $f_1(m) - f_1(n)$ 元素都满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$，总计 $f_1(m)$；而 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 中的 $f_0(n)$ 个元素，加上 B 中所有 $f_0(m) - f_0(n)$ 元素（记住，B 和 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交），都满足 $s^{\mathcal{B}}(a) \ne a$，总计 $f_0(m)$。

此外，$|\sigma^{\mathcal{B}}| = |\sigma^{\mathcal{A}}| + |A| + |B| = m$；同样由于 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{A}$ 对 vars(ϕ) 中变量的解释，以及 s 赋予可能出现在 ϕ中的元素的值达成一致，因此 ϕ 在 $\mathcal{B}$中为真。 □

引理55. $\mathcal{T}_f$ 是有限可见证的。

证明。对于无量词公式 ϕ，考虑见证。

$$wit(\phi) = \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=0}^{M_i+1} y_{i,j} = s^j(z_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^{k+1}} x_i = x_i,$$

对于：$\mathrm{vars}(\phi) = \{z_1, \ldots, z_n\}$； M_i 使项 $s^j(z_i)$ 出现在 ϕ 中的索引 j 的最大值； 2^k 大于或等于 $2M$ 的最小二次幂，其中 $M = \sum_{i=1}^{n}(M_i + 2)$；以及 x_i 和 y_i，新变量。很容易证明 $\mathrm{wit}(\phi)$ 是可计算的，而且显然， ϕ 和 $\exists \vec{x}.\mathrm{wit}(\phi)$ 是 $\mathcal{T}_f$-等价的，对于 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$，因为：如果 ϕ 在一个 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$ 中为真，如果我们修改 $\mathcal{A}$ 上的赋值，使得 $y_i^{\mathcal{A}'}{}_{,j} = (s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}})$，那么显然 $\mathrm{wit}(\phi)$ 满足于 $\mathcal{A}'$；而如果 $\exists \vec{x}.\mathrm{wit}(\phi)$ 被一个 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$ 满足，鉴于 $\vec{x}$ 中的变量不会出现在 ϕ 中，

$$\exists \vec{x}.\, wit(\phi) \quad \text{and} \quad \phi \wedge \exists \vec{x}.\, \big[\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=0}^{M_i+1} y_{i,j} = s^j(z_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^{k+1}} x_i = x_i \big]$$

是等价的，因此 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ。

因此，假设 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi)$。令： $m_1 < M$ 为在 ϕ 中出现的项 $s^j(z_i)$（对于 $1 \le i \le n$ 和 $0 \le j \le M_i$）的数量，其中 $(s^{\mathcal{A}})^{j+1}(z_i^{\mathcal{A}}) = (s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}})$； $m_0 < M$ 为满足 $(s^{\mathcal{A}})^{j+1}(z_i^{\mathcal{A}}) \neq (s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}})$ 的此类项 $s^j(z_i)$ 的数量； $m_1^* \le n$ 为不在 $\{s^j(z_i)$ 中的元素 $(s^{\mathcal{A}})^{M_i+1}(z_i^{\mathcal{A}})$ 的数量： $1 \le i \le n$， $0 \le j \le M_i\}^{\mathcal{A}}$。于是我们有 $m_0 + m_1 + m_1^* \le M < 2^k$，因此可以取集合 A 和 B，使它们分别与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 及彼此不相交，并分别含有 $2^k - m_1 - m_1^*$ 和 $2^k - m_0$ 个元素。最后，我们定义一个 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{B}$，首先将其论域设为

$$\sigma^{\mathcal{B}} = \{s^j(z_i) : 1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i + 1\}^{\mathcal{A}} \cup A \cup B.$$

为定义 $s^{\mathcal{B}}$，我们取一个元素 $a_0 \in \sigma^{\mathcal{A}}$ （且至少有一个），并令

$$s^{\mathcal{B}}(a) = \begin{cases} s^{\mathcal{A}}(a) & \text{if } a = (s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}}) \text{ for } 1 \le i \le n \text{ and } 0 \le j \le M_i; \\ a & \text{if } a = (s^{\mathcal{A}})^{M_i+1}(z_i^{\mathcal{A}}), \text{ for } 1 \le i \le n, \\ & \text{and } a \neq (s^{\mathcal{A}})^j(z_l^{\mathcal{A}}) \text{ for any } 1 \le l \le n \text{ and } 0 \le j \le M_i; \\ a & \text{if } a \in A; \\ a_0 & \text{if } a \in B; \end{cases}$$

注意，前两种情况互不相交，并且覆盖了 $\{s^j(z_i) : 1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i + 1\}^{\mathcal{A}}$ 的所有情况；而最后两种情况彼此不相交，也与前面的情况不相交（因为 A 和 B 彼此不相交，且都与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交），从而完成对 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 的覆盖；还要注意，$s^{\mathcal{B}}(a)$ 定义良好，因为 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 非空，且 B 和 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交。并且，对于 ϕ 中的每个变量， $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$ $y_i^{\mathcal{B}}{}_{,j} = (s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}})$，且 $x \mapsto x^{\mathcal{B}}$ 是 $\{x_1, ..., x_{2^{k+1}}\}$ 与 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 之间的一个双射；由于两个集合都含有 2^{k+1} 个元素，这是可行的（对其他变量则任意选取）。要说明这对 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 也成立（这一点并不明显），注意集合 $\alpha(\phi)^{\mathcal{A}}$，对于 $\alpha(\phi) = \{s^j(z_i) : 1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i\}$ 含有 $m_0 + m_1$ 个元素；这是根据 m_0 的定义得出的：它是 $\alpha(\phi)^{\mathcal{A}}$ 中满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$ 的元素 a 的数量；而 m_1 则是 $\alpha(\phi)^{\mathcal{A}}$ 中满足 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$ 的元素 a 的数量（当然， $\alpha(\phi)^{\mathcal{A}}$ 中的每个元素都必须满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$ 或 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，且绝不会同时满足二者）；因此， $\{s^j(z_i) : 1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i + 1\}^{\mathcal{A}}$ 含有 $m_0 + m_1 + m_1^*$ 个元素，这是根据 m_1^* 的定义得出的：它是形如 $(s^{\mathcal{A}})^{M_i}(z_i^{\mathcal{A}})$ 且不属于 $\alpha(\phi)^{\mathcal{A}}$ 的元素的数量。利用 A 有 $2^k - m_1 - m_1^*$，以及 B 有 $2^k - m_0$，我们得到前面提到的总数 2^{k+1}。

$\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{T}_f$-解释，因为：其论域中有 2^{k+1} 个元素；其中一半满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$，具体而言，是 $\{s^j(z_i)$中的 m_1： $1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i\}^{\mathcal{A}}$，这些元素满足 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$；所有 m_1^* 元素（$(s^{\mathcal{A}})^{M_i+1}(z_i^{\mathcal{A}})$都不属于 $\{s^j(z_i)$: $1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i\}^{\mathcal{A}}$，以及 A中的所有这些 $2^k - m_1 - m_1^*$ 元素；并且其中一半满足$s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，具体而言，是 $\{s^j(z_i)$中的 m_0： $1 \le i \le n, 0 \le j \le M_i\}^{\mathcal{A}}$，以及 B中的另外 $2^k - m_0$ 个元素。由于 f的定义满足：对于所有 k, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，均有 $f_1(2^k) = f_0(2^k)$，且 $f(m) = f_0(m) + f_1(m)$，因此显然 $\mathcal{B}$确实是一个 $\mathcal{T}_f$-解释。

此外，任何出现在 ϕ 中的项 α （必然具有 $s^j(z_i)$ 的形式，其中 $1 \le i \le n$ 和 $0 \le j \le M_i$）在 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 中取值相同，下面我们将通过归纳法证明这一点。事实上，对于出现在 z_i 中的任意变量

ϕ， $z_i^{\mathcal{B}} = z_i^{\mathcal{A}}$（因此 $(s^{\mathcal{B}})^0(z_i^{\mathcal{B}}) = (s^{\mathcal{A}})^0(z_i^{\mathcal{A}})$）；接着，对于每个 $0 \le j < M_i$，假设归纳假设为 $(s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}}) = (s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}})$（为方便起见，将该元素称为 a），根据 $s^{\mathcal{B}}$ 的定义，我们有 $s^{\mathcal{B}}(a) = s^{\mathcal{A}}(a)$，因此

$$(s^{\mathcal{B}})^{j+1}(z_i^{\mathcal{B}}) = s^{\mathcal{B}}\big((s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}})\big) = s^{\mathcal{A}}\big((s^{\mathcal{A}})^j(z_i^{\mathcal{A}})\big) = (s^{\mathcal{A}})^{j+1}(z_i^{\mathcal{A}}).$$

由于底层签名没有谓词，因此 ϕ 的所有原子公式在 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$中都具有相同的真值；由于 ϕ 是无量词的，且 $\mathcal{A}$满足它，这意味着 $\mathcal{B}$也满足 ϕ。我们还有， $\mathcal{B}$满足 wit(ϕ)，因为 $y_{i,\,j}^{\mathcal{B}} = (s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}})$。最后，vars(wit($\phi$))$^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{B}}$，因为 $\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\}^{\mathcal{B}} \subseteq$vars(wit($\phi$))$^{\mathcal{B}}$，并且鉴于 $x \mapsto x^{\mathcal{B}}$是 $\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\}$与 $\sigma^{\mathcal{B}}$之间的双射，$\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\}^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{B}}$，由此证明 wit 确实是一个见证。 □

引理 56. $\mathcal{T}_f$ 不是强有限可见证的。

Pro。假设 wit 是一个强见证；我们首先证明，给定一个无量词公式 ϕ，

$$\mathit{mincard}(\phi) = \min\{|V/E| : E \in eq \text{ and } \mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E \text{ is } \mathcal{T}_f\text{-satisfiable}\},$$

其中， eq 是 $V =$vars(wit(ϕ))上的所有等价关系 E 构成的集合，对应的配置记为δ_V^E。为证明这个恒等式，假设 $\mathcal{A}$是一个满足 ϕ 且论域基数最小的 $\mathcal{T}_f$-解释，因此 $|\sigma^{\mathcal{A}}| =$mincard(ϕ)；由于 ϕ和 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)是 $\mathcal{T}_f$-等价的（对于 $\vec{x} =$vars(wit(ϕ)) $\setminus$vars(ϕ)）， $\mathcal{A}$也满足 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)。将 $\mathcal{A}$赋给 $\vec{x}$中变量的值进行更改后，我们得到一个新的 $\mathcal{T}_f$-解释$\mathcal{A}'$，它满足wit(ϕ)，且与 $\mathcal{A}$具有相同的底层结构。

令 E 为 V 上的等价关系，使得 xEy 当且仅当 $x^{\mathcal{A}'} = y^{\mathcal{A}'}$，并且有 $\mathcal{A}'$ 满足wit(ϕ) $\wedge\, \delta_V^E$ and$|V/E| \le |\sigma^{\mathcal{A}'}|$；由于wit被假定为强见证，因此必定存在一个满足wit(ϕ) $\wedge \delta_V^E$and $\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{B}}$的 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{B}$，于是 $|\sigma^{\mathcal{B}}| = |V/E|$。但是，同样由于 ϕ和 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)是 $\mathcal{T}_f$-等价的， $\mathcal{B}$也满足$\exists \vec{x}.$wit(ϕ)，因此 ϕ，这意味着 $|\sigma^{\mathcal{B}}| \ge |\sigma^{\mathcal{A}}| = |\sigma^{\mathcal{A}'}|$。综上，$|\sigma^{\mathcal{B}}| \ge |\sigma^{\mathcal{A}'}| \ge |V/E| = |\sigma^{\mathcal{B}}|$，这表明它们全都相等，从而 $|V/E| = |\sigma^{\mathcal{A}}| =$mincard($\phi$)。当然，接下来我们得到

$$\mathit{mincard}(\phi) \in \{|V/E| : E \in eq \text{ and } \mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E \text{ is } \mathcal{T}_f\text{-satisfiable}\},$$

因此现在假设存在一个定义在 V 上的等价关系 E，使得 wit(ϕ)$\wedge\delta_V^E$ 是 $\mathcal{T}_f$-可满足的，但 $|V/E| <$mincard(ϕ)，由此我们将得到一个矛盾。由于 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_V^E$ 是 $\mathcal{T}_f$-可满足的，而且 wit 是一个强见证，因此存在一个 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$，满足 wit(ϕ) $\wedge \delta_V^E$ 和 $\sigma^{\mathcal{A}} = V^{\mathcal{A}}$，于是 $|\sigma^{\mathcal{A}}| = |V/E|$。但是，由于 $\mathcal{A}$ 也满足 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ)，并且 ϕ 和 $\exists \vec{x}.$wit(ϕ) 等价， $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，这与如下事实矛盾：满足 ϕ 的最小 $\mathcal{T}_f$-解释的论域基数为 mincard(ϕ) $> |V/E| = |\sigma^{\mathcal{A}}|$。因此，我们关于 mincard($\phi$) 的恒等式成立。

但恒等映射右侧确实是可计算的：事实上，找到集合 eq 很简单；测试 wit(ϕ) $\wedge \delta_V^E$ 是否 $\mathcal{T}_f$-可满足也是可判定的，因为根据引理 8，这等价于测试同一个公式是否不矛盾；求出 E 的等价类数量也很直接。当然，这与引理 7 中证明的 $\mathcal{T}_f$ 不存在可计算的最小基数函数这一事实相矛盾，从而证明该理论不是强有限可见证的。 □

引理 57。 $\mathcal{T}_f$ 是凸的。

证明。假设 ϕ 是一个立方体，$\vdash_{\mathcal{T}_f} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$，但 $\mathcal{T}_f$ 不是凸的，因此对于每个 $1 \le i \le n$都有 $\nvdash_{\mathcal{T}_f} \phi \to x_i = y_i$，这意味着我们可以找到满足 ϕ 和 $\neg(x_i = y_i)$的 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}_i$。于是可以得出 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$，其中 $\mathcal{T}$是以所有 Σ_s-结构为模型、由空集公理化的理论：若此结论不成立，则存在一个满足 ϕ 但不满足 $\bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$，这意味着$\phi \wedge \neg \bigvee_{i=1}^n x_i = y_i$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的，因此是非矛盾的，并且根据引理 8，也是 $\mathcal{T}_f$-可满足的；这与我们的假设矛盾。然而，鉴于定理 10 指出 $\mathcal{T}$是凸的，我们必须有 $\vdash_{\mathcal{T}} \phi \to x_j = y_j$，其中某个$1 \le j \le n$成立，因此 $\phi \wedge \neg(x_j = y_j)$是 $\mathcal{T}$-不可满足的，这本身就与以下事实矛盾： $\mathcal{A}_j$ 是一个满足 ϕ 和 $\neg(x_j = y_j)$的 $\mathcal{T}_f$-解释（因此也是一个 $\mathcal{T}$-解释）。 □

M.13 T_f^s

引理 58。 $\mathcal{T}_f^s$ 的最小基数函数不可计算。

证明。证明过程与引理 7 相同。 □

引理59。 $\mathcal{T}_f^s$是光滑的，因此是稳定无限的。

证明。我们可以对引理54的证明稍作调整：两个证明之间唯一的区别在于，现在必须要求 $s^{\mathcal{B}}$ 将 B 中的元素映射到 A 中的元素，从而使得 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(a)$。 □

引理60。 $\mathcal{T}_f^s$是有限可见证的。

证明。取一个无量词的公式 ϕ，并考虑该见证。

$$wit(\phi) = \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} y_i = s(w_i) \wedge z_i = s(y_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^{k+1}} x_i = x_i,$$

其中，vars(ϕ) $= \{w_1, \ldots, w_n\}$, 2^k 是大于 $2n$的最小 2 的幂，且 x_i、 y_i 和 z_i 是新变量。如果一个 $\mathcal{T}_f^s$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ, 通过令 $y_i^{\mathcal{A}'} = s^{\mathcal{A}}(w_i^{\mathcal{A}})$ 和 $z_i^{\mathcal{A}'} = s^{\mathcal{A}}(y_i^{\mathcal{A}'})$，我们可以得到第二个满足 wit($\phi$) 的 $\mathcal{T}_f^s$-解释 $\mathcal{A}'$，因为对于 $\vec{x} =$，vars(wit(ϕ)) $\setminus$ vars(ϕ)， ϕ 和 $\exists \vec{x}.\,$wit(ϕ) 是 $\mathcal{T}_f^s$-等价的。

现在，假设 $\mathcal{T}_f^s$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 wit(ϕ)，并令

$$V = \{w_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

令 m_1 为 $\{a \in V^{\mathcal{A}}$ 的基数： $s^{\mathcal{A}}(a) = a\}$, $m_0 = |V^{\mathcal{A}}| - m_1$，然后 $2^k >$ max$\{m_0, m_1\}$：这是因为对于每个 $1 \leq i \leq n$，要么 $y_i^{\mathcal{A}} = w_i^{\mathcal{A}}$，要么 $z_i^{\mathcal{A}} = w_i^{\mathcal{A}}$，这意味着 $|V^{\mathcal{A}}| \leq 2n$，因此 $m_0, m_1 \leq 2n$。给定集合 A 和 B，它们与 $\sigma^{\mathcal{A}}$不相交，且分别有 $2^k - m_1$ 和 $2^k - m_0$ 个元素，我们通过如下定义一个新的 $\mathcal{T}_f^s$-解释 $\mathcal{B}$：

1. $\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{A}} \cup A \cup B$ （它有 2^{k+1} 个元素）；2. 将 $s^{\mathcal{B}}$ 限制在 $V^{\mathcal{A}}$ 上时等于 $s^{\mathcal{A}}$ （这是良定义的，因为 $s^{\mathcal{A}}(w_i^{\mathcal{A}}) = y_i^{\mathcal{A}}$, $s^{\mathcal{A}}(y_i^{\mathcal{A}}) = z_i^{\mathcal{A}}$，且 $s^{\mathcal{A}}(z_i^{\mathcal{A}})$ 等于 $w_i^{\mathcal{A}}$或 $y_i^{\mathcal{A}}$），将其限制在 A上时等于恒等映射，将其限制在 B 上时等于从 B 到 A的任意函数（如此一来， A 的所有元素都满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$，而 B 的所有元素都满足 $s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$ 以及$s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(a)$）；3. 对于 V中的任意变量， $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$是 $\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\}$与 $\sigma^{\mathcal{B}}$之间的一个双射；其他情况下则任意取值。

现在我们证明 $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{T}_f^s$-解释：它有 2^{k+1} 个元素；其中 2^k 个，具体来说是 $\{a \in V^{\mathcal{A}}$ 中的 m_1： $s^{\mathcal{A}}(a) = a\}$ 和 A 中的另一个 $2^k - m_1$，满足 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$；另一半，具体来说是 $V^{\mathcal{A}} \setminus \{a \in V^{\mathcal{A}}$ 中的 m_0： $s^{\mathcal{A}}(a) = a\}$ 和 $2^k - m_1$，则满足 $s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$；因此 $\mathcal{B}$ 至少是一个 $\mathcal{T}_f$-解释。此外，对于 $V^{\mathcal{A}}$ 的任意元素 a，$s^{\mathcal{B}}(a) = s^{\mathcal{A}}(a)$ 且 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) =^{\mathcal{A}} s^{\mathcal{A}}(a))$，并且我们已经有 $s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a)) = a$ 或 $s^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(a)) = s^{\mathcal{A}}(a)$；对于任意 $a \in A$， $s^{\mathcal{B}}(a) = a$，因此 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = a$；对于任意 $a \in B$， $s^{\mathcal{B}}(a) \in A$，也就是说 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(a)$；因此 $\mathcal{B}$ 也满足 $\psi_\vee$，所以它是一个 $\mathcal{T}_f^s$- 解释。

现在，令 α 为 ϕ 中的一个项，它必然具有 $s^j(w_i)$ 的形式：我们知道 $w_i^{\mathcal{A}}$ 和 $s^{\mathcal{A}}(w_i^{\mathcal{A}})$ 都属于 $V^{\mathcal{A}}$，因此，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，$(s^j(w_i))^{\mathcal{A}}$ 也属于 $V^{\mathcal{A}}$，因为 $(s^{\mathcal{A}})^j(w_i^{\mathcal{A}})$ 必须等于 $w_i^{\mathcal{A}}$ 或 $s^{\mathcal{A}}(w_i^{\mathcal{A}})$；由于 $s^{\mathcal{B}}$ 在 $V^{\mathcal{A}}$ 上与 $s^{\mathcal{A}}$ 重合，并且 $w_i^{\mathcal{B}} = w_i^{\mathcal{A}}$，我们得到 $\alpha^{\mathcal{B}} = \alpha^{\mathcal{A}}$。鉴于 wit($\phi$) 不含量词和谓词，我们知道它在 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$ 中必然取相同的值，因此它在 $\mathcal{B}$ 中为真；此外， $x \mapsto x^{\mathcal{B}}$ 是 $\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\}$ 与 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 之间的一个双射，并且由于 $\{x_1, \ldots, x_{2^{k+1}}\} \subseteq$ vars$_\sigma$(wit(ϕ))，我们有 vars$_\sigma$(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{B}}$。因此，wit 确实是一个见证。

□

定理 11. 给定签名 Σ_s 中的无量词公式 ϕ，其中 vars(ϕ) $= \{w_1, \ldots, w_n\}$，若

$$\overline{\phi} = \phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} s^2(w_i) = w_i \vee s^2(w_i) = s(w_i)$$

可满足，则 ϕ 是 $\mathcal{T}_f^s$-可满足的。

证明。假设 $\overline{\phi}$ 可满足，根据引理 8，存在一个满足 $\overline{\phi}$ 的 $\mathcal{T}_f$-解释 $\mathcal{A}$。我们按如下方式构造一个 $\mathcal{T}_f^s$-解释 $\mathcal{B}$：$\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}}$；若

$$a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus vars(\phi)^{\mathcal{A}} \quad \text{and} \quad a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in vars(\phi)^{\mathcal{A}}\},$$

且 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，我们令 $s^{\mathcal{B}}(a)$ 等于任意满足 $s^{\mathcal{A}}(b) = b$ 的元素 $b \in \sigma^{\mathcal{A}}$，否则 $s^{\mathcal{B}}$ 等于 $s^{\mathcal{A}}$；对于所有变量 x、$x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$。由于 $\mathcal{B}$ 中所有变量的解释与 $\mathcal{A}$中相同，因此对于 $\overline{\phi}$ 中的每个变量 w_i，

都有 $w_i^{\mathcal{B}} = w_i^{\mathcal{A}}$；并且由于 $s^{\mathcal{B}}$ 与 $s^{\mathcal{A}}$ 在 $\mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}} \cup \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$ 上一致，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，可知 $(s^{\mathcal{A}})^j(w_i^{\mathcal{A}})$，因为 $\mathcal{A}$ 满足 $\bigwedge_{i=1}^{n} s^2(w_i) = w_i \vee s^2(w_i) = s(w_i)$，因此对于 $\overline{\phi}$中的任意项 α， $\alpha^{\mathcal{B}} = \alpha^{\mathcal{A}}$。由于 Σ_s 不含谓词（恒等映射除外），且 $\overline{\phi}$ 是无量词的，我们得出结论：$\mathcal{B}$ 显然满足 $\overline{\phi}$，因此 ϕ。

然而，目前尚不清楚 $\mathcal{B}$ 确实是一个 $\mathcal{T}_f^s$-解释。我们首先注意到，$\mathcal{B}$ 至少是一个 $\mathcal{T}_f$-解释，因为 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$ 当且仅当 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$：事实上，先假设 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$；我们不可能有 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}$,$a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$ 且 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，因为在这种情况下，对于某个元素 b，有 $s^{\mathcal{A}}(b) = b$， $s^{\mathcal{B}}(a) = b$（该元素必然不同于 a，因为 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$）；因此， $s^{\mathcal{B}}$ 必须与 $s^{\mathcal{A}}$重合，从而 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$。反过来，假设 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$：那么我们不属于 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}$, $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$的情形，因此 $s^{\mathcal{B}}$ 必须与 $s\mathcal{A}$重合，也就是说 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$，正如我们所要证明的。

此外：

1. 如果 $a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}$ 或 $a \in \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$，根据 $\mathcal{B}$ 满足 $\overline{\phi}$ 这一事实，我们得到 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = a$ 或$s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(a)$；2. 如果 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}$， $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$，并且 $s^{\mathcal{A}}(a) = a$， $s^{\mathcal{B}}(a) = a$；3. 如果 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}$ 且 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus \{s^{\mathcal{A}}(a) : a \in \mathsf{vars}(\phi)^{\mathcal{A}}\}$，但 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$，则存在一个 $b \in \sigma^{\mathcal{A}}$，使得 $s^{\mathcal{A}}(b) = b$，从而 $s^{\mathcal{B}}(a) = b$，因此 $s^{\mathcal{B}}(s^{\mathcal{B}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(a)$,

证明 $\mathcal{B}$ 确实是一个 $\mathcal{T}_f^s$-解释。 □

引理 61. $\mathcal{T}_f^s$不是强有限可见证的。

证明。我们按照引理 56 的方法进行，证明 that.

$$\mathit{mincard}(\phi) = \min\{|V/E| : E \in eq \text{ and } \mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E \text{ is } \mathcal{T}_f^s\text{-satisfiable}\},$$

鉴于右侧是可计算的，这很荒谬：事实上，给定 ϕ，可以轻松找到 V 和 eq，$|V/E|$ 也是如此；如果 wit 是可计算的，则也可以通过算法得到 $\mathsf{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E$；并且，多亏了定理 11，测试 $\mathsf{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E$ 是否是 $\mathcal{T}_f^s$-可满足的，等价于测试公式

$$\overline{\mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E} = \mathit{wit}(\phi) \wedge \delta_V^E \wedge \bigwedge_{w \in V} s^2(x) = x \vee s^2(x) = s(x)$$

是可满足的，这可以通过算法实现。 □

引理 62. $\mathcal{T}_f^s$不是凸的。

证明。此证明与引理 5 中关于 $(\mathcal{T})_\vee$ 非凸性的证明相同。 □

M.14 $\mathcal{T}^{\neq}$ 奇数

引理 63. $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 不是稳定无限的，因此也不光滑。

证明。虽然平凡的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释满足 $s(x) = x$，但 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$的任何无限模型都必须满足 $\forall x.\neg[s(x) = x]$。

□

引理 64. $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 是有限可见证的。

证明。给定一个无量词公式 ϕ，其变量集 $\mathsf{vars}(\phi) = \{w_1, \ldots, w_n\}$（注意，由于定义 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$所用的签名既没有函数常元，也没有谓词常元，因此不可能定义一个不含变量的公式，所以 $n \geq 1$），并且对每个 $1 \leq i \leq n$， $M_i = \max\{j : s^j(w_i)$ 都属于 $\phi\}$，我们将其见证定义为

$$\mathit{wit}(\phi) = \phi \wedge (y = y) \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=0}^{M_i+1} y_{i,j} = s^j(w_i),$$

其中 y和 $y_{i,\,j}$都是新变量。对于 $\vec{x} = \mathsf{vars}(\mathsf{wit}(\phi)) \setminus \mathsf{vars}(\phi)$，我们证明 ϕ和 $\exists \vec{x}.\,\mathsf{wit}(\phi)$ 在 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$下等价：从右到左显然成立。反过来，若 $\mathcal{A}$ 是满足 ϕ的一个 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释，则通过改变 $\mathcal{A}$ 赋给变量 $y_{i,\,j}$ 的值，使得 $y_i^{\mathcal{A}'}{}_{,\,j} = (s^{\mathcal{A}})^j(w_i^{\mathcal{A}})$，我们得到另一个满足 $\mathsf{wit}(\phi)$ 的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释 $\mathcal{A}'$；当然，这意味着 $\mathcal{A}$ 本身满足 $\exists \vec{x}.\,\mathsf{wit}(\phi)$。

现在，假设 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathsf{wit}(\phi)$。令 $V = \mathsf{vars}(\phi) \cup \{y_{i,j} : 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq M_i+1\}$。我们需要考虑三种情况。

1. 如果 $|V^{\mathcal{A}}| = 1$，显然 $\mathcal{A}$ 是仅含一个元素的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释（因为 $M_i + 1 \geq 1$，因此 ($s^{\mathcal{A}\ 1}\ w_i^{\mathcal{A}} = s^{\mathcal{A}\ 0}\ w_i^{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$ ϕ σ $\phi\ ^{\mathcal{A}} =$) ( ) ( ) ( ))，所以它已经是一个满足 $\sigma^{\mathcal{A}}$ wit( ) 且 vars (wit( )) 的 -解释，无需再做任何处理。

2. 如果 $|V^{\mathcal{A}}|$ 是大于 1 的奇数，我们按如下方式构造第二个 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{B}$。关于 $\mathcal{B}$ 的论域，$\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{A}}$。如果对于某些 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_i$，$a = (s^{\mathcal{A}})^j(w_i^{\mathcal{A}})$，则 $s^{\mathcal{B}}(a) = s^{\mathcal{A}}(a)$（这样一来，$s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$，因为 $s^{\mathcal{A}}(a) \neq a$）；如果 $a = (s^{\mathcal{A}})^{M_i+1}(w_i^{\mathcal{A}})$，但对于任意 $1 \leq k \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_k$，a 都不等于 $(s^{\mathcal{A}})^j(w_k^{\mathcal{A}})$，我们就简单地令 $s^{\mathcal{B}}(a)$ 等于 $\sigma^{\mathcal{B}}$ 中任意一个不同于 a 的元素（这样的元素确实存在，因为 $|V^{\mathcal{A}}| > 1$）。最后，对所有变量 $x \in V$，$x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$，其他情况下任意指定（这包括 y 以及所有 y_i、 $_j$）。由此很容易看出，不仅 $\mathcal{B}$ 是满足 wit(ϕ) 的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$- 解释，而且 $\sigma^{\mathcal{B}} =$ vars(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$。

3. 最后，假设 $|V^{\mathcal{A}}|$ 是偶数。于是我们取一个元素 $b \notin V^{\mathcal{A}}$，并按如下方式定义一个新的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{B}$。对于论域，我们使用 $\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{A}} \cup \{b\}$。如果对于某些 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_i$，$a = (s^{\mathcal{A}})^j(w_i^{\mathcal{A}})$，我们再次令 $s^{\mathcal{B}}(a) = s^{\mathcal{A}}(a)$; 如果 $a = b$ 或 $a = (s^{\mathcal{A}})^{M_i+1}(w_i^{\mathcal{A}})$，但对于任意 $1 \leq k \leq n$ 和 $0 \leq j \leq M_k$，a 不等于 $(s^{\mathcal{A}})^j(w_k^{\mathcal{A}})$，则 $s^{\mathcal{B}}(a)$ 可以是来自 $\sigma^{\mathcal{B}} \setminus \{a\}$ 的任意元素。对于 V 中的所有变量 x，令 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$ 为 $y^{\mathcal{B}} = b$，其他情况下则任意指定。再次可以很容易地得到，$\mathcal{B}$ 是一个同时满足 wit(ϕ) 和 $\sigma^{\mathcal{B}} =$ vars(wit(ϕ))$^{\mathcal{B}}$ 的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释。 □

引理 65. $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$ 不是强有限可见证的。

证明。假设 wit 是一个强见证。首先注意到，存在无限的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{A}'$，例如论域为 $\mathbb{N}$ 且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $s^{\mathcal{A}'}(n) = n + 1$ 的解释。由于所有 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释（包括无限模型）都满足 $\phi =$(w = w)，因此必定存在一个满足 wit($w = w$) 的无限 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{A}$（因为 ϕ 和$\vec{x}$wit(ϕ) 是 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-等价的，对于 $\vec{x} =$vars(wit(ϕ))$\setminus$ vars(ϕ)，并且 $\mathcal{A}'$满足 ϕ，所以必定存在一个 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{A}$，它与 $\mathcal{A}'$至多在 $\vec{x}$ 上不同，并且满足 wit(ϕ)）。

现在考虑集合 $W =$ vars(wit($w = w$)) 以及 W 上的等价关系 F，使得当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$ 时 xFy，其对应的排列为 δ_W：显然 $\mathcal{A}$ 满足 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_W$，现在我们需要考虑两种情况。

1. 如果 W/F 有奇数个等价类，我们知道必定存在一个 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{B}$，满足 wit($w = w$) $\wedge\, \delta_W$ 且具有 $\sigma^{\mathcal{B}} = W^{\mathcal{B}}$，这显然荒谬：如果 $\mathcal{B}$ 满足 δ_W，那么 $W^{\mathcal{B}}$ 的元素个数将与 W/F 相同，因此其元素个数为偶数，这与 $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释这一事实相矛盾。

2. 因此，假设 W/F 有奇数个等价类，取某个 $z \notin W$，并在 $V = W \cup \{z\}$ 上定义等价关系 E，使得 xEy 当且仅当 xFy 或 $x = y$ 成立，并令相应的排列为 δ_V。

要看出 wit($w = w$)$\wedge \delta_V$ 仍然是 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-可满足的，请记住，$\mathcal{A}$ 不仅是满足 $w = w$ 的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释，而且还是无限的：由于 W，因此 $W^{\mathcal{A}}$ 必定是有限的，所以存在一个元素 $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \setminus W^{\mathcal{A}}$；接着，我们将 $\mathcal{A}''$ 定义为与 $\mathcal{A}$ 相同的解释，只是 $z^{\mathcal{A}''} = a$（并且对于所有其他变量 x，$x^{\mathcal{A}''} = x^{\mathcal{A}}$）。鉴于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}''$ 在无量词公式 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_W$ 中的变量上取值一致，且 $\mathcal{A}$ 满足 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_W$，可知 $\mathcal{A}''$ 也满足该公式，并且还满足对于所有 $x \in W$ 都有 $z^{\mathcal{A}''} \neq x^{\mathcal{A}''}$；当然，这意味着 $\mathcal{A}''$ 是满足 wit(ϕ) $\wedge\, \delta_V$ 的 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释。

因此，必定存在一个 $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$-解释 $\mathcal{B}$，满足 wit($w = w$)$\wedge \delta_V$，且满足 $\sigma^{\mathcal{B}} = V^{\mathcal{B}}$。当然，这是荒谬的：如果 W/F 有奇数个等价类，V/E 就有偶数个等价类；由于它满足 δ_V，这就迫使 $\mathcal{B}$ 的论域中有偶数个元素。 □

在 下面的证明中，我们需要用到这样一个事实：理论 $\mathcal{T}'$ 由公式集合公理化

$$\{\neg\psi_{=1}\} \cup \{\forall x.\, \neg(s(x) = x)\} \cup \{\neg\psi_{2k} : k \in \mathbb{N}\},$$

是稳定无限的。其实很容易看出这一点：取一个无量词公式 ϕ 以及一个满足ϕ的 $\mathcal{T}'$解释 $\mathcal{A}$。接着考虑一个集合 $A = \{a_n, b_n : n \in \mathbb{N}\}$ 与 $\sigma^{\mathcal{A}}$ 不相交，并定义一个 $\mathcal{T}'$解释 $\mathcal{B}$，使得：$\sigma^{\mathcal{B}} = \sigma^{\mathcal{A}} \cup A$; $s^{\mathcal{B}}(a) = s^{\mathcal{A}}(a)$，如果 $a \in \sigma^{\mathcal{A}}$，$s^{\mathcal{B}}(a_n) = b_n$ 且 $s^{\mathcal{B}}(b_n) = a_n$; 并且对于所有变量 x，都有 $x^{\mathcal{B}} = x^{\mathcal{A}}$。那么 $\mathcal{B}$ 是无限的，这意味着它满足 $\{\neg\psi_{=1}\} \cup \{\neg\psi_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$，此外还满足 $\forall x.\, \neg(s(x) = x)$; 而且它满足 ϕ，这说明它是一个满足该公式的无限 $\mathcal{T}'$解释，从而使该理论成为稳定无限的。

引理66. $\mathcal{T}^{\neq}_{odd}$ 是凸的。

证明。假设我们有

$$\vdash_{\mathcal{T}_{odd}^{\neq}} \phi \to \bigvee_{k=1}^{n} x_k = y_k \quad \text{but} \quad \nvdash_{\mathcal{T}_{odd}^{\neq}} \phi \to x_k = y_k, \quad \text{for every } 1 \leq k \leq n,$$

其中 ϕ 是文字合取。因此，对于每个 $1 \leq k \leq n$，必定存在满足 ϕ 但不满足 $x_k = y_k$ 的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 解释 $\mathcal{A}_k$；请注意，由于 $\mathcal{A}_k$ 不满足 $x_k = y_k$，它不可能是只有一个元素的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 解释。还请注意，如果我们从 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 的模型类中移除论域基数为 1 的模型，就会得到由以下公式集合公理化的理论 $\mathcal{T}'$

$$\{\neg\psi_{=1}\} \cup \{\forall x.\, \neg(s(x) = x)\} \cup \{\neg\psi_{2k} : k \in \mathbb{N}\},$$

与 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 不同，该理论是稳定无限的。由于对于每个 $1 \leq k \leq n$，$\mathcal{A}_k$ 都是满足 ϕ 但不满足 $x_k = y_k$ 的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 解释，因此也是 $\mathcal{T}'$ 解释，利用 $\mathcal{T}'$ 是稳定无限的这一事实（且 $\phi \wedge \neg(x_k = y_k)$ 是无量词的），我们得到 $\mathcal{T}'$ 解释；它们必然也是 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$ 解释，$\mathcal{A}'_k$ 满足 ϕ 但不满足 $x_k = y_k$，并且是无限的。

再次利用引理 2，必然存在满足 ϕ 但不满足 $x_k = y_k$ 的、具有可数无限论域的 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释 $\mathcal{B}_k$。令 $\{z_1, \ldots, z_M\} = \mathsf{vars}(\phi) \cup \{x_k, y_k : 1 \leq k \leq n\}$，并对每个 $1 \leq i \leq M$ 定义 M_i，使其等于满足以下条件的 j 的最大值：$s^j(z_i)$ 出现在 ϕ 中；或者，如果 ϕ 中没有任何 $s^j(z_i)$ 是子项，则令其等于 0。接下来，我们取一个新的变量集 $V = \{x_{i,j} : 1 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq M_i\}$，并对每个 k，将 E_k 定义为 V 上满足以下条件的最小等价关系：

1. 如果 $x_{i,j} E_k x_{p,q}$, $0 \leq j < M_i$ 和 $0 \leq q < M_p$，那么 $x_{i,j+1} E_k x_{p,q+1}$；2. 如果 $(s^{\mathcal{B}_k})^j(z_i^{\mathcal{B}_k}) = (s^{\mathcal{B}_k})^q(z_p^{\mathcal{B}_k})$，那么 $x_{i,j} E_k x_{p,q}$。

请注意，这些等价关系都不是定义不良的，因为它们恰好是由 $\mathcal{B}_k$ 在集合 V 上诱导出的等价关系，其中我们将 $(s^{\mathcal{B}_k})^j(z_i^{\mathcal{B}_k})$ 与 $x_{i,\,j}$ 视为相同（注意，E_k 的第一个定义性质源于这样一个事实：如果 $a = b$，那么 $s^{\mathcal{B}_k}(a) = s^{\mathcal{B}_k}(b)$）：由于对于所有 $a \in \sigma^{\mathcal{B}_k}$，$s^{\mathcal{B}_k}(a) \neq a$，我们也很容易推导出，如果 $0 \leq j < M_i$，则有 $x_{i,\,j} \overline{E_k} x_{i,\,j+1}$，其中 $\overline{E_k}$ 是 E_k 的补集。最后，我们通过设定 $x_{i,\,j} E x_{p,\,q}$ 当且仅当对于所有 $1 \leq k \leq n$，$x_{i,\,j} E_k x_{p,\,q}$，在 V 上定义等价关系 E。

我们将用 $[x_{i,j}]$ 表示以 $x_{i,j}$ 为代表元的等价类，接下来按如下方式定义一个 $\mathcal{T}_{odd}^{\neq}$-解释$\mathcal{B}$。

1. $\sigma^{\mathcal{B}} = (V/E) \cup \mathbb{N}$（其为无限的）。2. 如果存在 $x_{i,j}$ 属于 $[x_{p,q}]$，使得 $j < M_i$，我们令 $s^{\mathcal{B}}([x_{p,q}]) = [x_{i,j+1}]$；否则令 $s^{\mathcal{B}}([x_{p,q}]) = 0$；对每个 $a \in \mathbb{N}$，都有 $s^{\mathcal{B}}(a) = a + 1$（注意，我们总有 $s^{\mathcal{B}}(a) \neq a$；若 $a \in \mathbb{N}$ 或 $s^{\mathcal{B}}(a) = 0$，这显然成立；若 $a \in V/E$, $a = [x_{i,j}]$ 且 $s^{\mathcal{B}}([x_{i,j}]) = [x_{i,j+1}]$，则 $s^{\mathcal{B}}(a) = a$ 这一事实会推出 $[x_{i,j}] = [x_{i,j+1}]$，进而推出 $x_{i,j} E_k x_{i,j+1}$，这是不可能的）。因此，为证明 $s^{\mathcal{B}}$ 是良定义的，假设 $[x_{i,j}] = [x_{p,q}]$, $j < M_i$ 且 $q < M_p$：根据 E_k 的第一个定义性质，我们有 $x_{i,j} E_k x_{p,q}$ 蕴含 $x_{i,j+1} E_k x_{p,q+1}$；当然，这也可推广至 E，即 $s^{\mathcal{B}}([x_{i,j}]) = s^{\mathcal{B}}([x_{p,q}])$，正如我们所需证明的。3. 对每个属于 V 的变量 z_i，都有 $z_i^{\mathcal{B}} = [x_{i,0}]$（而对于不属于 V 的变量 x，我们可以任意定义 $x^{\mathcal{B}}$）。

现在，我们说明 $\mathcal{B}$ 验证了 ϕ：事实上，设 $s^j(z_i) = s^q(z_p)$ 是 ϕ 中一个前面没有否定符号的文字；在这种情况下，对于每个 $1 \leq k \leq n$，都有 $x_{i,j} E_k x_{p,q}$（根据 E_k 的第三个定义性质），因此 $[x_{i,j}] = [x_{p,q}]$，这意味着 $(s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}}) = (s^{\mathcal{B}})^q(z_i^{\mathcal{B}})$。然而，如果 $\neg[s^j(z_i) = s^q(z_p)]$ 是 ϕ 中的文字，由于 E_k 是具有这些性质的最小等价关系，因此 $x_{i,j} \overline{E_k} x_{p,q}$，从而 $(s^{\mathcal{B}})^j(z_i^{\mathcal{B}}) \neq (s^{\mathcal{B}})^q(z_i^{\mathcal{B}})$。

最后，我们看到 $\mathcal{B}$ 不满足任何 $x_k = y_k$，从而导致矛盾：如果 $x_k = z_i$ 和 $y_k = z_p$，由于$x_{i,\,0} \overline{E_k} x_{p,\,0}$，根据 E_k的构造，这意味着 $x_{i,\,0} \overline{E} x_{p,\,0}$，因此，对于每个 $1 \leq k \leq n$，$\mathcal{B}$ 都不满足 $x_k = y_k$；显然，这将意味着 $\mathcal{B}$ 不满足 $\bigvee_{k=1}^{n} x_k = y_k$，这与其满足 ϕ 且我们有$\vdash_{\mathcal{T}_{odd}^{\neq}} \phi \to \bigvee_{k=1}^{n} x_k = y_k$这一事实相矛盾。 □

M.15 $\mathrm{T}_1^{\neq}{}_{\infty}$,

引理 67。$\mathcal{T}_1^{\neq}$, ∞ 不是稳定无限的，因此也不光滑。

证明。注意，无量词的公式 $s(x) = x$ 可由平凡的 $\mathcal{T}_1^{\neq}$，∞-解释满足，但该理论不存在任何无限解释满足它。□

引理 68. $\mathcal{T}_1^{\neq}$,∞ 不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。

证明。如果存在见证 wit，那么也会存在一个有限的 $\mathcal{T}_1^{\neq}$,∞-解释 $\mathcal{A}$，满足 wit(ϕ) 和 vars(wit(ϕ))$^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{A}}$，对于 $\phi = \neg(x = y)$。这是荒谬的，因为 $\mathcal{A}$ 将是一个有限的 $\mathcal{T}_1^{\neq}$,∞-解释，满足 ϕ，因此至少有 2 个元素。□

引理 69. $\mathcal{T}_1^{\neq}$，∞ 是凸的。

证明。该证明遵循引理66的证明方法。□

M.16 $\mathrm{T}_2^{\neq}{}_{\infty}$，

引理 70. $\mathcal{T}_2^{\neq}$,∞ 不是稳定无限的，因此也不是光滑的。

证明。由于无量词公式 $s(x) = x$ 可由具有两个元素的 $\mathcal{T}_2^{\neq}$,∞-解释满足，但无法由任何无限的此类解释满足，因此该理论不可能是稳定无限的。□

引理 71. $\mathcal{T}_2^{\neq}$，∞ 不是有限可见证的，因此也不是强有限可见证的。

证明。如果 $\mathcal{T}_2^{\neq}$,∞ 有限可见证，且见证为 wit，那么我们可以得到一个有限的 $\mathcal{T}_2^{\neq}$,∞-解释 $\mathcal{A}$，满足 wit(ϕ) 和 vars(wit(ϕ))$^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{A}}$，对于

$$\phi = \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z).$$

这很荒谬，因为 $\mathcal{A}$ 将会是一个有限的 $\mathcal{T}_2^{\neq}$，∞-解释，满足 ϕ，因此至少有 3 个元素。□

引理 72。$\mathcal{T}_2^{\neq}$,∞ 不是凸的。

证明。根据定理 4，以及 $\mathcal{T}_2^{\neq}$，∞ 没有平凡模型且不是稳定无限的这一事实（见引理 70），该理论不可能是凸的。□

N 定理 9 的证明

证明定理 9 时，我们依赖以下定理，该定理及其证明可见于 [7] 中的定理 2.5。

定理 12. 设 Σ_1 和 Σ_2 为不相交签名，$\mathcal{T}_1$ 为一个 Σ_1-理论，$\mathcal{T}_2$ 为一个 Σ_2-理论。考虑 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$、$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ 和 S，它们是 Σ_1 和 Σ_2 共享的排序集合。设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别为无量词的 Σ_1 和 Σ_2-公式，并且 $U_\sigma = \mathrm{vars}_\sigma(\phi_1) \cap \mathrm{vars}_\sigma(\phi_2)$。

如果存在一个 $\mathcal{T}_1$-解释 $\mathcal{A}$ 和一个 $\mathcal{T}_2$-解释 $\mathcal{B}$，以及一个关于 U 的排列 δ_U，使得 $\mathcal{A}$ 满足$\phi_1 \wedge \delta_U$、$\mathcal{B}$ 满足 $\phi_2 \wedge \delta_U$，并且对于所有排序 $\sigma \in S$、$|\sigma^{\mathcal{A}}| = |\sigma^{\mathcal{B}}|$，那么就存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C}$满足 $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \delta_U$，对于所有 $\sigma \in \mathcal{S}_{\Sigma_1}$，$\sigma^{\mathcal{C}} = \sigma^{\mathcal{A}}$ 均成立，并且对于所有 $\sigma \in \mathcal{S}_{\Sigma_2} \setminus S$，$\sigma^{\mathcal{C}} = \sigma^{\mathcal{B}}$ 均成立。

我们证明的关键要素是以下引理，它放宽了礼貌理论组合对光滑性的要求。

引理 73. 设 Σ 是一个具有 $S \subseteq \mathcal{S}_\Sigma$ 的签名，且 $\mathcal{T}$ 是定义在 Σ 上的一个理论。如果 $\mathcal{T}$ 是一个关于排序集合 S 稳定无限且强有限可见证的理论，那么：对于每个无量词的 Σ-公式 ϕ；满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}$；以及从 $S_\omega^{\mathcal{A}} = \{\sigma \in S$ 到基数类的函数 κ，使得对于每个 $\sigma \in S_\omega^{\mathcal{A}}$，$|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq \kappa(\sigma) \leq \omega$，都存在一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，使得对于每个 $\sigma \in S_\omega^{\mathcal{A}}$，$|\sigma^{\mathcal{B}}| = \kappa(\sigma)$，并且对于每个 $\sigma \in S \setminus S_\omega^{\mathcal{A}}$，$|\sigma^{\mathcal{B}}| = \omega$。

证明。假设 $\mathcal{T}$ 关于排序集合 S 是稳定无限且强有限可见证的；设 ϕ 为一个无量词公式， $\mathcal{A}$ 为一个满足 ϕ 的 $\mathcal{T}$-解释，并取一个从 $S^{\mathcal{A}}_{\omega}$ 到基数类的函数 κ，使得对于每个 $\sigma \in S^{\mathcal{A}}_{\omega}$，都有 $|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq \kappa(\sigma) \leq \omega$。为简单起见，我们还将 S^{-}_{ω} 定义为满足 $\kappa(\sigma) < \omega$ 的排序集合 $\sigma \in S^{\mathcal{A}}_{\omega}$；而 $S^{+}_{\omega} = S \setminus S^{-}_{\omega}$ 则是其在 S 中的补集，即 $S^{\mathcal{A}}_{\omega}$ 中满足 $\kappa(\sigma) = \omega$ 的那些排序，以及 S 中满足 $\sigma^{\mathcal{A}} > \omega$ 的那些排序。

假设 wit 是我们的强见证：由于 $\mathcal{A}$ 满足 ϕ，它也必须满足 $\exists \vec{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$，其中 $\vec{x} = \mathrm{vars}(\mathrm{wit}(\phi)) \setminus \mathrm{vars}(\phi)$；通过仅在这些变量上改变 $\mathcal{A}$，我们得到第二个满足 $\mathrm{wit}(\phi)$ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{A}'$。对于每个 $\sigma \in S$，令 $W_\sigma = \mathrm{vars}_\sigma(\mathrm{wit}(\phi))$，并赋予其等价关系 F_σ，使得 $xF_\sigma y$ 当且仅当 $x^{\mathcal{A}'} = y^{\mathcal{A}'}$；相应的排列将是

$$\delta_W = \bigwedge_{\sigma \in S} \Big[\bigwedge_{xF_\sigma y} x = y \wedge \bigwedge_{x\overline{F_\sigma} y} \neg(x = y) \Big],$$

其中 $\overline{F_\sigma}$ 是 F_σ的补集。

现在，取一个正整数 M，并对每个 $\sigma \in S$考虑一个由排序为 σ 的新变量 U_σ 组成的集合：

$$|U_\sigma| = \begin{cases} \kappa(\sigma) - |W_\sigma / F_\sigma| & \text{if } \sigma \in S^{-}_{\omega}; \\ M & \text{if } \sigma \in S^{+}_{\omega} \end{cases}$$

（注意，根据 F_σ、 $|\sigma^{\mathcal{A}'}| = |\sigma^{\mathcal{A}}|$和 $|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq \kappa(\sigma)$ 的定义，对每个 $\sigma \in S$都有 $|W_\sigma / F_\sigma| \leq |\sigma^{\mathcal{A}'}|$，这意味着 $\kappa(\sigma) - |W_\sigma / F_\sigma|$ 始终非负。）我们还定义 E_σ 在 $V_\sigma = U_\sigma \cup W_\sigma$上的关系，使得 $xE_\sigma y$ 当且仅当 $xF_\sigma y$，或者 $x = y$；相应的排列记为 δ_V。

现在，由于 $\mathcal{T}$ 相对于 S 是稳定无限的，并且 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_W$ 是无量词的（且由 $\mathcal{T}$-解释$\mathcal{A}'$ 满足），因此必定存在一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}$，使得对于每一种排序 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{B}}$ 都是无限的，并且满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_W$；由于 U_σ 中的变量都是新引入的，因此不属于 $\mathrm{wit}(\phi)$，我们可以改变 U_σ 上 $\mathcal{B}$ 的取值，使得该集合中的不同变量映射到不同的元素，而不影响 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_W$ 的满足性，从而得到一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{B}'$，使得 $\mathcal{B}'$ 满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$，只要 $x \neq y$ 对每个 x、 $y \in U_\sigma$ 以及每个 σ 都成立（当然，对于每一种排序 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{B}'}$ 都是无限的）。

既然我们现在已经证明 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$是 $\mathcal{T}$-可满足的，并且该理论相对于 S 是强有限可见证的，那么必定存在一个 $\mathcal{T}$ 解释 $\mathcal{C}_M$，满足 $\mathrm{wit}(\phi) \wedge \delta_V$（而且，由于 $\mathcal{C}_M$满足 $\mathrm{wit}(\phi)$，它也必定满足$\exists \vec{x}.\, \mathrm{wit}(\phi)$，因此也满足 ϕ），并且对每个 $\sigma \in S$都满足 $\sigma^{\mathcal{C}_M} = V_\sigma^{\mathcal{C}_M}$；但是，由于 δ_V的定义要求 V_σ / E_σ对 $\sigma \in S^{-}_{\omega}$有 $\kappa(\sigma)$ 个等价类，而对 $\sigma \in S^{+}_{\omega}$有 $M + |W_\sigma / F_\sigma|$ 个等价类，因此我们有 $\sigma^{\mathcal{C}_M}$对 $\sigma \in S^{-}_{\omega}$分别有 $\kappa(\sigma)$ 个元素，对 S^{+}_{ω}分别有 $M + |W_\sigma / F_\sigma|$ 个元素。

从我们构造的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{C}_M$ 可以清楚地看出

$$\Gamma_M = \{\phi\} \cup \{\psi^\sigma_{=\kappa(\sigma)} : \sigma \in S^{-}_{\omega}\} \cup \{\psi^\sigma_{\geq M} : \sigma \in S^{+}_{\omega}\}$$

对所有 M， $\mathcal{T}$-可满足。现在我们说明，由引理 1 可知，这意味着 $\Gamma = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Gamma_M$ 也 $\mathcal{T}$-可满足，从而完成定理的证明。事实上，若 $\mathcal{C}$ 是满足 Γ 的一个 $\mathcal{T}$-解释，那么对于 $\sigma \in S^{-}_{\omega}$， 每个 $\sigma^{\mathcal{C}}$ 的基数都是 $\kappa(\sigma)$；并且对于 $\sigma \in S^{+}_{\omega}$，每个 $\sigma^{\mathcal{C}}$ 都是无限的，因为 Γ 对所有 $M \in \mathbb{N}$ 都包含公式 $\psi^\sigma_{\geq M}$。将 Γ 与 $\mathrm{Ax}(\mathcal{T})$ 的并集（由 $\mathcal{C}$ 满足，因为它是一个 $\mathcal{T}$-解释）代入引理 2，我们得到一个满足 Γ 的 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{D}$；当 $\sigma^{\mathcal{D}}$ 是无限集时，其基数为 ω，也就是说，当 $\sigma \in S^{+}_{\omega}$ 时如此。由于对于 $\sigma \in S^{-}_{\omega}$，$|\sigma^{\mathcal{D}}| = \kappa(\sigma)$，因为 $\mathcal{D}$ 满足 Γ，因而满足 $\psi^\sigma_{=\kappa(\sigma)}$；并且对于 $\sigma \in S^{+}_{\omega}$， $|\sigma^{\mathcal{D}}| = \omega = \kappa(\sigma)$，我们看到 $\mathcal{D}$ 正是我们希望构造的解释。

现在，为了证明 Γ是 $\mathcal{T}$-可满足的，假设它不是：根据引理 1，必定存在有限集合 $\mathrm{Ax}_0 \subseteq \mathrm{Ax}(\mathcal{T})$,$S^{-}_{0} \subseteq S^{-}_{\omega}$和 $S^{+}_{0} \subseteq S^{+}_{\omega} \times \mathbb{N}$ 使得

$$Ax_0 \cup \{\phi\} \cup \{\psi^\sigma_{=\kappa(\sigma)} : \sigma \in S^{-}_{0}\} \cup \{\psi^\sigma_{\geq k} : (\sigma, k) \in S^{+}_{0}\}$$

不可满足。但通过取 $M = \max\{k : (\sigma, k) \in S^{+}_{0}\}$，我们可以看到 $\mathcal{C}_M$ 是一个满足 Γ_M 的 $\mathcal{T}$-解释，后者这个集合包含 $\phi, \{\psi^\sigma_{=\kappa(\sigma)} : \sigma \in S^{-}_{\omega}\}$ 和 $\{\psi^\sigma_{\geq M} : \sigma \in S^{+}_{\omega}\}$。当然，这个最后的集合蕴含 $\{\psi^\sigma_{\geq k} : \sigma \in S^{+}_{\omega}, k \leq M\}$，与前述公式集合本应自相矛盾这一事实相矛盾。 □

现在我们可以证明定理 9：

定理 9。设 Σ_1 和 Σ_2 是不相交签名，其排序分别为 S_1 和 S_2；设 $\mathcal{T}_1$ 是一个 Σ_1-理论， $\mathcal{T}_2$ 是一个 Σ_2-理论，并且 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$；再设 ϕ_1 是一个无量词的 Σ_1-公式， ϕ_2 是一个无量词的 Σ_2-公式。

假设 $\mathcal{T}_2$ 关于 $S = S_1 \cap S_2$ 是稳定无限且强有限可见证的，并具有强见证 wit。令 $\psi = \mathsf{wit}(\phi_2)$、 $V_\sigma = \mathsf{vars}_\sigma(\psi)$ 对每个 $\sigma \in S$ 和 $V = \bigcup_{\sigma \in S} \mathsf{vars}_\sigma(\psi)$ 成立。则以下各项等价：

1. $\phi_1 \wedge \phi_2$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的；2. 存在一个关于 V 的排列 δ_V，使得 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}_1$-可满足的，且 $\psi \wedge \delta_V$ 是 $\mathcal{T}_2$-可满足的。

证明。首先假设 $\phi_1 \wedge \phi_2$ 是 $\mathcal{T}$-可满足的，并取 $\vec{x} = \mathsf{vars}(\psi) \setminus \mathsf{vars}(\phi_2)$。由于 ϕ_2 和 $\exists \vec{x}.\, \psi$ 是 $\mathcal{T}_2$-等价的，我们有 $\phi_1 \wedge \psi$ 也是 $\mathcal{T}$-可满足的；令 $\mathcal{A}$ 为满足该公式的一个 $\mathcal{T}$-解释。对于每个 $\sigma \in S$，取 E_σ 上的等价关系 V_σ，使得 $x E_\sigma y$ 当且仅当 $x^{\mathcal{A}} = y^{\mathcal{A}}$，并将 δ_V 设为相应的排列。然后，将 $\mathcal{A}$ 限制到签名 Σ_1 后，是一个满足 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_1$-解释；将其限制到签名 Σ_2 后，是一个满足 $\psi \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_2$-解释。

现在证明反向：设 $\mathcal{A}$ 是满足 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_1$-解释，且 $\mathcal{B}$ 是满足 $\psi \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_2$-解释。利用引理 2，我们可以构造另一个 $\mathcal{T}_1$-解释 $\mathcal{A}'$，使其满足 $\phi_1 \wedge \delta_V$，并且对于每个排序 σ， $\sigma^{\mathcal{A}'}$ 至多可数；又因为 $\mathcal{T}_2$ 是强有限可见证的，且 $\psi = \mathsf{wit}(\phi_2)$，我们可以得到一个 $\mathcal{T}_2$-解释 $\mathcal{B}'$，使其满足 $\psi \wedge \delta_V$，并且对于每个 $\sigma \in S$， $\sigma^{\mathcal{B}'} = \mathsf{vars}_\sigma(\psi \wedge \delta_V)^{\mathcal{B}'} = V_\sigma^{\mathcal{B}'}$，其中 $\mathsf{vars}_\sigma(\psi \wedge \delta_V) = V_\sigma$，因为 δ_V 是一个只含有 V 的变量的公式。因此，

$$|\sigma^{\mathcal{B}'}| = |V_\sigma^{\mathcal{B}'}| = |V_\sigma^{\mathcal{A}'}| \leq |\sigma^{\mathcal{A}'}| \leq \omega,$$

其中，第二个等式源于 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{B}'$ 都满足 δ_V 这一事实。利用理论 $\mathcal{T}_2$ 的引理 73，并根据以下事实： $\psi \wedge \delta_V$ 是一个无量词公式； $\mathcal{B}'$ 是满足 $\psi \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_2$-解释；并令 $\kappa(\sigma) = |\sigma^{\mathcal{A}'}|$ 对每个 $\sigma \in S$ 成立，将其视为一个从 $\{\sigma \in S \colon |\sigma^{\mathcal{B}'}| \leq \omega\} = S$ 到基数类的函数，且满足 $|\sigma^{\mathcal{B}'}| \leq \kappa(\sigma) \leq \omega$，我们可以得到一个 $\mathcal{T}_2$-解释 $\mathcal{C}$，使其满足 $\psi \wedge \delta_V$，并且对于每个 $\sigma \in S$， $|\sigma^{\mathcal{C}}| = |\sigma^{\mathcal{A}'}|$。

换言之， $\mathcal{A}'$ 是满足 $(\phi_1 \wedge \delta_V) \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_1$-解释， $\mathcal{C}$ 是满足 $(\psi \wedge \delta_V) \wedge \delta_V$ 的 $\mathcal{T}_2$-解释，并且对于所有排序 $\sigma \in S$，我们都有 $|\sigma^{\mathcal{A}'}| = |\sigma^{\mathcal{C}}|$。我们在写公式 $(\phi_1 \wedge \delta_V) \wedge \delta_V$ 和 $(\psi \wedge \delta_V) \wedge \delta_V$ 时重复使用 δ_V（它们分别等价于更简单的 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 和 $\psi \wedge \delta_V$），以满足定理 12 的条件：如果尝试将该定理应用于 ϕ_1 和 ψ，就需要在变量集 U 上有一个排列，其中 $U_\sigma = \mathsf{vars}_\sigma(\phi_1) \cap \mathsf{vars}_\sigma(\psi)$；但我们实际拥有的是在 $V_\sigma = \mathsf{vars}_\sigma(\psi)$ 上的排列，而其中可能包含与 ϕ_1 和 ψ 共享的、属于排序 σ 的变量之外的其他变量。不过， $V_\sigma = \mathsf{vars}_\sigma(\phi_1 \wedge \delta_V) \cap \mathsf{vars}_\sigma(\psi \wedge \delta_V)$，因此我们可以直接将该定理应用于公式 $\phi_1 \wedge \delta_V$ 和 $\psi \wedge \delta_V$。

因此，在应用定理 12 后，我们得到一个 $\mathcal{T}$-解释 $\mathcal{D}$，它满足 $\phi_1 \wedge \psi \wedge \delta_V$。由于 $\exists \vec{x}.\, \psi$ 和 ϕ_2 是 $\mathcal{T}_2$-等价的，因此可以推出 $\mathcal{D}$ 满足 $\phi_1 \wedge \phi_2$，这正是我们希望证明的。 □