arXiv:2305.02392v1 [math.AP] 3 May 2023

有界区域内无截断玻尔兹曼方程的条件 L^∞ 估计

欧阳志萌和路易斯·西尔维斯特雷

Abstract. 我们考虑有界区域内非齐次无截断玻尔兹曼方程的弱解，并采用任意一种常见的物理边界条件：流入、反弹、镜面反射和漫反射。当质量、能量和熵密度有上界，且质量密度远离真空时，我们得到解的 L^∞ 范数估计，该估计仅依赖于这些流体力学量的宏观界。这是一种正则化效应，因为初始数据不要求有界。

1. Introduction

我们考虑空间非齐次玻尔兹曼方程

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f = Q(f,f), \tag{1.1}$$

其中，Q 是非截断情形下的 Boltzmann 碰撞算子（其精确公式见第 1.1 小节）。本文旨在为有界区域中的方程 (1.1) 的解 f 求得 L^∞ 上界，这些上界仅依赖于与 f相关联的宏观流体力学量。

函数 $f(t,x,v)$ 在 $t\in(0,T)$、$x\in\Omega$ 和 $v\in\mathbb{R}^d (d\geq 2)$ 上取值。区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$是一个具有 $C^{1,1}$ 边界的有界开集。记 $\Gamma := (0,T)\times\partial\Omega\times\mathbb{R}^d$，而 Γ_- 表示该边界的入射部分：$\Gamma_- := \{(t,x,v)\in\Gamma : v\cdot n(x) < 0\}$ 其中 $n(x)$ 是$x\in\partial\Omega$ 处的外单位法向量。

边界条件通常有四种类型（此处 n 表示$x\in\partial\Omega$ 处的外单位法向量）：

(1) 流入：$f(t,x,v)|_{\Gamma_-} = g(t,x,v)$，其中给定函数 g；(2) 反弹：$f(t,x,v) = f(t,x,-v)$，在 Γ 上；(3) 镜面反射：$f(t,x,v) = f(t,x,\mathcal{R}_x v)$，在 Γ 上，其中 $x\mathcal{R}_x v := v - 2(v\cdot n)n$；(4) 漫反射：$f(t,\quad x\quad \mu\ v\ = e^{-|v|^2}\quad v'\quad ,)|_{\Gamma_-} = \mathcal{P}_\Gamma[f](t,,):()\int_{v'\cdot n>0} f(t,,v')(v'\cdot n)\,\mathrm{d}v'$，其中 $()$ 是壁面麦克斯韦分布，常数 c_μ $c_\mu\int_{v'\cdot n>0}\mu\quad v'\cdot$ 满足归一化条件 $()()\,\mathrm{d}$。$n\quad v'=1$

我们研究玻尔兹曼方程 (1.1) 的解，并假设其宏观量满足某些宏观界。更确切地说，我们假设存在常数 m_0、M_0、E_0 和 H_0，使得对于所有（或几乎所有）$(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$，均有

$$\begin{cases} 0 < m_0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \leq M_0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \leq E_0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v)\log f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \leq H_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

毋庸置疑，对于一般解而言，不等式 (1.2) 目前无法证明。目前，可以说没有理由怀疑它们对所有解都成立。流体力学界 (1.2) 表明，我们考察的是不具有内爆奇点的解；通过排除这些奇点，我们主张不存在其他类型的奇点。我们的主要目标是确定，流体力学界 (1.2) 是否意味着有界区域中玻尔兹曼方程 (1.1) 的解具有光滑性，并且适用于所有可能的物理边界条件。

路易斯·西尔维斯特雷获得了美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 DMS-1764285 和 DMS-2054888。欧阳志萌获得了美国国家科学基金会奖学金，项目编号为 DMS-2202824。

1.1. Boltzmann 碰撞算子。Boltzmann 碰撞算子的形式为

$$Q(f,f)(v)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v-v_*,\sigma)\left(f(v'_*)f(v')-f(v_*)f(v)\right)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}v_*. \tag{1.3}$$

其中 v' 和 v'_* 是

$$v'=\frac{v+v_*}{2}+\frac{|v-v_*|}{2}\sigma,\qquad v'_*=\frac{v+v_*}{2}-\frac{|v-v_*|}{2}\sigma.$$

碰撞核 $B(v-v_*,\sigma)=B(|v-v_*|,\cos\theta)$ 仅依赖于 $|v-v_*|$ 和角度 $\theta=\arccos\left(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma\right)\in[-\pi,\pi]$。

我们考虑满足以下界的标准非截断碰撞核

$$B(|v-v_*|,\cos\theta)\approx|v-v_*|^{\gamma}\,b(\cos\theta), \tag{1.4}$$

其中 b 是一个非负偶函数，使得当 $\theta\to 0$时，

$$b(\cos\theta)\approx|\theta|^{-d+1-2s}. \tag{1.5}$$

请注意， $b(\cos\theta)$在 $\sigma\in S^{d-1}$ 的 $\theta=0$附近不可积。通常，这被称为非截断模型。

根据 γ的取值，通常使用以下术语：

- 硬势： $\gamma>0$。
- 麦克斯韦分子： $\gamma=0$。
- 中等软势： $\gamma<0$ 和 $2s+\gamma\geq 0$。
- 极软势： $2s+\gamma<0$。

本文中的方法适用于硬势或中等软势。我们的证明在极软势情形下失效。

1.2. 主要结果。以下是我们的主要结果。

定理 1.1. 设 $f(t,x,v)$ 是玻尔兹曼方程 (1.1) 在 $(t,x,v)\in(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d$ 中的一个（弱）解，其满足四种边界条件（流入、反弹、镜面反射和漫反射）中的任意一种。我们考虑具有参数 γ 和 s 的非截断碰撞核，其中 $0<s<1$, $-d<\gamma\leq 2$，且 $\gamma+2s>0$ （涵盖硬势和中等软势的情形）。此外，假设对于每个 $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$，(1.2) 均成立。那么我们有

$$f(t,x,v)\leq a(t),$$

几乎处处，其中

$$a(t)=C\left(1+t^{-\frac{d}{2s}}\right).$$

对于反弹、镜面反射和漫反射边界， C 取决于（1.2）中的参数 m_0、M_0、 E_0 和 H_0 以及维数 d。对于流入边界，除了上述对（m_0、 M_0、 E_0、 H_0、 d）的依赖外， C 还取决于边界数据 g。

针对空间周期解（本质上消除了任何潜在的空间边界效应）的非齐次玻尔兹曼方程，条件正则性研究已取得成功。参见 [20, 15, 12, 13, 16, 11, 17, 5], 及综述 [14]。对于无空间边界的非均匀兰道方程，相关研究也已在 [4, 7, 9, 10, 23]中完成。虽然这一课题侧重于远离平衡态的解，但一个附带结果是：对于任意一种能够保证局部适定性的范数，若初始数据接近麦克斯韦分布，则光滑解全局存在 [22]。

本文主要结果给出的上界，是迈向有界区域内玻尔兹曼方程条件正则性研究计划的第一步。关于有界区域内二阶动理学方程的近期结果 [21, 24] 表明，我们可以预期，条件正则性估计至少可在边界处成立至 f 的 H¨older 连续性。边界处更高阶正则性估计是否成立，仍需进一步研究。

对于无边界的方程，类似于定理 1.1 的条件上界见[20, 定理 1.2]。其中的证明基于非局部定量最大值原理，沿用了与[18, 19]中非变分抛物型积分微分方程 Hölder 连续性研究类似的思路。该证明依赖于在预期上界与解之间假设的首次交点处对方程进行逐点估计。要完成这一计算，存在一些技术上的困难

当首次交点位于边界上时，计算会遇到困难，因此这一方法不易直接适用于本文的情形。我们选择了另一种更具变分性质的方法，可以说与 [3]中最初为抛物型积分微分方程发展出的其他技巧类似。作为这一方法的附带成果，所得结果适用于更一般的一类弱解。从这个意义上说，即使对于无边界的情形，定理 1.1 也比 [20, 定理 1.2], 略有改进，从而使结果更易于应用。本文采用的解的概念见第 2.3 节，它大致上是 Sobolev 空间中的经典弱解。它不像 [2], 中构造的带缺陷测度的重整化解那么弱，但肯定比 [20]中考虑的经典解弱。

值得注意的是，尽管我们对解（属于某个 Sobolev 空间）和区域（有界且具有 $C^{1,\,1}$ 边界）作出了一些技术性假设，但这些只是定性条件，仅仅是为了使证明中的所有步骤有意义。我们的最终估计完全不依赖于任何与这些技术性假设相关的量。

1.2.1. 关于漫反射边界条件。漫反射边界条件可以看作流入边界条件的一种特殊情况。其值并非在 Γ_- 上任意指定 f，而是通过某种平均过程与 Γ_+ 上的 f 的值相关联。

流体力学假设 (1.2) 显然蕴含了在漫反射边界条件下 $f_{\Gamma_-} = \mathcal{P}_\Gamma[f](t,x,v)$ 的一个上界。事实上，

$$\left|\int_{v'\cdot n>0} f(t,x,v')(v'\cdot n)\,\mathrm{d}v'\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v')|v'|\,\mathrm{d}v' \le \sqrt{M_0E_0}.$$

因此，漫反射边界下的定理1.1是流入边界条件下同一定理的推论。

在此观察之后，本文其余部分将不再提及漫反射边界条件，只有注2.1中关于弱解概念的讨论例外。

致谢。作者感谢 Lei Wu 与我们进行了许多有益的讨论。

2. Preliminaries

2.1. 符号与约定。本文中，C 通常表示一个通用常数，它可能依赖于 d、m_0、M_0、E_0、H_0。对于某个通用常数$C>0$，只要 $A \le CB$，我们就记作 $A \lesssim B$；$\gtrsim$ 和 $\approx$ 也采用类似的标准记法。

我们将 $\Gamma = (0,T) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^d$ 分为流出边界 Γ_+、流入边界 Γ_-和奇异边界 Γ_0 （即“掠射集”）：

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &:= \{(t,x,v)\in\Gamma : v\cdot n>0\},\\ \Gamma_- &:= \{(t,x,v)\in\Gamma : v\cdot n<0\},\\ \Gamma_0 &:= \{(t,x,v)\in\Gamma : v\cdot n=0\}.\end{aligned}$$

So有时我们用 $\mathrm{d}\Gamma$ 表示 $\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t$，其中 $\mathrm{d}S_x$ 表示 Ω 上的曲面微分 $x\in$.

我们用 L^p_n 表示加权 L^p 范数

$$\|f\|_{L^p_n(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{np}\,|f(v)|^p\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $n=0$时，它就化为通常的 L^p 范数。

2.2. 加权动理学 Sobolev 空间。为了使流体力学界 (1.2) 有意义，我们自然需要从一个属于空间 $L^\infty((0,T)\times\Omega\ L^1_2(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty((0,T)\times\Omega\ L\log L(\mathbb{R}^d))$ 的解 f 入手。为了定义适用于我们结果的弱解概念，我们还需要对动理学 Sobolev 空间施加一些额外的技术条件。

按照 [8], ，我们将加权（各向异性）Sobolev 空间 $N^{s,\gamma}$ 定义为函数空间，其中的函数 $f\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$满足以下范数有界。

$$\|f\|^2_{N^{s,\gamma}} := \int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma+2s}|f(v)|^2\,\mathrm{d}v + \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\frac{|f(v)-f(v')|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v, \tag{2.1}$$

其中

$$\mathfrak{d}(v,v') := \sqrt{|v-v'|^2 + \tfrac{1}{4}\left(|v|^2 - |v'|^2\right)^2}.$$

该 $N^{s,\gamma}$ 范数由内积诱导

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{N^{s,\gamma}} :=& \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} f(v)g(v)\,\mathrm{d}v \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{(f(v)-f(v'))\,(g(v)-g(v'))}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

将 $N^{-s,\gamma}$ 记作 $N^{s,\gamma}$ 的对偶空间，并赋予范数

$$\|g\|_{N^{-s,\gamma}} := \sup_{\|\varphi\|_{N^{s,\gamma}}=1} \int_{\mathbb{R}^d} g(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v.$$

空间 $N^{s,\gamma}$ 应理解为 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 的加权版本，其权重刻画了碰撞算子 $Q(f,f)$ 在 $|v|\to\infty$ 时的精确行为。同样，空间 $N^{-s,\gamma}$ 是空间 $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ 的加权版本。

引理 2.1。考虑以下积分微分算子

$$\mathcal{L}f(v) := \langle v\rangle^{\gamma+2s} f(v) + \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{2\,(f(v)-f(v'))}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'.$$

则 $\mathcal{L}$ 将 $N^{s,\gamma}$ 映射到 $N^{-s,\gamma}$。此外，对任意 $g\in N^{-s,\gamma}$，均存在 $f\in N^{s,\gamma}$，使得 $g=\mathcal{L}f$。

证明。这是将 Riesz 表示定理应用于 Hilbert 空间 $N^{s,\gamma}$ 的直接结果。事实上，通过直接计算可得，只要 f 足够光滑，使得 $\mathcal{L}f$ 定义中的积分有意义，就有

$$\langle f,g\rangle_{N^{s,\gamma}} = \int \mathcal{L}f(v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

□

引理 2.1 中定义的算子 $\mathcal{L}$ 与 $I+(-\Delta)^s$ 相似，但对于较大的 $|v|$，其权重与 $N^{s,\gamma}$ 的定义中的权重相匹配。

按照 [1], ，我们定义加权动理学 Sobolev 空间 $H^{s,\gamma}_{kin}$ 如下。

定义 2.1. 给定一个开集 $D:=(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\subset\mathbb{R}^{1+2d}$，如果 $f\in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$，其中 $f\in L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_v(D)$ 且 $(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f\in L^2_{t,x}N^{-s,\gamma}_v(D)$，我们称其满足以下意义下的条件：

$$\int_D f(t,x,v)\,(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\,\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\|\varphi\|_{L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_v(D)}$$

对于任意满足 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset D$ 的函数 $\varphi\in C^1_c(D)$。我们进一步记

$$\|f\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}(D)} := \|f\|^2_{L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_v(D)} + \|(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\,f\|^2_{L^2_{t,x}N^{-s,\gamma}_v(D)}.$$

以下结果的证明实质上见于 [8, 定理 2]。

定理 2.2. 给定一个满足下列条件的函数 $f\colon\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v)\,\mathrm{d}v \le M_0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f(v)|v|^2\,\mathrm{d}v \le E_0.$$

设 g 和 h 是 $N^{s,\gamma}$ 中的两个函数，则

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,g)h\,\mathrm{d}v \le C_f\,\|g\|_{N^{s,\gamma}}\,\|h\|_{N^{s,\gamma}}.$$

假设 U（见 [8] ）略有不同，且不能直接由我们关于 M_0 和 E_0 的上界推出。然而，结合 [8] 中提出的思路，只需稍加努力即可得到定理 2.2 的这一版本（另见 [15, 定理 4.1] 和 [17] 的附录 A）。

对定理 2.2 的一种解读是：如果 f 满足 (1.2)，且 $g\in L^2_t N^{s,\gamma}_v$，那么 $Q(f,g)\in L^2_t N^{-s,\gamma}_v$，其中

$$\|Q(f,g)\|_{L^2_{t,x}N^{-s,\gamma}_v} \le C_f\,\|g\|_{L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_v}. \tag{2.2}$$

2.3. 弱解的概念。既然我们已经介绍了所用的函数空间，接下来定义 $D=(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d$ 中具有四种边界条件的弱解概念。

定义 2.2（带流入边界的弱解）。若函数 $f\in L^2_{t,x}N^s_{,v}\gamma(D)$ 是 (1.1) 在 D 中的弱解，且满足流入边界条件，则对任意测试函数 $\varphi\in C^1_c\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，使得 $\varphi|_{\Gamma_+}=0$，都有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\{f\ (\partial_t+v\cdot\nabla_x)\varphi+Q(f,f)\varphi\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_{\Gamma_-}g\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

根据 (2.2)，我们回顾一下，$Q(f,f)$ 属于 $L^2_{t,x}N^{-s}_{,v}\ \gamma$。从这个意义上说，对于任意测试函数 $\varphi\in C^1_c\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，$Q(f,f)\varphi$ 的积分都有定义。

定义 2.3（带反弹边界的弱解）。若函数 $f\in L^2_{t,x}N^s_{,v}\gamma(D)$ 是 (1.1) 在 D 中的弱解，且满足反弹边界条件，则对任意测试函数 $\varphi\in C^1_c\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，使得对所有 $x\in\partial\Omega$，$\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,-v)$，都有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\{f\ (\partial_t+v\cdot\nabla_x)\varphi+Q(f,f)\varphi\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{2.4}$$

定义 2.4（具有镜面反射边界的弱解）。如果一个函数 $f\in L^2_{t,x}N^s_{,v}\gamma(D)$ 是 D 中方程 (1.1) 的一个具有镜面反射边界条件的弱解，那么对于任意测试函数$\varphi\in C^1_c\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，满足 $\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,\mathcal{R}_xv)$ 对所有 $x\in\partial\Omega$ 均成立，我们有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\{f\ (\partial_t+v\cdot\nabla_x)\varphi+Q(f,f)\varphi\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{2.5}$$

注2.1. 如第 1.2.1 节所述，我们证明定理 1.1 时考虑流入、反弹和镜面反射边界条件的情形。漫反射的情形是流入边界条件的一个特例。如果我们想在这种情形下定义弱解，那么它与定义 2.2 相同，只需将任意函数 g 替换为 $\mathcal{P}_\Gamma[f]$。在任何适合考虑漫反射边界条件的情境中，第 1.2.1 节的分析均成立，定理 1.1 也适用。

值得注意的是，对于任意函数 $f\in H^s_{,kin}{}^{\gamma}$，算子 $\mathcal{P}_\Gamma[f]$ 不一定有良好定义。不过，当 f 还满足假设 (1.2) 时，我们很容易看出，由命题 3.7 得到的迹函数 $f|_\Gamma$ 属于 $L^\infty((0,T)\times\partial\Omega\ L^1_2(\mathbb{R}^d))$。事实上，(1.2) 中对质量和能量密度的上界表明，$f\in L^\infty((0,T)\times\Omega\ L^1_2(\mathbb{R}^d))$。通过用光滑函数逼近 f（如引理 3.6 中所示），观察到逼近函数的迹在 $L^\infty((0,T)\times\partial\Omega\ L^1_2(\mathbb{R}^d))$ 中有界，并应用法图引理，我们可以严格证明 f 的迹满足相同的界。

注记 2.2。定义 2.2、2.3 和 2.4 同时编码了区域内部的方程 (1.1) 和边界条件。事实上，取测试函数 φ 的支集紧包含于 D 的内部，我们便可推得，对于上述任一定义，$(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\ f=Q(f,f)$ 在 D 中以分布的意义成立。之后，在定义 2.2 中用 $(\partial_t+v\cdot\nabla_x)\ f$ 替换 $Q(f,f)$，我们注意到，对于任意满足 $\varphi|_{\Gamma_+}=0$ 的测试函数 $\varphi\in C^1_c\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，有

$$\int_0^T\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^d}\{(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f\,\varphi+f\ (\partial_t+v\cdot\nabla_x)\varphi\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\iint_{\Gamma_-}g\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

这个恒等式表达了边界条件（不包含方程的其余部分）。对于每一种类型的边界条件，都可以得到类似的恒等式。

2.4 碰撞算子的结构。回顾式 (1.3) 中的非截断玻尔兹曼碰撞算子 $Q(f,f)$，其参数由式 (1.4) 和 (1.5) 给出：$2s$ 是角奇异性指数，γ 是关于 $|v-v_*|$ 的指数。

让我们使用卡尔曼坐标。

$$(\sigma,v_*)\to(w:=v'_*-v,v'),$$
$$w\perp(v'-v),\qquad v_*=v'+w.$$

用这些新变量表示时，碰撞算子变为

$$Q(f,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(v')K_f(v,v') - f(v)K_f(v',v))\,\mathrm{d}v' \tag{2.6}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} (f(v') - f(v))\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' + f(v)\int_{\mathbb{R}^d} (K_f(v,v') - K_f(v',v))\,\mathrm{d}v',$$

其中，核 K_f 通过以下形式依赖于 f

$$K_f(v,v') = 2^{d-1}\,|v'-v|^{-1}\int_{w\perp(v'-v)} f(v+w)B(r,\cos\theta)r^{-d+2}\,\mathrm{d}w \quad \text{with} \quad \begin{cases} r^2 = |v'-v|^2 + |w|^2 \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{|w|}{r} \end{cases}$$
$$\approx |v-v'|^{-d-2s}\left\{\int_{w\perp(v'-v)} f(v+w)\,|w|^{\gamma+2s+1}\,\mathrm{d}w\right\}.$$

此外，著名的抵消引理用核 K_f 表示时具有如下形式。

$$\int_{\mathbb{R}^d} (K_f(v,v') - K_f(v',v))\,\mathrm{d}v' = c_b\int_{\mathbb{R}^d} f(v_*)\,|v-v_*|^\gamma\,\mathrm{d}v_*, \tag{2.7}$$

其中常数为

$$c_b = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left\{\frac{2^{\frac{d+\gamma}{2}}}{(1+\sigma\cdot\mathbf{e})^{\frac{d+\gamma}{2}}} - 1\right\} b(\sigma\cdot\mathbf{e})\,\mathrm{d}\sigma$$

对任意 $\mathbf{e}\in\mathbb{S}^{d-1}$ 均成立。因此，我们可以改写为

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(v') - f(v))\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' + c_b\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v_*)\,|v-v_*|^\gamma\,\mathrm{d}v_*\right) f(v) \tag{2.8}$$
$$=: \mathcal{L}_K f + c_b\,(f *_v |\cdot|^\gamma)\,f.$$

这里，$\mathcal{L}_K$ 是一个非线性积分微分扩散算子，它会产生平滑效应；而 $c_b(f *_v |\cdot|^\gamma) f$ 是一个低阶项。可以将 $Q(f,f)$ 视为反应扩散算子。第二项 $c_b(f *_v |\cdot|^\gamma) f$ 是反应项，会使函数 f 增长，因此在计算 L^∞ 估计时是一个不利项。

扩散核 K_f 的重要性质如下（见 [14, 20]）：

- 对称性：$K_f(v, v+u) = K_f(v, v-u)$ 对任意 $u\in\mathbb{R}^d$。
- 平均而言由分数阶拉普拉斯算子从上方有界：

$$\int_{B_r(v)} K_f(v,v')|v-v'|^2\,\mathrm{d}v' \le C\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v_*)|v-v_*|^{\gamma+2s}\,\mathrm{d}v_*\right) r^{2-2s} \le \Lambda(v)\,r^{2-2s}. \tag{2.9}$$

  其中 $\Lambda(v) = C\langle v\rangle^{\gamma+2s}$，其中某个常数 $C>0$ 取决于 (1.2) 中的 M_0 和 E_0。
- 非退化锥：对于固定的 t 和 x，存在一个集合 $\Xi(v)\subset\mathbb{R}^d$，适用于每个点 $v\in\mathbb{R}^d$ so
  - $\Xi(v)$ 是一个对称锥，这意味着对于所有 $\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0$，$\lambda\Xi(v) = \Xi(v)$。- K_f 沿 $\Xi(v)$ 方向的下界：

$$K_f(v,v') \ge \lambda(v)|v-v'|^{-d-2s} \quad \text{whenever } v'-v\in\Xi(v). \tag{2.10}$$

  这里 $\lambda(v) = c\langle v\rangle^{\gamma+2s+1}$ 对于某个常数 $c>0$ 成立，该常数取决于参数 m_0、M_0、E_0 和 H_0，以及 (1.2) 中的维数 d。- 测度 $m\left(\Xi(v)\cap\mathbb{S}^{d-1}\right)\ge c\langle v\rangle^{-1}$对于某个常数 c 成立，该常数取决于 (1.2) 中的 m_0、M_0、E_0和 H_0，以及维数 d。此外，$\Xi(v)\cap\mathbb{S}^{d-1}$包含于一个围绕垂直于 v 的赤道、宽度为 $\lesssim\langle v\rangle^{-1}$ 的带状区域内。
- 抵消引理 (2.7)。

注 2.3。注意，界 (2.9) 和 (2.10) 弱于积分微分方程通常所要求的一致椭圆性条件$\lambda|v-v'|^{-d-2s}\le K(v,v')\le\Lambda|v-v'|^{-d-2s}$。下界仅在非退化锥中成立，而上界仅在平均意义下成立。

我们还要强调，非退化锥 K_f 的存在依赖于（1.2）中的流体力学界，而这也是使用熵界 H_0 的唯一之处。

2.5. 强制性估计。在计算各种函数的 L^2 范数的传播时，通常需要处理来自 (2.8) 的如下形式的积分表达式。

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,g)(v)h(v)\,\mathrm{d}v = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} h(v)\left(g(v')-g(v)\right)K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v + c\int_{\mathbb{R}^d}\left(f *_v |v|^\gamma\right)g(v)h(v)\,\mathrm{d}v. \tag{2.11}$$

特别是，当 $h=g$ 时，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,g)(v)g(v)\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v + c\int_{\mathbb{R}^d}\left(f *_v |v|^\gamma\right)|g(v)|^2\,\mathrm{d}v. \tag{2.12}$$

这个恒等式可通过直接的算术运算并应用 Fubini 定理得出。第一项为负。Boltzmann 碰撞算子的强制性估计，归结为估计这一项需要有多负。

下面的不等式可以看作是强制性估计与加权 Sobolev 范数的 Sobolev 嵌入相结合的结果。不过，分别证明这些不等式中的每一个都更为复杂。这里我们采用类似于 [6] 的计算，一次性验证这个公式。

引理 2.3（强制性估计）。设 $p>2$ 为满足 $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{s}{d}$ 的指数，并设 $n=\frac{1}{2}\left(\gamma+2s-\frac{2s}{d}\right)$ 和 $k=\frac{1}{2}$（$-\gamma-d+1$）。那么存在常数 $c_0>0$ 和 $C_1\geq 0$（仅依赖于 (1.2) 中的流体力学界和维数 d），使得对任意 $g\in L^p_n$（$\mathbb{R}^d$），都有

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \geq c_0\|g\|^{2-p}_{L^p_n(\mathbb{R}^d)}\cdot\int_{\left\{v\in\mathbb{R}^d:|g(v)|\geq C_1\|g\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\}}\langle v\rangle^{np}|g(v)|^p\,\mathrm{d}v. \tag{2.13}$$

特别地，当 $n\geq 0$ 时，我们有一个更强的界

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \geq c_0\|g\|^2_{L^p_n(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.14}$$

这等价于在 (2.13) 中取 $C_1=0$。

证明。记

$$N := \|g\|^p_{L^p_n(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{np}|g(v)|^p\,\mathrm{d}v<\infty.$$

对任意固定的 $v\in\mathbb{R}^d$（满足 $g(v)\neq 0$），我们将利用 K_f 处的非退化锥 $\Xi(v)$，其中K_f 有一个下界（见第 2.4 小节）。回顾一下，锥 $\Xi(v)$ 与球 B_R 的交集体积为 $\approx R^d\langle v\rangle^{-1}$。我们选取 $R=R(v)$（依赖于 v），使其满足

$$R^d = CN\langle v\rangle^{-np+1}|g(v)|^{-p} \tag{2.15}$$

其中 $C>0$ 是某个较大的常数。接下来，我们将 $\{v\in\mathbb{R}^d:\ g(v)\neq 0\}$ 拆分为两个集合：

$$G := \left\{v\in\mathbb{R}^d:\langle v\rangle\geq R(v)\right\} = \left\{|g(v)|^p\geq CN\langle v\rangle^{-d-np+1}\right\} = \left\{|g(v)|\geq C^{\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\},$$

$$B := \left\{v\in\mathbb{R}^d:\langle v\rangle<R(v)\right\} = \left\{|g(v)|< C^{\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\}.$$

对于 $v\in G$，我们断言，对于 $v+\left(B_{R/2}\cap\Xi(v)\right)$ 中至少占其一半测度的点 v'，有 $|g(v')|<\frac{1}{2}|g(v)|$，即

$$\left|\left\{v'\in v+\left(B_{R/2}\cap\Xi(v)\right):|g(v')|<\tfrac{1}{2}|g(v)|\right\}\right|\geq\frac{1}{2}\left|B_{R/2}\cap\Xi(v)\right|\approx R^d\langle v\rangle^{-1}. \tag{2.16}$$

事实上，由于 $\langle v\rangle\geq R$ 和 $v'\in v+B_{R/2}$，我们有 $\frac{1}{2}\langle v\rangle\leq\langle v'\rangle\leq\frac{3}{2}\langle v\rangle$。于是，逆命题：$|g(v')|\geq\frac{1}{2}|g(v)|$ 对至少一半的 $v'\in v+\left(B_{R/2}\cap\Xi(v)\right)$ 成立，则意味着

$$N=\int_{\mathbb{R}^d}\langle v'\rangle^{np}|g(v')|^p\,\mathrm{d}v'\gtrsim\langle v\rangle^{np}|g(v)|^p\cdot R^d\langle v\rangle^{-1}=CN,$$

当 C 足够大时，这不可能成立。对于 $v\in B$，其中 $\langle v\rangle<R$，我们只能在 $n\geq 0$ 的情形下采用类似的论证：对于 $v'\in v+(B_{3R}\backslash B_{2R})$，有 $\langle v'\rangle\geq\langle v\rangle$，因此（2.16）仍然成立，只需将其中的 $B_{R/2}$ 替换为 $B_{3R}\backslash B_{2R}$。

在下面的分析中，我们首先讨论 $v\in G$ 的情形。考虑到 $K_f(v,v')\geq 0$，并且根据 (2.10)

$$K_f(v,v')\gtrsim\langle v\rangle^{\gamma+2s+1}|v-v'|^{-d-2s}\quad\text{if }\ v'-v\in\Xi(v),$$

结合 (2.16)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' \geq \int_{v+(B_{R/2}\cap\Xi(v))} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' \tag{2.17}$$
$$\gtrsim \langle v\rangle^{\gamma+2s+1} R^{-d-2s} \int_{v+(B_{R/2}\cap\Xi(v))} |g(v')-g(v)|^2\,\mathrm{d}v'$$
$$\gtrsim \langle v\rangle^{\gamma+2s} R^{-2s} |g(v)|^2 = (CN)^{\frac{2}{p}-1}\langle v\rangle^{np}|g(v)|^p.$$

这里，在最后一个等式中，我们代入了 (2.15) 中对 R 的选取，以及 p 和 n的取值。最后，我们对 $v\in G$ 积分 (2.17)，得到

$$\int_G\int_{\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \gtrsim N^{\frac{2}{p}-1}\int_G \langle v\rangle^{np}|g(v)|^p\,\mathrm{d}v,$$

因此，(2.13) 得证。

对于 $n\geq 0$的情形，我们也可以通过用 $B_{3R}\backslash B_{2R}$ 代替 $B_{R/2}$，得到关于 $v\in B$的相同估计 (2.17)。对于满足 $g(v)=0$ 的那些 $v\in\mathbb{R}^d$，(2.17) 自动成立，因此它对所有 $v\in\mathbb{R}^d$ 都成立。因此，我们可以对 $v\in\mathbb{R}^d$ 积分 (2.17)，得到

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |g(v')-g(v)|^2 K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \gtrsim N^{\frac{2}{p}-1}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{np}|g(v)|^p\,\mathrm{d}v = N^{\frac{2}{p}} = \|g\|^2_{L^p_n(\mathbb{R}^d)}.$$

引理的证明至此完成。 □

注 2.4。p 的取值与通常 Sobolev 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ 中的指数相同。事实上，如果我们对满足更强假设 $K(v,v')\gtrsim |v-v'|^{-d-2s}$（对所有 $v,v'\in\mathbb{R}^d$）的核 K 重复上述证明，就会得到分数阶索伯列夫空间的标准索伯列夫不等式。

注 2.5. 情形 $n=\frac{1}{2}\left(\gamma+2s-\frac{2s}{d}\right)<0$ 仅出现在软势中，并涵盖了中等软势范围的一部分。值得注意的是，当 $\gamma+2s\leq 0$（因此 $n<0$）时，这个强制性估计也适用于极软势情形。

3. Smooth Approximations and Trace

3.1. 加权分数阶索伯列夫空间的一些性质。我们分析空间 $N^{s,\gamma}$,$N^{-s,\gamma}$ 和 $H^{s,\gamma}_{kin}$。

引理 3.1. 假设 $f\in N^{s,\gamma}$和 $f(v)=0$对所有 $|v|>R$均成立。那么，存在某个常数 C，它仅依赖于 s、γ、维数 d 和 R，使得

$$\frac{1}{C}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{N^{s,\gamma}}\leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

这里，$H^s(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的标准分数阶索伯列夫空间，其范数为

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}|f(v)|^2\,\mathrm{d}v + \iint\frac{|f(v')-f(v)|^2}{|v'-v|^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.$$

引理 3.1 是以下事实的推论：$\mathfrak{d}(v,v')\approx|v'-v|$，前提是我们知道 v' 和 v 保持在某个有界球 B_R 中。引理 3.1 的证明是根据这一事实进行的直接计算，这里略去。

引理 3.2. 假设 $f\in N^{-s,\gamma}$ 且 supp $f\subset B_R$（在分布的意义下）。那么，存在某个常数 C，它仅依赖于 s、γ、维数 d 和 R，使得

$$\frac{1}{C}\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{N^{-s,\gamma}}\leq C\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^d)}.$$

这里，$H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ 表示标准的负分数阶 Sobolev 空间，它是 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间。

证明。根据定义

$$\|f\|_{N^{-s,\gamma}} = \sup\{\langle f,g\rangle : \|g\|_{N^{s,\gamma}}=1\}.$$

这里，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 $N^{-s,\gamma}$与 $N^{s,\gamma}$之间的配对。

由于 $\operatorname{supp} f \subset B_R$，若取一个光滑截断函数 $b\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$，使得 $b=1$ 在 B_R 内且在 B_{2R} 外为 $b=0$，则有 $\langle f, bg\rangle = \langle f, g\rangle$。根据引理 4.4，我们有 $\|bg\|_{N^{s,\gamma}} \lesssim \|g\|_{N^{s,\gamma}}$。因此，将上述上确界限制为支撑在 B_{2R} 中的函数，只会损失一个常数因子。

$$\|f\|_{N^{-s,\gamma}} \approx \sup\left\{\langle f, g\rangle : \|g\|_{N^{s,\gamma}} = 1 \text{ and } \operatorname{supp} g \subset B_{2R}\right\}.$$

由引理 3.1 可知 $\|g\|_{N^{s,\gamma}} \approx \|g\|_{H^s}$，结论得证。 □

引理 3.3. 设 $\mathcal{L}$ 为引理 2.1 中的算子。对于任意具有紧支集的光滑函数 $b:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，且满足 $f \in N^{s,\gamma}$，我们有如下交换子估计

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{-(\gamma+2s)} \left|\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v)\right|^2 \mathrm{d}v\right)^{1/2} \le M_b \|f\|_{N^{s,\gamma}},$$

其中

$$M_b := 2\sup_v \left|\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{1}{2}} \frac{b(v')-b(v)}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'\right| + 2\sup_v \left(\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{1}{2}} \frac{|b(v')-b(v)|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'\right)^{1/2}.$$

因此，

$$\|\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v)\|_{N^{-s,\gamma}} \le M_b \|f\|_{N^{s,\gamma}}.$$

证明. 直接利用引理 2.1 的公式计算 $\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v)$，许多项相互抵消，剩下

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v) &= \int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{f(v')\left(b(v)-b(v')\right)}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v' \\
&= \int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{\left(f(v')-f(v)\right)\left(b(v)-b(v')\right)}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v' \\
&\quad + f(v)\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{b(v)-b(v')}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'
\end{aligned}$$

第一项使用柯西–施瓦茨不等式。

$$\left|\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v)\right| \lesssim \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s}{2}} M_b \left(\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|f(v')-f(v)|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'\right)^{1/2} + \langle v\rangle^{\gamma+2s} M_b f(v).$$

两边平方并对 v 积分后，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{-(\gamma+2s)} \left|\mathcal{L}[bf](v) - b(v)\mathcal{L}f(v)\right|^2 \mathrm{d}v &\lesssim M_b^2 \left(\iint_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|f(v')-f(v)|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\right) \\
&\quad + M_b^2 \int \langle v\rangle^{\gamma+2s} f(v)^2\,\mathrm{d}v \\
&\le M_b^2 \|f\|_{N^{s,\gamma}}^2.
\end{aligned}$$

最后一个不等式 引理 3.3 中的正则性源于以下观察：由于对于任意函数 $f \in N^{s,\gamma}$，

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \langle v\rangle^{(\gamma+2s)})} \le \|f\|_{N^{s,\gamma}},$$

那么对于任意的 $g \in L^2(\mathbb{R}^d, \langle v\rangle^{-(\gamma+2s)})$，

$$\|g\|_{N^{-s,\gamma}} \le \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \langle v\rangle^{-(\gamma+2s)})}.$$

□

引理 3.4. 考虑一个光滑函数 $b\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$，使得 $b(v)=1$ 对于 $v \in B_1$，且 $b(v)=0$ 对于 $v \notin B_2$。令 $b_R(v) = b(v/R)$。令 $D = (0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d$。对于任意函数 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$，乘积 $b_R(v)f(t,x,v)$ 在 $H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 中收敛到 f，当 $R \to \infty$ 时。

证明。根据定义，范数 $\|f\|_{H^{s,\gamma}_{kin}(D)}$ 由三项组成

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}(D)} = &\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} |f(v)|^2 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \iint_{(0,T)\times\Omega} \iint_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|f(v')-f(v)|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \iint_{(0,T)\times\Omega} \|(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f\|^2_{N^{-s,\gamma}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将上述公式应用于 $\|f-b_Rf\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}} = \|(1-b_R)f\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}}$，利用控制收敛定理，相对容易证明前两项趋于零。

对于最后一项，我们注意到 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)(b_Rf) = b_R(v)(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f$。应用引理 2.1，我们知道存在一个函数 $F\in H^{s,\gamma}_{kin}$，使得 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f = \mathcal{L}F$。因此，$(\partial_t + v\cdot\nabla_x)[(1-b_R)f] = (1-b_R)\mathcal{L}F$。接着，我们使用引理 3.3 的交换子估计，得到

$$\|(1-b_R)\mathcal{L}F - \mathcal{L}[(1-b_R)F]\|_{N^{-s,\gamma}} \le M_{b_R}\|F\|_{N^{s,\gamma}}.$$

我们注意到，当 $R\to\infty$ 时，$M_{b_R}\to 0$。事实上，

$$\left|\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac12}\langle v'\rangle^{\frac12} \frac{b_R(v')-b_R(v)}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \,\mathrm{d}v'\right| \lesssim R^{-2},$$

$$\left(\int_{\mathfrak{d}(v,v')<1} \langle v\rangle^{\frac12}\langle v'\rangle^{\frac12} \frac{|b_R(v')-b_R(v)|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \,\mathrm{d}v'\right)^{1/2} \lesssim R^{-1}.$$

特别地，$(1-b_R)\mathcal{L}F - \mathcal{L}[(1-b_R)F]\to 0$ 属于 $N^{-s,\gamma}$。最后，沿用上述相同的分析，我们推得 $(1-b_R)F\to 0$ 属于 $N^{s,\gamma}$。因此，$\mathcal{L}[(1-b_R)F]\to 0$ 属于 $N^{-s,\gamma}$，结合交换子估计可知 $(1-b_R)\mathcal{L}F\to 0$ 属于 $N^{-s,\gamma}$。□

3.2. 伽利略群运算与卷积。伽利略群是与动理学方程相容的自然代数结构。令 $\circ$ 表示伽利略群运算

$$(t_1,x_1,v_1)\circ(t_2,x_2,v_2) = (t_1+t_2, x_1+x_2+t_2v_1, v_1+v_2).$$

此运算在 $\mathbb{R}^{1+2d}$ 上定义了一种非交换李群结构。注意，微分算子 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)$、$\nabla_v$ 和 ∇_x 在群作用下保持左不变，因此伽利略平移是与此类动理学方程相关的正确变换群。

函数的卷积是根据伽利略群计算的。

$$f*g(z) := \int_{\mathbb{R}^{1+2d}} f(w)g(w^{-1}\circ z)\,\mathrm{d}w.$$

该卷积满足结合律，但不满足交换律。如果进行变量替换 $w^{-1}\circ z\mapsto w$，我们得到等价的表达式

$$f*g(z) := \int_{\mathbb{R}^{1+2d}} f(z\circ w^{-1})g(w)\,\mathrm{d}w.$$

注意，只要两个函数中至少有一个是 C^∞，$f*g$ 就是 C^∞。

使用伽利略群上的卷积，配合经过适当缩放的磨光子族，可以方便地用光滑函数逼近 $H^{s,\gamma}_{kin}$ 中的函数。令 $\eta\colon \mathbb{R}^{1+2d}\to\mathbb{R}$ 为一个非负、紧支撑的光滑函数，其积分为一。我们采用动理学缩放来构造一族磨光子：

$$\eta_\varepsilon(t,x,v) = \varepsilon^{-2s-(2+2s)d}\eta\left(\varepsilon^{-2s}t, \varepsilon^{-1-2s}x, \varepsilon^{-1}v\right). \tag{3.1}$$

给定 $f(t,x,v)$，我们可以考虑磨光

$$f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f.$$

该卷积与微分算子 ∇_x、 ∇_v 和 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)$ 交换，也与 v 中的任何积分微分算子交换，例如 $(-\Delta)_v^{s/2}$或 $(-\Delta)_v^{-s/2}$。为了解释这一点，注意到

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} f(t,x,v) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((t,x,v)\circ(0,he_i,0)) - f(t,x,v)}{h},\\
\partial_{v_i} f(t,x,v) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((t,x,v)\circ(0,0,he_i)) - f(t,x,v)}{h},\\
(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f(t,x,v) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((t,x,v)\circ(h,0,0)) - f(t,x,v)}{h},\\
(-\Delta)_v^{s/2} f(t,x,v) &= c_{s,d}\int_{\mathbb{R}^d} f((t,x,v)\circ(0,0,w))|w|^{-d+s}\mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

这些公式的关键在于，它们全部都是通过伽利略群的右作用对 f 进行平移来表示的，而卷积 $\eta * f$ 则是通过群的左作用对 f 进行平移后得到的加权平均。因此，它们显然是可交换的。

引理 3.5. 设 Ω 是具有利普希茨边界的有界开集，且 $D = (0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d$。对于任意$\delta > 0$，任意函数 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 都可以通过具有紧支集的光滑函数在 $H^{s,\gamma}_{kin}([\delta,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d)$ 中进行逼近。

证明。由引理 3.4 可知，具有紧支集的函数在 $H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 中稠密。接下来只需证明：如果 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 具有紧支集，那么它可以表示为一列具有紧支集的光滑函数的极限。

区域 Ω 具有 Lipschitz 边界。利用边界的一个适当覆盖所对应的单位分解，我们将函数 f 分解为有限多个项之和，其中每一项的支集要么远离 $\partial\Omega$，要么位于某个小球内，在该球内 $\partial\Omega$ 与某个 Lipschitz 函数的图像重合。

支集远离 Ω 的项很容易通过关于伽利略群的标准卷积用光滑函数逼近。对于支集与$\partial\Omega$相交的项，其逼近过程还需要作进一步说明。在证明余下部分中，我们称函数 f 为这些项之一。不失一般性，假设 f的支集包含于 $t\in(0,T)$， $x\in\Omega\cap B_1$且 $v\in B_R$。进一步假设 $\partial\Omega\cap B_2$与某个 Lipschitz 函数的图像重合。由于 f在 $x\notin B_1$时等于零，因此此处假设 Ω 是某个全局 Lipschitz 函数的上图并无影响。

卷积 $[\eta_\varepsilon * f](t,x,v)$ 的值取决于 (t,x,v) 的某个邻域内 f 的值。当 x 非常接近 $\partial\Omega$ 时，只要该邻域包含 Ω 以外的点， $[\eta_\varepsilon * f](t,x,v)$ 的值就无法得到良好确定。一个自然的解决方法是，首先构造一个延拓算子，将 $H^{s,\gamma}_{kin}((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d)$ 延拓到 $H^{s,\gamma}_{kin}((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$。然而，这样的延拓并非易事。我们采用另一种思路，选择特殊函数 η_ε，使得 $[\eta_\varepsilon * f]$ 的值仅取决于 D 中 f 的值。

我们用特殊函数 η_ε 的卷积来逼近 f，从而 $[\eta_\varepsilon * f](t,x,v)$ 的值（对于 $t\in(\delta,T]$, $x\in B_1\cap\Omega$，以及 $v\in\mathbb{R}^d$）仅取决于 $(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d$ 中 f 的值。回顾

$$[\eta_\varepsilon * f](t,x,v) = \iiint \eta_\varepsilon(s,y,w) f(t-s, x-y-w(t-s), v-w)\,\mathrm{d}w\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

我们希望，当 $x\in\Omega\cap B_1$且 $t\in[\delta,T]$时，被积函数仅在满足以下条件的 s、 y和 w取值处非零： $t-s\in(0,T)$ 且 $x-y-w(t-s)\in\Omega$。

我们通过使 η_ε 支持于 $s\in[0,\delta]$中来实现第一个目标。对于第二个目标，我们利用 $\partial\Omega\cap B_2$ 是一个 Lipschitz 函数的图这一性质。由于 $\partial\Omega$ 具有 Lipschitz 正则性，我们知道，只要 $x\in\Omega$ 且 $y + w(t-s)$ 属于一个依赖于 $\partial\Omega$ 的特定方向锥，就有 $x-y-w(t-s)\in\Omega$。令 $C_1\subset\mathbb{R}^d$ 为这个方向锥。我们希望 $\eta_\varepsilon(s,y,w)$ 的支集包含于 $[0,\delta]\times C_1\times C_1$ 的某个子集中。

设 η_1 是某个光滑函数，积分为一，其支集位于 $[0,\delta]\times C_1\times C_1$ 内。我们按照 (3.1) 将 $\eta_\varepsilon(s,y,w)$ 定义为关于 η_1 的函数。对于任意 $\varepsilon<1$， η_ε 的支集也包含在 $[0,\delta]\times C_1\times C_1$ 内。因此， $\eta_\varepsilon * f$ 在 $[\delta,T]\times(\Omega\cap B_1)\times\mathbb{R}^d$ 中的取值仅取决于 f 在 $(0,T)\times(\Omega\cap B_2)\times\mathbb{R}^d$ 中的取值。

此时，我们已经得到一个定义良好的单参数光滑化族 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$。我们必须证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，它在 $H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 中收敛到 f。如前所述，我们可以并且确实假设 f 具有紧支集。

由于 f 在 $|v| \le R$ 中具有紧支集，因此 f_ε 也支撑于 $|v| \le R+\varepsilon$ 中。结合 f 的紧支集性质以及引理 3.1 和 3.2，我们注意到，只需证明

(a)

$$f_\varepsilon \to f \in L^2_{t,x}\left([\delta, T] \times (\Omega \cap B_1), H^s_v(\mathbb{R}^d)\right)$$

(b)

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f_\varepsilon \to (\partial_t + v\cdot\nabla_x) f \in L^2_{t,x}\left([\delta, T] \times (\Omega \cap B_1), H^{-s}_v(\mathbb{R}^d)\right).$$

证明 (a) 的第一步是验证 f_ε 在 L^2 中收敛到 f。这是连续函数在 L^2 中稠密的标准推论。

为了证明 f_ε 在 $L^2_{t,x}H^s_v$ 中收敛到 f，我们使用众所周知的事实：对于任意函数$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\|g\|^2_{H^s} \approx \|g\|^2_{L^2} + \|(-\Delta)^{s/2} g\|^2_{L^2}.$$

此外，$(-\Delta)^{s/2}_v[\eta_\varepsilon * f] = \eta_\varepsilon * \left((-\Delta)^{s/2}_v f\right)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它在 L^2 中收敛于 $(-\Delta)^{s/2}_v f$。

为证明 (b)，我们使用以下众所周知的事实：对于任意函数 g： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\|g\|^2_{H^{-s}} \approx \|(I-\Delta)^{-s/2} g\|^2_{L^2}.$$

此外，$(-\Delta)^{-s/2}_v(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ [\eta_\varepsilon * f] = \eta_\varepsilon * \left((-\Delta)^{-s/2}_v(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f\right)$，其收敛至 $(-\Delta)^{-s/2}_v(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f$于 L^2 当 $\varepsilon \to 0$时。□

注 3.1. 试图通过变量替换将 Ω 的边界展平，以证明引理 3.5，并不是个好主意。这样的变量替换（例如参见 [21]）会给输运算子引入一个额外项，其形式为 $b(x,v)\cdot\nabla_v f$。对于 $s = 1$（如 [21] 中所示）以及 $C^{1,1}$ 边界，该项会被吸收到 $L^2_{t,x}H^1_v$ 范数中（至少在局部如此）。本文中我们有 $s < 1$，而且显然没有办法控制这个额外项。

注 3.2. 注意，虽然 $\eta * [(-\Delta)^{s/2}_v f] = (-\Delta)^{s/2}_v[\eta * f]$和 $\eta * [(-\Delta)^{-s/2}_v f] = (-\Delta)^{-s/2}_v[\eta * f]$，但对于引理 2.1 中的算子 $\mathcal{L}$， $\mathcal{L}[\eta * f] = \eta * [\mathcal{L} f]$ 并不成立。

引理 3.6（光滑逼近）。假设 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 在 D 中以分布的意义满足方程 (1.1)。存在一个光滑逼近序列 f_n，使得 $f_n \in C^\infty_c([1/n, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d)$，并且

(i) f_n 在 $L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_v(D)$ 中收敛到 f，当 $n \to \infty$。 (ii) $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f_n$ 在 $L^2_{t,x}N^{-s,\gamma}_v(D)$ 中收敛到 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f$。 (iii) 函数 f_n （按经典意义）满足一个形如下式的方程，其中 D

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f_\varepsilon - Q_\varepsilon = 0,$$

$$where\ Q_\varepsilon \to Q(f,f)\ in\ L^2_{t,x}N^{-s,\gamma}_v(D)\ as\ n \to \infty.$$

证明。我们利用引理 3.5 构造序列 f_n。条目 (i) 和 (ii) 仅仅是 f_n 在 $H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 中收敛到 f。对于 (iii)，我们令 $Q_\varepsilon := (\partial_t + v\cdot\nabla_x) f_\varepsilon$，并利用 f 在分布意义下满足方程 (1.1) 这一事实。□

下面的引理给出了一个到边界 Γ 上加权 L^2 空间的迹算子。

命题 3.7。对于权重 $\omega = \min\left\{|v\cdot n|, (v\cdot n)^2\right\}$，限制算子 $f \mapsto f|_\Gamma$ 从 $H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 到 $L^2_{loc}(\Gamma \cap \overline{D}, \omega)$ 有定义。更准确地说，对于任意紧含于 $\Gamma \cap \overline{D}$ 中的 $\widetilde{\Gamma}$，存在一个常数 C，使得对于所有 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$，我们有

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f^2 \omega \, d\Gamma \le C\|f\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}(D)}.$$

此外，如果 $f_\varepsilon \to f$在 L^2_t中强收敛$_x N^{s,\gamma}_v$且 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f_\varepsilon \to (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\ f$在 L^2_t中弱收敛$_x N^{-s,\gamma}_v$，那么 $f_\varepsilon \to f$ 在 $L^2_{loc}(\Gamma \cap \overline{D}, \omega)$ 上强收敛。

证明。该结果与 [21, 命题 4.3] 类似。根据引理 3.6，只需考虑f 光滑的情形。记 φ_+ 和 φ_- 为 Lipschitz 函数，它们在 Γ 上的取值为

$$\varphi_+ := \min\left(1, (v\cdot n(x))_+\right), \qquad \varphi_- := \min\left(1, (v\cdot n(x))_-\right).$$

我们假设 $\partial\Omega$ 是利普希茨的。因此，这些函数在 Γ 上是利普希茨的。我们以任意方式将它们延拓到 Ω 的内部，同时保持其符号和利普希茨范数不变。注意，$\varphi_+ - \varphi_- \geq 0$ 和 $\approx \omega$ 在 Γ上。~令 η 为一个光滑紧支撑函数，在 Γ上等于 1。于是我们有

$$\begin{aligned}
\iiint_\Gamma \varphi_+\eta f^2(v\cdot n) &= \int_D \left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\left(\varphi_+\eta f^2\right)\\
&= \int_D \left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)(\varphi_+\eta) f^2 + \int_D 2\varphi_+\eta f\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right) f\\
&\lesssim \left\|\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)(\varphi_+\eta)\right\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}^2 + \|2\varphi_+\eta f\|_{L^2_{t,x}N_v^{s,\gamma}}\left\|\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right) f\right\|_{L^2_{t,x}N_v^{-s,\gamma}}\\
&\lesssim \|f\|^2_{H^{s,\gamma}_{kin}(D)}.
\end{aligned}$$

因此，在 Γ_+ 部分所需的上界成立。类似的论证也说明，考虑– $\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\left(\varphi_-\eta f^2\right)$ 时， Γ_- 部分同样成立。□

备注 3.3。证明命题 3.7 是本文中唯一使用 Ω 的边界为 C^1, 1这一假设的地方。对于其余分析，利普希茨边界已足够。

在接下来的几个引理中，我们将证明，前文以测试函数表述的边界条件定义蕴含命题 3.7 中给出的、以迹算子表述的更经典条件。

引理 3.8. 设 f 是玻尔兹曼方程 (1.1) 在定义 2.2 意义下满足流入边界条件 g的一个弱解。那么 $g = f|_{\Gamma_-}$，其中 $f|_{\Gamma_-}$ 是命题 3.7 中 f 的迹。

*Pro*证。 当 f 和 φ 都是光滑函数，且 $\varphi|_{\Gamma_+} = 0$时，分部积分得到 ds

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \left\{\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right) f\,\varphi + f\,\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iiint_{\Gamma_-} f\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

根据引理 3.6，我们可以用一列光滑函数 $f_k \to f$ 在 $H^{s,\gamma}_{kin}$ 中逼近任意函数 $f \in H^{s,\gamma}_{kin}$，使得每个 f_k 都满足上述恒等式。

根据命题 3.7，边界值 $(f_k)|_{\Gamma_-}$ 在 $L^2_{loc}(\Gamma,\omega)$ 中收敛到 $f|_{\Gamma_-}$。此外，由于 $\varphi = 0$在 Γ上成立，我们也必有 $|\varphi| \lesssim \omega$ 在 Γ上成立。我们可以对恒等式中的每一项取极限，得到

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \left\{\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right) f\,\varphi + f\,\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iiint_{\Gamma_-} f|_{\Gamma_-}\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

当函数 f 是按定义 2.2 意义下方程的弱解时，我们还知道 $\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right) f = Q(f,f)$ 在分布意义下成立。将其代入上述恒等式，

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \left\{Q(f,f)\,\varphi + f\,\left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iiint_{\Gamma_-} f|_{\Gamma_-}\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

这与定义 2.2 中的恒等式相同，只是用 $f|_{\Gamma_-}$ 代替了 g。两个恒等式对任意测试函数 φ都成立，因此 $f|_{\Gamma_-} = g$。□

以下两个引理通过稠密性证明，方法与引理 3.8 相同。

引理 3.9. 设 f 是按定义 2.4 意义下满足镜面反射边界条件的玻尔兹曼方程 (1.1) 的弱解。则 $f|_\Gamma(t,x,v) = f|_\Gamma(t,x,\mathcal{R}_x v)$，其中 $f|_\Gamma$ 是命题 3.7 中 f的迹。

引理 3.10. 设 f 是满足定义 2.3 意义下具有反弹边界条件的玻尔兹曼方程 (1.1) 的弱解。那么 $f|_\Gamma(t,x,v) = f|_\Gamma(t,x,-v)$，其中 $f|_\Gamma$ 是命题 3.7 中所述的 f 的迹。

4. Chain Rule for Weak Solutions

为了建立函数 f 的截断能量耗散不等式，我们希望计算形如 $\psi(t,f)=(f-a(t))_+^2$ 的复合函数所满足的方程。本节从我们对各种边界条件下分布意义的方程所给出的定义出发，验证某种形式的链式法则。

在下文中，令 $\psi(t,y)$ 为关于 t 和 y的一个一般函数。在所讨论的情形中，它关于 t满足利普希茨条件，关于 y可微，且 $\partial_y\psi$ 是局部利普希茨的。我们用 ψ_y 表示 ψ 关于 y的导数，用 ψ_t 表示关于 t的导数。本节的目标是以分布的意义表示 $\psi(t,f)$ 所满足的方程。虽然 ψ_y是局部利普希茨的，但当 y取较大值时，它可能变得无界。为了研究 $\psi(t,f)=(f-a(t))_+^2$，其中 $a(t)$ 满足利普希茨条件，我们可以假设 ψ_{yy} 和 ψ_{ty} 全局有界。出于技术原因，我们的分析从函数 ψ 开始较为方便，使得 ψ_t、 ψ_y、 ψ_{ty} 和 ψ_{yy} 均全局有界。稍后我们将通过截断来逼近所讨论的情形。

引理 4.1. 设 $f\in H^{s,\gamma}_{kin}(D)$ 是 D 中方程 (1.1) 的弱解。设 $g\in L^2(\Gamma,\omega)$ 是 f 的迹，其定义见命题 3.7。假设 ψ 和 ψ_y 是利普希茨函数，且 ψ_t、 ψ_y、 ψ_{ty} 和 ψ_{yy} 全局有界。那么，对于任意测试函数 $\varphi\in C_c^1\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，使得 $\varphi=0$ 于 Γ_0 上成立，我们有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi+\psi_t(t,f)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iiint_\Gamma\psi(t,g)\varphi\,(v\cdot n)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

证明。我们应用引理 3.6。我们有光滑近似函数 f_ε 满足（经典地）

$$\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)f_\varepsilon-Q_\varepsilon=0\quad\text{in } D.$$

将方程乘以 $\psi_y(t,f_\varepsilon)$，得到

$$\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\psi(t,f_\varepsilon)-\psi_y(t,f_\varepsilon)Q_\varepsilon-\psi_t(t,f_\varepsilon)=0\quad\text{in } D.$$

将方程乘以 φ，并对输运项分部积分，得到

$$\iiint_D\psi(t,f_\varepsilon)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f_\varepsilon)Q_\varepsilon\varphi+\psi_t(t,f_\varepsilon)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_\Gamma\psi(t,f_\varepsilon)(v\cdot n)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

首先假设 $\psi(t,y)$ 关于 y 是全局利普希茨的。稍后我们将去掉这一假设。此外，我们回顾 $\psi\in C^{1,1}$。其二阶导数是有界的。

由于 ψ 是全局利普希茨的，且 $f_\varepsilon\to f$ 属于 $L^2(D)$（特别是在 L^1_{loc} 中），我们看到，对于任意固定的测试函数 φ，第一项都收敛。

$$\iiint\psi(t,f_\varepsilon)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to\iiint\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\quad\text{as }\varepsilon\to0.$$

由于 $\psi\in C^{1,1}$，我们注意到 ψ_y 是全局利普希茨的。由于 $f_\varepsilon\to f$ 属于 $L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_{,v}$，且 ψ_y 在 y中是利普希茨的，我们看到， $\psi(t,f_\varepsilon)$在 $L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_{,v}$中是一致有界的。由于它显然在 L^2_{loc}中收敛，因此它至少在 $L^2_{t,x}N^{s,\gamma}_{,v}$中弱收敛。

由于 $Q_\varepsilon\to Q(f,f)$属于 $L^2_{x,v}N^{-s,\gamma}_{,v}$，因此我们推得第二项的收敛

$$\iiint\psi_y(t,f_\varepsilon)Q_\varepsilon\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to\iiint\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

对于下一项，我们利用 ψ_{ty}是有界的，从而 $\psi_t(t,f_\varepsilon)\to\psi_t(t,f)$属于 L^2_{loc}，并且

$$\iiint\psi_t(t,f_\varepsilon)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to\iiint\psi_t(t,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由于在 Γ_0 上 $\varphi\in C^1$ 和 $\varphi=0$，我们有 $|\varphi(t,x,v)|\lesssim d((x,v),\Gamma_0)$。特别地， $|\varphi(t,x,v)(v\cdot n)|\lesssim\omega$ 在 Γ 上。对于边界项，我们利用 $(f_\varepsilon)|_\Gamma\to g$ 于 $L^2(\Gamma,\omega)$ 中。由于 ψ 是全局利普希茨的，我们推得 $\psi(t,f_\varepsilon)\to\psi(t,g)$ 在 $L^2(\Gamma,\omega)$ 中。因此

$$\iiint_\Gamma\psi(t,f_\varepsilon)(v\cdot n)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t\to\iiint_\Gamma\psi(t,g)(v\cdot n)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

我们令式 (4.2) 中的每一项取极限，从而完成证明。 □

引理 4.1 已足以证明满足流入边界条件的弱解满足一个等式。在这种情况下，我们通常使用在 Γ_+ 上消失的测试函数 φ。特别地，它们在 Γ_0 上也消失。

推论 4.1.1（具有流入/扩散反射边界的弱解的受限链式法则）。设 f 是 D 中方程 (1.1) 的一个满足流入边界条件的弱解。假设 ψ 和 ψ_y 是利普希茨函数，且 ψ_t、ψ_y、ψ_{ty} 和 ψ_{yy} 全局有界。那么对于任意测试函数 $\varphi \in C_c^1\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，使得 $\varphi|_{\Gamma_+}=0$，我们有

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad &\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi+\psi_t(t,f)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\qquad=\iiint_{\Gamma_-}\psi(t,f|_{\Gamma_-})\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证明。测试函数 φ 在 Γ_+ 上消失且连续。因此，它在 Γ_0 上消失，引理 4.1 可直接应用。□

引理 4.2. 令 dist 表示 $\mathbb{R}^{1+2d}$ 中的欧几里得距离。令 $\chi:[0,\infty)\to[0,1]$ 为一个光滑函数，使得当 $w\in[0,1]$ 时 $\chi(w)=1$，且当 $w\geq 2$ 时 $\chi(w)=0$。对于任意大的半径 $R>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$，记为

$$(4.4)\qquad \eta_\varepsilon(z):=\left(1-\varepsilon^{-1}\operatorname{dist}(z,\Gamma_0)\right)_+\chi(R^{-1}|v|).$$

于是，我们有

$$\|\eta_\varepsilon(t,x,\cdot)\|_{N^{s,\gamma}}\leq\begin{cases}0 & \text{if } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geq\varepsilon,\\ C(R)\varepsilon^{1/2-s} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里，$C(R)$ 是一个依赖于 d、γ、s 和 R 的常数。

证明。如果 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geq\varepsilon$，那么对于 t 和 v 的任意值，我们始终有 $\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)>\varepsilon$。因此，在这种情况下 $\eta(t,x,\cdot)\equiv 0$。

若 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)<\varepsilon$，我们分析 $\|\eta_\varepsilon(t,x,\cdot)\|_{N^{s,\gamma}}$ 的公式。我们的估计基于关于 η_ε 的以下四个简单事实。

(i) $\eta_\varepsilon(t,x,v)\leq 1$ 对于 (t,x,v) 的每个取值。(ii) 仅当 $\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)\leq\varepsilon$ 时，$\eta_\varepsilon(t,x,v)\neq 0$。(iii) $|\nabla_v\eta_\varepsilon|\leq\varepsilon^{-1}$。(iv) 若 $|v|>R$，则 $\eta_\varepsilon(t,x,v)=0$。

根据 根据 (2.1)，对 t 和 x 的每个固定取值（为避免冗杂，此处省略），我们有

$$\|\eta_\varepsilon\|_{N^{s,\gamma}}^2=\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma+2s}\left|\eta_\varepsilon(v)\right|^2\mathrm{d}v+\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\frac{\left|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')\right|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\leq 1}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.$$

利用 (i)、(ii) 和 (iv) 估计第一项。

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma+2s}\left|\eta_\varepsilon(v)\right|^2\mathrm{d}v\lesssim R^{d-1+\gamma+2s}\varepsilon.$$

为了估计第二项，我们注意到，只有当 $\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)<\varepsilon$ 或 $\operatorname{dist}((t,x,v'),\Gamma_0)<\varepsilon$ 时，被积函数才非零。由对称性，只需考虑 $\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)<\varepsilon$ 且与 v' 的任意其他取值配对的集合：

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}}\frac{\left|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')\right|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\leq 1}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\\ &\qquad\leq 2R^{\gamma+2s+1}\int_{\{v:\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)<\varepsilon\}\cap B_R}\int_{\{v'\in\mathbb{R}^d:\mathfrak{d}(v,v')<1\}}\frac{\left|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')\right|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\end{aligned}$$

注意，在任意球 B_{R+1} 中，$\mathfrak{d}(v,v')$ 与通常的欧几里得距离可比，其比较因子取决于 R。

$$\lesssim C(R)\int_{\{v:\operatorname{dist}((t,x,v),\Gamma_0)<\varepsilon\}\cap B_R}\int_{\{v'\in B_1(v)\}}\frac{\left|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')\right|^2}{|v-v'|^{d+2s}}\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.$$

我们将第二个积分的积分区域划分为 $v' \in B_{c(R)\varepsilon}(v)$ 和 $v' \notin B_{c(R)\varepsilon}(v)$ 两部分。在后一部分中，必有 $\eta_\varepsilon(v') = 0$ （由上面的 (ii) 可知）。因此，对于任意满足 $\mathsf{dist}((t,x,v)\ \Gamma_0) < \varepsilon$ 的 v ，我们有（利用上面的 (i)）

$$\int_{\{v'\notin B_{c(R)\varepsilon}(v)\}} \frac{|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')|^2}{|v-v'|^{d+2s}}\,\mathrm{d}v' \lesssim \varepsilon^{-2s}.$$

对于另一项，我们使用上面的 (iii) 得到

$$\int_{\{v'\in B_{c(R)\varepsilon}(v)\}} \frac{|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')|^2}{|v-v'|^{d+2s}}\,\mathrm{d}v' \le \int_{\{v'\in B_{c(R)\varepsilon}(v)\}} \frac{\varepsilon^2|v-v'|^2}{|v-v'|^{d+2s}}\,\mathrm{d}v' \lesssim \varepsilon^{-2s}.$$

对所有满足 $\mathsf{dist}((t,x,v)\ \Gamma_0) < \varepsilon$ 的 $v\in B_R$ 进行积分，我们得到

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|\eta_\varepsilon(v)-\eta_\varepsilon(v')|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \lesssim \varepsilon^{1-2s}.$$

□

引理 4.3. 设 f 是 $N^{s,\,\gamma}$ 中的一个函数，且 $\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是利普希茨连续的，使得 $\Phi(0) = 0$。那么， $\Phi\circ f \in N^{s,\,\gamma}$，并且我们有

$$\|\Phi\circ f\|_{N^{s,\gamma}} \lesssim \|f\|_{N^{s,\gamma}} \|\Phi\|_{Lip}.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi\circ f\|_{N^{s,\gamma}}^2 :=& \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} |\Phi\circ f(v)|^2\,\mathrm{d}v \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|\Phi\circ f(v)-\Phi\circ f(v')|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v\end{aligned}$$

请注意，

$$|\Phi\circ f(v)| \le \|\Phi\|_{Lip}\,|f(v)|, \qquad |\Phi\circ f(v)-\Phi\circ f(v')| \le \|\Phi\|_{Lip}\,|f(v)-f(v')|.$$

因此，我们的结果自然成立。 □

引理 4.4. 设 f 和 g 有界且属于 $N^{s,\gamma}$。那么，它们的乘积也属于 $N^{s,\gamma}$ ，并且有

$$\|fg\|_{N^{s,\gamma}} \lesssim \|f\|_{N^{s,\gamma}}\|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{N^{s,\gamma}}.$$

证明. 我们利用范数公式 (2.1) 在 $N^{s,\gamma}$ 中进行计算。

$$\begin{aligned}\|fg\|_{N^{s,\gamma}}^2 :=& \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} |f(v)g(v)|^2\,\mathrm{d}v \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|f(v)g(v)-f(v')g(v')|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

对于第一项，显然有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} |f(v)g(v)|^2\,\mathrm{d}v \le \|g\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma+2s} |f(v)|^2\,\mathrm{d}v \le \|g\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{N^{s,\gamma}}^2.$$

在这种情况下，右端的函数 f 和 g 可以互换。

对于第二项，我们在 $|f(v)g(v) - f(v')g(v')| = |f(v)g(v) - f(v)g(v') + f(v)g(v') - f(v')g(v')| \le |f(v)|\cdot|g(v) - g(v')| + |f(v) - f(v')|\cdot|g(v')|$中加上再减去一项。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|fg\|_{N^{s,\gamma}}^2 \le& \|g\|_{L^\infty}^2\|f\|_{N^{s,\gamma}}^2 \\ &+ 2\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|f(v)|^2\,|g(v)-g(v')|^2}{d(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{d(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \\ &+ 2\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \langle v'\rangle^{\frac{\gamma+2s+1}{2}} \frac{|g(v')|^2\,|f(v)-f(v')|^2}{\mathfrak{d}(v,v')^{d+2s}} \mathbb{1}_{\mathfrak{d}(v,v')\le 1}\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v \\ \lesssim& \|g\|_{L^\infty}^2\|f\|_{N^{s,\gamma}}^2 + \|f\|_{L^\infty}^2\|g\|_{N^{s,\gamma}}^2\end{aligned}$$

□

引理 4.5（无约束链式法则）。设 f 是 D 中的 (1.1) 的一个弱解，其迹为 $g \in L^2(\Gamma,\omega)$（如命题 3.7 所示）。假设 ψ 和 ψ_y 是利普希茨函数，且 ψ_t, ψ_y, ψ_{ty} 和 ψ_{yy} 全局有界。进一步假设，对于所有 $t\in(0,T)$, 都有 $\psi_y(t,0)=0$。那么，对于任意测试函数 $\varphi\in C_c^1\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$（不一定在 Γ_+上消失），我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi+\psi_t(t,f)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\iiint_{\Gamma}\psi(t,g)\varphi\left(1-\eta_\varepsilon(t,x,v)\right)(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.5}$$

这里，η_ε 在引理 4.2 中定义，其中 R 充分大，使得 $\varphi(t,x,v)\neq0$ 仅当 $|v|<R$时成立。

注意，右端的极限可以解释为积分的柯西主值

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iiint_{\Gamma}\psi(t,g)\varphi\left(1-\eta_\varepsilon(t,x,v)\right)(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t=:PV\iiint_{\Gamma}\psi(t,g)\varphi(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

证明。根据引理 4.1，当 φ 在 Γ_0 上消失且 ψ 具有有界的一阶和二阶导数时，该等式成立。

我们先考虑这样的情形：φ 不一定在 Γ的任何部分上消失，但 ψ 仍具有有界的一阶和二阶导数。此外，我们假设 $\psi(t,0)=0$ 且 $\psi_y(t,0)=0$。

我们沿用 [21, 引理 4.6] 的思路。令 $\varphi_\varepsilon:=(1-\eta_\varepsilon)\varphi$，从而 $\varphi_\varepsilon|_{\Gamma_0}=0$。于是我们可以应用引理 4.1，得到

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi_\varepsilon+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi_\varepsilon+\psi_t(t,f)\varphi_\varepsilon\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad=\iiint_{\Gamma_-}\psi(t,g)\varphi_\varepsilon(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.6}$$

取 $\varepsilon\to0$，我们需要考虑每一项的极限。对于 Γ 上的边界项，我们不作任何处理，因为本引理中的等式显式涉及 $\varepsilon\to0$ 趋于极限的情形。

由于 $0\leq\varphi_\varepsilon\leq\varphi$，根据控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi_t(t,f)\varphi_\varepsilon\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi_t(t,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由于 ψ_{yy} 有界且 $\psi_y(t,0)=0$，我们应用引理 4.3 推得 $\|\psi_y(t,f)\|_{L^2_{t,\,x}((0,t)\times\Omega\ N^{s,\gamma})}\leq\|f\|_{L^2_{t,\,x}((0,t)\times\Omega\ N^{s,\ \gamma})}\sup|\psi_{yy}|$。此外，由于我们假设 ψ_y 有界，应用引理 4.4 可得

$$\|\psi_y(t,f)\varphi_\varepsilon\|_{L^2_{t,x}((0,t)\times\Omega,N^{s,\gamma})}\lesssim\|f\|_{L^2_{t,x}((0,t)\times\Omega,N^{s,\gamma})},$$

我们断言，$\psi_y(t,f)\varphi_\varepsilon$ 在 $L^2_{t,\,x}((0,T)\times\Omega\ N^{s,\ \gamma})$ 中收敛到 $\psi_y(t,f)\varphi$。事实上，

$$\iint_{(0,T)\times\Omega}\|\psi_y(t,f)\varphi_\varepsilon-\psi_y(t,f)\varphi\|^2_{N^{s,\gamma}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{(0,T)\times\Omega}\|\psi_y(t,f)\eta_\varepsilon(t,x,v)\varphi\|^2_{N^{s,\gamma}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

利用引理 4.4

$$\lesssim\iint_{(0,T)\times\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)<\varepsilon\}}\|\psi_y(t,f)\varphi\|^2_{N^{s,\gamma}}+(\sup|\psi_y\varphi|)\|\eta_\varepsilon\|^2_{N^{s,\gamma}}$$

右端的第一项趋于零，因为 $\psi_y(t,f)\varphi\in L^2_{t,\,x}{N^s}_{,\,v}{}^{\gamma}$。第二项根据引理 4.2 趋于零。

由于 $Q(f,f)\in L^2_{t,\,x}{N^{-s}}_{,\,\gamma}$，我们推得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi_\varepsilon\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

最后，请注意，

$$\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi_\varepsilon=\left(1-\eta_\varepsilon\right)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi-\varphi\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\eta_\varepsilon.\tag{4.7}$$

对于 (4.7) 中的第一项，利用控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi(t,f)(1-\eta_\varepsilon)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

对于 (4.7) 中的第二项，我们注意到，根据构造，$\partial_t\eta_\varepsilon=0$ 处处成立，而 $v\cdot\nabla_x\eta_\varepsilon=0$ 除非在 Γ_0 的 ε邻域内，否则

$$\left|\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\eta_\varepsilon\right|\lesssim\varepsilon^{-1}.$$

因此，对于 $\psi(t,f)\in L^2_{loc}$，我们有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\eta_\varepsilon\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iiint_{\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon}\psi(t,f)\left(v\cdot\nabla_x\eta_\varepsilon\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

and

$$\begin{aligned}&\left|\iiint_{\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon}\psi(t,f)\left(v\cdot\nabla_x\eta_\varepsilon\right)\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\lesssim\varepsilon^{-1}\iiint_{\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon}\left|\psi(t,f)\varphi\right|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\lesssim\varepsilon^{-1}\left(\iiint_{\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon}\left|\psi(t,f)\varphi\right|^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left|\left\{z\in\mathbb{R}^{1+2d}:\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon\right\}\right|^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\left(\iiint_{\mathrm{dist}(z,\Gamma_0)<\varepsilon}\left|\psi(t,f)\varphi\right|^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\quad\text{as }\varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

由于我们假设 ψ 是全局利普希茨的，因此有 $\psi(t,f)\in L^2_{loc}$。然后我们可以取极限，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\eta_\varepsilon\varphi\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此，我们知道当 $\varepsilon\to 0$时，(4.6) 收敛到 (4.5)。

这就证明了 (4.5)，并完成了该引理的证明。 □

需要注意的是，要使 (4.5) 中的左端有意义，我们需要 ψ_{yy} 和 ψ_{ty} 有界，但不需要对 ψ_t 和 ψ_y施加任何全局界。事实上，对于形如 $\psi(t,f)=(f-a(t))_+^2$ 的函数，其中 a 为利普希茨函数，(4.5) 左端的每一项都有意义。通过截断，我们可以对任意一般函数进行近似，使 ψ_{yy} 和 ψ_{ty} 有界，并得到一列函数 ψ_R，其一阶和二阶导数有界，且当 $|f|<R$时与 ψ 一致。然而，一般而言，右端边界积分的极限是什么，并不显而易见。对于三种可能的边界条件，我们分别简化边界积分，从而解决这一困难。接下来的三个引理将逐一探讨这些情况。

引理 4.6（具有流入边界的弱解的无约束链式法则）。设 f 是 D 中的方程 (1.1) 的一个弱解，并满足流入边界条件。假设 ψ 和 ψ_y 均为局部利普希茨函数，且 ψ_{yy}和 ψ_{ty}全局有界。进一步假设 $\psi(t,f)\geq 0$，且 f在 Γ_- 上的迹有界。那么，对于任意非负测试函数 $\varphi\in C_c^1\left([0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$（不一定在 Γ_+上消失），我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi+\psi_t(t,f)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\qquad\geq\iiint_{\Gamma_-}\psi(t,f|_{\Gamma_-})\varphi\left(v\cdot n\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.8}$$

证明。根据引理 4.5，如果 ψ 和 ψ_y 是全局利普希茨的，则有

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\left\{\psi(t,f)\left(\partial_t+v\cdot\nabla_x\right)\varphi+\psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi+\psi_t(t,f)\varphi\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\qquad=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Gamma}\psi(t,f|_{\Gamma})\varphi\left(1-\eta_\varepsilon(t,x,v)\right)\left(v\cdot n\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

我们将边界项拆分为关于 Γ_+ 和 Γ_-的积分。由于 $\psi \geq 0$，关于Γ_+ 的积分部分是非负的。因此

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\qquad \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Gamma_-} \psi(t,f|_{\Gamma_-})\varphi\,(1-\eta_\varepsilon(t,x,v))\ (v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

并且由于 $f|_{\Gamma_-}$ 有界，我们使用控制收敛定理得到

$$= \iiint_{\Gamma_-} \psi(t,f|_{\Gamma_-})\varphi\,(v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.$$

如果 ψ 的导数并非全局有界，我们构造一个函数 ψ_R，使其在$|f|<R$时与 ψ 相同。我们选择这个函数 ψ_R，使其一阶和二阶导数有界，从而上述不等式适用。此时令 $R\to\infty$ 趋于极限并无困难。□

引理 4.7（具有反弹边界条件的弱解的链式法则）。假设 f 是 D 中满足反弹边界条件的方程 (1.1) 的弱解。设 $\psi\in C^{1,\,1}$，且 ψ_{yy} 和 ψ_{ty} 有界。那么对于任意测试函数 $\varphi\in C_c^1\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，满足 $\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,-v)$ 对所有 $x\in\partial\Omega$ 均成立，我们有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

证明。根据引理 4.5，若 ψ 和 ψ_y 是全局利普希茨函数，则有

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma} \psi(t,f|_{\Gamma})\varphi\,(1-\eta_\varepsilon(t,x,v))\ (v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,-v)$，我们注意到，对于任意 $\varepsilon>0$，边界项都消失。因此

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

由于边界项已消失，现在截断一个一阶导数无界的函数 ψ 并取极限不再有困难。□

引理 4.8（镜面反射边界下弱解的链式法则）。设 f 是在 D 中满足镜面反射边界条件的方程 (1.1) 的弱解。令 $\psi\in C^{1,\,1}$，且 ψ_{yy} 和ψ_{ty}有界。那么，对于任意测试函数$\varphi\in C_c^1\left((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\right)$，使得对所有 $x\in\partial\Omega$，均有 $\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,\mathcal{R}_x v)$，我们有

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

证明。根据引理 4.5，如果 ψ 具有有界的一阶和二阶导数，则有

$$\begin{aligned}&\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma} \psi(t,f|_{\Gamma})\varphi\,(1-\eta_\varepsilon(t,x,v))\ (v\cdot n)\mathrm{d}v\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(t,x,v)=\varphi(t,x,\mathcal{R}_x v)$，我们注意到，对于 $\varepsilon>0$ 的任意取值，边界项均为零。因此

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \{\psi(t,f)\ (\partial_t + v\cdot\nabla_x)\,\varphi + \psi_y(t,f)Q(f,f)\varphi + \psi_t(t,f)\varphi\}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

由于边界项消失了，现在截断一阶导数无界的函数 ψ 并取极限已不再有困难。□

推论 4.8.1. 设 $f(t,x,v)$ 是满足反弹、镜面反射或流入边界条件的 (1.1) 的弱解。设 $a(t)$ 是任意非负 Lipschitz 函数。在流入边界的情形下，假设 f 在 Γ_- 上的边界值处处小于 $a(t)$。那么，对于任意满足 $\varphi \geq 0$ 的$\varphi \in C_c^1$，我们有不等式

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{2}\left(f-a(t)\right)_+^2 \left(\partial_t + v\cdot\nabla_x\right)\varphi + \left(f-a(t)\right)_+ Q(f,f)\varphi - a'(t)\left(f-a(t)\right)_+\varphi \right\} \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0.$$

证明。根据边界条件，我们应用引理 4.6、引理 4.7 或引理 4.8，其中 $\psi(t,f) = \frac{1}{2}(f-a(t))_+^2$。□

4.1. 截断能量耗散。设 $f(t,x,v)$ 是定义在 D 上的一个函数，满足反弹、镜面反射或流入边界条件。

设 $a = a(t) \geq 0$。记 $f = f_b + f_r$，其中 $f_r := (f-a)_+$ 且 $f_b \leq a$。显然，若 $f > a$，则 $f_b = a$且 $f_r = f - a$；若 $f \leq a$，则 $f_b = f$ 且 $f_r = 0$。进一步，我们定义

$$m(t) := \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^d} |f_r(t,x,v)|^2 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

由于函数 f属于 $L^2((0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d)$，因此 $m \in L^1((0,T))$。

引理 4.9. 设 $f(t,x,v)$ 是方程 (1.1) 的一个弱解，满足反弹、镜面反射或流入边界条件。对于流入边界情形，我们假设边界值处处小于 $a(t)$。那么对于几乎所有的 $t_1, t_2 \in (0,T)$，若 $t_1 < t_2$，有

$$m(t_2) - m(t_1) \leq 2\iiint_{(t_1,t_2)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \left\{ f_r\, Q(f,f) - a'(t) f_r \right\} \mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

对几乎所有的 $t \in (0,T)$ 都成立。

证明。设 t_1 和 t_2 是函数 $m(t)$的两个勒贝格点。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们应用推论 4.8.1 来彩票计划

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(t_2 - t) & \text{if } t \in [t_2-\varepsilon, t_2) \\ \frac{1}{\varepsilon}(t - t_1) & \text{if } t \in (t_1, t_1+\varepsilon] \\ 1 & \text{if } t \in (t_1+\varepsilon, t_2-\varepsilon) \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

我们得到

$$\iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} f_r^2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(t_1,t_1+\varepsilon)} - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(t_2-\varepsilon,t_2)} \right) + f_r Q(f,f)\varphi_\varepsilon - a'(t) f_r \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0.$$

这与以下内容相同

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \frac{m(t)}{2}\mathrm{d}t - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} \frac{m(t)}{2}\mathrm{d}t + \iiint_{(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^d} f_r Q(f,f)\varphi_\varepsilon - a'(t) f_r \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0.$$

我们令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，从而完成证明。□

注意到，引理 4.9 的右端在 $t_2 - t_1 \to 0$ 时趋于零。因此，函数 $m(t)$ 必须是半连续的，并且对于所有 $t \in (0,T)$，其取值都已确定。

推论 4.9.1. 函数 $m(t)$ 几乎处处等于一个右连续且有左极限的函数，该函数有可数个跳跃间断点，且这些间断点均为负向跳跃。

证明. 显然，引理 4.9 中的右端在 $t_2 \to t_1$ 或 $t_1 \to t_2$ 时趋于零。□

推论 4.9.1 之后，可以逐点讨论 $m(t)$ 的取值；对所有 t_1 和 t_2 的取值，它们都满足引理 4.9 中的不等式。

5. Proof of the Main Theorem

本节的目的是证明定理 1.1。策略是利用引理 4.9 证明 $m(t)$ 作为 t 的函数是非递增的。接下来我们将看到，当 $t \to 0$ 时， $m(t) \to 0$ ，由此得出 $m \equiv 0$，因此 $f \le a(t)$。我们首先需要分析引理 4.9 中的被积函数，以证明它不为正。

引理 5.1. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 是一个定义在 $L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap LlogL(\mathbb{R}^d)$ 上的非负函数，满足流体力学界 (1.2)。对于任意足够大的 $a > 0$，记 $f_b(v) := \min(f(v)\ a)$ 和 $f_r(v) := (f(v) - a)_+$。那么，存在一些较大的常数 $c > 0$ 和 C，它们依赖于流体力学界，使得我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f) f_r \,\mathrm{d}v \le -c\,\|f_r\|^2_{L^p_n} - c\,a^{1+2s/d}\|f_r\|_{L^1_\ell} + C\int_{\mathbb{R}^d} (f * |\cdot|^\gamma)\, f f_r \,\mathrm{d}v.$$

这里， p 和 n 是引理 2.3 中的指数，且 $\ell = \gamma + 2s + 2s/d$。

证明。我们使用 $Q(f,f) = Q(f,f_b) + Q(f,f_r)$ 将左端拆分，并分别估计这两项的一个上界。

利用 (2.11)，我们写出

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f_b)(v) f_r(v)\,\mathrm{d}v = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f_r(v)\,(f_b(v') - f_b(v))\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v + c\int_{\mathbb{R}^d} (f *_v |v|^\gamma)\, f_b(v) f_r(v)\,\mathrm{d}v. \tag{5.1}$$

我们利用 K_f 的非退化锥 $\Xi(v)$ 的性质来估计 (5.1) 中的第一项。回顾一下， $K_f(v,v') \ge 0$ 处处成立，并且由 (2.10) 可知

$$K_f(v,v') \gtrsim \langle v\rangle^{\gamma+2s+1}|v-v'|^{-d-2s} \quad \text{if } v'-v \in \Xi(v).$$

此外，注意在 $f_r(v)$ 的支撑集内，我们有 $f_b(v) = a$。另外， $f_b(v') \le a$ 且 $f_b \le f$ 处处成立，因此 $\|f_b\|_{L^1_2(\mathbb{R}^d)} \lesssim (M_0 + E_0)$。对于任意固定的 $v \in \mathbb{R}^d$，取 $R = R(v) > 0$ 使得对于某个充分大的常数 C，有 $R^d = Ca^{-1}\langle v\rangle^{-1}(M_0 + E_0)$，即可确保对于至少一半的点 $v' \in v + (B_R \cap \Xi(v))$， $f_b(v') \le \frac{a}{2}$，并且测度 $|B_R \cap \Xi(v)| \approx R^d\langle v\rangle^{-1}$。

因此我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f_b(v') - f_b(v))\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' &\le \int_{v+(B_R\cap\Xi(v))} (f_b(v') - f_b(v))\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v' \\ &\lesssim \langle v\rangle^{\gamma+2s+1} R^{-d-2s}\int_{v+(B_R\cap\Xi(v))} (f_b(v') - f_b(v))\,\mathrm{d}v' \\ &\lesssim -a\langle v\rangle^{\gamma+2s} R^{-2s} \approx -a^{1+\frac{2s}{d}}\langle v\rangle^{\gamma+2s+\frac{2s}{d}} = -a^{1+\frac{2s}{d}}\langle v\rangle^{\ell}.\end{aligned}$$

于是，

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f_b)(v) f_r(v)\,\mathrm{d}v \le -a^{1+\frac{2s}{d}}\|f_r\|_{L^1_\ell} + c\int_{\mathbb{R}^d} (f *_v |v|^\gamma)\, f_b(v) f_r(v)\,\mathrm{d}v. \tag{5.2}$$

接下来，我们估计涉及 $Q(f,f_r)$ 的项。根据 (2.12)，我们写 te

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f_r)(v) f_r(v)\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f_r(v') - f_r(v)|^2\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v + c\int_{\mathbb{R}^d} (f *_v |v|^\gamma)\,|f_r(v)|^2\,\mathrm{d}v.$$

将引理 2.3 应用于 $g = f_r$，上面的第一项可估计为

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f_r(v') - f_r(v)|^2\,K_f(v,v')\,\mathrm{d}v'\mathrm{d}v &\gtrsim \|f_r\|^{2-p}_{L^p_n}\cdot\int_{\left\{|f_r(v)|\ge C_1\|f_r\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\}} \langle v\rangle^{np}|f_r(v)|^p\,\mathrm{d}v \\ &= \|f_r\|^2_{L^p_n} - \|f_r\|^{2-p}_{L^p_n}\cdot\int_{\left\{|f_r(v)|< C_1\|f_r\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\}} \langle v\rangle^{np}|f_r(v)|^p\,\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 p 和 n 如引理 2.3 所定义，且 $k = \frac{1}{2}(-\gamma - d + 1)$。我们还有

$$\begin{aligned}\int_{\left\{|f_r(v)|<C_1\|f_r\|_{L^p_n}\langle v\rangle^k\right\}} \langle v\rangle^{np}|f_r(v)|^p\,\mathrm{d}v &\lesssim \|f_r\|_{L^p_n}^{p-1}\cdot\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{np+(p-1)k}|f_r(v)|\,\mathrm{d}v\\ &\le \|f_r\|_{L^p_n}^{p-1}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}},\end{aligned}$$

注意到指数 $np+(p-1)k = \frac{1}{2}(1+\gamma-d) \le \ell/2$。因此，我们发现 t

$$\int Q(f,f_r)f_r\,\mathrm{d}v \le -c\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C\|f_r\|_{L^p_n}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}} + C\int_{\mathbb{R}^d}(f*_v|v|^\gamma)f_r^2\,\mathrm{d}v. \tag{5.4}$$

结合 (5.2) 和 (5.4)，可得

$$\int Q(f,f)f_r\,\mathrm{d}v \le -c\|f_r\|_{L^p_n}^2 - ca^{1+\frac{2s}{d}}\|f_r\|_{L^1_\ell} + C\|f_r\|_{L^p_n}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}} + C\int_{\mathbb{R}^d}(f*_v|v|^\gamma)ff_r\,\mathrm{d}v \tag{5.5}$$

我们注意到 $\|f_r\|_{L^p_n}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}} \le c\|f_r\|_{L^p_n}^2 + c^{-1}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}}^2$。此外，由柯西–施瓦茨不等式 $\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}} \le \|f_r\|_{L^1}^{1/2}\|f_r\|_{L^1_\ell}^{1/2}$。因此 $\|f_r\|_{L^p_n}\|f_r\|_{L^1_{\ell/2}} \le c\|f_r\|_{L^p_n}^2 + CM_0\|f_r\|_{L^1_\ell}$。于是，只要 a 足够大，(5.5) 中的第三项就可以由前两项吸收。最后，我们将估计简化为

$$\int Q(f,f)f_r\,\mathrm{d}v \le -c\|f_r\|_{L^p_n}^2 - ca^{1+\frac{2s}{d}}\|f_r\|_{L^1_\ell} + C\int_{\mathbb{R}^d}(f*_v|v|^\gamma)ff_r\,\mathrm{d}v.$$

□

引理 5.1 给出的不等式右端包含两个负项和一个正项。为了证明我们的主定理，我们必须用负项来估计正项。接下来的几个引理给出了一些对此有用的上界。

对于接下来的引理，回忆 $f = f_b + f_r$，其中 $f_b(v) = \min(f(v), a)$，且 $f_r(v) = (f(v) - a)_+$。此外，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v)\,\mathrm{d}v \le M_0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d}|v|^2 f(v)\,\mathrm{d}v \le E_0. \tag{5.6}$$

下面两个引理相对标准，已在 [20] 中证明。为完整起见，我们在此列出。

引理 5. 2. 令 $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 满足 (5.6)。假设 $\gamma \in [0,2]$。那么，对任意 $v \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v-w)|w|^\gamma\,\mathrm{d}w \lesssim E_0 + \langle v\rangle^2 M_0.$$

证明。该引理由以下计算得出：

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(w)\,|v-w|^\gamma\,\mathrm{d}w \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f(w)\,(|v|^\gamma + |w|^\gamma)\,\mathrm{d}w \lesssim M_0\langle v\rangle^\gamma + E_0 \lesssim \langle v\rangle^\gamma.$$

□

引理 5.3. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 满足 (5.6)。假设 $\gamma \in (-d, 0]$。那么，对于任意 $v \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_b(v-w)|w|^\gamma\,\mathrm{d}w \le CM_0^{1+\gamma/d}a^{-\gamma/d}.$$

证明。对于任意 $R > 0$，我们将积分拆分为 $w \in B_R$ 与其余部分。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f_b(v-w)|w|^\gamma\,\mathrm{d}w &= \int_{B_R} f_b(v-w)|w|^\gamma\,\mathrm{d}w + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R} f_b(v-w)|w|^\gamma\,\mathrm{d}w\\ &\le a\int_{B_R}|w|^\gamma\mathrm{d}w + R^\gamma\|f_b\|_{L^1}\\ &\lesssim aR^{d+\gamma} + R^\gamma M_0\end{aligned}$$

我们通过选择 $R = (M_0/a)^{1/d}$ 完成证明。 □

引理 5.4. 设 $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 满足 (5.6)。设 $\gamma < 0$，并设 p 和 n 为引理 2.3 中的指数。那么，对于任意 $v \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w \le C\left(\|f_r\|_{L^p_n}^{-2\gamma/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1}^{1+2\gamma/(d+2s)}\langle v\rangle^m + \|f_r\|_{L^1}\right).$$

这里，C 是仅依赖于维数 d、s 和 γ 的常数，且 $m = 2\gamma n/(d+2s)$。

注意，$m \le 0$ 当 $n \ge 0$时。此外，我们始终有 $m \le 2s\ell/(d+2s)$。

证明。对于任意 $R \in (0,1)$，我们将积分拆分为 $w \in B_R$ 与其余部分。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w &= \int_{B_R} f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_R} f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w\\ &\le \|f_r\|_{L^p(B_R(v))}\||w|^\gamma\|_{L^{p'}(B_R)} + R^\gamma\|f_r\|_{L^1}\\ &\lesssim \langle v\rangle^{-n}\|f_r\|_{L^p_n}R^{\gamma+d/2+s} + R^\gamma\|f_r\|_{L^1}\end{aligned}$$

如果 $\|f_r\|_{L^1} \le \langle v\rangle^{-n}\|f_r\|_{L^p_n}$，我们取 $R^{d/2+s} = \langle v\rangle^n\|f_r\|_{L^1}/\|f_r\|_{L^p_n}$。否则，我们取 $R = 1$。在第一种情况下，我们得到

$$\int f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w \lesssim \|f_r\|_{L^p_n}^{-2\gamma/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1}^{1+2\gamma/(d+2s)}\langle v\rangle^{2\gamma n/(d+2s)}$$

在第二种情况下，我们得到

$$\int f_r(v-w)|w|^\gamma \,\mathrm{d}w \lesssim \|f_r\|_{L^1}.$$

无论哪种情况，我们都完成了证明。只需注意到 $-n < \ell/2$，便可根据 m 的表达式立即验证所指出的不等式，前提是 $\gamma + 2s \ge 0$。□

引理 5.5。设 $f_r\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$。令 $\ell = \gamma + 2s + 2s/d$ and n, p 为引理 2.3 的指数。那么，对任意 $q \in \mathbb{R}$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^q f_r^2 \,\mathrm{d}v \lesssim \|f_r\|_{L^p_n}^{2d/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_m}^{4s/(d+2s)},$$

其中 $m = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2s}(q-\gamma) - d + 1 + q\right)$。

特别地，对于 $q = \ell$，我们得到 $m = (\ell+2)/2$；对于 $q = 2s\ell/(d+2s)$，我们得到 $m \le (\ell+1)/2$；对于 $q = 0$，我们得到 $m = \frac{1}{2}\left(-\frac{d(\gamma+2s)}{2s} + 1\right) \le 1/2$。

证明。应用 Hölder 不等式，我们注意到

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^q f_r^2 \,\mathrm{d}v \le \left(\int\langle v\rangle^{np} f_r^p\right)^{\alpha_1/p}\left(\int\langle v\rangle^m f_r\right)^{\alpha_2},$$

前提是 $\alpha_1 \ge 0$ 和 $\alpha_2 \ge 0$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{p} + \alpha_2 &= 1,\\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 2,\\ \alpha_1 n + \alpha_2 m &= q.\end{aligned}$$

给定选择 $1/p = 1/2 - s/d$ 和 $n = (\gamma + 2s - 2s/d)/2$，只有一组 α_1、α_2 和 m 的选择能使上述三个恒等式成立。它们是

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2d}{d+2s},\\ \alpha_2 &= \frac{4s}{d+2s},\\ m &= \frac{1}{2}\left((q-\gamma-2s)\frac{d+2s}{2s} + \gamma + 2s + 1\right).\end{aligned}$$

□

引理 5.6. 设 $f_r\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$. 令 $\ell = \gamma + 2s + 2s/d$ and n, p 为引理 2.3 的指数。那么，对任意任意小的 $\varepsilon > 0$，存在一个（可能很大的）常数 $C(\varepsilon)$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\ell f_r^2 \,\mathrm{d}v \lesssim \varepsilon \|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)\|f_r\|_{L^1_\ell}\|f_r\|_{L^1_2}.$$

证明。根据引理 5.5，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\ell f_r^2 \,\mathrm{d}v \lesssim \|f_r\|_{L^p_n}^{2d/(d+2s)} \|f_r\|_{L^1_m}^{4s/(d+2s)},$$

其中 $m = \ell/2 + 1$。

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 C 使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\ell f_r^2 \,\mathrm{d}v \le \varepsilon \|f_r\|_{L^p_n}^2 + C\varepsilon^{-d/(2s)} \|f_r\|_{L^1_m}^2.$$

我们使用柯西–施瓦茨不等式，用 $\|f_r\|_{L^1_\ell}$估计 $\|f_r\|_{L^1_m}$。

$$\begin{aligned}\|f_r\|_{L^1_m} &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^m f_r(v)\,\mathrm{d}v \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\ell f_r(v)\,\mathrm{d}v\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{2m-\ell} f_r(v)\,\mathrm{d}v\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

回顾上面的 m 公式，我们注意到 $2m - \ell = 2$。因此，我们得出结论 e

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\ell f_r^2 \,\mathrm{d}v \le \varepsilon \|f_r\|_{L^p_n}^2 + C\varepsilon^{-d/(2s)} \|f_r\|_{L^1_\ell}\|f_r\|_{L^1_2}.$$

□

引理 5.7. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个（可能较大的）常数 $C(\varepsilon)$（也依赖于 M_0 和E_0），使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * |\cdot|^\gamma) f f_r \,\mathrm{d}v \le \varepsilon \|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon) a^{1+\gamma_-/d} \|f_r\|_{L^1_\ell}. \tag{5.7}$$

其中，当 $\gamma < 0$ 时 $\gamma_- = -\gamma$，当 $\gamma \ge 0$ 时 $\gamma_- = 0$。

证明。我们根据 $\gamma \ge 0$ 或 $\gamma < 0$ 是否成立，将证明分为两种情况。如果 $\gamma \ge 0$，则应用引理 5.2，得到 $f * |\cdot|^\gamma \lesssim \langle v\rangle^\gamma$。因此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f * |\cdot|^\gamma) f f_r \,\mathrm{d}v &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\gamma (a + f_r) f_r \,\mathrm{d}v \\ &\lesssim a\|f_r\|_{L^1_\gamma} + \int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\gamma f_r^2 \,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

我们利用 $\gamma < \ell$ 和引理 5.6，以及$\|f_r\|_{L^1_2} \le M_0 + E_0$。

$$\le \varepsilon \|f\|_{L^p_n}^2 + (a + C(\varepsilon)) \|f_r\|_{L^1_\ell}$$

并且我们完成了 $\gamma \ge 0$ 情形下的证明。

当 $\gamma < 0$ 时，我们记作 $f * |\cdot|^\gamma = f_b * |\cdot|^\gamma + f_r * |\cdot|^\gamma$。我们利用引理 5.3 估计第一项，并利用引理 5.4 估计第二项。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f * |\cdot|^\gamma) f f_r \,\mathrm{d}v \lesssim a^{-\gamma/d} &\int_{\mathbb{R}^d} (a + f_r) f_r \,\mathrm{d}v \\ &+ \|f_r\|_{L^p_n}^{-2\gamma/(d+2s)} \|f_r\|_{L^1}^{1+2\gamma/(d+2s)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^m (a + f_r) f_r \,\mathrm{d}v\right) \\ &+ \|f_r\|_{L^1_\ell} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (a + f_r) f_r \,\mathrm{d}v\right)\end{aligned}$$

我们利用 $m \le 2s\ell/(d+2s)$，以及引理 5.5 与 $q = 2s\ell/(d+2s)$ 和 $q = 0$。

$$\begin{aligned}
&\lesssim a^{1-\gamma/d}\|f_r\|_{L^1} + a^{-\gamma/d}\|f_r\|_{L^p_n}^{2d/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{1/2}}^{4s/(d+2s)} \\
&\quad + a\|f_r\|_{L^p_n}^{-2\gamma/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1}^{1+2\gamma/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_m} + \|f_r\|_{L^p_n}^{2(d-\gamma)/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1}^{1+2\gamma/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{(\ell+1)/2}}^{4s/(d+2s)} \\
&\quad + a\|f_r\|_{L^1}^2 + \|f_r\|_{L^1}\|f_r\|_{L^p_n}^{2d/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{1/2}}^{4s/(d+2s)} \\
&=: \text{(i)} + \text{(ii)} + \text{(iii)} + \text{(iv)} + \text{(v)} + \text{(vi)}.
\end{aligned}$$

我们必须分析这六项中的每一项。第一项显然由（5.7）中的第二项所界定。对于（ii），我们注意到两个指数均为正，且其和为二，因此

$$\text{(ii)} = a^{-\gamma/d}\|f_r\|_{L^p_n}^{2d/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{1/2}}^{4s/(d+2s)} \le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)a^{\frac{-\gamma(d+2s)}{2sd}}\|f_r\|_{L^1_{1/2}}^2$$

观察到 $1/2 < 1 + \ell/2$，并且 $\frac{-\gamma(d+2s)}{2sd} = -\gamma/(2s) - \gamma/d < 1 - \gamma/d$ 利用 $\gamma + 2s > 0$。

$$\le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)a^{1-\gamma/d}\|f_r\|_{L^1_{1+\ell/2}}^2 \le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)a^{1-\gamma/d}\|f_r\|_{L^1_2}\|f_r\|_{L^1_\ell}.$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $\|f_r\|_{L^1_{1+\ell/2}}^2 \le \|f_r\|_{L^1_2}\|f_r\|_{L^1_\ell}$，这由柯西–施瓦茨不等式推出。

(iii) 的分析与 (ii) 的分析非常相似。我们利用 $m < 1 + \ell/2$，以及这些指数为正数且总和为二这一事实。因此，

$$\text{(iii)} \le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)a^{\frac{d+2s}{d+\gamma+2s}}\|f_r\|_{L^1_{1+\ell/2}}^2$$

注意到 $(d+2s)/(d+2s+\gamma) = 1 - \gamma/(d+2s+\gamma) < 1 - \gamma/d$，因为 $\gamma + 2s > 0$。

$$\le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)a^{1-\gamma/d}\|f_r\|_{L^1_2}\|f_r\|_{L^1_\ell}.$$

对于最后一个不等式，我们像分析 (ii) 时一样使用了柯西–施瓦茨不等式。

为了分析 (iv)，注意到 $0 < (1+\ell)/2 \le 2$。因此

$$\text{(iv)} \le \|f_r\|_{L^p_n}^{2(d-\gamma)/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{(1+\ell)/2}}^{1+2(\gamma+2s)/(d+2s)} \le \|f_r\|_{L^p_n}^{2(d-\gamma)/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_{(1+\ell)/2}}^{2(\gamma+2s)/(d+2s)}\|f_r\|_{L^1_2}.$$

我们利用 $\|f_r\|_{L^1_2} \le M_0 + E_0$，其余指数的和为二，并且 $(1+\ell)/2 < 1 + \ell/2$ 以得到

$$\text{(iv)} \le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)\|f_r\|_{L^1_{1+\ell/2}}^2 \le \varepsilon\|f_r\|_{L^p_n}^2 + C(\varepsilon)\|f_r\|_{L^1_2}\|f_r\|_{L^1_\ell}.$$

对于 (v)，我们注意到 (v) $\le aM_0\|f_r\|_{L^1_\ell}$。最后，(vi) 的分析与 (iv) 的分析非常相似（但更简单）。

回想起 $\|f\|_{L^1_2} \le M_0 + E_0$，我们得出结论：只要 $C(\varepsilon)$ 和 a 足够大，且依赖于 d、γ、s、M_0 和 E_0，每一项都由 (5.7) 的右端控制。□

注 5.1. 阅读引理 5.7 的证明后可以看出，在计算不等式权重中 $\langle v\rangle$ 的指数时，似乎还有很大的改进空间。考虑到定理 1.1 中我们给出的 L^∞ 界并非旨在捕捉 $|v| \to \infty$ 时的尖锐渐近行为，这并不令人意外。事实上，根据 [12], ，我们预期 $f(t,x,v) \le a(t)\langle v\rangle^{-q}$，其中某个指数为 $q > 0$。

引理 5.8. 设 $a(t) = C\left(1 + t^{-\frac{d}{2s}}\right)$ 如定理 1.1 中所述，且 $m(t)$ 由公式 (4.9) 给出。则 $m(t)$ 关于 t 单调递减。

证明. 我们指出，根据推论 4.9.1，$m(t)$ 几乎处处等于一个右连续且有左极限的函数。这正是我们要证明其单调递减的代表元。

由引理 4.9 可得，对于几乎处处的 $t_1 < t_2$，

$$m(t_2) - m(t_1) \le 2\iiint_{(t_1,t_2)\times\Omega\times\mathbb{R}^d}\{f_r\,Q(f,f) - a'(t)f_r\}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

利用引理 5.1、5.7 以及 $-a' \le C^{-2s/d} a^{1+2s/d}$ 这一事实，当 C 足够大时，我们还有 $a(t) \ge C$，并且

$$\lesssim \iint_{(t_1,t_2)\times\Omega} \left\{ -c\,\|f_r\|_{L^p_n}^2 - c\,a^{1+2s/d}\|f_r\|_{L^1_\ell} \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le 0.$$

□

定理 1.1 的证明。我们打算证明 $m(t) \equiv 0$，由此可得对所有 $t > 0$，$\|f(t)\|_{L^\infty_{x,v}} \le a(t)$。

注意，$f \in L^2_{t,x,v} N^s_{x,v} \gamma$意味着对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}_+$，$f(t) \in L^2_{x,v}$。因此，对任意 $\delta > 0$，存在 $t_0 \in (0,\delta)$ 使得 $f(t_0) \in L^2_{x,v}$。对任意 $t_1 \in (0, t_0)$，记

$$m_{t_1}(t) := \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^d} \left(f(t,x,v) - a(t-t_1)\right)_+^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

$m_{t_1}(t)$ 可以看作是 $m(t)$ 的平移版本，它从 t_1 而非 0 开始。引理 5.8 同样适用于 m_{t_1}，因此我们可得 $m_{t_1}(t)$ 在 $t \in (t_1, \infty)$ 上单调递减。

由于 $\lim_{t\to 0} a(t) = \infty$，我们有

$$\lim_{t_1 \to t_0} m_{t_1}(t_0) = 0.$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $t_1 \in (0, t_0)$，使得 $m_{t_1}(t_0) < \varepsilon$。

注意，我们可以选择 $0 < t_1 < t_0$ 作为 f 的正则点，这里正则点是指关于函数 $f\colon (0,T) \to L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ 满足勒贝格微分意义下的正则性。如此一来，$m(t_1)$ 和 $m(t_2)$ 的相应取值可直接由 (4.9) 给出，无需对 f 或 m 在零测集上作任何修改。

根据 $a(t)$ 和 $m_{t_1}(t)$ 的单调性，对于所有 $t \in (t_0, \infty)$，我们有 $m_{t_0}(t) \le m_{t_1}(t) \le m_{t_1}(t_0) < \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，对于所有 $t \in (t_0, \infty)$，我们有 $m_{t_0}(t) = 0$。最后，由于 $\delta > 0$ 的任意性，对于所有 $(0,\infty)$ 中的 $t \in$，我们有 $m(t) = 0$。

事实是 $m(t \quad) \equiv 0$ 意味着 $f(t,x,v) \le a(t)$ 几乎处处成立，这就是定理 1.1 的结论。 □

References

[1] Dallas Albritton、Scott Armstrong、J-C Mourrat 和 Matthew Novack。动理学福克-普朗克方程的变分方法。 *arXiv preprint arXiv:1902.04037*，2019。[2] R. Alexandre 和 C. Villani。论长程相互作用下的玻尔兹曼方程。 *Comm. Pure Appl. Math.*，55(1):30– 70，2002。[3] Luis Caffarelli、Chi Hin Chan 和 Alexis Vasseur。抛物型非线性积分算子的正则性理论。 *J. Amer. Math. Soc.* 24 3 849 869, 2011 , ( ): – 。[4] Stephen Cameron 、 Luis Silvestre 和 Stanley Snelson。具有中等软势的非均匀兰道方程的全局先验估计。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*，35(3):625–642，2018。[5] Stephen Cameron 和 Stanley Snelson。硬势玻尔兹曼方程的速度衰减估计。 *Nonlinearity*，33 6 2941( ): –2958，2020。[6] Jamil Chaker 和 Luis Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的熵耗散估计。 *arXiv preprint arXiv:2208.03546* 2022 , 。

[7] Fran.cois Golse、Cyril Imbert、Cl´ement Mouhot 和 Alexis F. Vasseur。粗糙系数动理学福克-普朗克方程的哈纳克不等式及其在兰道方程中的应用。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，19 1 253( ): –295，2019。[8] Philip T. Gressman 和 Robert M. Strain。玻尔兹曼碰撞算子及其熵产生的尖锐各向异性估计。 *Adv. Math.*，227(6):2349–2384，2011。[9] Christopher Henderson 和 Stanley Snelson。 C^∞ 非均匀兰道方程弱解的平滑性。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，236(1):113–143，2020。[10] Christopher Henderson、Stanley Snelson 和 Andrei Tarfulea。兰道方程的局部存在性、质量下界及新的延拓判据。 *J. Differential Equations*，266(2-3):1536–1577，2019。[11] Christopher Henderson、Stanley Snelson 和 Andrei Tarfulea。玻尔兹曼方程的自生成下界与延拓。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，59(6):论文编号 191，13，2020。[12] Cyril I mbert、Cl´ement Mouhot 和 Luis Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的大速度衰减估计。 *J. Éc. polytech. Math.*，7:143–184，2020。[13] Cyril Imbert、Cl´ement Mouhot 和 Luis Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的高斯下界。*SIAM J. Math. Anal.*，52(3):2930–2944，2020。[14] Cyril Imbert 和 Luis Silvestre。基于宏观界的玻尔兹曼方程正则性。 *EMS Surv. Math. Sci.* 7 1 117 172, 2020 , ( ): – 。[15] Cyril Imbert 和 Luis Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的弱哈纳克不等式。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 22 2 507 592, 2020 , ( ): – 。[16] Cyril Imbert 和 Luis Silvestre。动理学积分方程的 Schauder 估计。 *Anal. PDE*，14(1):171–204，2021。

[17] Cyril Imbert 和 Luis Enrique Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的全局正则性估计。

J. Amer. , ( ): *Math. Soc.* 35 3 625 703, 2022
– 。[18] Luis Silvestre。论具有临界分数阶扩散的哈密顿 - 雅可比方程解的可微性。*Adv. Math.*，226(2):2020–2039，2011。[19] Luis Silvestre。抛物型积分微分方程的正则性估计及其应用。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III* 873 894 2014 ，第 – 页。Kyung Moon Sa，首尔，。[20] Luis Silvestre。无截断玻尔兹曼方程的一种新正则化机制。 *Comm. Math. Phys.*，348(1):69–100，2016。[21] Luis Silvestre。动理学福克 - 普朗克方程在边界处的 H¨older 估计。 *Ars Inven. Anal.*，第 6 号论文，29 页，2022。[22] Luis Silvestre 和 Stanley Snelson。麦克斯韦分布附近一致成立的无截断玻尔兹曼方程解。

Math. , ( ): *Eng.* 5 2 034, 36, 2023
论文编号 。[23] Stanley Snelson。硬势非均匀兰道方程的高斯界。 *SIAM J. Math. Anal.*，52 2 2081( ): –2097，2020。[24] Yuzhe Zhu。有界区域内动理学福克-普朗克方程的正则性。 *arXiv preprint arXiv:2206.04536*，2022。
（Luis Silvestre） Department of Mathematics University of Chicago Chicago Illinois 60637 USA*Email address*: luis@math.uchicago.edu（欧阳志萌） Department of Mathematics University of Chicago Chicago Illinois 60637 USA *Email address*: ouyangzm9386@uchicago.edu