arXiv:2305.02399v1 [math.AP] 3 May 2023

分数幂方法：一类三阶抽象柯西问题的极大增生算子方法

MOHAMMED BENHARRAT 和 FLANK D. M. BEZERRA

Abstract. 本文探讨极大增生算子的分数次幂理论，以获得关于时间三阶线性抽象演化方程解的存在性、正则性及渐近行为的结果。

2010年数学主题分类：34A08；47D06；47D03 关键词和短语：增生算子；；解析半群；分数幂；三阶线性演化方程；强连续半群。

Contents

图目录 1
1. 引言与预备知识 2 2. 线性化算子及其分数幂 4 2.1. 算子的谱性质
$\mathbb{A}$ 52.2. 线性化算子的分数次幂 8 3. 与线性化算子分数次幂相关的三阶柯西问题 14 参考文献 16

List of Figures

1 $\mathbb{A}$ 8 的谱的位置 2 $\mathbb{A}^{\alpha^*}$ 的谱的位置。13 3 当 $0 < \alpha < \alpha^*$ 时， $\mathbb{A}^{\alpha}$ 的谱的位置。14

日期：2023年5月5日 第一作者谨此感谢奥兰基础与应用数学实验室（LMFAO）以及阿尔及利亚研究项目 PRFU（编号：C00L03ES310120220003，D.G.R.S.D.T）提供的经费支持。第二作者谨此感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq/Brazil）项目（编号：303039/2021-3）提供的经费支持。

1. Introduction and preliminaries

本文中 per 我们考虑以下三阶抽象线性演化方程,

$$u'''(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

初始条件由下式给出

$$u(0) = u_0 \in \mathcal{H}^{\frac{2}{3}},\ u''(0) = u_1 \in \mathcal{H}^{\frac{1}{3}},\ u'''(0) = u_2 \in \mathcal{H}, \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是可分希尔伯特空间, A: $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是一个极大 ω-增生算子, $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$。这里 $u'(t) = \frac{du}{dt}(t)$.

本文探讨极大增生算子的分数幂理论，以获得关于方程 (1.1)-(1.2) 的解的存在性、正则性和渐近行为的结果。

为了更好地呈现本文的结果，我们先介绍一些记号和术语。回顾一下，算子 A （其定义域为 $\mathcal{D}(A)$ ，作用于 $\mathcal{H}$）的数值域定义为

$$W(A) := \{\langle Au, u\rangle_{\mathcal{H}} : \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad \|u\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

如果算子 A 的数值域包含于闭右半平面 $\overline{\mathbb{C}_+} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}$，则称其为增生算子；若它在 $\mathcal{H}$中没有真增生扩张，则称 A 为极大增生算子，简称 m-增生算子。众所周知（参见 [16]），闭的极大增生算子是稠密定义的； A 是闭的且 m-增生，当且仅当 A^* 如此；这也等价于 $-A$ 是压缩半群 $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元，即 $\|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant 1$[1]; 如果 A 是增生算子，则称其为耗散算子。对于 $\omega \in [0、\ \pi/2)$,, 我们记

$$\mathcal{S}(\omega) := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \omega\},$$

$\mathbb{C}$ 的开扇形，半角为 ω。若算子 A满足.....，则称其为 ω-增生的。

$$W(A) \subset \overline{\mathcal{S}(\omega)} := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leqslant \omega\},$$

或者，等价地,

$$|\mathrm{Im}\left(\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{H}}\right)| \leqslant \tan(\omega)\,\mathrm{Re}\left(\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{H}}\right), \quad \text{for all } x \in \mathcal{D}(A).$$

若 ω-增生算子 A是 m-增生的，则称其为 m-ω-增生。我们有： A 是 m-ω-增生的，当且仅当算子 $e^{\pm i\theta}A$ 对于 $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$, $0 < \omega \leqslant \pi/2$ 是 m-增生的。若 $\omega = \pi/2$, ，则有 $\overline{\mathcal{S}(\pi/2)} = \overline{\mathbb{C}_+}$ ，且 m-$\pi/2$-增生性意味着 m-增生性。此外，m-0-增生算子是非负自伴算子。

m-ω-增生算子 A 的预解集包含集合 $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{S}(\omega)}$ 和

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant \frac{1}{\mathrm{dist}\,(\lambda, \mathcal{S}(\omega))}, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{S}(\omega)}.$$

[1]这里， $\mathcal{B}(E)$ 表示从 Banach 空间 E 映射到自身的有界线性算子空间，并赋予范数

$$\|S\|_{\mathcal{B}(E)} := \sup_{x\in E,\ x\neq 0} \frac{\|Sx\|_E}{\|x\|_E},\ \forall S \in \mathcal{B}(E).$$

因此，m-ω-增生算子 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$, 的数值域具有所谓的谱包含性质,

$$\sigma(A) \subset \overline{W(A)} \subset \overline{\mathcal{S}(\omega)}. \tag{1.3}$$

众所周知，若 A 是 m-ω-增生的， $0 \leqslant \omega < \pi/2$, 则它生成收缩$C_0$-半群 $\mathcal{T}(t) = e^{-tA}$, $t \geqslant 0$, 并且可全纯延拓至扇形$\overline{\mathcal{S}(\pi/2-\omega)}$, 。参见 [15] 中的定理 IX-1.24。在这种情况下，对所有$z \in \overline{\mathcal{S}(\pi/2-\omega)}$, 我们可以写作 $\mathcal{T}(z) = e^{-zA}$; 此外，还有

$$\left\|e^{-zA}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant 1, \quad z \in \overline{\mathcal{S}(\pi/2-\omega)}.$$

设 A 是 m-增生的，且 $\alpha \in (0,1)$ 为一个数；则算子 A 的分数次幂有几种等价定义。下面给出其中一种：算子 A^α 是算子.....的闭包，其 $\mathcal{D}(A)$为.....

$$A^\alpha = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(I\lambda + A)^{-1} dt, \tag{1.4}$$

参见 [3]。算子 A^α 是 m-$(\alpha\pi/2)$-增生的，并且对所有 $x \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$, $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x$, 其中 $\beta > 0$ 且 $\alpha + \beta < 1$。分数幂具有重要的乘法性质

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$$

当 $0 < \alpha < 1$和 $\beta > 0$, [18, 定理 4.2]。若 $\alpha \in (0, 1/2),$, 则 $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{D}(A^{*\alpha})$ 在拓扑意义下成立，其中定义域配备相应的图范数，参见 [16]。多位作者已为 Banach 空间中更一般的一类线性算子定义了此类分数次幂（参见 Amann [2], Balakrishnan[3],Hasse [13] 和 Martinez [18]）。

记 $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ 为 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ （当 $\alpha = 0$时，取 $A^0 := I$ 在 $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}$ 上）。回忆一下，对于所有 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{H}^\alpha$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密；详情参见 Amann [2, 定理 4.6.5]。分数次幂空间 $\mathcal{H}^\alpha$ 配备范数

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\alpha} := \|A^\alpha \cdot\|_{\mathcal{H}}$$

是一个 Banach 空间。采用此记号，对于所有 $\alpha > 0$, 我们有 $\mathcal{H}^{-\alpha} = (\mathcal{H}^\alpha)'$, 参见 Amann [2],Sobolevskiĭ [22]和 Triebel [24] 关于负尺度的刻画。

自然地，我们可以将 (1.1)-(1.2) 转化为一阶柯西问题。然而，线性化算子矩阵一般并非闭算子。即使它是闭的，除非满足非常严格的条件，否则也不能生成强连续半群。这促使我们寻找一个合适的相空间来改变这一不利局面。基本思路是计算线性化算子的 $\alpha \in (0, 1)$ 阶分数幂，并探究对于哪些 $\alpha \in [0,1]$, 分数阶一阶系统在某种意义下是适定的。对于这样的 α, 我们给出以下相关时间三阶演化方程解的显式表示公式,

$$u'''(t) + 3\Upsilon_0^\alpha A^{\frac{\alpha}{3}} u''(t) + 3\Upsilon_0^\alpha A^{\frac{2\alpha}{3}} u''(t) + A^\alpha u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.5}$$

其初始条件为

$$u(0) = \varphi \in \mathcal{H}^{\frac{2}{3}},\ u'(0) = \psi \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}},\ u''(0) = \xi \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}}, \tag{1.6}$$

其中 $\Upsilon_0^\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi\alpha}{3} + 1$、$0 < \alpha < \alpha^*$ 和 $\alpha^* = \dfrac{3\pi}{4\pi + 2\omega}$。

分数幂方法研究了与演化方程相关的柯西问题中的算子，在某些情形下，考察了这些问题解的存在性、正则性和渐近行为，参见例如 $[4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 25]$，及其中的参考文献。

我们扩展了 $[8]$, 中的工作，其中 A 被假设为自伴正定算子（$\omega = 0$）。他们证明，对于所有 $0 < \alpha < \frac{3}{4}$，(1.5)-(1.6) 存在唯一解，但未明确给出。这意味着当 $\omega = 0$ 时，$\alpha^* = \frac{3}{4}$。迄今为止，这一思路向一般情形的推广仍不明显。此外，一些连续介质力学模型可化为含扇形算子的微分方程，参见 $[1, 23]$ 及其中的参考文献。在这些情况下，针对自伴算子发展的方法无法应用。本文将继续分析前述文献中的问题。

我们的主要结果摘要及论文结构如下。第 2 节中，我们在适当的相空间内定义与柯西问题 (1.1)-(1.2) 相关的线性化算子，记为 $\mathbb{A}$。我们研究 $\mathbb{A}$ 的谱性质。我们证明，$\mathbb{A}$ 不能生成任何类型的强连续半群，但它是非负型算子（不一定是增生算子）。此外，依据 Balakrishnan 公式（见 $[3],$），我们显式计算算子 $\mathbb{A}$ 的分数幂，其中 $0 < \alpha < 1$, 并研究分数次幂算子 $\mathbb{A}^\alpha$ 的谱性质。更确切地说，我们确定 $(0、1)$ 的最大子区间，在该区间内取 α，使得 $-\mathbb{A}^\alpha$ 是生成元；也就是说，当且仅当 $0 < \alpha < \alpha^*$ 且 $\alpha^* = \dfrac{3\pi}{4\pi + 2\omega}$ 时，$-\mathbb{A}^\alpha$ 生成强连续解析半群；当 $\alpha^* = \dfrac{3\pi}{4\pi + 2\omega}$ 时，它生成强连续半群。最后，第 3 节给出与分数阶算子 $\mathbb{A}^\alpha$ 相关的分数阶偏微分方程 (1.5)-(1.6) 的存在唯一性结果，并给出三阶柯西问题 (1.5)-(1.6) 解的显式表示公式。

2. The linearized operator and its fractional powers

假设 A 是一个 m-ω-增生算子，$0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$。考虑以下相空间

$$X = \mathcal{H}^{\frac{2}{3}} \times \mathcal{H}^{\frac{1}{3}} \times \mathcal{H}$$

这是一个配备如下范数的 Banach 空间

$$\|\cdot\|_X^2 = \|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}}^2 + \|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}}^2 + \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2.$$

令 $v=\frac{du}{dt}$、 $w=\frac{d^2u}{dt^2}$，我们可以将问题 (1.1)-(1.2) 写成 X 上的柯西问题,

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+\mathbb{A}\mathbf{u}=0,\ t>0,\\ \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中无界线性算子 $\mathbb{A}:\ \mathcal{D}(\mathbb{A})\subset X\to X$ 定义如下:

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}0 & -I & 0\\ 0 & 0 & -I\\ A & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{2.2}$$

and

$$\mathcal{D}(\mathbb{A})=\mathcal{H}^1\times\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}\times\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}.\tag{2.3}$$

Here

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

注 2.1. 我们注意到， $\mathbb{A}$ 不是 X 上的增生算子。事实上，若 u 是 $\mathcal{D}(A)$ 中的一个非零元素，并且

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\ 0\\ -u\end{bmatrix}$$

then

$$\mathrm{Re}\left\langle\mathbb{A}\mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle_X=\left\langle\begin{bmatrix}0\\ -u\\ Au\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u\\ 0\\ -u\end{bmatrix}\right\rangle_X=-\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle_{\mathcal{H}}<0.$$

具体而言，这意味着 $-\mathbb{A}$ 不是 Y 上强连续压缩半群的无穷小生成元。更确切地说，我们稍后将在注 2.3 中看到， $-\mathbb{A}$ 不可能是 X 上任何类型的强连续半群的无穷小生成元。

2.1. 算子 $\mathbb{A}$ 的谱性质。

引理 2.2. 假设 A 是 m-ω-增生算子， $0\leqslant\omega\leqslant\pi/2$。那么 $\mathbb{A}$ 是闭稠定算子，且 $\mathbb{A}$ 的谱由下式给出:

$$\sigma(\mathbb{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda^3\in\sigma(A)\}.\tag{2.4}$$

证明。首先，我们证明算子 $\mathbb{A}$ 是闭的。事实上，若 $\mathbf{u}_n=\begin{bmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{bmatrix}\in\mathcal{D}(\mathbb{A})$ 满足 $\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$ 在 X 中依 $n\to\infty$收敛，且 $\mathbb{A}\mathbf{u}_n\to\varphi$ 在 X 中依 $n\to\infty$收敛，其中 $\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}$，则

$$\begin{cases}v_n\to-\varphi_1\ \text{ in }\ \mathcal{H}^{\frac{2}{3}}\\ w_n\to-\varphi_2\ \text{in}\ \ \mathcal{H}^{\frac{1}{3}}\\ Au_n\to\varphi_3\quad\text{in}\ \ \mathcal{H}\ \text{as}\ n\to\infty\end{cases}$$

因此， $v=-\varphi_1\in\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}$、 $w=-\varphi_2\in\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}$。最后，利用 A是闭算子这一事实，我们有 $u\in\mathcal{D}(A)$ 和 $Au=\varphi_3$; 也就是说， $\mathbf{u}\in\mathcal{D}(\mathbb{A})$ 且 $\mathbb{A}\mathbf{u}=\varphi$。

其次，由于当 $\alpha > \beta \geqslant 0$时，包含关系 $\mathcal{H}^\alpha \subset \mathcal{H}^\beta$ 是稠密的，因此我们得出$\mathcal{D}(\mathbb{A})$在 X中是稠密的。

最后，为了证明 (2.4)，只需证明 $\mathbb{A}$ 的预解集由以下形式给出。 y

$$\rho(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^3 \in \rho(A)\}.$$

假设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $\lambda^3 \in \rho(A)$。我们声称 $\lambda \in \rho(\mathbb{A})$。事实上，由于 $-\mathbb{A}$ 是闭算子，我们只需证明 that。

$$\lambda I - \mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset X \to X$$

是双射的。我们有

$$\lambda I - \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \\ 0 & \lambda I & I \\ -A & 0 & \lambda I \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

对于单射性，考虑 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in D(\mathbb{A})$ 和 $(\lambda I - \mathbb{A})\mathbf{u} = 0$，则

$$\begin{cases} \lambda u + v = 0, \\ \lambda v + w = 0, \\ -Au + \lambda w = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

由（2.6）可得

$$(\lambda^3 I - A)u = 0. \tag{2.7}$$

由于 $\lambda^3 \in \rho(A)$，我们得出 $u = 0$，因此 $\mathbf{u} = 0$。

为证明满射性，给定 $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \in X$，我们取 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$，使得 $(\lambda I - \mathbb{A})\mathbf{u} = \varphi$，即

$$\begin{cases} \lambda u + v = \varphi_1, \\ \lambda v + w = \varphi_2, \\ -Au + \lambda w = \varphi_3. \end{cases}$$

由于 $\lambda^3 \in \rho(A)$，通过直接计算，我们得到

$$\begin{cases} u = \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_1 - \lambda(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_2 + (\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_3, \\ v = -A(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_1 + \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_2 - \lambda(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_3, \\ w = \lambda A(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_1 - A(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_2 + \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1}\varphi_3. \end{cases}$$

此外，$u \in \mathcal{D}(A)$，$v \in \mathcal{D}(A^{\frac{2}{3}})$且 $w \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{3}})$。于是我们有 $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$，并且

$$(\lambda I - \mathbb{A})\mathbf{u} = \varphi.$$

现在假设 $\lambda \in \rho(\mathbb{A})$。如果 $u \in D(A)$ 满足 $(\lambda^3 I - A)u = 0$，取 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$，我们有

$$(\lambda I - \mathbb{A})\mathbf{u} = 0. \tag{2.8}$$

由于 $\lambda \in \rho(\mathbb{A})$, 可得 $\mathbf{u} = 0$, 进而 $u = 0$, 这证明了 $\lambda^3 I - A$ 的单射性。给定 $f \in \mathcal{H}$, 考虑 $\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \in X$。由 $\lambda I - \mathbb{A}$ 的满射性, 存在 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$, 使得

$$(\lambda I - \mathbb{A})\mathbf{u} = \varphi \tag{2.9}$$

由此得到

$$(\lambda^3 I - A)u = f$$

证明至此完成。 □

注 2.3. 设 A 是 m-ω-增生算子, $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$。下面给出引理 2.2 及其证明的一些有趣推论,

(1) $\mathbb{A}$ 的预解集为

$$\rho(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^3 \in \rho(A)\}, \tag{2.10}$$

and

$$(\lambda I - \mathbb{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1} & -\lambda(\lambda^3 I - A)^{-1} & (\lambda^3 I - A)^{-1} \\ -A(\lambda^3 I - A)^{-1} & \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1} & -\lambda(\lambda^3 I - A)^{-1} \\ \lambda A(\lambda^3 I - A)^{-1} & -A(\lambda^3 I - A)^{-1} & \lambda^2(\lambda^3 I - A)^{-1} \end{bmatrix}$$

对所有 $\lambda \in \rho(\mathbb{A})$ 均成立。

(2) 由 (2.10), 我们有

$$(-\infty, 0) \subset \rho(\mathbb{A}).$$

(3) 对于每个 $r \geqslant 0$, 我们有,

$$re^{i\theta} \in \sigma(A) \Longleftrightarrow r^{1/3}e^{i\frac{\theta}{3}}, r^{1/3}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}}, r^{1/3}e^{i\frac{\theta-2\pi}{3}} \in \sigma(\mathbb{A}).$$

因此, 我们可以看出, $\mathbb{A}$ 的谱是由可能互不相交的三个闭集部分 Λ_1、 Λ_2 和 Λ_3 的并集构成的, 其中

$$\Lambda_1 \subset \overline{\mathcal{S}(\omega/3)}, \qquad \Lambda_2 \subset e^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\omega/3)}, \qquad \textit{and} \qquad \Lambda_3 \subset e^{-i\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\omega/3)}.$$

因此,

$$\mathcal{S}(\pi-\omega/3)\cup\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} - \omega/3 < \arg(\lambda) < \frac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{\lambda \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{2} - \omega/3\right\} \subset \rho(\mathbb{A}).$$

见下图。

(4) 显然,

$$0 \in \rho(A) \Longleftrightarrow 0 \in \rho(\mathbb{A}),$$

在这种情况下, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Lambda_3 = \varnothing$ 和 $\sigma(\mathbb{A}) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$.

(5) 若 A 是一个具有紧预解式的自伴算子, 则 $-\mathbb{A}$ 不可能是 X上强连续半群的无穷小生成元。事实上, 若 $-\mathbb{A}$ 生成一个强连续半群, 则由 Pazy [21, 定理 1.2.2] 可知, 存在常数 $\omega \geqslant 0$ 使得

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(-\mathbb{A}). \tag{2.11}$$

但是，我们有

$$\sigma_p(-\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^3 \in \sigma_p(-A)\},$$

其中， $\sigma_p(-\mathbb{A})$ 和 $\sigma_p(-A)$ 分别表示 $-\mathbb{A}$ 和 $-A$的点谱集。由于 $\sigma_p(-A) = \{-\mu_j : j \in \mathbb{N}\}$ ，且对每个 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $\mu_j \in \sigma_p(A)$ ，并且 $\mu_j \to \infty$ 为 $j \to \infty$，因此我们得出

$$\sigma_p(-\mathbb{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \neq \varnothing$$

见图 1。这与方程 (2.11) 矛盾，因此 $-\mathbb{A}$ 不可能是 X上强连续半群的无穷小生成元。

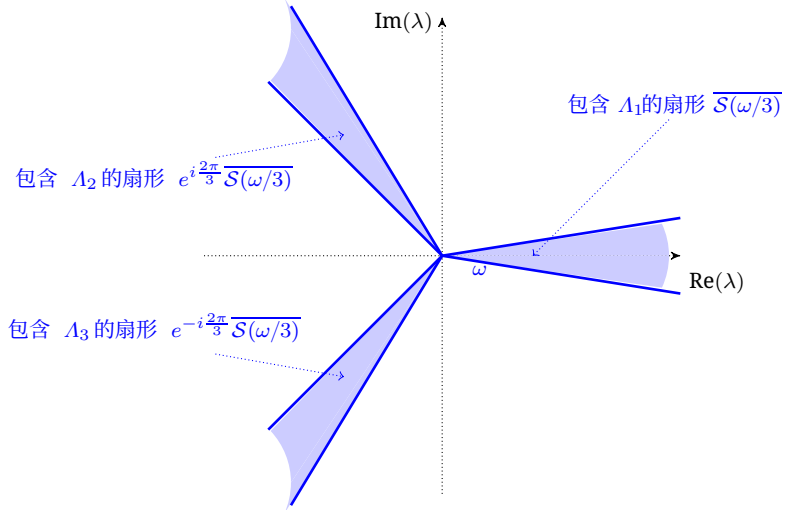

FIGURE 1. $\mathbb{A}$ 的谱位置

2.2. 线性化算子的分数幂。设 $\mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset X \to X$ 是在 (2.2)-(2.3) 中定义的无界线性算子。本节证明，根据 [19, 定义 1.1.1] 的含义， $\mathbb{A}$ 是一个非负型算子。这些算子可以定义分数次幂，更多详情参见 Pazy [21, 第 2.2 节6] 和 Amann [2,第 3.4 节6]。

引理 2.4. 假设 A 是 m-ω-增生算子， $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$。那么， $\mathbb{A}$ 是闭的、稠密定义的， $(-\infty 0) \subset \rho(\mathbb{A})$，并且存在一个正数常量 M，使得

$$\|(\lambda I + \mathbb{A})^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{M}{\lambda}, \ for\ all\ \lambda > 0. \tag{2.12}$$

证明。根据 引理 2.2，算子 $\mathbb{A}$ 是闭且稠密定义的，并且 $(-\infty, 0) \subset \rho(\mathbb{A})$. 对于 $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$，若 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ 属于 X，且对任意 $\lambda > 0$，我们有 $\mathbf{u} = (\lambda I + \mathbb{A})^{-1}\varphi$，当且仅当

$$\begin{cases} u = \lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1 + \lambda(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2 + (\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3, \\ v = -A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1 + \lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2 + \lambda(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3, \\ w = -\lambda A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1 - A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2 + \lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3. \end{cases}$$

为了验证 $\mathbb{A}$ 的方程 (2.12)，只需证明：对于 $\|\varphi\|_X \leqslant 1$，存在一个常数 $M_{\mathbb{A}} > 0$，使得

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \|v\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \|w\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{M_{\mathbb{A}}}{\lambda}. \tag{2.13}$$

我们首先注意到

$$A(\lambda^3 I + A)^{-1} = I - \lambda^3(\lambda^3 I + A)^{-1}.$$

这一点以及 A 是 m-增生的这一事实和 $\lambda^3 \in \rho(A)$,

$$\|A(\lambda^3 I + A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant 1 + \|\lambda^3(\lambda^3 I + A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant 2.$$

现在，对于 $x \in \mathcal{H}$，由 [21, 定理 6.10] 中的不等式可得

$$\begin{aligned}\|A^\alpha(\lambda^3 I + A)^{-1}x\|_{\mathcal{H}} &\leqslant C\|(\lambda^3 I + A)^{-1}x\|_{\mathcal{H}}^{1-\alpha}\|A(\lambda^3 I + A)^{-1}x\|_{\mathcal{H}}^{\alpha} \\ &\leqslant \frac{2^\alpha C}{\lambda^{3(1-\alpha)}}\|x\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

对某个 $C > 0$成立。因此,

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} &\leqslant \left\|\lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \left\|\lambda(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \left\|(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\|\varphi_1\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \frac{2^{1/3}C}{\lambda}\|\varphi_2\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \frac{2^{2/3}C}{\lambda}\|\varphi_3\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \max\left\{1, 2^{1/3}C, 2^{2/3}C\right\}\frac{1}{\lambda},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} &\leqslant \left\|A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \left\|\lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \lambda\left\|(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3\right\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} \\ &\leqslant \frac{2^{2/3}C}{\lambda}\|\varphi_1\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\lambda}\|\varphi_2\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \frac{2^{1/3}C}{\lambda}\|\varphi_3\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \max\left\{1, 2^{1/3}C, 2^{2/3}C\right\}\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|w\|_{\mathcal{H}} &\leqslant \left\|\lambda A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_1\right\|_{\mathcal{H}} + \left\|A(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_2\right\|_{\mathcal{H}} + \left\|\lambda^2(\lambda^3 I + A)^{-1}\varphi_3\right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \frac{2^{1/3}C}{\lambda}\|\varphi_1\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \frac{2^{2/3}C}{\lambda}\|\varphi_2\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{\lambda}\|\varphi_3\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \max\left\{1, 2^{1/3}C, 2^{2/3}C\right\}\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

因此,

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}} + \|v\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{3}}} + \|w\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{M_{\mathbb{A}}}{\lambda},$$

其中 $M_{\mathbb{A}} = 3$ 最大 1，$2^{1/3}C, 2^{2/3}C\}$。 □

根据引理 2.4 和 [19, 定义 1.1.1]，的术语，算子 $\mathbb{A}$ 属于非负型，另见 [20,P. 686]。作为该定义的一个特例，我们可以看出，算子是 m-增生的，当且仅当它属于非负型且其非负常数等于 1，见 [19, 定理 1.3.3]。

现在，若我们假设 fuhrer，$0 \in \rho(A)$，则存在 $0 < \varepsilon \leqslant 1$ 使得

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{H}} \geqslant \varepsilon \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for all } x \in \mathcal{D}(A).$$

此外，对于每个 $\mu \geqslant 0$，我们有

$$(\mu+\varepsilon)\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \mathrm{Re}\langle(\mu+A)x, x\rangle_{\mathcal{H}} \geqslant \|(\mu+A)x\|_{\mathcal{H}}\|x\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for all } x \in \mathcal{D}(A).$$

推出，

$$\|(\mu+A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant \frac{1}{\mu+\varepsilon}.$$

因此，

$$\|(\mu+A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant \frac{1}{\mu+1}, \text{ for all } \mu \geqslant 0.$$

利用这个最后的不等式，引理 2.4 可表述如下

推论 2.5. 假设 A 是 m-ω-增生算子，$0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 且 $0 \in \rho(A)$。那么，$\mathbb{A}$ 是闭的、稠密定义的，$(-\infty,\ 0] \subset \rho(\mathbb{A})$，并且存在一个正数常量 K，使得

$$\|(\lambda I + \mathbb{A})^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{K}{\lambda+1}, \ \textit{for all } \lambda \geqslant 0. \tag{2.14}$$

称算子 $\mathbb{A}$ 为正型算子；见 [19, 定义 1.1。2] 和 [19, 命题 1.1。1]。此外，有界可逆的 m-增生算子是正型算子。

众所周知，指数衰减的强连续半群的生成元是正型算子，参见 Amann [2, 第 156] 页。然而，正型算子也可能无法生成任何类型的半群，参见注 2.3-(5)。

定理 2.6。设 A 为 m-ω-增生算子，$0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 且 $0 \in \rho(A)$。则对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，可按如下方式定义 $\mathbb{A}$ 的分数幂 $\mathbb{A}^\alpha$ $\mathbb{A}^\alpha$： $D(\mathbb{A}^\alpha) \subset X \to X$，

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}^\alpha) = \mathcal{H}^{\frac{\alpha+2}{3}} \times \mathcal{H}^{\frac{\alpha+1}{3}} \times \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}},$$

and

$$\mathbb{A}^\alpha = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \Upsilon_0^\alpha A^{\frac{\alpha}{3}} & -\Upsilon_2^\alpha A^{\frac{\alpha-1}{3}} & \Upsilon_1^\alpha A^{\frac{\alpha-2}{3}} \\ -\Upsilon_1^\alpha A^{\frac{\alpha+1}{3}} & \Upsilon_0^\alpha A^{\frac{\alpha}{3}} & -\Upsilon_2^\alpha A^{\frac{\alpha-1}{3}} \\ \Upsilon_2^\alpha A^{\frac{\alpha+2}{3}} & -\Upsilon_1^\alpha A^{\frac{\alpha+1}{3}} & \Upsilon_0^\alpha A^{\frac{\alpha}{3}} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

其中，

$$\Upsilon_j^\alpha = 2\cos\frac{2\pi(\alpha+j)}{3} + 1, \quad \textit{for } j = 0, 1, 2. \tag{2.16}$$

证明。由引理 2.4，算子 $\mathbb{A}$ 属于非负型，因此我们可以通过 $\mathbb{A}^\alpha$： $D(\mathbb{A}^\alpha) \subset X \to X$ 为 $0 < \alpha < 1$ 定义分数次幂 $\mathbb{A}^\alpha$，并且

$$\mathbb{A}^\alpha = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}\mathbb{A}(\lambda I + \mathbb{A})^{-1}d\lambda.$$

另一方面,

$$(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda^2(\lambda^3I+A)^{-1} & \lambda(\lambda^3I+A)^{-1} & (\lambda^3I+A)^{-1}\\ -A(\lambda^3I-A)^{-1} & \lambda^2(\lambda^3I+A)^{-1} & -\lambda(\lambda^3I+A)^{-1}\\ -\lambda A(\lambda^3I+A)^{-1} & -A(\lambda^3I+A)^{-1} & \lambda^2(\lambda^3I+A)^{-1}\end{bmatrix}$$

对所有 $\lambda>0$ 均成立。因此,

$$\mathbb{A}(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}=\begin{bmatrix}A(\lambda^3I+A)^{-1} & -\lambda^2(\lambda^3I+A)^{-1} & -\lambda(\lambda^3I+A)^{-1}\\ \lambda A(\lambda^3I-A)^{-1} & A(\lambda^3I+A)^{-1} & -\lambda^2(\lambda^3I+A)^{-1}\\ \lambda^2A(\lambda^3I+A)^{-1} & \lambda A(\lambda^3I+A)^{-1} & A(\lambda^3I+A)^{-1}\end{bmatrix}$$

对所有 $\lambda>0$ 均成立。现在，我们将由 **(1.4)** 给出的 A 的分数公式 $[\mathbb{A}(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}]_{ij}$ 应用于每个分量，并对 $i\geqslant j$ 作变量代换 $\mu=\lambda^3$（$\lambda=\mu^{\frac{1}{3}}$ 和 $d\lambda=\frac{1}{3}\mu^{\frac{-2}{3}}d\mu$），得到如下结果:

$$\begin{aligned}[\mathbb{A}(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}]_{ij}&=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{i-j}\lambda^{\alpha-1}A(\lambda^3I+A))^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{3}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty\mu^{\frac{i-j}{3}}\mu^{\frac{\alpha}{3}-1}A(\mu I+A)^{-1}d\mu\\&=\frac{(-1)^{i-j}}{3}\frac{\sin\Big((\frac{\alpha+i-j}{3})3\pi\Big)}{\pi}\int_0^\infty\mu^{\frac{\alpha+i-j}{3}-1}A(\mu I+A)^{-1}d\mu,\end{aligned}\tag{2.17}$$

现在，对于任意 θ，我们有:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta\pi)&=\sin(\theta\pi+2\theta\pi)=\sin(\theta\pi)\cos(2\theta\pi)+\sin(2\theta\pi)\cos(\theta\pi)\\&=\sin(\theta\pi)(\cos(2\theta\pi)+2\cos^2(\theta\pi))\\&=\sin(\theta\pi)(2\cos(2\theta\pi)+1)\end{aligned}\tag{2.18}$$

因此，对于 $\theta=\frac{\alpha+i-j}{3}$，我们得到

$$\sin\Big((\frac{\alpha+i-j}{3})3\pi\Big)=\Big(2\cos\Big((\frac{\alpha+i-j}{3})\pi\Big)+1\Big)\sin\Big((\frac{\alpha+i-j}{3})\pi\Big)\tag{2.19}$$

并且由 **(2.17)**、**(2.19)** 和 $0<\alpha+i-j<3$，可得

$$[\mathbb{A}(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}]_{ij}=\frac{(-1)^{i-j}}{3}\Big(2\cos\Big((\frac{\alpha+i-j}{3})\pi\Big)+1\Big)A^{\frac{\alpha+i-j}{3}}.\tag{2.20}$$

类似地，对于 $i<j$，我们得到如下结果:

$$\begin{aligned}[\mathbb{A}(\lambda I+\mathbb{A})^{-1}]_{ij}&=-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{\alpha+3+i-j-1}(\lambda^3I+A))^{-1}d\lambda\\&=-\frac{1}{3}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty\mu^{\frac{\alpha+i-j}{3}}(\mu I+A)^{-1}d\mu\\&=\frac{(-1)^{i-j+4}}{3}\frac{\sin\Big((\frac{\alpha+i-j+3}{3})3\pi\Big)}{\pi}\int_0^\infty\mu^{\frac{\alpha+i-j+3}{3}-1}(\mu I+A)^{-1}d\mu,\end{aligned}\tag{2.21}$$

由上文中的 (2.21)、(2.18) 和 $0 < \alpha + i - j + 3 < 3$，可得

$$[\mathbb{A}(\lambda I + \mathbb{A})^{-1}]_{ij} = \frac{(-1)^{i-j}}{3}\Big(2\cos\Big((\frac{\alpha + i - j}{3})\pi\Big) + 1\Big)A^{\frac{\alpha+i-j}{n}}. \tag{2.22}$$

根据（2.20）和（2.22），我们得到 $0 < \alpha < 1$ 的（2.15）。

最后，容易看出，对于任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$， $\mathbb{A}^\alpha$ 的矩阵表示都成立。 □

注 2.7。（1）若取 $\omega = 0$，则得到 [8, 定理 2.7]。

（2）假设 $0 \in \rho(A)$，从而零的整个邻域都属于 $\rho(A)$，主要是为了方便。定理 2.6 即使在 $0 \notin \rho(A)$ 的情况下仍然成立。（3）我们可以看到，对于任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$， $\mathbb{A}^\alpha$ 的矩阵表示是一个托普利兹矩阵。

下一个结果是 [20, 定理 3.6], 的直接推论；另见 [20, 定理 3.2] 和 [20, 定理 3.4]。

推论 2.8。

$$\sigma(\mathbb{A}^\alpha) = \{\lambda^\alpha : \lambda \in \sigma(\mathbb{A})\} = \{\lambda^\alpha : \lambda^3 \in \sigma(A)\} \tag{2.23}$$

对任意 $0 < \alpha < 1$。

对每个 $r \geqslant 0$，我们有

$$re^{i\theta} \in \sigma(A) \Longleftrightarrow r^{\alpha/3}e^{i\frac{\alpha\theta}{3}}, r^{\alpha/3}e^{\alpha i\frac{\theta+2\pi}{3}}, r^{\alpha/3}e^{i\alpha\frac{\theta-2\pi}{3}} \in \sigma(\mathbb{A}^\alpha).$$

因此，我们可以看出， $\mathbb{A}^\alpha$ 的谱是至多三个互不相交的闭集部分 Γ_1、 Γ_2 和 Γ_3 的并，其中

$$\Gamma_1 \subset \overline{\mathcal{S}(\alpha\omega/3)}, \qquad \Gamma_2 \subset e^{i\alpha\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\alpha\omega/3)}, \qquad \text{and} \qquad \Gamma_3 \subset e^{-i\alpha\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\alpha\omega/3)}. \tag{2.24}$$

因此，

$$\mathcal{S}(\pi - \frac{\alpha\omega}{3}) \cup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\omega}{3} < \arg(\lambda) < \frac{\pi}{2}\Big\} \cup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\omega}{3}\Big\} \subset \rho(\mathbb{A}^\alpha).$$

由 [2, 注 4.6.12], 我们可以推知， $-\mathbb{A}^\alpha$ 在 X 上生成一个强连续解析半群，其中 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$。在下面的命题中，我们证明 α 由扇形的角度 ω 决定，而 A 在该扇形上是 m-ω 累加的。这一点特别重要，因为 α 可能严格大于 $1/2$。例如，若 A 是自伴算子，即 $\omega = 0$，则 $-\mathbb{A}^\alpha$ 在 X 上生成一个强连续解析半群，其中 $0 < \alpha < \frac{3}{4}$。最后一种情形已在 [8, 定理 2.8] 中证明。我们的主要结果涵盖了这种情形，并给出更直接的证明。

命题 2.9. 假设 A 是 m-ω-增生算子， $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 且 $0 \in \rho(A)$。设 $\alpha^* = \dfrac{3\pi}{4\pi + 2\omega}$。则 $-\mathbb{A}^\alpha$ 在 X 上生成强连续半群（ $\alpha = \alpha^*$），并在 X 上生成强连续解析半群（ $0 < \alpha < \alpha^*$）。

证明。首先 ， $\mathbb{A}^\alpha$ 是闭的稠密定义算子，且存在一个正数常量 K，使得 at

$$\|(\lambda I + \mathbb{A}^\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{K}{\lambda + 1}, \text{ for all } \lambda \geqslant 0.$$

由 (2.24) 中的包含关系可知，扇形 $e^{i\alpha\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\alpha\omega/3)}$ 的两条边界射线分别是辐角为 $\alpha\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha\omega}{3}$ 和 $\alpha\frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha\omega}{3}$ 的复数。要使该扇形位于闭右复半平面内，只需满足 $\alpha\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha\omega}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$。也就是说，$\alpha\leqslant\dfrac{3\pi}{2(2\pi+\omega)}$。对反方向上的扇形 $e^{-i\alpha\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathcal{S}(\alpha\omega/3)}$ 进行同样的论证。因此，

$$\sigma(\mathbb{A}^\alpha)\subset\overline{\mathcal{S}(\pi/2)}\qquad\text{for }\alpha=\frac{3\pi}{4\pi+2\omega}$$

and

$$\sigma(\mathbb{A}^\alpha)\subset\overline{\mathcal{S}(\varpi)}\qquad\text{with}\qquad\varpi<\pi/2\qquad\text{for }\alpha<\frac{3\pi}{4\pi+2\omega}.$$

因此，

$$\mathcal{S}(\pi/2)\subset\rho(-\mathbb{A}^\alpha)\qquad\text{for }\alpha=\frac{3\pi}{4\pi+2\varpi}$$

and

$$\mathcal{S}(\frac{\pi}{2}+\varpi)\subset\rho(-\mathbb{A}^\alpha)\qquad\text{with}\qquad\varpi<\pi/2\qquad\text{for }\alpha<\frac{3\pi}{4\pi+2\omega}.$$

□

注 2.10。下面给出图 2 和图 3，它们尤其反映了随着 $\alpha\nearrow\alpha^*$ 的变化，“良好”的扇形性会丧失。值得注意的是，当 α 从 1 开始减小时，图 1 中位于左半平面的两个扇形会旋转至右半平面，同时扇形角也会减小。此外，例如对于 $\alpha^*<\alpha\leqslant 1$，图 1 和图 2 尤其反映了柯西问题 (2.1) 的适定性丧失，因而问题 (1.1)-(1.2) 也会失去适定性。

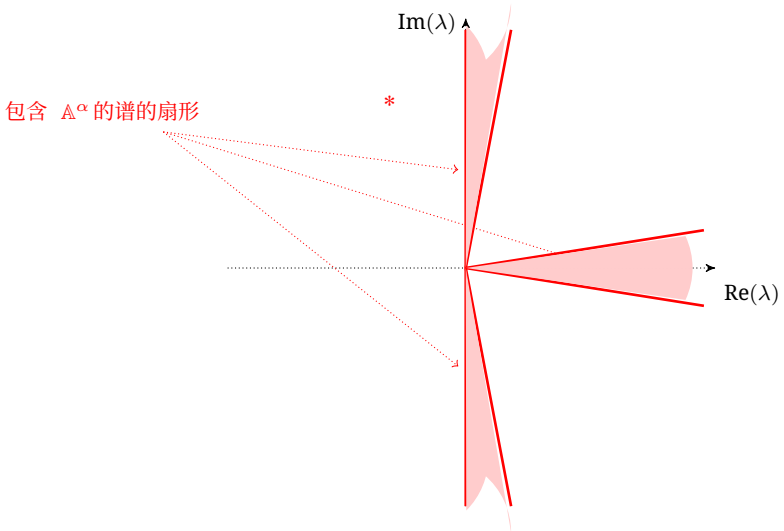

FIGURE 2. 谱的位置 $\mathbb{A}^{\alpha^*}$

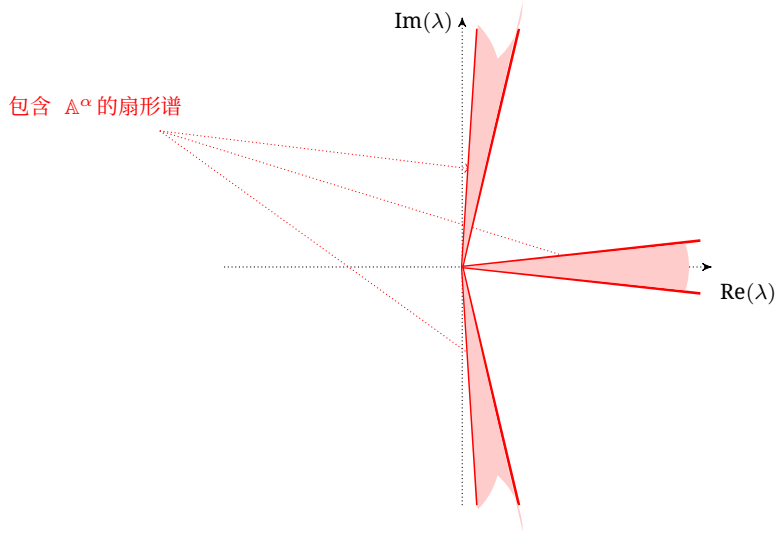

FIGURE 3. $\mathbb{A}^\alpha$ 的谱的位置，其中 $0 < \alpha < \alpha^*$。

3. A THIRD ORDER CAUCHY PROBLEM ASSOCIATED TO FRACTIONAL POWERS OF THE LINEARIZED OPERATOR

根据定理 2.6，我们证明了可以显式计算算子 $\mathbb{A}$ 在 $0 < \alpha < 1$ 上的分数次幂$\mathbb{A}^\alpha$ 。此外，根据命题 2.9，$-\mathbb{A}^\alpha$ 在 $0 < \alpha < \alpha^*$ 上生成一个强连续解析半群，其作用空间为 X 。这使我们能够考虑以下与线性化算子的分数次幂相关联的一阶柯西问题，

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbb{A}^\alpha \mathbf{u} = 0, \ t > 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^*, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

这里，$\mathbb{A}^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{A}^\alpha) \subset X \to X$ 表示 $\mathbb{A}$的分数次幂算子。

由命题 2.9 和 [21, 第 4 章推论 1.5], 可知，对任意 $\mathbf{u}_0 \in X$ ，问题 (3.1) 存在唯一解 $\mathbf{u}(t) = e^{-t\mathbb{A}^\alpha}\mathbf{u}_0$ ，对所有 $0 < \alpha < \alpha^*$均成立。此外，由命题 2.9 和 [21, 第 4 章定理 1.3], 可知，对任意初值 $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{\alpha^*})$，初值问题 (3.1) 都有唯一解 $\mathbf{u}(t) = \mathcal{T}(t)\mathbf{u}_0,$ ，其中 $\mathcal{T}(t)$ 是由 $\mathbb{A}^{\alpha^*}$生成的强连续半群。这使我们能够定义相应的三阶柯西问题，而问题 (3.1) 将作为该问题的线性化问题。

$$u'''(t) + 3\Upsilon_0^\alpha A^{\frac{\alpha}{3}} u''(t) + 3\Upsilon_0^\alpha A^{\frac{2\alpha}{3}} u''(t) + A^\alpha u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

初始条件为

$$u(0) = \varphi, \ u'(0) = \psi, \ u''(0) = \xi, \tag{3.3}$$

其中 $\Upsilon_0^\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi\alpha}{3} + 1$和 $0 < \alpha < \alpha^* = \dfrac{3\pi}{4\pi + 2\omega}$。

定理 3.1. 假设 A 是 m-ω-增生算子，$0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 且 $0 \in \rho(A)$。令 $0 < \alpha < \alpha^*$。那么，对于每个 $\varphi \in \mathcal{H}^{\frac{2}{3}}$、$\psi \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}}$和 $\xi \in \mathcal{H}^{\frac{2-2\alpha}{3}}$，柯西问题 (3.2)-(3.3) 有唯一解

$$u \in C^3((0,+\infty);\mathcal{H}) \cap C^2((0,+\infty);\mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}) \cap C^1((0,+\infty);\mathcal{H}^{\frac{2\alpha}{3}}) \cap C((0,+\infty);\mathcal{H}^{\alpha}),$$

并且由.....给出

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}}\varphi - \frac{a}{b-a}\Big[e^{tbA^{\frac{\alpha}{3}}} - e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}}\Big]\varphi \\
&+ \frac{ab}{1+b}\Big[\frac{1}{b-a}e^{tbA^{\frac{\alpha}{3}}} - \frac{1+b}{(1+a)(b-a)}e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}} + \frac{1}{1+a}e^{-tA^{\frac{\alpha}{3}}}\Big]\varphi \\
&+ \frac{1}{b-a}A^{-\frac{\alpha}{3}}\Big[e^{tbA^{\frac{\alpha}{3}}} - e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}}\Big]\psi \\
&- \frac{a+b}{1+b}A^{-\frac{\alpha}{3}}\Big[\frac{1}{b-a}e^{tbA^{\frac{\alpha}{3}}} - \frac{1+b}{(1+a)(b-a)}e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}} + \frac{1}{1+a}e^{-tA^{\frac{\alpha}{3}}}\Big]\psi \\
&+ \frac{1}{1+b}A^{-\frac{2\alpha}{3}}\Big[\frac{1}{b-a}e^{tbA^{\frac{\alpha}{3}}} - \frac{1+b}{(1+a)(b-a)}e^{taA^{\frac{\alpha}{3}}} + \frac{1}{1+a}e^{-tA^{\frac{\alpha}{3}}}\Big]\xi,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $a = e^{i\pi\frac{3-2\alpha}{3}}$ 和 $b = e^{-i\pi\frac{3+2\alpha}{3}}$。

证明。首先，柯西问题 (3.2)-(3.3) 等价于一阶问题

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \mathbb{A}^{\alpha}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0,\ t > 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^*, \tag{3.5}$$

满足初始条件

$$\begin{cases}
u(0) = \varphi \in \mathcal{H}^{\frac{2}{3}} \\
v(0) = \dfrac{1}{(\Upsilon_1^{\alpha})^3 - (\Upsilon_0^{\alpha})^3}\Big[\Upsilon_1^{\alpha}(\Upsilon_2^{\alpha} - \Upsilon_0^{\alpha})A^{\frac{1}{3}}\varphi - (\Upsilon_2^{\alpha} + 3\Upsilon_0^{\alpha}\Upsilon_1^{\alpha})A^{\frac{1-\alpha}{3}}\psi - \Upsilon_1^{\alpha}A^{\frac{1-2\alpha}{3}}\xi\Big] \in \mathcal{H}^{\frac{1}{3}}, \\
w(0) = \dfrac{1}{(\Upsilon_2^{\alpha})^3 - (\Upsilon_1^{\alpha})^3}\Big[\Upsilon_2^{\alpha}(\Upsilon_0^{\alpha} - \Upsilon_1^{\alpha})A^{\frac{2}{3}}\varphi + (\Upsilon_1^{\alpha} + 3\Upsilon_0^{\alpha}\Upsilon_2^{\alpha})A^{\frac{2-\alpha}{3}}\psi - \Upsilon_2^{\alpha}A^{\frac{1-2\alpha}{3}}\xi\Big] \in \mathcal{H},
\end{cases}$$

其中，$\mathbb{A}^{\alpha}$ 由（2.15）给出，Υ_j^{α}由（2.16）$0 < \alpha < \alpha^*$定义。显然，（3.5）等价于以下方程组。

$$\begin{cases}
u'(t) + \Upsilon_0^{\alpha}A^{\frac{\alpha}{3}}u(t) - \Upsilon_2^{\alpha}A^{\frac{\alpha-1}{3}}v(t) + \Upsilon_1^{\alpha}A^{\frac{\alpha-2}{3}}w(t) = 0 \\
v'(t) - \Upsilon_1^{\alpha}A^{\frac{\alpha+1}{3}}u(t) - \Upsilon_0^{\alpha}A^{\frac{\alpha}{3}}v(t) - \Upsilon_2^{\alpha}A^{\frac{\alpha-1}{3}}w(t) = 0 \\
w'(t) - \Upsilon_2^{\alpha}A^{\frac{\alpha+2}{3}}u(t) - \Upsilon_1^{\alpha}A^{\frac{\alpha+1}{3}}v(t) + \Upsilon_0^{\alpha}A^{\frac{\alpha}{3}}w(t) = 0.
\end{cases} \tag{3.6}$$

通过直接计算，我们得到满足 (3.3) 的 (3.2)。存在性和唯一性结果由命题 2.9 和 [21, 第 4 章推论 1.5] 得出。此外，我们有

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{\alpha}) = \mathcal{H}^{\frac{\alpha+2}{3}} \times \mathcal{H}^{\frac{\alpha+1}{3}} \times \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}, \quad t \geqslant 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^*.$$

因此，由 (3.6) 可得

$$u(t) \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha+2}{3}}, u'(t) \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}, u''(t) \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}}, \quad t \geqslant 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^*.$$

另一方面，(3.2) 可写成等价的一阶微分方程组的柯西问题

$$\begin{aligned} u'(t) - aBu(t) &= f(t), \\ f'(t) - bBf(t) &= g(t), \\ g'(t) + Bg(t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $B = A^{\frac{\alpha}{3}}$、 $a = e^{i\pi\frac{3-2\alpha}{3}}$ 和 $b = e^{-i\pi\frac{3+2\alpha}{3}}$。由于算子 aB、 bB 和 $-B$ 是强连续解析半群的生成元，因此通过对这些方程进行积分，我们可以写出

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-tB}g(0), \\ f(t) &= e^{tbB}f(0) + \int_0^t e^{(t-s)bB}g(s)ds, \\ u(t) &= e^{taB}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)aB}f(s)ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

应用方程组 (3.7)，我们得到

$$\begin{aligned} f(0) &= u'(0) - aBu(0), \\ g(0) &= v'(0) - bBv(0) = u''(0) - (a+b)Bu'(0) + abB^2u(0). \end{aligned}$$

事实是 $u(0) \in \mathcal{H}^{\frac{2}{3}} \subset \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}$、 $u'(0) \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}} \subset \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}$ 和 $u''(0) \in \mathcal{H}^{\frac{2-\alpha}{3}} \subset \mathcal{H}^{\frac{2\alpha}{3}}$，那么我们有 $g(0) \in \mathcal{H}^{\frac{2\alpha}{3}}$、 $f(0) \in \mathcal{H}^{\frac{\alpha}{3}}$ 和

$$g(t) = e^{-tB}[u''(0) - (a+b)Bu'(0) + abB^2u(0)]. \tag{3.9}$$

利用公式 (3.8)、(3.9)，我们得到

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{tbB}(u'(0) - aBu(0)) \\ &\quad + \frac{1}{1+b}B^{-1}\Big(e^{tbB} - e^{-tB}\Big)(u''(0) - (a+b)Bu'(0) + abB^2u(0)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用公式 (3.8) 和 (3.10)，通过积分可得，

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{taB}\varphi + \frac{1}{b-a}B^{-1}\Big[e^{tbB} - e^{taB}\Big](\psi - aB\varphi) \\ &\frac{1}{1+b}B^{-2}\Big[\frac{1}{b-a}e^{tbB} - \frac{1+b}{(1+a)(b-a)}e^{taB} + \frac{1}{1+a}e^{-tB}\Big](\xi - (a+b)B\psi + abB\varphi), \end{aligned} \tag{3.11}$$

经过一些变换后，公式 (3.4) 成立。 □

References

[1] V. Adamjan、V. Pivovarchik、C. Tretter，《弹性理论中出现的一类非自伴二次矩阵算子束》，《算子理论杂志》47(2) (2002), 325–341。[2] H. Amann，《线性与拟线性抛物型问题》。第一卷：抽象线性理论，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1995。

[3] A. V. Balakrishnan, 《闭算子的分数幂及其生成的半群》, 《太平洋数学杂志》10 (1960), 419–437。[4] M. Belluzi、M. J. D. Nascimento 和 K. Schiabel, 《关于一类薛定谔方程级联系统：分数幂方法》, 《数学分析及其应用杂志》506 (1) (2022) 125644。[5] F. D. M. Bezerra、A. N. Carvalho、J. Cholewa 和 M. J. D. Nascimento, 《通过分数幂对阻尼波动方程作抛物型近似：快速增长非线性项与动力系统的连续性》, 《数学分析及其应用杂志》450 (1) (2017) 377–405。[6] F. D. M. Bezerra、A. N. Carvalho、J. Cholewa 和 M. J. D. Nascimento, 《抽象半线性抛物型问题的分数阶近似》, 《离散与连续动力系统B辑》, 2020, 25(11)：4221–4255。[7] F. D. M. Bezerra 和 M. J. D. Nascimento, 《由阻尼波算子的分数幂支配的非自治近似》, 《电子微分方程杂志》, 2019, (2019) 1–19。[8] F. D. M. Bezerra 和 L. A. Santos, 《时间三阶抽象演化方程的算子分数幂方法》, 《微分方程杂志》269, 7, (2020), 5661–5679。[9] W. Chen, 《半线性三阶演化方程的临界指数与精确寿命估计》, 2023, arXiv: 2302.02063。[10] J. Cholewa 和 T. D lotko, 《分数阶纳维–斯托克斯方程》, 《离散与连续动力系统B辑》23, 2018, 2967–2988。[11] T. D lotko, 《纳维–斯托克斯方程及其分数阶近似》, 《应用数学与优化》77, 2018, 99–128。[12] H. O. Fattorini, 《柯西问题》。载于《数学及其应用百科全书》第18卷。Addison-Wesley 出版公司：马萨诸塞州雷丁, 1983。[13] M. Hasse, 《扇形算子的函数演算》。Birkh¨auser Verlag, 2006。[14]D. Henry, 《半线性抛物方程的几何理论》, 《数学讲义》840, 施普林格出版社, 柏林, 1981。[15] T. Kato, 《线性算子的扰动理论》, 施普林格出版社, 纽约（1995）。[16] T. Kato, 《耗散算子的分数幂》, 《日本学士院院刊》13 (3) (1961), 246–274。[17] S. G. Kreˇın, 《巴拿赫空间中的线性微分方程》, 莫斯科, 1967。[18] C. Martinez、M. Sanz 和 L. Marco, 《算子的分数幂》, 《日本数学会杂志》40 (1988), 331–347。[19] C. Mart´ınez 和 M. Sanz, 《算子分数幂理论》, 《北荷兰数学研究》, 第187卷, （2001）[20] C. Mart´ınez 和 M. Sanz, 《局部凸空间中分数幂的谱映射定理》, 《比萨高等师范学院年刊》, 科学部, 系列, 卷24, 第4期（1997）, 685–702。[21] A. Pazy, 《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》, 施普林格出版社。纽约, 1983。[22] P. E. Sobolevskiˇı, 《巴拿赫空间中的抛物型方程》, 《美国数学会译丛》49 (1966), 1-62。[23] P. A. Thompson, 《可压缩流体动力学》, 麦格劳-希尔, 纽约, 1972。[24] H. Triebel, 《插值理论、函数空间、微分算子》, Veb Deutscher, 1978。[25] J. Wu, 《广义磁流体力学方程》, 《微分方程杂志》195 (2), 2003, 284–312。

（M. Benharrat）
Ecole Nationale Polytechnique d'Oran-Maurice Audin (Ex. ENSET d'Oran),
BP 1523 Oran-El M'naouar, 31000 Oran, Algérie.电子邮件地址：
mohammed.benharrat@enp-oran.dz（F

. D. M. B$_{ezerra}$) Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900 João Pessoa PB, Brazil.
电子邮件地址：flank@mat.ufpb.br