方程无关计算作为分岔研究的动态数据驱动应用系统协议：颗粒链示例

M. O. Williams[1],Y. M. Psarellis[3], D. Pozharskiy [2], C. Chong [4], F. Li [5], J. Yang [6], P.G. Kevrekidis[4], I.G. Kevrekidis [3]

[1] Oceanit Laboratories，美国夏威夷州檀香山 96813[2] 普林斯顿大学化学与生物工程系及PACM，美国新泽西州普林斯顿 08544[3] 约翰斯·霍普金斯大学化学与生物分子工程系，美国马里兰州[4] 马萨诸塞大学数学与统计系，美国马萨诸塞州阿默斯特 01003-4515[5] 加州理工学院航空航天研究生实验室（GALCIT），美国加利福尼亚州帕萨迪纳 91125[6] 华盛顿大学航空航天学，美国华盛顿州西雅图 98195-2400

摘要。本章探讨基于方程无关/动态数据驱动应用系统（EF/DDDAS）协议的算法开发与实现，用于借助计算机研究复杂动力系统的分岔结构，例如生物学（神经元网络、细胞群体）中的系统、物理学、化学和工程学中的多尺度系统，以及社会科学中的系统建模。文中以一个示例展示了颗粒链（即所谓的人工设计颗粒链）的实验实现。具体而言，重点是检测并分析被称为“暗呼吸子”的时间周期性空间局域结构的稳定性。本章的实验和数值结果均表明，通过改变“反相”驱动的频率和振幅，可以控制呼吸子的数量；此外，利用黑箱模拟器运行的 EF/DDDAS 方法，也能重现通过动力系统标准模型数值方法计算得到的分岔图中的“蛇形分岔”结构。因此，本文介绍的 EF/DDDAS 协议是迈向通用协议的一步，可直接对实验室实验进行详细的分岔分析，而分析对象不仅包括数学模型，也包括测量数据。

关键词：实验设计、分岔分析、颗粒链、暗呼吸子。

1 引言

1.1 概述

本章探讨动态数据驱动应用系统（DDDAS）协议的开发与实现，用于通过无方程（EF）计算机辅助方法研究复杂动力系统的分岔结构。分岔研究是理解非线性系统的动力学如何

随参数范围而变化的工具，具体包括：（i）给定解如何随系统参数变化而变化；（ii）这些解何时能够抵御扰动，何时不能；以及（iii）从不稳定解中预计会出现哪些新型行为。因此，在任何可用耦合常微分方程建模或近似的情境中，通常都会进行分岔分析。

本章针对人工设计颗粒链（EGC）开展了两项分岔研究。该系统由紧密排列的颗粒阵列组成[1, 2]，颗粒之间通过弹性相互作用。第一项研究采用标准方法，推导出一组耦合常微分方程形式的控制方程，并利用实验数据验证其预测结果，随后使用方程组借助 AUTO [3], 、MATCONT [4], 或 LOCA[5] 等标准工具计算分岔图。第二项分岔研究采用 EF/DDDAS 方法。在该方法中，假设无法获得显式控制方程。取而代之的是，采用一组经过修改的无方程算法，利用 DDDAS 的思想，通过查询底层实验系统或黑箱模拟器来获取所需信息。这种双重研究方法旨在证明，在一个真实且复杂的系统中，EF/DDDAS 分岔技术能够获得与更为常见的方程感知方法相同的信息。

1.2 工程颗粒链中的暗呼吸子 **ns**

选择工程颗粒链（EGC）作为 EF/DDDAS 技术的测试系统，既是因为它们在应用中具有重要意义，也因为它们能够产生亮呼吸子和暗呼吸子等有趣的动力学现象。EGC 已用于冲击与能量吸收层[6, 7, 8, 9], 声学透镜[10], 声学二极管 [11] 和声音扰乱器 [12, 13]等应用。此外，呼吸子解尤其被提议作为一种新型能量采集装置[11]。

孤子是一种表现得像“粒子”的孤立波，因为它满足以下条件：（i）以恒定速度运动时必须保持其形状；（ii）与另一个孤子相互作用后，除可能发生相移外，它从“碰撞”中出现时保持不变[14]。呼吸子是一种在时间或空间上具有周期性的局域波[15, 16, 17, 18]。亮呼吸子是时间周期解，在空间局域区域内具有较高振幅，并在这些区域之外衰减至零（例如，$\alpha\,\mathrm{sech}(x)\cos(2\pi f t)$）；之所以如此命名，是因为在光学应用中，它们看起来会像暗色背景上的亮斑。另一方面，暗呼吸子则相反，是具有低振幅局域区域的时间周期解（例如，$\alpha\tanh(x)\cos(2\pi f t)$），看起来会像亮色背景上的暗斑。

暗呼吸子受到的关注远少于亮呼吸子，但已在许多应用中被观察到。这些应用包括：表面水波 [19],玻色–爱因斯坦凝聚体 [20, 21], 铁磁薄膜条带 [22] 或光学波导阵列 [23]。它们也因在量子力学应用中的表现而受到关注，包括：超材料 [24], 光纤 [25], 石墨烯晶格 [26] 以及 DNA 构象 [27]。

1.3 无方程分岔研究

如前所述，分岔研究通常旨在了解解如何随系统参数变化而改变、这些解对扰动的鲁棒性，

以及可能出现哪些其他行为，尤其是当解变得不稳定时。这些问题除了对最简单的系统之外，无法全部通过解析方法解答，因此通常会以耦合常微分方程组的形式建立系统模型，并对其进行数值研究。

给定这样的模型后，AUTO 等软件包会使用伪弧长延拓等数值延拓技术，确定解如何随系统参数的变化而改变。伪弧长延拓通过迭代寻找沿解分支距初始点 [3] 给定距离（即弧长的近似值）的解，从而计算解分支。解对微小扰动的稳健性可以通过线性稳定性分析来确定：该分析会在某个目标点附近建立系统的线性模型，并研究该线性模型的动力学，以了解系统对扰动的响应。最后，如果某个解不稳定，计算该解的不稳定流形有助于确定会出现哪些其他行为来取代这一不稳定行为。

为了实现这些目标，标准工具需要能够访问以耦合常微分方程形式表示的显式控制方程，以便计算相关信息，例如时间信息以及相对于状态和/或参数的导数。模型本身可以通过多种途径获得，包括从物理学原理出发进行推导、通过将机器学习模型拟合到数据上而获得的完全经验模型，以及兼具两者特征的方法，例如降阶模型或数据同化中使用集成方法进行参数估计 [28]。虽然拥有模型能够使用 AUTO 等成熟工具，但最终分析结果的实用性取决于模型的准确性，因为研究是在模型上进行的，而非在底层实际系统上进行的。

无方程（EF）分析旨在不依赖显式模型进行系统层面的分析 [29, 30, 31, 32], ，适用于无法获得显式控制方程的应用。这包括这样的多尺度应用：快时间尺度上有方程，但慢时间尺度上没有，因此可以研究长期行为；底层系统是基于智能体的模型而非常微分方程（ODE）系统的情况；以及无法检查现有最佳模拟器内部运作机制的情况。EF 技术已用于多个领域，包括生物学（神经元网络、细胞群体）[33, 34],、物理学、化学和工程学中的多尺度系统 [30, 35, 36, 37] ，甚至社会科学中的系统模型 [38, 39]。

具体而言，EF/DDDAS 技术通过设计可在实体环境中或黑箱模拟器上运行的实验，获取通过运行模型或对模型求导所能得到的信息。为尽量减少所需实验的数量，EF/DDDAS 方法必须采用不同于 AUTO 软件包中算法的算法。具体来说，这些方法倾向于采用无矩阵线性代数技术，以一系列矩阵—向量乘积取代显式矩阵分解 [40, 41]。

本章其余部分安排如下：第 2 节介绍 EF/DDDAS 方法和实验装置，第 3 节展示采用标准的基于模型的方法所得的结果，第 4 节则展示使用 EF/DDDAS 方法、无需显式方程或模型而获得的一组等效结果。最后，第 5 节简要总结，并探讨未来研究与开发的可能方向。

2 理论方法与实验装置

2.1 EF/DDDAS方法

当系统演化方程可用时，分岔分析最常用的软件包括 AUTO [3]，（或许可将其视为行业标准）、MATCONT [4]，（可与 MATLAB 接口），以及（面向大规模计算的）延拓算法库 [5]，（属于 Trilinos 项目）。除了数值延拓外，这些软件包还可执行线性化稳定性分析，并计算给定不稳定（鞍型）解的低维不稳定（子）流形。

任何分岔研究的最终目标，都是揭示真实世界系统的动力学特性并对其进行定量概述。分析方法有很多种，但本节重点介绍用于解决分岔分析中三个常见任务的EF/DDDAS协议：

1. 数值计算解分支；2. 计算分支上的解并确定其稳定性；3. 近似给定解的不稳定（子）流形。

To 为完成这些任务，EF/DDDAS算法作出以下假设：

1. 底层系统具有以下形式：$\boldsymbol{x}(i+1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(i),\ \boldsymbol{p})$，其中x为系统状态，p为参数。2. 系统是一个黑箱，因此 $\boldsymbol{F}$ 及其导数都没有显式方程；3. 初始条件可以任意指定，并且可以测量系统在之后任意时刻的状态。

这些假设旨在模拟黑箱模拟器和受控实验的限制：在这些情况下，可以观测系统动力学，却无法直接操控。不过，这些假设带来的限制与 AUTO 等软件包中用于分岔分析的算法相冲突，因为这些算法需要获取雅可比矩阵和海森矩阵等导数信息。

为规避这些限制，EF/DDDAS 协议在线性代数中采用无矩阵方法。无矩阵方法最初是为了仅使用矩阵向量乘积（即 $\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ax^2}\ldots$）而非分解整个矩阵 [40, 41] 来求解线性系统 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。例如，假设目标是求解代数方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$。如果 $\boldsymbol{x}(i)$ 是牛顿法的第 i 次迭代，那么 $\boldsymbol{x}(i+1)=\boldsymbol{x}(i)+\boldsymbol{\delta x}$，其中 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\delta x}=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(i))$。计算 $\boldsymbol{\delta x}$ 的一种无矩阵方法是广义最小残差法（GMRES）[42],，它只需要雅可比矩阵向量乘积。由于 EF/DDDAS 方法无法获取导数信息，这些乘积需近似为：

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{v})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}+O(\varepsilon), \qquad (1)$$

对于 $\varepsilon\ll 1$ 和 $\|\boldsymbol{v}\|=1$。如果底层系统 f 在计算上可处理，GMRES 可以高精度地求得平衡点；但如果底层系统是物理实验，得到的解将是近似值，其精度取决于对 f 的估计有多准确。

2.1.1 数值计算解分支

为了计算解分支（即进行数值延拓），我们采用伪弧长延拓，并结合无矩阵牛顿–克雷洛夫方法 [40, 41]，以解分支上各点到初始点 [3], 的（近似）弧长作为参数来表征解分支。伪弧长延拓是一个迭代过程，每一步的输入包括：(i) 上一次迭代得到的解 $\boldsymbol{x}_o$ 和 $\boldsymbol{p}_o$，以及 (ii) 上一步的切向方向 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}$。在 EF/DDDAS 协议以及许多方程感知型分岔研究中，通常用分支上最近两个解之差来近似切向方向。为获得分支上的第一个解，一种常见策略是固定 p 的值，让系统随时间演化，直至收敛到一个平衡点；随后略微调整 p 的值以找到另一个解，并利用这两个解计算所需的四个量。

在该过程的每一步中，通过求解以下方程组，计算解分支上的一个新解：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \\ &\dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \dot{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) = \Delta s \end{aligned} \quad (2)$$

其中，Δs 是用户指定的步长，表示每次迭代所覆盖的近似弧长。若定义

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \dot{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) - \Delta s \end{bmatrix} \quad (3)$$

接下来，将 f 输入 Newton-Krylov-GMRES 方法，即可计算出下一个解及其对应的参数。$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 的值通过运行实验/黑箱模拟并记录输出状态来确定。其他所有量均已预先给定。

如果能在给定容差范围内找到该方程组的解，则更新 $\boldsymbol{x_0}$、$\boldsymbol{p_0}$、$\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{p}}$ 的值。Δs 如果找不到解，则可能是步长过大，或者实验中的噪声太大，导致无法在参数空间的这一区域获得准确解。无论哪种情况，都会减小 Δs 并重复该过程。如果 Δs 变得过小，则过程终止。

2.1.2 线性稳定性分析

计算出一个解后，另一项有用的分析是确定该解的稳定性。这同样可以通过无矩阵方法来实现，尤其是隐式重启 Arnoldi 方法（IRAM）[43]。IRAM 使用雅可比-向量乘积，并利用公式 1 对其进行近似，从而构建一个 Krylov 子空间，以近似雅可比矩阵最大的特征值和特征向量。最大特征值（按模值计算）决定了该不动点的谱稳定性以及稳定性最弱的方向。

2.1.3 估计不稳定流形

如果发现某个解不稳定，则可使用 EF/DDDAS 协议计算低维不稳定流形。与其他步骤相比，这一过程相对缓慢，因此通常不会针对每个不稳定解都执行。

计算不稳定流形有许多技术[3]，，但在 EF/DDDAS 环境中，像 [44] 这样的技术尤其有用，因为它们不需要对所研究的系统求取任何导数。相反，该方法的输入是不稳定固定点$\boldsymbol{x_0}$（通过伪弧长延拓获得）和不稳定特征向量$\boldsymbol{v_0}$（通过 IRAM 获得）。

所实现的技术以迭代方式构造真实不稳定流形 $W^u(\boldsymbol{x_0})$ 的分段线性近似 $W^u_{pl}(\boldsymbol{x_0})$。不稳定流形上的初始点为 $\boldsymbol{x_0}$，第一个点为 $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_0} + \epsilon \boldsymbol{v_0}$，其中 ϵ 是一个小扰动。算法迭代 N 次后，$W^u_{pl}(\boldsymbol{x_0})$ 由 N+*1* 个网格点 $\boldsymbol{x_0}$、$\boldsymbol{x_1}$、……、$\boldsymbol{x_N}$ 定义，并由相邻网格点对之间的 N 条线段组成。

为了扩展 $W^u_{pl}(\boldsymbol{x_0})$，目标是在 $\hat{\boldsymbol{x}} \in W^u_{pl}(\boldsymbol{x_0})$ 中找到一点，使得 $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{p})$ 与流形上的最后一个点相距 Δ_{N+1}。Δ_{N+1} 的值必须由用户提供，但如果该值过大，算法可以自动将其减小 [44]。由于此过程计算的是一维不稳定流形，因此需要通过一维搜索过程找到满足以下条件的 $\hat{\boldsymbol{x}}$：$(1-\varepsilon)\Delta_{N+1} \leq \|\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{x_N}\| \leq (1+\varepsilon)\Delta_{N+1}$，其中 ε 是一个不确定性因子，通常取 0.2，并使用二分算法求解。由于二分算法是无导数的，因此只需获得 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的像，即以 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为初始条件运行模拟/实验即可计算得到。确定有效点后，将其添加到不稳定流形中，并重复此过程。

上述算法侧重于一维不稳定流形。对于不稳定流形维数大于一的系统，可以提供不稳定特征向量的线性组合，为每种组合计算一维不稳定流形，之后再将它们组合起来，构建更高维的不稳定流形。由于这会带来计算和实验成本，实际应用中，EF/DDDAS 对不稳定流形的探索仅限于低维不稳定流形。

本节介绍了以 EF/DDDAS 方式解决分岔研究中三项主要任务的算法示例。要将这些算法应用于黑箱系统或实验系统，必须采用无矩阵方法，这类方法仅使用函数值，或同时使用函数值和雅可比-向量乘积。因此，尽管许多为数值分岔研究设计的工具（例如 AUTO）并不适用，但这些工具所实现的底层技术（例如伪弧长延拓）仍可通过对求解过程进行相对较小的改动（例如使用 Newton-Krylov 方法，而不是直接求解线性方程组）来适配 EF/DDDAS 研究。

2.2 实验装置

本研究旨在分析实验阻尼驱动颗粒链中出现的暗呼吸子的动力学，该颗粒链由颗粒构成，称为人工设计颗粒链（EGC），其描述见 [45]。实验装置的照片。

包含 EGC 的部分如图1所示，图中的每个颗粒都是一个金属珠，而 EGC 则是整串珠子。离散呼吸子是一种在时间上周期性、在空间上局域化的解。文献中最常见的呼吸子类型是亮呼吸子，其解存在局域化的高振幅区域，并在该区域之外衰减至零。在此应用中，重点关注的是具有局域化低振幅区域的暗呼吸子。顾名思义，与背景相比，这些解并非明亮（高振幅），而是呈现为一个与背景相比暗淡（低振幅）的区域。

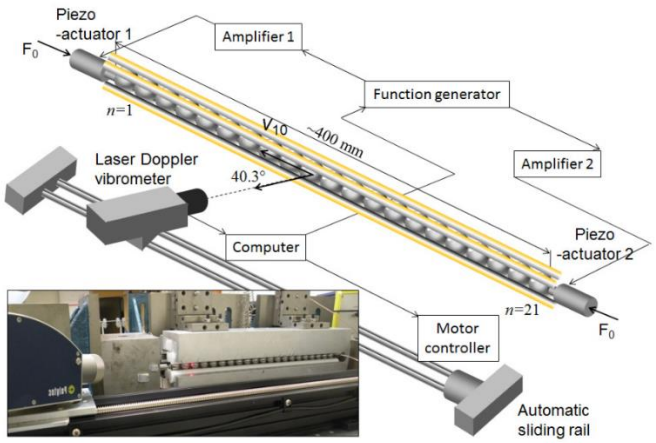

图1. 实验装置示意图及照片。此图转载自文献[45]。

图1所示的实验装置无法设定任意初始条件。相反，通过相消干涉生成暗呼吸子：将珠子初始化为静止状态（即初始速度为零），并以反相方式驱动链的两端[46, 45] [17] [20]。通过控制驱动频率f_b，可以确定所产生暗呼吸子的振荡频率。此外，由于珠子数量为奇数，反相驱动会使中心珠子的振幅趋于零，从而产生暗呼吸子通常具有的中心凹陷。

在接下来的示例中，系统由一条含21颗珠子的颗粒链组成，两端各装有压电致动器以提供驱动，并配有一台激光多普勒测振仪，用于非接触测量构成链的珠子的速度。每颗珠子都是铬钢球（半径为 $R = 9\,53mm$ $E = 。$ ，杨氏模量为 $200GPa$，泊松比为 $\nu = 0\,3$，质量为 $M = 28$。$2g$）。四根聚四氟乙烯杆使颗粒能够自由进行轴向振动，同时防止横向运动。整条链受到$F_0 = 10N$ 的静力压缩，如[47]所示。

3 方程感知分岔研究

在重点介绍 EF/DDDAS 类型的研究之前，本节将介绍对图1所示系统开展分岔研究的标准方法。首先，建立一组

控制方程（一个模型），然后使用实验数据对该模型进行校准和验证。最后，利用该模型开展所需的分岔研究。本节将重点介绍标准流程，并展示研究结果，以便在下一节与应用于同一系统的 EF/DDDAS方法进行比较。

3.1 受阻尼驱动的颗粒链控制方程

所选模型是一个标准的颗粒晶体模型[1]，其中包含对耗散的简单描述[11] 以及左右边界处的反相致动器：

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha\cos(2\pi f_b t) \\ M\ddot{u_n} + \frac{M}{\tau}\dot{u_n} &= A[\delta_0 + u_{n-1} - u_n]_+^{\frac{3}{2}} - A[\delta_0 + u_n - u_{n+1}]_+^{\frac{3}{2}} \\ u_{N+1} &= -\alpha\cos(2\pi f_b t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中，$N = 21$ 是链中珠子的数量，$u_n(t)$ 是时刻 t处第 n^{th}个珠子相对于平衡位置的位移，$A = \frac{E\sqrt{2R}}{3\ 1-\nu^2}()$ 是由珠子的组成和几何形~~状决定~~的常数，M 是珠子的质量，δ_0 是静态载荷$F_0 = A{\delta_0}^{3/2}$引起的平衡位移。量 $[x]_+ \triangleq max(0, x)$ 表示相邻珠子仅在彼此实际接触时才会相互施加力。τ 是与耗散相关的时间尺度，α 是驱动振幅，f_b 是驱动频率。这些参数中的大多数数值都可以根据珠子的物理性质获得，但阻尼的数值（τ =5 ms）是根据实验观测 [45]通过经验确定的。在数学模型和实验装置中，α 和f_b 均可自由变化。

感兴趣的暗呼吸子似乎具有较大的吸引域（即许多不同的初始条件都能得到相同的暗呼吸子状态），因此，在选择合适的驱动频率后，无论是在实验中还是在数值模拟中，都能观测到它们。从静止（零）初始条件出发，线性区域内平面波的传播及其随后发生的相消干涉，会导致暗呼吸子自发形成（即静止状态位于某个暗呼吸子的吸引域内）。为确保能够稳健地通过实验观测到暗呼吸子，并避免瞬态大振幅行波的出现，[1], 驱动振幅会在八个激励周期内从零线性增至所需振幅α 。

3.2 模型验证

有了模型及其参数，下一步任务就是进行验证：使用完全相同的参数组，将实验获得的暗呼吸子与数值计算得到的暗呼吸子进行比较（见图2）。在此示例中，实验观测到的动力学与模拟结果吻合良好。因此，使用基于模型的技术分析该系统是合理的。归根结底，之所以需要 EF/DDDAS 协议，是因为对于某些系统，模型与实验无法实现良好吻合，因而无法明确获知其动力学的显式方程。

不过，在本例中，明确的方程使我们能够确保 EF/DDDAS解与基于明确模型得到的解一致。

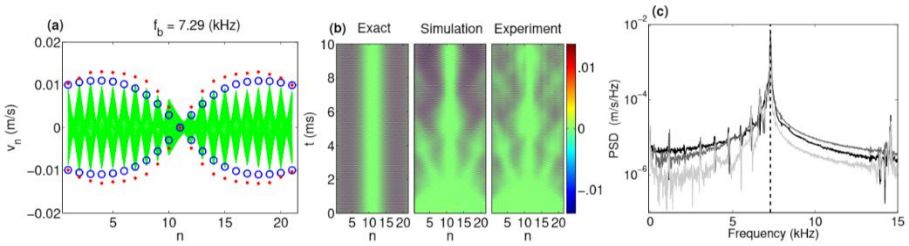

图2：（a）f_b = 7、29 kHz 和 a = 0 2 μm 对应的实验测得的速度随珠子编号的变化。每个珠子位置的整个时间序列以叠加形式显示（绿色曲线）。图中还显示了模拟对前10 ms 个极值的预测（红点），以及数值精确暗呼吸子的极值（蓝色圆圈）。（b）精确呼吸子、从零初始数据出发的瞬态过程，以及同样从零初始数据出发并趋向相同状态的实验演化的时空等值线图。颜色强度对应速度（m/s）。（c）驱动振幅为$a = 0.2\ \mu m$时，珠子1（最深色曲线）、珠子5（深色曲线）和珠子10（最浅色曲线）的实验测得的功率谱密度（$m/s/Hz$）。竖直虚线对应驱动频率f_b = 7.29 kHz。此图转载自[45]。

为了计算该阻尼驱动系统中的周期轨道，需要针对数值实现的频闪映射 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{u}(T_b)$ $\boldsymbol{u}$ 0 $\boldsymbol{u}$ 0 $\boldsymbol{u}$ ( ) 的不动点进行计算，其中 ( ) 为初始状态向量，而 (T_b) 是运动方程在时间 T_b 时的解。$\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵用于牛顿迭代，其形式为 $\boldsymbol{V}(T_b) - \boldsymbol{I}$，其中 I 是单位矩阵，$\boldsymbol{V}$ 是变分方程 $\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{DF} \cdot \boldsymbol{V}$ 的解，其初始条件为 $\boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{I}$，而 $\boldsymbol{DF}$ 是在 $\boldsymbol{u}$ 处计算得到的运动方程的雅可比矩阵。需要注意的是，根据构造，呼吸子频率和驱动频率均为 $f_b = 1/T_b$ 。

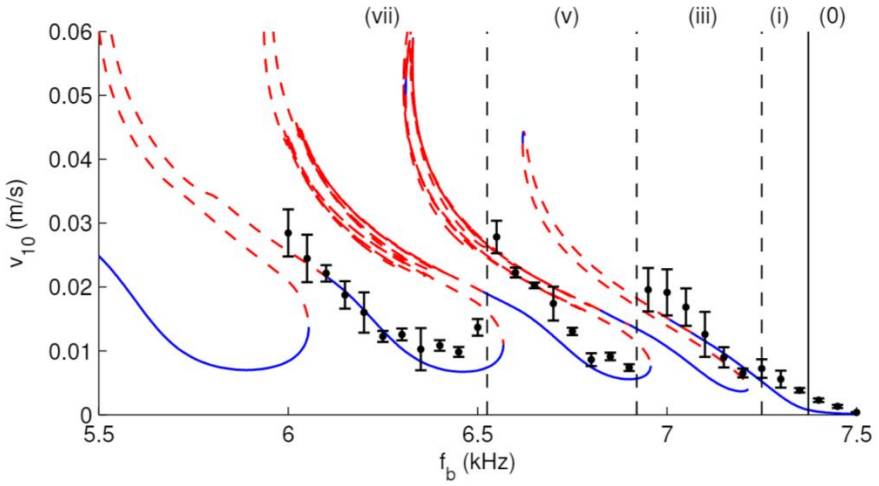

图3：展示各种暗呼吸子/多呼吸子分支的分岔图。具体而言，图中显示了珠子10的最大速度随频率 f_b 的变化情况，$a = 0$。2 μm。

平滑曲线对应数值精确的暗呼吸子（蓝色实线表示线性稳定解，红色虚线表示不稳定区域）。标记表示实验测得的均值，误差棒给出了标准差，数据由四次实验获得。

图2 (a-b) 展示了在 $f_b = 7.29\ kHz$ 和 $a = 0.2\ \mu m$ 条件下激发的数值与实验暗呼吸子（这些参数经过选择，以匹配实验的驱动频率和振幅），以及在这些参数值下数值求得的对应解。其在空间上的强结构相似性与精确暗呼吸子（例如见面板 (a)）相似，这表明在$10ms$之后二者都接近同一个定常态。此外，这也意味着，在实验和数学模型中，暗呼吸子态的吸引域都包含静止解。为确定实验数据是否随时间呈周期性，考察了面板 (c) 所示的功率谱密度（PSD）图。PSD 在 $f_b = 7\ 29\ kHz$. 附近的显著尖峰意味着实验系统也正以该频率收敛至一个周期轨道。面板 (b) 中对数值精确解、模拟和实验的时空演化进行的详细比较表明，在动力学的初始瞬态阶段之后，确实形成了暗呼吸子。值得注意的是，该解的最大应变 $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_{n+1}}|$ 约为预压缩量的 60%，这证实了本文报告的结构是系统非线性的结果。

为验证多呼吸子（即 n-凹陷解）区域中的模型，我们考察了图3所示的暗呼吸子完整分岔图，以及图4所示的相应代表性剖面/演化，以验证多呼吸子（即 n-凹陷解）区域中的模型。每个分支叶瓣上的折叠都代表两个呼吸子族的碰撞（即 n-凹陷解与（$n+2$）-凹陷解）。由于分支的结构，从一个暗呼吸子族过渡到下一个暗呼吸子族（例如，随着 f_b 减小）并不平滑：也就是说，鞍结分岔（即 动力系统中两个平衡态的碰撞与消失）会导致解在不同族之间“跳跃”。 图3中可以看到鞍结分岔，其中标记为 (vii)、(v)、(iii) 和 (i) 的区域分别对应于（实验）时空等高图中观察到的密度凹陷数量。标记 (0) 对应于局域在边界附近而非区域中心的表面离散（亮）呼吸子。实验测得的解在图3中以带误差棒的黑色标记表示。因此，这里用于描述暗呼吸子的模型（方程4）至少在定性上能够在适当的驱动频率下产生正确类型的多呼吸子。

更进一步地，我们考察了固定驱动频率下特定多呼吸子的瞬态演化。例如，在区域 (vii) 中，$f_b = 6.35\ kHz$ a 处出现了一个具有 7 个凹陷的解（见图4a）。值得注意的是，精确解（通过牛顿法数值求得不动点）、模拟（从静止解出发对 (4) 进行数值积分）与在相同时间窗口内获得的实验结果明显吻合。模拟和实验从静止初始条件出发，经过相似的瞬态过程，最终趋近于同一个解。对于具有 5 个凹陷的解（例如图4b中的 $f_b = 6.80\ kHz$ ）、具有 3 个凹陷的解（例如图4c中的 $f_b = 7.15\ kHz$ ），以及最终前文图2中提到的具有 1 个凹陷的解，也观察到了类似的一致性。

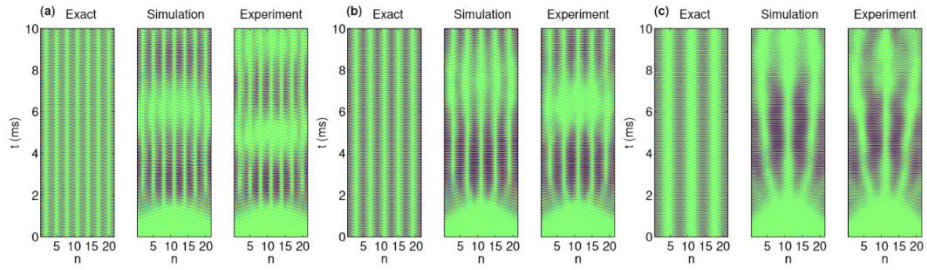

图4：数值获得的暗呼吸子的时空等值线图，以及导致其产生的动态演化过程的瞬态模拟和实验观测，其中 a=0.2μm。（a）频率为 f_b =6.35 kHz 的七凹陷解。（b）频率为 f_b =6.8 kHz 的五凹陷解。（c）频率为 f_b =7.15 kHz 的三凹陷解。颜色强度对应于速度（m/s）；每个面板的颜色图例与图2相同。此图转载自 [45]。

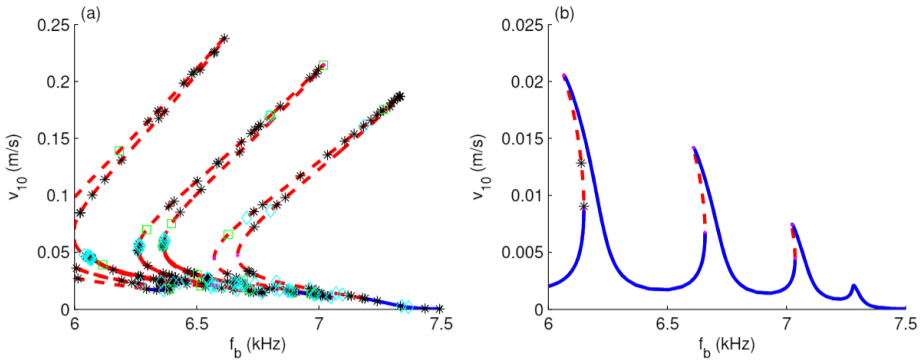

图5：（a）在较大的强迫振幅 a = 0.5 μm 下计算得到的分岔图，以及（b）在较小的强迫振幅 a = 0.05 μm 下计算得到的分岔图。[10], 中定义的稳定分支以实线（蓝色）表示，分支的不稳定段以虚线（红色）表示。鞍结分岔以（洋红色）圆点表示，Neimark–Sacker 分岔以（黑色）星号表示，倍周期分岔以（绿色）方块表示，叉形分岔以（青色）菱形表示。请注意，在这两种强迫振幅下，相同的定性结构均得以保持，但给定 n 凹陷解出现的频率发生了偏移。

最后，研究指出，通过改变强迫振幅，系统建模也可以“调出”暗呼吸子。为确定模型中是否会出现这种情况，我们在图5中进行了另外两项分岔研究，分别展示了不同强迫振幅（a = 0.5 和 0.05 μm）下得到的分岔图。频率范围内仍出现相同的瓣状结构；不过，产生特定多呼吸子所需的频率范围会发生偏移。因此，在合理范围内，也可以通过改变强迫振幅来调出特定的多呼吸子。

总之，在本节中，对物理工程颗粒链模型开展了标准的分岔研究 （EGC）。首先定义模型，随后进行验证；接下来使用可用数据对模型进行确认；最后，在模型得到确认的参数区间内使用所得模型。

T从动力系统的角度来看，EGC 系统非常丰富；它清晰地展现了蛇形分岔，并且存在许多二级、三级及更高阶分支。此外，分岔研究揭示了有用的信息，并提供了一种验证底层模型的工具，使人们能够在定性行为不同的情况下进行匹配。显然，如果能够使用 EF/DDDAS 协议“跳过”模型创建和验证的整个步骤，就可以完全绕过这一步。

4 基于动态数据驱动应用系统的无方程计算动力学研究使用第节中描述的 EF/DDDAS 计算工具

第2.1节中，利用 EF/DDDAS 计算工具生成了图6中的分岔图；它是图3中分岔图的 EF/DDDAS 对应图。首先，可以看到两幅图在定量上吻合；也就是说，尽管 EF/DDDAS 方法的精度通常低于 AUTO 等工具所使用的容差，这套无矩阵工具仍能重现标准工具所得到的分支和分岔。虽然单个解的计算精度可能较低，但沿分支变化的解远远大于任一单个解的误差。因此，即使在计算过程的每一步误差都较高，仍能恢复分支的形状。在这个例子中，结构是一种复杂的“蛇形分岔”[48, 49, 50, 51, 52, 53] 结构，近年来在向列液晶[54]以及库埃特流[55]等经典流体问题中受到了广泛关注。

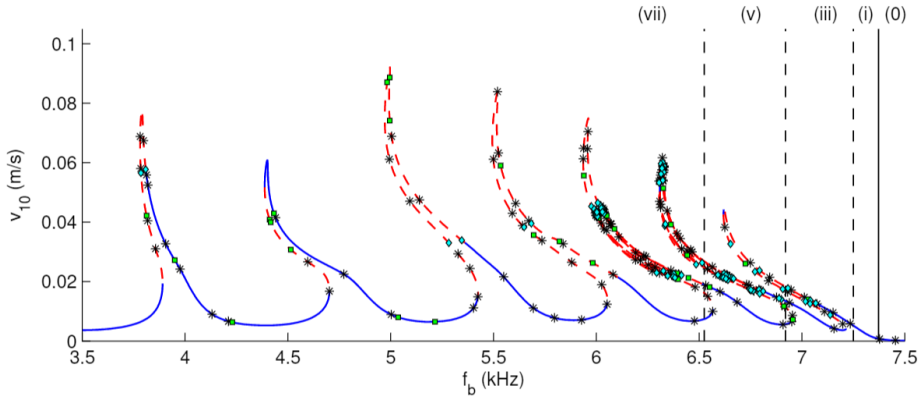

图6：使用 EF/DDDAS方法计算得到的解分支，应与图3进行比较。实线（蓝色）区域表示实数弗洛凯乘子位于单位圆内（或圆上），否则显示为虚线（红色）。这些符号表示存在分岔：黑色星形表示向 T^2 环面的 Neimark–Sacker分岔，绿色方块表示倍周期分岔，青色菱形表示叉形分岔。此处，为避免图形过于杂乱，我们仅绘制了环面分岔总数的一半。虚线表示图3所示的 n 凹陷解出现的区域。

接下来，将上述分岔研究加以扩展，以描述解的次级分支（即主分支上发生分岔所产生的分支）。为确定何时发生分岔，采用 AUTO [3] 使用的边框矩阵技术，通过无矩阵方式求解所需的线性方程组。这样，EF/DDDAS 方法便能够定位叉形分岔和倍周期分岔，识别 Neimark–Sacker分岔 [56] 点，并

直接追踪 缓慢变化的共轭复数对特征值，以确定它们何时穿越单位圆。前两者是主分支上的点，周期解的次级分支在这些点处产生，而 Neimark–Sacker 点则表明准周期解的存在。下一节将简要介绍由这些分岔产生的各个次级分支示例。

4.1 叉形分岔

许多次级分支产生于叉形分岔，在这些分岔处，原解分支中所包含的对称性被打破，并生成两个额外的解分支。叉形分岔也可能作为我们所称的叉形环的一部分出现，见图 7。叉形环包含两个解分支：它们通过某一解分支上的叉形分岔生成，随后又通过同一分支上的另一个叉形分岔而消失。在这些分支上还可能发生其他分岔，而叉形环的典型例子由一对次临界叉形分岔以及单个次级解分支上的两对鞍结分岔组成。因此，从物理上看，叉形环表现为参数空间中的一个小区域，其中基础解分支的对称性暂时消失，随后又重新出现。

归根结底，叉形分岔或叉形环的标志，是系统中先前存在的某种对称性丧失。由于 EGC 两端受到异相驱动，大多数解的速度关于珠子编号是奇函数（即 $\dot{u_1}(t) = -\dot{u_N}(t)$、$\dot{u_2}(t) = -\dot{u_{N-1}}(t)$，依此类推），而中心珠子保持静止。然而，图 7 所示叉形环上的解失去了这种对称性。为说明这一点，注意到珠子速度向量总可以分解为偶分量和奇分量：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_{N-1}(t) \\ \dot{u}_N(t) \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \\ \vdots \\ -\dot{\alpha}_2(t) \\ -\dot{\alpha}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\beta}_2(t) \\ \dot{\beta}_1(t) \end{bmatrix},$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 是关于珠子编号的奇函数速度分量，$\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 是关于珠子编号的偶函数速度分量。图7a展示了以10^{th} 珠子的速度为纵坐标的解分支，而图7b展示了相同的解分支，但纵坐标为$v^T\beta$，其中v 是满足 $v^T\alpha = 0$ 的随机向量。如图7b所示，原始解分支不包含关于珠子编号的偶函数速度分量。然而，叉形环上的解打破了这一对称性，并引入了关于珠子编号的偶函数速度分量。

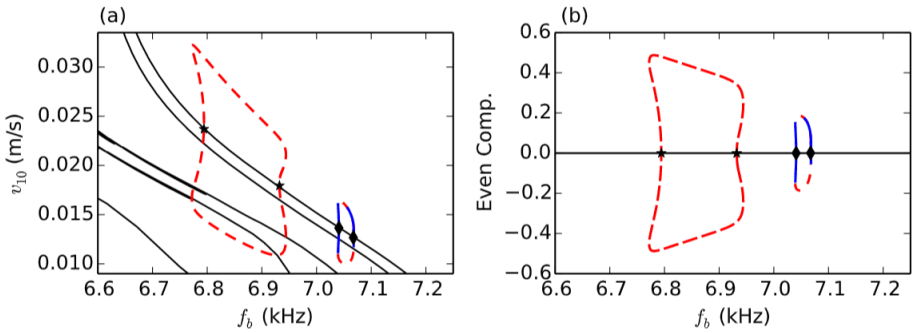

图 7：叉形环的典型示例。左图 (a) 使用与图 6 相同的投影显示分支，右图 (b) 则展示了将珠子的速度投影到一个随机偶向量（即向量 v、$v_1 = v_{21}$ 等）上所产生的对称性破缺。（黑色）标记表示环中的叉形分岔。具体而言，主分支实际上没有偶分量，而叉形环中的上、下分支则有偶分量。

从原始传感器测量数据中实验性地检测叉形环（即观察传感器测量数据的时间序列）可能颇具挑战。这在很大程度上是因为，按照L_2范数等标准指标衡量，叉形环上的解通常与（此时已不稳定的）主分支上的解十分接近。因此，尽管方程感知型协议和 EF/DDDAS 协议在其他方面表现良好，仍可能漏掉叉形环，因为与主分支上出现的盘绕现象（即图3中的一系列鞍结分岔）相比，叉形环的影响较小。不过，由于叉形环会导致对称性破缺，因此仍可检测到它们。在本例中，检测依据是解和绝对值最大的特征值中出现了关于珠子编号的偶函数速度分量，这与 AUTO [3] 等方程感知软件包中的检测方式类似。

4.2 倍周期分岔

第二组分支由反复发生的倍周期分岔产生。其中许多次级分支始于主分支已经不稳定的区域，这通常是由更早发生的 Neimark–Sacker分岔所致。这些解分支十分复杂，在较大的 f_b 区间内存在，但所识别出的所有解都因已有的不稳定性而不稳定。归根结底，如果能够任意初始化系统，就有可能在若干不同的激励频率下短暂观测到这些解；但由于它们不稳定，从静止解出发时不会出现这些解。

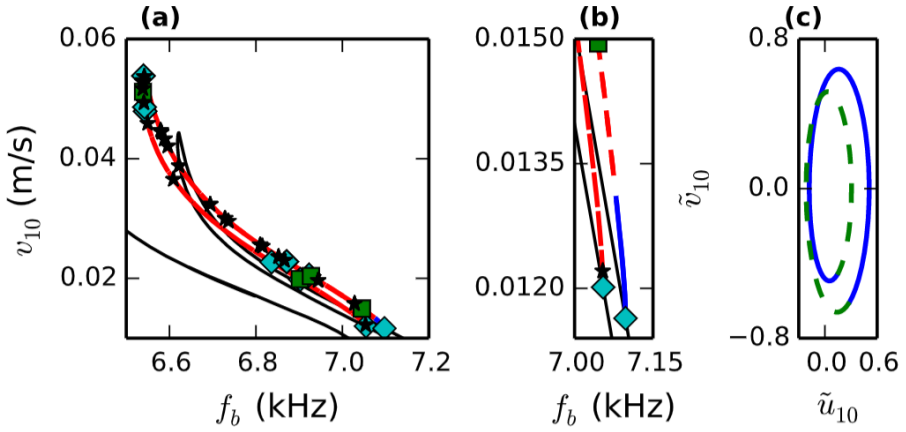

图 8：（a）图中以蓝色和红色显示了一个二周期解分支的示例；实线（蓝色）区域（右下方——放大面板（b）后可见）表示实弗洛凯乘子位于单位圆内（或单位圆上），因此对该解施加的小扰动不会随时间增长 [56]。在其他情况下则显示为红线。细（黑色）曲线表示周期一解分支，标记表示叉形分岔（青色菱形）、周期倍增分岔（绿色方形）和 Neimark–Sacker 分岔（黑色星形）。（b）面板（a）的局部放大图，展示二周期分支的两端如何分别与主分支相连。（c）一个远离分岔点的二周期解样本的（无量纲化）速度—位置相平面图。实线（蓝色）表示振荡的前半段（一个激励周期），虚线（绿色）表示振荡的后半段。

图 8 展示了一个典型的次级二周期分支。该二周期分支如同一座“桥梁”，连接着周期一解单个叶瓣的两侧，如二周期解分支起点和终点处的两处连接所示。主分支上的倍周期分岔确实会产生两条次级解分支，但图 8 的纵坐标表示第十个珠子的最大速度，因此这两条分支看起来几乎完全相同。

与主分支一样，二周期分支也包含自身的一组分岔，其中包括额外的分支点、进一步的倍周期分岔以及 Neimark–Sacker 分岔；这些分岔分别可能产生三级二周期解、四周期解或准周期解。然而，我们考察的三级二周期分支或四周期分支，在其对应的分岔点处均未以稳定状态产生，且三级分支也未恢复稳定性。由于这些更高周期解均不稳定，除非选择非常特定的初始条件，否则它们不会出现在实验中。因此，尽管这些解确实存在，但预计它们不会在暗呼吸子的动力学中发挥重要作用。

4.3 准周期解

由于存在许多 Neimark–Sacker点，自然可以预期该系统中存在准周期解。准周期解是相空间中环面上的连续时间轨迹（在频闪映射中，这些轨迹表现为不变圆）。与超临界Hopf分岔产生的周期轨道类似，超临界Neimark–Sacker分岔会在

分岔点附近 [56]产生稳定环面。存在用于逼近不变圆的算法（甚至可以采用无矩阵方式进行计算）[57], , 但计算准周期解分支超出了本章的讨论范围。相反，在 Neimark–Sacker分岔附近，如图 9 所示，通过多次记录频闪迭代来逼近不变圆。图 9 展示了两个此类计算示例，每个10^5 取值下均对频闪映射进行了连续f_b次迭代。图中显示的是映射接下来的10^4 次迭代，每 10 次迭代标记一个点。请注意，选择这一迭代次数是为了便于可视化，调整该次数不会影响结果。

在 $f_b = 7.487\ kHz$ 处，我们识别出一个似乎为准周期轨道的解，如图 9 (a-b) 所示。图 (a) 展示了每个激励周期开始时 10th 珠子的位移和速度。蓝色圆点表示频闪映射每迭代 10 次后系统的状态（在该投影中），绿色圆点表示该映射最后 20 次迭代的结果；最后，黑色星形标记表示该频率下的周期一解。即使受到较大的扰动，不变圆本身似乎仍然是稳定的。

图 9b 显示了两条相近轨迹之间的相对距离随频闪映射迭代次数的变化。起始距离不太远的轨迹会略微收敛，因为受扰动的解被吸引回不变圆，并且在此后的所有时间内都保持接近。

应将 $f_b = 7.487$ kHz 时的行为与 $f_b = 7\,462\ kHz$ 时的情况进行对比，后者如图 9 (c-d) 所示。尽管可以认为面板 (c) 中所示的动力学位于高阶环面上，例如 $T3$–环面，但面板 (d) 中附近初始条件之间距离的图表明，它更可能位于混沌吸引子上，因为经过足够长的时间后，附近的轨迹会彼此发散。这可以用Ruelle-Takens-Newhouse混沌路线来解释：当一个准周期解（位于 T^2-环面上的解）经历另一次 Hopf分岔（产生位于 T^3-环面上的解）时，就会出现这种情况；其依据是这样一种观察：T^3-环面上的常向量场经过任意小的扰动，都可以产生一个混沌吸引子 [58]。

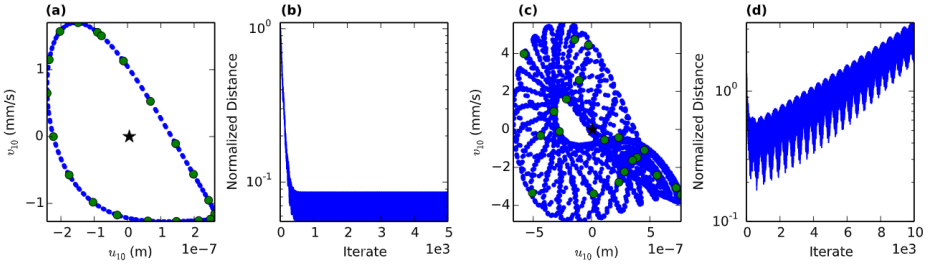

图 9：(a) 通过绘制映射 F 的数千次迭代得到的一个典型不变圆，其中 $f_b = 7.487\ kHz$；小的（蓝色）点表示每隔 $10/f_b$ 秒记录一次的第 10 颗珠子的速度，大的（绿色）点表示映射的最后二十次迭代，星号（黑色）表示不稳定的周期一轨道。(b) 两个相近初始条件之间归一化距离的对数随时间的变化；尽管精确距离随时间变化，但不变圆上起始位置彼此接近的轨迹会始终彼此接近。(c) 展示 $f_b = 7.462\ kHz$ 的频闪映射，颜色与最左侧图一致；如果绘制更多次迭代，轨迹最终会“填满”该区域。(d) 成对的

<escape>在 $f_b = 7$ 处附近的轨迹。462 kHz 经过足够多次迭代后将彼此分离，这表明可能存在一个混沌吸引子。该图转载自 [45]。</escape>

4.4 计算不稳定流形

此处讨论的 EGC 示例是一个受迫动力系统示例，其受迫源于链两端的驱动不同相。对于某些驱动频率和振幅组合，EGC 会与驱动相位锁定（即响应频率是驱动频率的有理倍数）。因此，使用频闪映射观察系统时，会得到周期解。然而，在其他区域，系统频率与驱动频率之比为无理数，因此会出现准周期解。发生相位锁定的区域称为阿诺德舌 [59]。

本节的目标是基于与锁相解相关联的不稳定流形，以 EF/DDDAS 的方式分析大强迫振幅下锁相行为与准周期行为之间的转变。如第 2.1 节所述，计算高维不稳定流形是当前工具面临的一项挑战。幸运的是，尽管 EGC 中固有着复杂的动力学，但在许多状态区域内，只有一个或两个弗洛凯乘子离开了单位圆。因此，尽管解本身可能是 42 维的，不稳定流形却只有 1 维或 2 维，其维度足够低，使得不稳定流形的计算及其可视化成为可能。

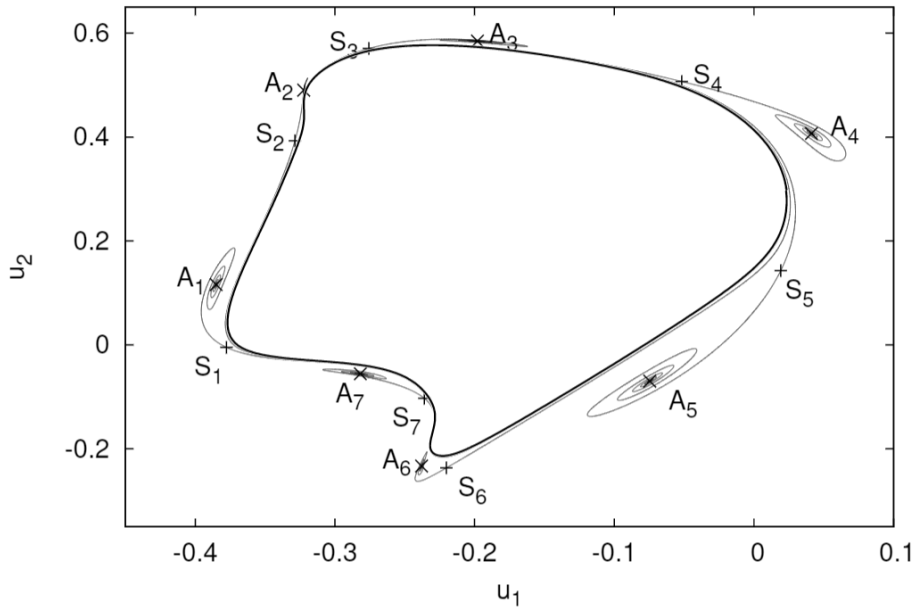

图10：鞍型暗呼吸子的单维（庞加莱映射）不稳定流形图，其中 $a = 0.278\,\mu m$ 和 $f_b = 7.14\,kHz$ 用珠子 1 和 2 的（无量纲）位移表示。7 个鞍点（属于同一个周期 7 轨道）标记为 S_1–S_7；在此图中，有两组吸引子，标记为 A_1–A_7 的稳定螺旋

（属于另一个周期–7 轨道）以及粗线所表示的稳定不变圆。在阿诺德舌的尖端附近，A_i 是节点，但此时原来的环面已经破裂，并出现了一个新的不变圆。

具体而言，从频闪映射的角度来看，阿诺德舌内的典型解由 N 个鞍点和 N 个节点组成 [60]。N 的值取决于强迫频率与响应频率之间的关系。例如，在图10中，本例的系统频率与驱动频率之比为$\frac{1}{7}$，，因此锁相解在频闪映射中是周期为 7 的解，且 $N = 7$。鞍点和节点通过鞍点的不稳定流形以异宿连接相连。

给定固定的强迫振幅并改变驱动频率时，鞍点和节点合并发生鞍结分岔后，锁相解会消失 [61]。然而，图10考虑的是强迫振幅过大时频率固定的情况。在此状态下，锁相的丧失更加复杂。例如，图10仍包含一组七个鞍点（S_1-S_7），其不稳定流形以浅灰色显示，并与一组七个不动点相连。不过，这些点并非节点，而是稳定螺旋（A_1-A_7）；如图所示，不稳定流形在接近这些点时会呈现螺旋形态。此外，鞍点的不稳定流形还与黑色曲线所示的准周期解相连。鞍点和螺旋等平衡点与准周期解这类更大的不变集发生碰撞，表明出现了全局分岔，例如异宿分岔。

从物理角度看，全局分岔的结果是，相位锁定与非相位锁定之间的转换并不像固定振幅、变化频率情形下那样清晰。在那种情况下，鞍点与节点之间的局部分岔会消除相位锁定的7周期解。然而，在当前情况下，该解仍然存在（$A_1 - A_7$），但接近一个准周期解；事实上，鞍点的不稳定流形可能导向这两类解中的任意一种。因此，在给定相同驱动频率和振幅的情况下，可能得到任一类型的解；并且由于它们在状态空间中彼此接近，扰动可能导致一种解转变为另一种解。

分岔研究是理解动力系统的重要步骤。在可以获得显式控制方程的情况下，诸如 AUTO 这样的软件包已经将许多必要的计算任务实现了自动化。本节展示了 EF/DDDAS 协议能够在分岔研究中完成三项关键任务：(i) 计算解分支；(ii) 评估解的线性稳定性；以及 (iii) 计算不稳定流形。最终，借助黑箱模拟器，EF/DDDAS 协议成功地从一个非平凡系统中提取出了与使用 AUTO 进行了解方程研究时所获得的相同信息；该系统包含一条蛇形分支解和多个非平凡分岔，尽管对底层系统的了解更为有限。

5 结论

对物理系统模型进行分岔研究，是直观且定量地理解该系统动力学的重要环节。本章重点介绍开展此类研究的两种方法。首先，可以.....

建立一个模型，使用实验数据验证该模型，然后使用最终得到的模型，结合 AUTO 等软件 [3] 来计算分岔图。另一种方法是使用 EF/DDDAS 协议，通过运行经过合理初始化的实验（或者在本例中，黑箱数值模拟）来获取所需信息，从而实时定位不动点并确定其稳定性，进而计算分岔图。实现这一方法的基础是所谓的无矩阵算法，例如牛顿-GMRES 算法（用于寻找不动点）以及隐式重启 Arnoldi 方法（IRAM，用于计算特征值和特征向量）。值得注意的是，EF/DDDAS 协议采用了与传统方法相同的数学结构。事实上，伪弧长延拓以及用于定位不动点的边界矩阵都可以直接引入 EF/DDDAS 框架，从而计算出与使用 AUTO 得到的分岔图等效（且在定量上相符）的分岔图。

所提出的 EF/DDDAS 分岔研究无需了解人工设计颗粒链的控制方程即可开展。动态数据驱动应用系统的理念不需要估计雅可比矩阵，只需输入/输出信息，便能可靠地构建分岔图。

当前方法的主要局限之一是，它假设可以任意指定初始条件。这一点有利，因为它使 EF/DDDAS 协议能够利用无矩阵线性代数的技术与分析。然而，这也带来了限制。以 EGC 为例，实验上可以设定初始条件的若干特征（例如边界处珠子的状态），但要设定链内部的初始速度/位移则很困难。同样，解分支的不稳定部分包含有用信息，而且实际上可能在其他参数区间变得稳定；然而，如果无法指定初始条件，就必须通过某种外部控制使这些解稳定下来，才能对其进行跟踪。

解决这一问题的一种可能方法，是借鉴反馈控制和系统辨识的思路；这些方法适用于控制能力较有限的情形（例如，参见 [62, 63, 64]）。例如，为了确定稳定性，可以采用动态模态分解 [65, 66]，或特征系统实现算法（ERA）[67] 等方法，生成底层动力学的线性近似，从而识别不稳定方向/分岔。如果能够找到对控制能力要求更低的有效算法，EF/DDDAS 可应用的非线性系统范围将大大扩大，因此这一领域是未来颇具潜力的研究方向。

致谢作者谨此感谢

G. Theocharis 提供的宝贵讨论。谨此感谢美国空军科学研究办公室（US-AFOSR）（FA9550-12-1-0332）和美国国家科学基金会（US-NSF）（CMMI 844540、1200319、1310173 和 1000337 ）提供的支持。MOW 感谢美国国家科学基金会（ US-NSF ） DMS 1204783 项目的支持。

参考文献

[1] V. F. Nesterenko，非均质材料动力学，Springer，2001。

[2] S. Sen、J. Hong、J. Bang、E. Avalos 和 R. Doney，“颗粒链中的孤立波”，《物理报告》，第 462 卷，第 21–66 页，2008年。[3] E. J. Doedel，“AUTO：用于自治系统自动分岔分析的程序”，《数值大会》，第 30 卷，第 265–284 页，1981 年。[4] A. Dhooge 、 W. Govaerts 和 Y. A. Kuznetsov，“MATCONT：用于常微分方程数值分岔分析的 MATLAB 软件包”，《ACM 数学软件汇刊》（TOMS），第 29 卷，第 141–164 页，2003年。[5] M. A. Heroux 和 J. M. Willenbring，《Trilinos 用户指南》，美国能源部，2003年。[6] C. Daraio、V. F. Nesterenko、E. B. Herbold 和 S. Jin，“复合颗粒介质中的能量捕获与冲击解体”，《物理评论快报》，第 96 卷，第 058002 页，2006年。[7] R. Doney 和 S. Sen，“装饰型、渐缩型和高度非线性的颗粒链”，《物理评论快报》，第 97 卷，第 155502 页，2006年。[8] F. Fraternali、M. A. Porter 和 C. Daraio，“复合颗粒防护器的优化设计”，《先进材料与结构力学》，第 17 卷，第 1–19 页，2009年。[9] J. Hong，“颗粒防护器中冲量能量的普适幂律衰减”，《物理评论快报》，第 94 卷，第 108001 页，2005年。[10] A. Spadoni 和 C. Daraio，“利用非线性声学透镜产生并控制声子弹”，《美国国家科学院院刊》，第 107 卷，第 7230–7234 页，2010年。[11] N. Boechler、G. Theocharis 和 C. Daraio，“基于分岔的声学切换与整流”，《自然·材料》，第 10 卷，第 665–668 页，2011年。[12] C. Daraio、V. F. Nesterenko、E. B. Herbold 和 S. Jin，“特氟龙珠子链中的强非线性波”，《物理评论 E》，第 72 卷，第 016603 页，2005年。[13] V. F. Nesterenko、C. Daraio、E. B. Herbold 和 S. Jin，“强非线性颗粒介质界面处的异常波反射”，《物理评论快报》，第 95 卷，第 158702 页，2005年。[14] N. J. Zabusky 和 M. A. Porter，“Scholarpedia”，2010年。[在线]。网址：http://www.scholarpedia.org/article/Soliton。[访问日期：14 03 2021]。[15] S. Flach 和 A. V. Gorbach，“离散呼吸子——理论与应用进展”，《物理报告》，第 467 卷，第 1–116 页，2008年。[16] F. Lederer、G. I. Stegeman、D. N. Christodoulides、G. Assanto、M. Segev 和 Y. Silberberg，“光学中的离散孤子”，《物理报告》，第 463 卷，第 1–126 页，2008年。[17] O. Morsch 和 M. Oberthaler，“光学晶格中玻色–爱因斯坦凝聚体的动力学”，《现代物理评论》，第 78 卷，第 179 页，2006 年。[18] M. Sato、B. E. Hubbard 和 A. J. Sievers，“专题综述：微机械振子阵列中的非线性能量局域化及其操控”，《现代物理评论》，第 78 卷，第 137 页，2006年。

[19] A. Chabchoub、O. Kimmoun、H. Branger、N. Hoffmann、D. Proment、M. Onorato 和 N. Akhmediev，“水面上暗孤子的实验观测”，物理评论快报，第110卷，第124101页，2013年。[20] A. Weller、J. P. Ronzheimer、C. Gross、J. Esteve、M. K. Oberthaler、D. J. Frantzeskakis、G. Theocharis 和 P. G. Kevrekidis，“振荡和相互作用物质波暗孤子的实验观测”，物理评论快报，第101卷，第130401页，2008年。[21] D. J. Frantzeskakis，“原子玻色–爱因斯坦凝聚体中的暗孤子：从理论到实验”，《物理学杂志A：数学与理论》，第43卷，第213001页，2010年。[22] W. Tong、M. Wu、L. D. Carr 和 B. A. Kalinikos，“由非相干波形成随机暗包络孤子”，物理评论快报，第104卷，第037207页，2010年。[23] A. Kanshu、C. E. Rüter、D. Kip、J. Cuevas 和 P. G. Kevrekidis，“具有散焦饱和非线性和交替耦合的一维波导阵列中的暗晶格孤子”，《欧洲物理学杂志D》，第66卷，第1–12页，2012年。[24] B. Mandal、R. Basu、K. Chowdhury、A. Biswas、A. K. Bandyopadhyay、A. K. Bhattacharjee 和 D. Mandal，“非线性超材料中的量子呼吸子”，《先进纳米材料与纳米技术》，第539页，2013年。[25] F. Baronio、B. Frisquet、S. Chen、G. Millot、S. Wabnitz 和 B. Kibler，“在通信光纤中观测到一组暗怪波”，《物理评论A》，第97卷，第013852页，2018年。[26] A. Fraile、E. N. Koukaras、K. Papagelis、N. Lazarides 和 G. P. Tsironis，“悬空石墨烯中的长寿命离散呼吸子”，《混沌、孤子与分形》，第87卷，第262–267页，2016年。[27] H. O. C. Gutierrez、M. M. C. Gutierrez、G. I. C. F. Rivera、L. J. C. F. Rivera 和 D. F. R. Vallejo，“利用对称莫尔斯势、溶剂势和外势研究DNA呼吸中的暗呼吸子”，Eclética Química Journal，第43卷，第44–49页，2018年。[28] K. Law、A. Stuart 和 K. Zygalakis，《数据同化：数学导论》，Springer，2015年。[29] I. G. Kevrekidis、C. W. Gear 和 G. Hummer，“无方程：复杂多尺度系统的计算机辅助分析”，《美国化学工程师学会期刊》，第50卷，第1346–1355页，2004年。[30] I. G. Kevrekidis 和 G. Sa maey，“无方程多尺度计算：算法与应用”，《物理化学年度评论》，第60卷，第321–344页，2009年。[31] I. G. Kevrekidis、C. W. Gear、J. M. Hyman、P. G. Kevrekidid、O. Runborg、C. Theodoropoulos 等，“无方程粗粒化多尺度计算：使微观模拟器能够进行系统级分析”，《数学科学通讯》，第1卷，第715–762页，2003年。

[32] C. Theodoropoulos、Y.-H. Qian 和 I. G. Kevrekidis，“â€œ利用时间步进器进行粗粒化稳定性和分岔分析：一个反应扩散示例”，美国国家科学院院刊，第97卷，第9840–9843页，2000年。[33] A. V. M. Herz、T. Gollisch、C. K. Machens 和 D. Jaeger，“单神经元动力学与计算建模：细节与抽象之间的平衡”，《科学》，第314卷，第80–85页，2006年。[34] V. Zaburdaev、S. Uppaluri、T. Pfohl、M. Engstler、R. Friedrich 和 H. Stark，“朗之万动力学揭示游动寄生虫的运动模式”，《物理评论快报》，第106卷，第208103页，2011年。[35] C. I. Siettos、C. C. Pantelides 和 I. G. Kevrekidis，“使动态过程模拟器能够执行替代任务：用于计算机辅助分析的基于时间步进器的工具包”，《工业与工程化学研究》，第42卷，第6795–6801页，2003年。[36] G. Hummer 和 I. G. Kevrekidis，“肽片段的粗粒化分子动力学：自由能、动力学及长时间动力学计算”，《化学物理学杂志》，第118卷，第10762–10773页，2003年。[37] K. A. Bold、Y. Zou、I. G. Kevrekidis 和 M. A. Henson，“分析异质细胞群体动力学的无方程方法”，《数学生物学杂志》，第55卷，第331–352页，2007年。[38] R. Conte 和 M. Paolucci，“论基于主体的建模与计算社会科学”，《心理学前沿》，第5卷，第668页，2014年。[39] A. C. Tsoumanis、C. I. Siettos、G. V. Bafas 和 I. G. Kevrekidis，“社交网络中的无方程多尺度计算：从基于主体的建模到粗粒化稳定性与分岔分析”，《国际分岔与混沌杂志》，第20卷，第3673–3688页，2010年。[40] C. T. Kelley，《用牛顿法求解非线性方程》，第1卷，工业与应用数学学会，2003年。[41] D. A. Knoll 和 D. E. Keyes，“无雅可比牛顿–克雷洛夫方法：方法与应用综述”，《计算物理学杂志》，第193卷，第357–397页，2004年。[42] Y. Saad 和 M. H. Schultz，“GMRES：求解非对称线性方程组的广义最小残差算法”，《工业与应用数学学会科学与统计计算杂志》，第7卷，第856–869页，1986年。[43] R. B. Lehoucq、D. C. Sorensen 和 C. Yang，《ARPACK用户指南：利用隐式重启阿诺尔迪方法求解大规模特征值问题》，第6卷，工业与应用数学学会，1998年。[44] B. Krauskopf 和 H. Osinga，“映射的不稳定流形的增长：一维与准二维情形”，《计算物理学杂志》，第146卷，第404–419页，1998年。[45] C. Chong、F. Li、J. Yang、M. O. Williams、I. G. Kevrekidis、P. G. Kevrekidis 和 C. Daraio，“阻尼驱动颗粒晶体：暗呼吸子和多呼吸子的理想试验场”，物理评论E，第89卷，第3期，第032924页，2014年。

[46] C. Chong、P. G. Kevrekidis、G. Theocharis 和 C. Daraio，《颗粒晶体中的暗呼吸子》，《物理评论 E》，第 87 卷，页码 042202，2013年。[47] F. Li、L. Yu 和 J. Yang，《基于孤立波的一维颗粒晶体应变测量》，《物理学 D：应用物理》，第 46 卷，页码 155106，2013年。[48] M. Beck、J. Knobloch、D. J. B. Lloyd、B. Sandstede 和 T. Wagenknecht，《局域图样的蛇形分岔、梯子分岔与孤立分支》，《工业与应用数学学会数学分析杂志》，第 41 卷，页码 936–972，2009年。[49] A. Bergeon、J. Burke、E. Knobloch 和 I. Mercader，《埃克豪斯不稳定性与同宿蛇形分岔》，《物理评论 E》，第 78 卷，页码 046201，2008年。[50] J. Burke 和 E. Knobloch，《同宿蛇形分岔：结构与稳定性》，《混沌：非线性科学跨学科期刊》，第 17 卷，页码 037102，2007年。[51] J. H. P. Dawes，《具有大尺度模态的局域图样形成：倾斜蛇形分岔》，《工业与应用数学学会应用动力系统杂志》，第 7 卷，页码 186–206，2008年。[52] J. Knobloch、D. J. B. Lloyd、B. Sandstede 和 T. Wagenknecht，《同宿蛇形分岔情形下双脉冲解的孤立分支》，《动力学与微分方程杂志》，第 23 卷，页码 93–114，2011年。[53] S. McCalla 和 B. Sandstede，《多维 Swift–Hohenberg 方程径向解的蛇形分岔：数值研究》，《物理学 D：非线性现象》，第 239 卷，页码 1581–1592，2010年。[54] F. Haudin、R. G. Rojas、U. Bortolozzo、S. Residori 和 M. G. Clerc，《空间受迫系统中局域图样的同宿蛇形分岔》，《物理评论快报》，第 107 卷，页码 264101，2011年。[55] T. M. Schneider、J. F. Gibson 和 J. Burke，《蛇形分岔与梯子分岔：平面库埃特流的局域解》，《物理评论快报》，第 104 卷，页码 104501，2010年。[56] Y. A. Kuznetsov，《应用分岔理论基础》，第 112 卷，Springer Science & Business Media，2013年。[57] I. G. Kevrekidis、R. Aris、L. D. Schmidt 和 S. Pelikan，《映射不变圆的数值计算》，《物理学 D：非线性现象》，第 16 卷，页码 243–251，1985年。[58] S. Newhouse、D. Ruelle 和 F. Takens，《T m 上准周期流附近奇异 Axiom A 吸引子的出现，m≥ 3》，《数学物理通讯》，第 64 卷，页码 35–40，1978年。[59] P. L. Boyland，《圆映射的分岔：阿诺德舌、双稳态与旋转区间》，《数学物理通讯》，第 106 卷，页码 353–381，1986年。[60] F. Schilder 和 B. B. Peckham，《阿诺德舌分岔情景的计算》，《计算物理学杂志》，第 220 卷，页码 932–951，2007年。[61] J. Guckenheimer 和 P. Holmes，《非线性振荡、动力系统与向量场的分岔》，第 42 卷，纽约 Springer Verlag，1983年。

[62] C. I. Siettos、I. G. Kevrekidis 和 D. Maroudas，《通过微观模拟器构建粗略分岔图：一种基于状态反馈控制的方法》，《国际分岔与混沌杂志》，第 14 卷，第 207–220 页，2004年。[63] J. Sieber 和 B. Krauskopf，《面向实验的基于控制的分岔分析》，《非线性动力学》，第 51 卷，第 365–377 页，2008年。[64] H. O. Wang 和 E. H. Abed，《混沌系统的分岔控制》，《自动化》，第 31 卷，第 1213–1226 页，1995年。[65] P. J. Schmid，《数值和实验数据的动态模态分解》，《流体力学杂志》，第 656 卷，第 5–28 页，2010年。[66] D. R. Fokkema 和 G. Sleijpen，《用于求解具有复谱的非对称矩阵线性方程的 BiCGstab (1)》，《数值分析电子汇刊》，第 1 卷，第 2000 页，1993年。[67] J.-N. Juang 和 R. S. Pappa，《用于模态参数识别和模型降阶的特征系统实现算法》，《制导、控制与动力学杂志》，第 8 卷，第 620–627 页，1985年。