arXiv:2305.02406v1 [math.CO] 3 May 2023

Garland 的令牌图方法

Alan Lew*

卡内基梅隆大学数学科学系，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，邮编 15213

摘要

图 $G=(V,E)$ 的第 k 个令牌图是图 $F_k(G)$，其顶点为 V 的所有 k 元子集，边则是所有满足以下条件的 k 元子集对 A,B： A 与 B 的对称差在 G 中构成一条边。令 $L(G)$ 为 G 的拉普拉斯矩阵， $L_k(G)$ 为 $F_k(G)$ 的拉普拉斯矩阵。Dalf´o 等人证明，对于任意具有 n 个顶点的图 G 以及任意 $0\leq \ell\leq k\leq \lfloor n/2\rfloor$， $L_\ell(G)$ 的谱包含于 $L_k(G)$ 的谱中。

这里，我们继续研究 $L_k(G)$ 的谱与 $L_{k-1}(G)$ 的谱之间的关系。特别地，我们证明，对于 $1\leq k\leq \lfloor n/2\rfloor$， $L_k(G)$ 的任意不属于 $L_{k-1}(G)$ 的谱的特征值 λ 都满足

$$k(\lambda_2(L(G))-k+1)\leq \lambda\leq k\lambda_n(L(G)),$$

其中， $L(G)$ 的第二小特征值 $\lambda_2(L(G))$（也称为 G 的代数连通度）为 $\lambda_2(L(G))$，而其最大特征值为 $\lambda_n(L(G))$。我们的证明基于对 Garland 方法的改编，该方法最初用于研究单纯复形的高维拉普拉斯算子。

1 引言

设 $G=(V,E)$ 为一个图。 G 的 k 阶令牌图记为 $F_k(G)$，它是以顶点集 $\binom{V}{k}$ 为顶点集的图，其边是满足 $|A\cap B|=k-1$ 和 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\in E$ 的点对 $\{A,B\}$。令牌图最初由 Johns 在 [15] 中定义，当时称为 k- 元组顶点图（另见例如 [2, 21, 3]）。在 [4], 中，它们以 k 阶对称幂之名被重新引入。最后，在 [9], 中，它们再次以目前的名称被引入。令牌图也隐含地出现在图上的“对称排斥过程”的研究中，该过程由 Spitzer 于 [19] 引入（另见例如 [6]）。注意，对于 $k=0$ ，图 $F_0(G)$ 只是一个只有一个顶点（对应于空集）且没有边的图；对于 $k=1$ ，我们有 $F_1(G)\cong G$；并且，如果 $|V|=n$，那么对于所有 $0\leq k\leq n$ ， $F_k(G)\cong F_{n-k}(G)$（另见例如 [9]）。

对于对称矩阵 $M\in\mathbb{R}^{m\times m}$，我们用 $\lambda_i(M)$ 表示其第 i 小的特征值。设 $L(G)$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵， $L_k(G)=L(F_k(G))$ 为其第 k 个令牌图的拉普拉斯矩阵。Dalf´o、Duque、Fabila-Monroy、Fiol、Huemer、Trujillo-Negrete 和 Mart´ınez 在 [7] 中研究了令牌图的拉普拉斯谱。特别地， [7] 中证明了，对于任意 $0\leq \ell\leq k\leq \lfloor n/2\rfloor$， $L_\ell(G)$ 的谱包含于 $L_k(G)$ 的谱中。

令 $1\leq k\leq\lfloor n/2\rfloor$，并令 λ 为 $L_k(G)$ 的一个特征值。若 λ 作为 $L_k(G)$ 的特征值的重数大于其作为 $L_{k-1}(G)$ 的特征值的重数，则称 λ 是非平凡的。特别地， $L_k(G)$ 的任何不包含在 $L_{k-1}(G)$ 的谱中的特征值都是非平凡特征值。我们将 $L_k(G)$ 的最大特征值记为 $\lambda^{(k)}_{\max}(G)$，将其最小非平凡特征值记为 $\lambda^{(k)}{}_{\text{最小}}(G)$。例如，对于 $k=1$，我们有 $\lambda^{(1)}_{\max}(G)=\lambda_n(L(G))$，以及 $\lambda^{(1)}{}_{\text{最小}}(G)=\lambda_2(L(G))$。我们的主要结果包括以下关于 $\lambda^{(k)}_{\max}(G)$ 和 $\lambda^{(k)}{}_{\text{最小}}(G)$ 的界。

*电子邮箱：alanlew@andrew.cmu.edu

定理 1.1. 设 $G=(V,E)$ 是一个具有 $|V|=n$ 的图，并设 $2\le k\le \lfloor n/2\rfloor$。那么

$$\lambda_{max}^{(k)}(G)\le \frac{k}{k-1}\lambda_{max}^{(k-1)}(G)$$

and

$$\lambda_{min}^{(k)}(G)\ge \frac{k}{k-1}\lambda_{min}^{(k-1)}(G)-k.$$

因此，我们得到以下关于 $L_k(G)$ 的非平凡谱界。

定理 1.2. 设 $G=(V,E)$ 是一个具有 $|V|=n$ 的图，且设 $1\le k\le \lfloor n/2\rfloor$。设 λ 是 $L_k(G)$ 的一个非平凡特征值。那么，

$$k(\lambda_2(L(G))-k+1)\le \lambda\le k\lambda_n(L(G)).$$

定理 1.2 中的两个不等式都是紧的：当 G 是至少有 k 个部分的完全平衡多部图时，达到下界；当 G 是至少 k 个大小相同的互不相交的团的并时，达到上界（见第 4 节）。

有人曾猜想，在 [7]（另见 [8, 18]）中，对于任意一个具有 n 个顶点的图 G，以及任意 $1\le k\le n-1$，$\lambda_2(L(G)) = \lambda_2(L_k(G))$。事实上，正如 [17], 中所提到的，这可以作为 Aldous 谱隙猜想的一个特例得出，而该猜想已由 Caputo、Liggett 和 Richthammer 证明（见 [6, 第 4 节 4.1.1]）。注意，在 $\lambda_2(G)\ge k$ 的特殊情形下，等式 $\lambda_2(L(G)) = \lambda_2(L_k(G))$ 可直接由定理 1.2 中的下界推出。

我们对定理 1.1 的证明依赖于 Garland 的“由局部到整体”方法的一种改编（[11], 另见 [5, 22]）。在其原始形式中，Garland 的方法将单纯复形上的高维拉普拉斯矩阵的谱与该复形某些子图的拉普拉斯谱联系起来。在 [1], Aharoni、Berger 和 Meshulam 发展了 Garland 论证的“整体版本”，将图 G 的团复形上的高维拉普拉斯矩阵的谱与 G的拉普拉斯谱联系起来。随后在 [16] 中，这一关系被推广到更一般的单纯复形类别。我们这里的论证可以看作是 [1], 中论证的一种类似，并且其动机来自图 G 的 k 阶令牌图的拉普拉斯与 G的团复形的（$k-1$）维拉普拉斯之间的相似性。

本文组织如下：第 2 节介绍有关拉普拉斯矩阵以及令牌图的拉普拉斯谱的一些背景知识。第 3 节证明本文的主要结果，即定理 1.1 和 1.2。第 4 节给出极值例子，以展示定理 1.2 的锐性。

2 预备知识

设 $G=(V,E)$ 为一个具有 $|V|=n$ 的图。为方便起见，我们假设 $V=[n]$。对于一个顶点 $v\in V$，令 $d_G(v) = |\{e\in E:\ v\in e\}|$ 为 v 在 G 中的度。拉普拉斯矩阵 $L(G)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为

$$L(G)_{u,v}=\begin{cases} d_G(v) & \text{if } u=v,\\ -1 & \text{if } \{u,v\}\in E,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $0\le \ell\le k\le n$，令 $B_{n,k,\ell}\in\mathbb{R}^{\binom{n}{k}\times\binom{n}{\ell}}$ 为一个矩阵，其行由 $[n]$ 的 k-子集索引，列由其 ℓ-子集索引，矩阵元素为

$$(B_{n,k,\ell})_{\sigma,\eta}=\begin{cases}1 & \text{if } \eta\subset\sigma,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

对于 $\sigma\in\binom{[n]}{k}$ 和 $\eta\in\binom{[n]}{\ell}$。众所周知（例如，参见 [13, 14, 20]），对于 $k\le\lfloor n/2\rfloor$, $B_{n,\ k,\ \ell}$ 的秩为$\binom{n}{\ell}$。在 [7, 定理 4.3], 中，已证明对于任意 $1\le k\le n$,

$$B_{n,k,k-1}L_{k-1}(G)=L_k(G)B_{n,k,k-1}. \tag{2.1}$$

方程（2.1）表明，$\mathrm{Im}(B_{n,k,k-1})$ 和 $\mathrm{Im}(B_{n,k,k-1})^{\perp} = \mathrm{Ker}(B^T_{n,k,k-1})$ 都是 $L_k(G)$ 的不变子空间。此外，对于 $1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$，利用（2.1）以及 $B_{n,k,k-1}$ 具有满列秩这一事实，我们可以得到：如果 $\phi_1, \dots, \phi_{\binom{n}{k-1}}$ 构成 $\mathbb{R}^{\binom{n}{k-1}}$ 的一组基，且该基由 $L_{k-1}(G)$ 的特征向量组成，相应的特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_{\binom{n}{k-1}}$，那么 $B_{n,k,k-1}\phi_1, \dots, B_{n,k,k-1}\phi_{\binom{n}{k-1}}$ 构成 $\mathrm{Im}(B_{n,k,k-1})$ 的一组基，且该基由 $L_k(G)$ 的特征向量组成，其特征值与 $\lambda_1, \dots, \lambda_{\binom{n}{k-1}}$ 相同（参见 [7, 推论 4.5]）。特别地，$L_{k-1}(G)$ 的谱包含于 $L_k(G)$ 的谱之中（包括重数）。由此可直接得到以下有用的结果：

引理 2.1. 设 $1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$，且 λ 是 $L_k(G)$ 的特征值。那么，λ 是非平凡的，当且仅当存在 $L_k(G)$ 的特征向量 ϕ，其特征值为 λ，并满足 $B^T_{n,k,k-1}\phi = 0$。

引理 2.2。设 $1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$。那么

$$\lambda^{(k)}_{min}(G) = \min\left\{ \frac{\phi^T L_k(G)\phi}{\|\phi\|^2} \,:\, 0 \ne \phi \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}},\, B^T_{n,k,k-1}\phi = 0 \right\}.$$

3 Garland 型论证

在本节中，我们证明主要结果，即定理 1.1 和 1.2。设 $G = ([n], E)$ 是一个图，且令$2 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$。令 $L = L(G)$ 和 $L_k = L_k(G) = L(F_k(G))$。我们将用E_k表示 $F_k(G)$ 的边集。此外，对于$\sigma \in \binom{[n]}{k}$，令 $d_k(\sigma) = d_{F_k(G)}(\sigma)$ 表示 σ 在 $F_k(G)$ 中的度。

设 $\phi \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$。对于任意 $u \in [n]$，我们定义 $\phi_u \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k-1}}$ 为

$$\phi_u(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau \cup \{u\}) & \text{if } u \notin \tau, \\ 0 & \text{if } u \in \tau, \end{cases}$$

对于任意 $\tau \in \binom{[n]}{k-1}$。对于一个集合 $\sigma \in \binom{[n]}{k}$，记 $E_\sigma = \{e \in E :\ e \subset \sigma\}$. 。我们将对角矩阵$D_k \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}}$ 定义为

$$(D_k)_{\sigma,\tau} = \begin{cases} |E_\sigma| & \text{if } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.1}$$

对所有 $\sigma,\tau \in \binom{[n]}{k}$。定理 1.1 将由以下恒等式推出：

命题 3.1。设 $\phi \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$。则

$$(k-1)\phi^T L_k \phi = \left(\sum_{u=1}^{n} \phi_u^T L_{k-1} \phi_u \right) - 2\phi^T D_k \phi.$$

证明命题 3.1 需要以下关于 $F_k(G)$ 中度之和的结果。引理 3.2。设 $\sigma \in \binom{[n]}{k}$。则，

$$\sum_{u \in \sigma} d_{k-1}(\sigma \setminus \{u\}) = (k-1)d_k(\sigma) + 2|E_\sigma|.$$

证明。注意，对于任意 $0 \le j \le n$ 和任意 $\eta \in \binom{[n]}{j}$，$d_j(\eta) = |\{e \in E :\ |e \cap \eta| = 1\}|$。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \sigma} d_{k-1}(\sigma \setminus \{u\}) &= \sum_{u \in \sigma} \sum_{v \in \sigma \setminus \{u\}} \sum_{\substack{w \in ([n] \setminus \sigma) \cup \{u\}, \\ \{v,w\} \in E}} 1 = \sum_{u \in \sigma} \sum_{v \in \sigma \setminus \{u\}} \sum_{\substack{w \in [n] \setminus \sigma, \\ \{v,w\} \in E}} 1 + \sum_{u \in \sigma} \sum_{\substack{v \in \sigma \setminus \{u\}, \\ \{u,v\} \in E}} 1 \\ &= (k-1) \sum_{v \in \sigma} \sum_{\substack{w \in [n] \setminus \sigma, \\ \{v,w\} \in E}} 1 + \sum_{u \in \sigma} \sum_{\substack{v \in \sigma \setminus \{u\}, \\ \{u,v\} \in E}} 1 = (k-1)d_k(\sigma) + 2|E_\sigma|. \end{aligned}$$

□

命题 3.1 的证明。我们有

$$\begin{aligned}\phi^T L_k \phi &= \sum_{\{\sigma,\tau\}\in E_k} (\phi(\sigma)-\phi(\tau))^2 = \sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}} d_k(\sigma)\phi(\sigma)^2 - 2\sum_{\{\sigma,\tau\}\in E_k}\phi(\sigma)\phi(\tau)\\ &= \sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}} d_k(\sigma)\phi(\sigma)^2 - 2\sum_{\eta\in\binom{[n]}{k-1}}\sum_{\substack{\{v,w\}\in E,\\ v,w\notin\eta}}\phi(\eta\cup\{v\})\phi(\eta\cup\{w\}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

类似地,

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^n \phi_u^T L_{k-1}\phi_u &= \sum_{u=1}^n\sum_{\tau\in\binom{[n]}{k-1}} d_{k-1}(\tau)\phi_u(\tau)^2 - 2\sum_{u=1}^n\sum_{\eta\in\binom{[n]}{k-2}}\sum_{\substack{\{v,w\}\in E,\\ v,w\notin\eta}}\phi_u(\eta\cup\{v\})\phi_u(\eta\cup\{w\})\\ &= \sum_{\tau\in\binom{[n]}{k-1}}\sum_{u\in[n]\setminus\tau} d_{k-1}(\tau)\phi(\tau\cup\{u\})^2 - 2\sum_{\eta\in\binom{[n]}{k-2}}\sum_{u\in[n]\setminus\eta}\sum_{\substack{\{v,w\}\in E,\\ v,w\notin\eta\cup\{u\}}}\phi(\eta\cup\{u,v\})\phi(\eta\cup\{u,w\})\\ &= \sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}}\left(\sum_{u\in\sigma} d_{k-1}(\sigma\setminus\{u\})\right)\phi(\sigma)^2 - 2(k-1)\sum_{\tau\in\binom{[n]}{k-1}}\sum_{\substack{\{v,w\}\in E,\\ v,w\notin\tau}}\phi(\tau\cup\{v\})\phi(\tau\cup\{w\}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

根据引理 3.2，对于所有 $\sigma\in\binom{[n]}{k}$，我们有，

$$\sum_{u\in\sigma} d_{k-1}(\sigma\setminus\{u\}) = (k-1)d_k(\sigma) + 2|E_\sigma|.$$

因此，由 (3.2) 和 (3.3)，我们得到

$$(k-1)\phi^T L_k\phi = \sum_{u=1}^n \phi_u^T L_{k-1}\phi_u - 2\sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}}|E_\sigma|\phi(\sigma)^2 = \sum_{u=1}^n \phi_u^T L_{k-1}\phi_u - 2\phi^T D_k\phi.$$

□

我们还需要下面的引理。

引理 3.3. 设 $\phi\in\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$。则

$$\sum_{u=1}^n \|\phi_u\|^2 = k\|\phi\|^2.$$

证明。

$$\sum_{u=1}^n\|\phi_u\|^2 = \sum_{u=1}^n\sum_{\tau\in\binom{[n]}{k-1}}\phi_u(\tau)^2 = \sum_{\tau\in\binom{[n]}{k-1}}\sum_{u\in[n]\setminus\tau}\phi(\tau\cup\{u\})^2 = \sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}}\sum_{u\in\sigma}\phi(\sigma)^2 = k\sum_{\sigma\in\binom{[n]}{k}}\phi(\sigma)^2 = k\|\phi\|^2.$$

□

现在我们可以证明定理 1.1：

定理 1.1 的证明。设 $\lambda = \lambda_{\max}^{(k)}(G)$，并设 $\phi\in\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ 是 L_k 的一个特征向量，其特征值为 λ。由命题 3.1 可得

$$(k-1)\lambda\|\phi\|^2 = (k-1)\phi^T L_k\phi = \sum_{u=1}^n \phi_u^T L_{k-1}\phi_u - 2\phi^T D_k\phi.$$

由于对所有 $\sigma \in \binom{[n]}{k}$ 都有 $|E_\sigma| \geq 0$，因此我们有 $\phi^T D_k \phi \geq 0$，从而

$$(k-1)\lambda\|\phi\|^2 \leq \sum_{u=1}^{n} \phi_u^T L_{k-1} \phi_u \leq \sum_{u=1}^{n} \lambda_{\max}^{(k-1)}(G)\|\phi_u\|^2 = k\lambda_{\max}^{(k-1)}(G)\|\phi\|^2,$$

其中最后一个等号由引理 3.3 得出。因此，我们得到 $\lambda \leq k\lambda_{\max}^{(k-1)}(G)/(k-1)$，如所需。

现在，令 $\lambda = \lambda^{(k)}{}_{\min}(G)$。由引理 2.1，由于 λ 非平凡，存在 L_k 的一个特征向量 ϕ，其特征值为 λ，使得 $B_{n,k,k-1}^T \phi = 0$。我们将证明，对于任意 $u \in [n]$，$B_{n,k-1,k-2}^T \phi_u = 0$。令 $u \in [n]$ 和 $\eta \in \binom{[n]}{k-2}$。若 $u \in \eta$，则有

$$B_{n,k-1,k-2}^T \phi_u(\eta) = \sum_{\substack{\tau \in \binom{[n]}{k-1}, \\ \eta \subset \tau}} \phi_u(\tau) = 0,$$

根据 ϕ_u 的定义。若 $u \notin \eta$，则

$$B_{n,k-1,k-2}^T \phi_u(\eta) = \sum_{\substack{\tau \in \binom{[n]}{k-1}, \\ \eta \subset \tau}} \phi_u(\tau) = \sum_{\substack{\tau \in \binom{[n]}{k-1}, \\ \eta \subset \tau,\, u \notin \tau}} \phi(\tau \cup \{u\}) = \sum_{\substack{\sigma \in \binom{[n]}{k}, \\ \eta \cup \{u\} \subset \sigma}} \phi(\sigma) = B_{n,k,k-1}^T \phi(\eta \cup \{u\}) = 0.$$

因此，由引理 2.2，$\phi_u^T L_{k-1} \phi_u \geq \lambda^{(k-1)}{}_{\min}(G)\|\phi_u\|^2$ 对所有 $u \in [n]$ 均成立。此外，由于对所有 $\sigma \in \binom{[n]}{k}$，$|E_\sigma| \leq \binom{k}{2}$ 均成立，我们有 $\phi^T D_k \phi \leq \binom{k}{2}\|\phi\|^2$，因此由命题 3.1 得到

$$\begin{aligned}(k-1)\lambda\|\phi\|^2 = (k-1)\phi^T L_k \phi &= \sum_{u=1}^{n} \phi_u^T L_{k-1} \phi_u - 2\phi^T D_k \phi \\ &\geq \sum_{u=1}^{n} \lambda_{\min}^{(k-1)}(G)\|\phi_u\|^2 - k(k-1)\|\phi\|^2 = \left(k\lambda_{\min}^{(k-1)}(G) - k(k-1)\right)\|\phi\|^2,\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由引理 3.3 得出。因此，$\lambda \geq k\lambda^{(k-1)}{}_{\text{最小值}}(G)/(k-1) - k$。 □

最后，通过对定理 1.1 进行归纳应用，我们得到定理 1.2。

定理 1.2 的证明。我们将证明

$$\lambda_{\max}^{(k)}(G) \leq k\lambda_n(L)$$

and

$$\lambda_{\min}^{(k)}(G) \geq k(\lambda_2(L) - k + 1).$$

我们对 k 进行归纳。对于 $k = 1$，结论显然成立。设 $k \geq 2$，并假设

$$\lambda_{\max}^{(k-1)}(G) \leq (k-1)\lambda_n(L)$$

and

$$\lambda_{\min}^{(k-1)}(G) \geq (k-1)(\lambda_2(L) - (k-1) + 1).$$

然后，根据定理 1.1，我们得到

$$\lambda_{\max}^{(k)}(G) \leq \frac{k}{k-1}\lambda_{\max}^{(k-1)}(G) \leq k\lambda_n(L),$$

and

$$\lambda_{\min}^{(k)}(G) \geq \frac{k}{k-1}\lambda_{\min}^{(k-1)}(G) - k \geq k(\lambda_2(L) - k + 1).$$

□

4 极值例子

下一个结果表明，定理 1.2 中的上界和下界都是紧的。

命题 4.1. 设 $m \geq k$，且 n 可被 m 整除。设 G 是 m 个互不相交的团的并，每个团的大小为 n/m。那么，$L_k(G)$ 的最大特征值恰好为 $kn/m = k\lambda_n(L(G))$。

设 G 是 G 的补图，即一个完全平衡的 m 部图，每一部的大小为 n/m。那么，$L_k(G)$ 的最小非平凡特征值恰好为 $k((m-1)n/m - k + 1) = k(\lambda_2(L(G)) - k + 1)$。

命题 4.1 可由类似于 [7, 定理 7.2(iv)] 中的论证得到。为完整起见，我们给出证明。我们将用到 Fiedler 的以下结果。回顾一下，给定图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$，笛卡尔积 $G \square G'$ 是顶点集为 $V \times V'$ 的图，其边的形式为 $\{(u, u'), (v, v')\}$，其中要么 $u = v$ 和 u' 在 G' 中与 v' 相邻，要么 $u' = v'$ 和 u 在 G 中与 v 相邻。

引理 4.2（Fiedler [10, 3.4]）。对于 $1 \leq i \leq m$，设 H_i 是一个有 n_i 个顶点的图，其拉普拉斯特征值为 $\lambda_1^i \leq \cdots \leq \lambda_{n_i}^i$。那么，笛卡尔积 $H_1 \square \cdots \square H_m$ 的拉普拉斯特征值为

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_{t_i}^i : 1 \leq t_i \leq n_i \ \forall i \in [m] \right\}.$$

我们还需要以下结果，它描述了完全图（也称为 Johnson 图）的令牌图的拉普拉斯谱。

引理 4.3（参见 [12, 定理 6.3.2、定理 6.3.3], [7, 式 19]）。设 K_n 是一个有 n 个顶点的完全图。那么，$L_k(K_n)$ 的特征值为

$$\{j(n-j+1) : 0 \leq j \leq k\}.$$

此外，对于每个 $0 \leq j \leq k$，对应于特征值 $j(n-j+1)$ 的特征子空间是 $\mathrm{Im}(B_{n,k,j-1})$ 在 $\mathrm{Im}(B_{n,k,j})$ 中的正交补，因此特征值 $j(n-j+1)$ 的重数为 $\binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$。特别地，对应于特征值 $k(n-k+1)$ 的特征向量恰好是满足 $B_{n,k,k-1}^T \phi = 0$ 的向量 $\phi \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$。

最后，我们需要以下关于 $L_k(G)$ 的谱与 $L_k(\bar{G})$ 的谱之间关系的结果，该结果可由 [7, 定理 6.2] 的证明推出：

引理 4.4. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，且 λ 是 $L_k(G)$ 的一个非平凡特征值。则 $\lambda = k(n-k+1) - \mu$，其中 μ 是 $L_k(\bar{G})$ 的某个非平凡特征值。

证明. 设 ϕ 是 $L_k(G)$ 的一个特征向量，其特征值为 λ。根据引理 2.1，我们可以假设 $B_{n,k,k-1}^T \phi = 0$。在 [7, 定理 6.2] 中已证明，ϕ 也是 $L_k(\bar{G})$ 的特征向量，其特征值为 μ；同时也是 $L_k(K_n)$ 的特征向量，其特征值为 ξ，其中 μ 和 ξ 满足 $\lambda + \mu = \xi$。由于 $B_{n,k,k-1}^T \phi = 0$，根据引理 4.3，我们有 $\xi = k(n-k+1)$。于是得到 $\lambda = k(n-k+1) - \mu$。此外，由于 ϕ 是 $L_k(\bar{G})$ 的特征向量，其特征值 μ 满足 $B_{n,k,k-1}^T \phi = 0$，根据引理 2.1 μ，它是 $L_k(G)$ 的一个非平凡特征值。 □

命题 4.1 的证明。设 $G_1, \ldots, G_m$ 是 G 的连通分量，每个分量都同构于 n/m 个顶点上的完全图。设

$$\mathcal{I} = \left\{ (k_1, \ldots, k_m) : 0 \leq k_i \leq n/m, \sum_{i=1}^{m} k_i = k \right\}.$$

那么，对于每个 $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathcal{I}$，$F_k(G)$，都有一个连通分支同构于 $F_{k_1}(G_1) \square \cdots \square F_{k_m}(G_m)$（参见 [7] 中推论 6.4 的证明）。由引理 4.2 和引理 4.3 可知，$L_k(G)$ 的每个特征值都具有如下形式

$$\sum_{i=1}^{m} j_i(n/m - j_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{m} j_i \right) n/m - \sum_{i=1}^{m} j_i(j_i - 1),$$

对于所有 $1 \le i \le m$，$(k_1,\ldots,k_m) \in \mathcal{I}$ 和 $0 \le j_i \le k_i$。

由于 $m \ge k$，我们可以将每个 k_i 取为 0 或 1，并对所有 i 取 $j_i = k_i$，从而得到一个特征值

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right) n/m - \sum_{i=1}^{m} k_i(k_i - 1) = kn/m = k\lambda_n(L(G)). \tag{4.1}$$

根据定理 1.2，这是 $L_k(G)$ 的最大特征值。此外，注意到，根据定理 1.2，这是 $L_k(G)$ 的一个非平凡特征值（否则，它将是 $L_{k-1}(G)$ 的一个大于 $(k-1)\lambda_n(L(G))$ 的特征值，这就产生了矛盾）。

现在，令 G 为 G 的补集。那么 $\lambda_2(L(G)) = n - \lambda_n(L(G)) = (m-1)n/m$。根据引理 4.4，$\lambda = k(n-k+1) - \mu$，其中 μ 是 $L_k(G)$ 的某个非平凡特征值。由 (4.1)，我们有

$$\begin{aligned}\mu &= k(n-k+1) - \lambda = k(n-k+1) - kn/m \\ &= k((m-1)n/m - k + 1) = k(\lambda_2(L(\bar{G})) - k + 1).\end{aligned}$$

根据定理 1.2，这是 $L_k(G)$ 的最小非平凡特征值。 □

参考文献

[1] R. Aharoni、E. Berger 和 R. Meshulam。旗复形的特征值与同调，以及图的向量表示。《几何与泛函分析》GAFA，15(3):555–566，2005。[2] Y. Alavi、M. Behzad、P. Erd˝os 和 D. R. Lick。双顶点图。《组合信息系统科学杂志》，16(1):37–50，1991。[3] Y. Alavi、D. R. Lick 和 J. Liu。双顶点图综述。《图与组合》，18:709–715，2002。[4] K. Audenaert、C. Godsil、G. Royle 和 T. Rudolph。图的对称平方。《组合理论杂志》B辑，97(1):74–90，2007。[5] W. Ballmann 和 J. Świątkowski。多面体胞腔复形自同构群的 L^2-上同调与性质（T）。《几何与泛函分析》GAFA，7(4):615–645，1997。[6] P. Caputo、T. Liggett 和 T. Richthammer。Aldous 谱隙猜想的证明。《美国数学学会杂志》，23(3):831–851，2010。[7] C. Dalf´o、F. Duque、R. Fabila-Monroy、M. A. Fiol、C. Huemer、A. L. Trujillo-Negrete 和 F. Z. Mart´ınez。关于令牌图的拉普拉斯谱。《线性代数及其应用》，625:322–348，2021。[8]C. Dalf´o 和 M. A. Fiol。关于令牌图的代数连通度。arXiv 预印本 arXiv:2209.01030，2022。[9] R. Fabila-Monroy、D. Flores-Pe˜naloza、C. Huemer、F. Hurtado、J. Urrutia 和 D. R. Wood。令牌图。《图与组合》，28:365–380，2012。[10] M. Fiedler。图的代数连通度。《捷克斯洛伐克数学杂志》，23(2):298–305，1973。[11] H. Garland。 p-进曲率与 p- 进群离散子群的上同调。《数学年刊》，第 375–423 页，1973。[12] C. Godsil 和 K. Meagher。Erd˝os-Ko-Rado 定理：代数方法。剑桥大学出版社，2016。

[13] D. H. Gottlieb。某类关联矩阵。《美国数学学会会刊》，17(6):1233–1237，1966。[14] J. E. Graver 和 W. Jurkat。整数设计的模结构。《组合理论杂志》A辑，15(1):75–90，1973。[15] G. L. Johns。图中的广义距离。博士论文，西密歇根大学，1988。[16] A. Lew。广义旗复形的谱隙与几何霍尔型定理。《国际数学研究通知》，2020(11):3364–3395，2020。[17] Y. Ouyang。从几何考量计算海森堡铁磁体的谱界。《数学物理学杂志》，60(7):071901，2019。[18] M. Reyes、C. Dalf´o、M. A. Fiol 和 A. Messegu´e。关于圈的令牌图的代数连通度。《第39届欧洲计算几何研讨会论文集》，2023。[19] F. Spitzer。马尔可夫过程的相互作用。《数学进展》，5(2):246–290，1970。[20] R. M. Wilson。 t-设计的必要条件对某些事物而言也是充分条件。《Utilitas Math》，4:207–215，1973。[21] V. Wright。 n-元组顶点图。硕士论文，埃默里大学，亚特兰大，1992。[22] A. Zuk。离散群的性质（T）与 Kazhdan常数。《几何与泛函分析》GAFA，13(3):643–670，2003。