arXiv:2305.02416v1 [math.DG] 3 May 2023

修改后的里奇流的特征值下界与分裂

TOBIAS HOLCK COLDING 和 WILLIAM P. MINICOZZI II

谨以此文献给我们的朋友乔尔·斯普鲁克（Joel Spruck）。

Abstract. 我们证明了修正的 Ricci 流中漂移拉普拉斯算子的特征值的尖锐下界。修正的 Ricci 流是关于度量和加权体积的一个耦合方程组，在 Ricci 流研究中发挥着重要作用。我们还将证明，在等号成立的情形下，存在一个分裂定理。

0. Introduction

流形 M 上的度量 g 和函数 f 诱导出加权 L^2 范数 $\|u\|^2_{L^2} = \int u^2 \, \mathrm{e}^{-f}$、相应的加权能量，以及一个自然的椭圆算子

$$\mathcal{L} = \Delta - \nabla_{\nabla f} \tag{0.1}$$

称为漂移拉普拉斯算子。当 M 紧致，或 g 完备且满足对数 Sobolev 不等式并且 $\int \mathrm{e}^{-f} \, dv_g < \infty$时，则 $\mathcal{L}$ 具有特征值

$$0 = \lambda_0(t) < \lambda_1(t) \leq \cdots \to \infty \tag{0.2}$$

这些特征值蕴含重要的几何信息。

三元组 (M, g, f) 是梯度收缩型 Ricci 孤立子（或收缩子），当且仅当 g 和 f 满足

$$\mathrm{Hess}_f + \mathrm{Ric} = \frac{1}{2} g \,, \tag{0.3}$$

其中 Ric 是度量 g对应的里奇曲率， [Ca, H]。Ricci 收缩子会作为 Ricci流的奇点出现。对于收缩子，存在一个尖锐的下界 $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$；当且仅当收缩子分裂出一条直线时，等号成立，即 [CxZ]。在 [CM2], 中，我们证明了如果收缩子在一个尺度上近似分裂，那么它在更大的尺度上也近似分裂；这称为近似分裂的传播。关于收缩子的渐近分裂定理，参见 [ChL] 。

我们在此关注流的类似下界与分裂。收缩子方程的抛物型对应是修正（或重标度）Ricci流。在这种情况下，度量 g 和函数 f 按如下方式演化：

$$g_t = g - 2 \, \mathrm{Hess}_f - 2 \, \mathrm{Ric} \,, \tag{0.4}$$

$$f_t = \frac{n}{2} - S - \Delta f \,. \tag{0.5}$$

这些耦合方程在Ricci流中十分重要，因为它们描述了经过缩放和微分同胚后，由奇点处的放大所产生的流；参见例如 [MM、SW]。它们也作为Perelman的熵泛函的负梯度流出现， [P、T]。方程(0.4)的静态解是收缩子。

作者的部分研究经费由美国国家科学基金会数学科学部（NSF DMS）项目资助，项目编号为 2104349 和 2005345。

简单的例子表明，即使流是古老的，修正的 Ricci 流上也不存在统一的下界，因此需要一些额外条件。接下来的定理给出了修正的 Ricci 流的推广。

定理 0.6. 若 M 是紧的， g、 f 满足 (0.4) 和 (0.5)，其中 $t \in [t_0, \infty)$，且存在一个序列 $t_j \to \infty$，使得 $(M, g(t_j), f(t_j))$ 收敛到一个收缩子，则对所有 t， $\lambda_1(t) > \frac{1}{2}$。

此外，我们还得到了 $\lambda_k(t)$ 演化的精确上界，适用于所有特征值：

T定理 0.7. 若 M 是紧的， g、 f 满足 (0.4) 和 (0.5)，且 $k \geq 1$，则 :

- 若 $\lambda_k(t_0) < \frac{1}{2}$，则对 $t_0 < t$， $\lambda_k(t) < \lambda_k(t_0)$，并且

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\lambda_k(t_0)}{2\,\lambda_k(t_0)\,(1 - \mathrm{e}^{t-t_0}) + \mathrm{e}^{t-t_0}}\,. \tag{0.8}$$

- 若 $\lambda_k(t_0) = \frac{1}{2}$，则对所有 $t_0 \leq t$， $\lambda_k(t) \leq \frac{1}{2}$。
- 若 $\frac{1}{2} < \lambda_k(t_0)$，则 (0.8) 对所有 $t < t_0 + \log \frac{2\,\lambda_k(t_0)}{2\,\lambda_k(t_0) - 1}$ ~~均成立。~~

最后一种情形中的假设 $t < t_0 + \log \frac{2\,\lambda_k(t_0)}{2\,\lambda_k(t_0) - 1}$ 等价于假设 (0.8) 中的分母为正。

前面的定理可以推广到一大类非紧加权空间，只需确保所涉及的所有分部积分均有意义，且积分均收敛。我们将在下面的定理中作出这一假设。

定理 0.9。假设 (0.4) 和 (0.5) 对 $t \in [t_0, \infty)$ 成立。如果 $\lambda_k(t_0) = \frac{1}{2}$ 对于某个 $k \geq 1$ 且 $\lambda_1(t_1) \geq \frac{1}{2}$，那么 $g(t)$ 会分裂出一个 $\mathbf{R}^k$ 因子，对于 $t \in [t_0, t_1]$。

当修正的流由在奇点处放大得到时，该流可能的长期极限描述了该奇点处可能的切流。因此，对于 Ricci流而言，放大的唯一性问题转化为修正的里奇流极限的唯一性问题；参见 [CM1] 关于平均曲率流的结果，以及 [Ba、CMZ1、CMZ2] 关于 Ricci流闭放大的唯一性的结果。

1. Differential inequalities

特征值 λ_k 关于 $\mathcal{L}$ 连续变化，但不一定可微。由于特征值的重数，可微性可能失效。不过，特征值的变分刻画为 $\lambda_k(t)$ 在未来给出了一个自然的上界。这个界以向前差商的上极限意义，为 $\lambda_k'(t)$ 给出了一个上界。我们汇总一些这类上界的基本推论。

对于连续函数G，如果连续函数 $h(t)$ 满足 $h'(t) \leq G(t)$，我们是指其在向前差商的上极限意义下满足该条件：对于每个 t，都有

$$\limsup_{0<\delta\to 0} \frac{h(t+\delta) - h(t)}{\delta} \leq G(t)\,. \tag{1.1}$$

相应的链式法则如下：若 h 在 $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 上满足 (1.1)，且 Φ 是定义在 $h(I)$ 上的 C^1 函数，并且 $\Phi'(h(t_0)) > 0$，则

$$\limsup_{0<\delta\to 0} \frac{\Phi\circ h(t_0+\delta) - \Phi\circ h(t_0)}{\delta} \leq \Phi'(h(t_0))\,G(t_0)\,. \tag{1.2}$$

引理 1.3. 若 h 是连续的，且对于 $t \in [a,b]$，$h'(t) \le c \in \mathbb{R}$ 按照 (1.1) 的意义成立，则对每个 $t \in [a,b]$，都有 $h(t) \le h(a) + c(t-a)$。

证明。任取 $\epsilon > 0$，并定义

$$I_\epsilon = \{t_0 \in [a,b] \,|\, h(t) \le h(a) + (c+\epsilon)(t-a) \text{ for all } t \le t_0\}. \tag{1.4}$$

由于 h 连续，I_ϵ 是闭集。注意 $a \in I_\epsilon$。为说明 $I_\epsilon = [a,b]$，我们将证明它是开集。因此，假设对于某个 $t_0 < b$，有 $t_0 \in I_\epsilon$。特别地，

$$h(t_0) \le h(a) + (c+\epsilon)(t_0 - a) \tag{1.5}$$

并且，根据假设，$h'(t_0) \le c$，其意义见 (1.1)。由此可知，存在 $\delta_0 > 0$，使得

$$\frac{h(t+\delta) - h(t)}{\delta} \le (c+\epsilon) \text{ for every } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{1.6}$$

由此可知 $t_0 + \delta \in I_\epsilon$，因此 I_ϵ 是开集，且等于整个 $[a,b]$。由于这对每个 $\epsilon > 0$ 都成立，我们得出，对于每个 $t \in [a,b]$，$h(t) \le h(a) + c(t-a)$。□

引理 1.7. 假设 $h(t) \ge 0$ 满足 $h'(t) \le h(t)(h(t) - 1)$，其意义如 (1.1) 所述。

- 如果 $h(t_0) < 1$，那么对于所有 $t > t_0$，$h(t) < h(t_0)$。
- 如果 $h(t_0) = 1$，那么对所有 $t \ge t_0$，均有 $h(t) \le 1$。

证明。第一个结论成立，因为 $h(t_0) < 1$ 意味着 $h'(t_0) < 0$，这表明$h(t_0+\delta) < h(t_0) < 1$ 对所有充分小的 $\delta > 0$ 均成立。

我们将通过反证法证明第二个结论。因此，假设存在$t_2 > t_0$，使得 $h(t_2) > 1$。令 t_1 为满足 $h(t) = 1$ 的 $t \in [t_0, t_2]$ 的最大值（该最大值存在，因为 h 是连续的，且 $h(t_0) = 1$）。由此可得，$t_1 < t_2$, $h(t_1) = 1$，并且在 $[t_1, t_2]$上 $h \ge 1$。特别地，在 $[t_1, t_2]$上 $h' \le 0$。因此，由引理 1.3 可知，在 $[t_1, t_2]$上 $h \le h(t_1) = 1$，这与 $h(t_2) > 1$ 矛盾，从而完成论证。□

Le引理 1.8. 假设对于 $t \ge t_0$，$F' \le (2F - 1)F$ 按照 (1.1) 的意义成立。

(1) 若 $F(t_0) < \frac{1}{2}$，则对所有 $t_1 > t_0$，$F(t_1) < F(t_0) < \frac{1}{2}$，并且

$$F(t_1) \le \frac{F(t_0)}{2F(t_0)(1 - e^{t_1 - t_0}) + e^{t_1 - t_0}}. \tag{1.9}$$

(2) 若对于 $t \in [t_0, t_1]$，若 $\frac{1}{2} < F(t)$ 且 $t_1 < t_0 + \log \frac{2F_{(t_0)}}{2F(t_0)-1}$，则 (1.9) 对 t 成立$_1$.

证明。令 $h = 2F$，使得 $h'(t) \le h(h-1)$。由链式法则可得

(A) 若 $F(t) < \frac{1}{2}$，则 $h(t) < 1$，并且由 (1.2) 结合 $\Phi(s) = \log \frac{s}{1-s}$ 可得 $\left(\log \frac{h}{1-h}\right)' \le -1$。

(B) 若 $\frac{1}{2} < F(t)$，则 $1 < h(t)$，并且由 (1.2) 结合 $\Phi(s) = \log \frac{s-1}{s}$ 可得 $\left(\log \frac{h-1}{h}\right)' \le 1$

由引理 1.7，若对任意 $\bar{t}$ 都有 $h(\bar{t}) < 1$，则对每个 $t > \bar{t}$ 都有 $h(t) < h(\bar{t}) < 1$。特别地，若$h(t_0) < 1$，则 (A) 在整个区间上成立，并且由引理 1.3 可得

$$\log \frac{h(t_1)}{1 - h(t_1)} \le -(t_1 - t_0) + \log \frac{h(t_0)}{1 - h(t_0)}. \tag{1.10}$$

将此式取指数，并利用 $h = 2F$，即可得到第一个结论。

现在假设在 $[t_0, t_1]$ 上，$\frac{1}{2} < F(t) = \frac{1}{2}\, h(t)$，且 $t_1 < t_0 + \log \frac{2F}{(t_0)\, 2F(t_0)-1}$。由此可知，(B) 在此区间上适用，且引理 1.3 表明，

$$\log \frac{h(t_1)-1}{h(t_1)} \leq (t_1 - t_0) + \log \frac{h(t_0)-1}{h(t_0)}\,. \tag{1.11}$$

对其进行指数化并利用 $h = 2F$ 可得第二个结论（假设 that$t_1 < t_0 + \log \frac{2F\ (t_0)}{2F\ (t_0)}$ -1 表明分母为~~正；在~~进行除法时正是利用这一点来保持不等式方向不变）。□

2. Eigenvalue evolution

在本节中，我们假设（M、g、f）满足（0.4）和（0.5）。向量场 V 的 f-散度定义为

$$\operatorname{div}_f V = \operatorname{div}(V) - \langle V, \nabla f \rangle\,. \tag{2.1}$$

我们需要 ∂_t 与 $\mathcal{L}$的交换子：

引理 2.2。我们有 $\partial_t(\mathcal{L}\, u) = \mathcal{L}\, u_t - 2\text{div}_f(\phi(\nabla u))$。

证明。由于 $g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}$，我们有 $(g^{-1})' = -g^{-1}\, g_t\, g^{-1}$。因此，由于 $\langle \nabla u, \nabla f \rangle = g^{ij}\, u_i\, f_j$，我们得到

$$\partial_t \langle \nabla u, \nabla f \rangle = -g_t(\nabla u, \nabla f) + \langle \nabla u_t, \nabla f \rangle + \langle \nabla u, \nabla f_t \rangle\,. \tag{2.3}$$

接下来，回顾一下 $\Delta u = (\det\ g)^{-\frac{1}{2}}\, \partial_i \left((\det\ g)^{\frac{1}{2}} g^{ij}\, u_j \right)$。为简化下文的记号，令 $\chi = \sqrt{\det g}$。~~利用~~

$$(\det\ g)' = (\det\ g)\, g^{ij}\, (g_t)_{ij} = 2\,(\det\ g)\, f_t\,, \tag{2.4}$$

我们看到 $\chi' = \chi\, f_t$ 以及 $[\chi^{-1}]' = -\chi^{-1}\, f_t$。由此可得

$$\begin{aligned} \partial_t\, \Delta\, u - \Delta\, u_t &= -\chi^{-1}\, f_t\, \partial_i \left(\chi\, g^{ij}\, u_j \right) + \chi^{-1}\, \partial_i \left(\chi\, f_t\, g^{ij}\, u_j \right) - \chi^{-1}\, \partial_i \left(\chi\, g^{ip}\, (g_t)_{pq}\, g^{qj}\, u_j \right) \\ &= \partial_i(f_t)\, g^{ij}\, u_j - \chi^{-1}\, \partial_i \left(\chi\, g^{ip}\, (g_t)_{pq}\, g^{qj}\, u_j \right) \\ &= \langle \nabla f_t, \nabla u \rangle - \operatorname{div}\left(g_t(\nabla u) \right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $g_t(\nabla u)$ 表示与 1-形式 $g_t(\nabla u, \cdot)$ 对偶的向量场。将此与 (2.3) 结合可得

$$\begin{aligned} \partial_t\, (\mathcal{L}\, u) &= \partial_t\, (\Delta\, u) - \partial_t\, (\langle \nabla u, \nabla f \rangle) \\ &= \Delta\, u_t + \langle \nabla f_t, \nabla u \rangle - \operatorname{div}\left(g_t(\nabla u) \right) + g_t(\nabla u, \nabla f) - \langle \nabla u_t, \nabla f \rangle - \langle \nabla u, \nabla f_t \rangle \\ &= \mathcal{L}\, u_t - \operatorname{div}_f \left(g_t(\nabla u) \right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

□

在本节余下部分，我们假设 M 是紧的。在适当的假设下，这些论证可推广到非紧情形；这些假设保证各种积分收敛，且边界项渐近地趋于零。

引理 2.7. 若 $u \in W^{1,2}$ 且 $\phi = \frac{1}{2}\, g - \text{Hess}_f - \text{Ric}$，则

$$\int \phi(\nabla u, \nabla u)\, \mathrm{e}^{-f} = \int \left(|\text{Hess}_u|^2 + \frac{1}{2}\, |\nabla u|^2 - (\mathcal{L}\, u)^2 \right) \mathrm{e}^{-f}\,. \tag{2.8}$$

证明. 漂移 Bochner 公式给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla u|^2 &= |\mathrm{Hess}_u|^2 + \langle \nabla \mathcal{L} u, \nabla u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + \mathrm{Hess}_f(\nabla u, \nabla u)\\ &= |\mathrm{Hess}_u|^2 + \langle \nabla \mathcal{L} u, \nabla u\rangle - \phi(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 . \end{aligned} \tag{2.9}$$

利用 $\mathcal{L}|\nabla u|^2$ 对 e^{-f} 的积分为零，再进行分部积分，即可得到引理中的第一个等式。□

引理 2.10。如果 $u_t = \mathcal{L} u + \frac{1}{2} u$ 和 $v_t = \mathcal{L} v + \frac{1}{2} v$，则

$$\partial_t \int u\, v\, \mathrm{e}^{-f} = \int \left(u\, v - 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle\right) \mathrm{e}^{-f} , \tag{2.11}$$

$$\partial_t \int |\nabla u|^2 \mathrm{e}^{-f} = -2 \int |\mathrm{Hess}_u|^2 \mathrm{e}^{-f} . \tag{2.12}$$

特别地，如果 $\int u\mathrm{e}^{-f} = 0$ 在某个时刻成立，那么此后它始终成立。

证明。演化保持体积元 $\mathrm{e}^{-f}\, dv$ 不变，因此对于任意函数 w，我们有

$$\partial_t \int w \mathrm{e}^{-f} = \int w_t \mathrm{e}^{-f} . \tag{2.13}$$

在此处应用这一结果，其中 $w = u\, v$ 是 where

$$(uv)_t = u\, v_t + v\, u_t = v\left(\mathcal{L} u + \frac{1}{2} u\right) + u\left(\mathcal{L} v + \frac{1}{2} v\right) = u\, v + \mathcal{L}(u\, v) - 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle .$$

对其积分即可得到第一个结论。利用

$$|\nabla u|^2 = g(\nabla u, \nabla u) = g^{-1}(du, du) , \tag{2.14}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\partial_t \int |\nabla u|^2 \mathrm{e}^{-f} &= \int \left(2\langle \nabla u, \nabla u_t\rangle - g_t(\nabla u, \nabla u)\right) \mathrm{e}^{-f}\\ &= -2 \int \left(u_t \mathcal{L} u + \phi(\nabla u, \nabla u)\right) \mathrm{e}^{-f} , \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中最后一个等号用到了分部积分和 $g_t = 2\,\phi$。应用引理 2.7 可得

$$\partial_t \int |\nabla u|^2 \mathrm{e}^{-f} = -2 \int \left(u_t \mathcal{L} u + |\mathrm{Hess}_u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - (\mathcal{L} u)^2\right) \mathrm{e}^{-f} . \tag{2.16}$$

由此及 $u_t = \mathcal{L} u + \frac{1}{2} u$ 可得第二个结论。最后，令 $w = u$，应用 (2.13) 得到

$$\partial_t \int u \mathrm{e}^{-f} = \int u_t \mathrm{e}^{-f} = \int \left(\mathcal{L} u + \frac{1}{2} u\right) \mathrm{e}^{-f} = \frac{1}{2} \int u \mathrm{e}^{-f} . \tag{2.17}$$

对其进行积分可知，如果 $\int u\mathrm{e}^{-f}$ 在某个时刻为零，那么在此后的所有时刻也都为零。□

2.1. 能量与内积的演化。给定 u、v，满足 $u_t = \mathcal{L}\,u + \frac{1}{2}\,u$ 和 $v_t = \mathcal{L}\,v + \frac{1}{2}\,v$，我们将反复使用以下量（其灵感来源于 [CM3] 中的第3节）：

$$J_{uv}(t) = \int u\,v\,\mathrm{e}^{-f}\,, \tag{2.18}$$

$$D_{uv}(t) = \int \langle \nabla u, \nabla v\rangle\,\mathrm{e}^{-f}\,. \tag{2.19}$$

我们还定义 $I_u(t) = J_{uu}(t)$、$E_u(t) = D_{uu}(t)$ 和 $F_u(t) = E_u(t)/I_u(t)$。采用这一记号，引理 2.10 给出

$$J'_{uv}(t) = J_{uv}(t) - 2\,D_{uv}(t)\,, \tag{2.20}$$

$$I'_u(t) = I_u(t) - 2\,E_u(t)\,, \tag{2.21}$$

$$(\log I_u)'(t) = 1 - 2\,F_u(t)\,, \tag{2.22}$$

$$E'_u(t) = -2\int |\mathrm{Hess}_u|^2\,\mathrm{e}^{-f} \leq 0\,, \tag{2.23}$$

$$F'_u(t) = -2\,\frac{\int |\mathrm{Hess}_u|^2\,\mathrm{e}^{-f}}{I_u(t)} + F_u(t)\,\left(2\,F_u(t) - 1\right)\,. \tag{2.24}$$

定理 0.7 的证明。沿时间平移，使得 $t_0 = 0$，并令 $\bar{u}_1$、…、$\bar{u}_k$ 在时刻 0 正交归一，且 $\mathcal{L}\,\bar{u}_i = -\lambda_i(0)\,\bar{u}_i$。积分

$$\mathcal{L}\,(\bar{u}_i\,\bar{u}_j) = (\lambda_i(0) + \lambda_j(0))\,\bar{u}_i\,\bar{u}_j + 2\,\langle \nabla \bar{u}_i, \nabla \bar{u}_j\rangle\,, \tag{2.25}$$

我们得到

$$2\int \langle \nabla \bar{u}_i, \nabla \bar{u}_j\rangle\,\mathrm{e}^{-f} = -(\lambda_i(0) + \lambda_j(0))\int \bar{u}_i\,\bar{u}_j\,\mathrm{e}^{-f} = 0\,. \tag{2.26}$$

令 $u_i(x,t)$ 为满足 $\partial_t\,u_i = \mathcal{L}\,u_i + \frac{1}{2}\,u_i$ 且 $u_i(x,0) = \bar{u}_i(x)$ 的解。由于 $\int \bar{u}_i\,\mathrm{e}^{-f} = 0$，引理 2.10 的第一个结论（取 $u = u_i$ 和 $v = 1$）表明

$$\int u_i\,\mathrm{e}^{-f} = 0 \text{ for all } t \geq 0\,. \tag{2.27}$$

定义函数 $I_i(t)$ $J_{ij}(t)$ $E_i(t)$ $D_{ij}(t)$，如 (2.18)、(2.19) 中所示。我们在 $t = 0$ 处有

$$I_i(0) = 1,\ J_{ij}(0) = \delta_{ij},\ E_i(0) = \lambda_i(0) \text{ and } D_{ij}(0) = \lambda_i(0)\,\delta_{ij}\,. \tag{2.28}$$

引理 2.10（见 (2.21)、(2.21) 和 (2.23)）给出

$$I'_i(0) = 1 - 2\,\lambda_i\,,\ J'_{ij}(0) = (1 - 2\,\lambda_i)\,\delta_{ij} \text{ and } E'_i(0) \leq 0\,. \tag{2.29}$$

u_i 在 $t = 0$ 处是正交归一的，且连续变化，因此格拉姆-施密特过程构造出一个矩阵 $a_{ij}(t)$，使得

(1) 对每个 t，函数 $v_i(x,t) = \sum_j a_{ij}(t)\,u_i(x,t)$ 都是正交归一的。(2) $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$。(3) 若 $j > i$，则 $a_{ij}(t) = 0$。

性质 (1) 给出，对所有 t ，

$$\sum_{k,m} a_{ik}(t)\, J_{km}(t)\, a_{jm}(t) = \delta_{ij}\,. \tag{2.30}$$

对其关于 t 求导，然后利用 (2.29)、由 (2) 得到的 $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 和 $J_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{p,m} \big(a'_{ip}(0)\,\delta_{pm}\,\delta_{jm} + \delta_{ip}\,J'_{pm}(0)\,\delta_{jm} + \delta_{ip}\,\delta_{pm}\,a'_{jm}(0)\big) \\ &= a'_{ij}(0) + (1-2\,\lambda_i)\,\delta_{ij} + a'_{ji}(0)\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

由此可得 $a'_{ii}(0) = \frac{1}{2}(2\,\lambda_i - 1)$，并且结合 (3) 还可得 $a'_{ij}(0) = 0$ 对于 $i \neq j$。注意到。

$$\int |\nabla v_i(\cdot,t)|^2\, \mathrm{e}^{-f} = \sum_{j,k} a_{ij}(t)\, a_{ik}(t)\, D_{jk}(t)\,. \tag{2.32}$$

在 $t = 0$ 处对其求导，并利用 $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 和 $D_{ij}(0) = \lambda_i(0)\,\delta_{ij}$，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} \int |\nabla v_i(\cdot,t)|^2\, \mathrm{e}^{-f} &= \sum_{j,k} \big(a'_{ij}(0)\,\delta_{ik}\,\lambda_j(0)\,\delta_{jk}(0) + \delta_{ij}\,a'_{ik}(0)\,\lambda_j(0)\delta_{jk} + \delta_{ij}\,\delta_{ik}\,D'_{jk}(0)\big) \\ &= 2\,a'_{ii}(0)\,\lambda_i(0) + F'_{ii}(0) = (2\,\lambda_i(0)-1)\,\lambda_i(0) - 2\int |\mathrm{Hess}_{\bar{u}_i}|^2\, \mathrm{e}^{-f}\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

由于函数 v_i 是正交归一的（且 $\int v_i \mathrm{e}^{-f} = 0$），因此它们是 λ_k 的试验函数。因此，在 (1.1) 的意义下，我们得到热在线精品

$$\lambda'_k(0) \leq \sup_{\{i\leq k \,|\, \lambda_i(0)=\lambda_k(0)\}} \partial_t|_{t=0} \int |\nabla v_i|^2\, \mathrm{e}^{-f} \leq (2\,\lambda_k(0)-1)\,\lambda_k(0)\,. \tag{2.34}$$

我们已在 0 处证明了这一点，但相同的论证也适用于每个 t ，从而得到..... t

$$\lambda'_k(t) \leq (2\,\lambda_k(t)-1)\,\lambda_k(t) \tag{2.35}$$

在 (1.1) 的意义下。因此，引理 1.8 的第一个断言给出了定理的第一个断言。定理的第二个断言由引理 1.7 得出。

最后，假设 $\lambda_k(t_0) > \frac{1}{2}$且 $t < t_0 + \log \frac{2\,\lambda_k(t_0)}{2\,\lambda_k(t_0)-1}$。我们必须证明：

$$\lambda_k(t) \leq \frac{\lambda_k(t_0)}{2\,\lambda_k(t_0)\,(1-\mathrm{e}^{t-t_0}) + \mathrm{e}^{t-t_0}}\,. \tag{2.36}$$

由于右端大于 1 2，若存在任何满足 $\lambda_k(s) \leq \frac{1}{2}$ 的 $s \in [t_0, t_1]$，则可由第二种情形立即推出。因此，我们可以假设对所有 $s \in [t_0, t_1]$，均有 $\lambda_k(s) > \frac{1}{2}$。定理的最后一个断言现在由引理 1.8 中的第二个断言得出。□

定理 0.6 的证明。令 $(M, \bar{g}, f)$ 为极限梯度收缩里奇孤子，且 $\mathcal{L}$ 为其漂移拉普拉斯算子。根据 [CxZ]（参见 [HN]），$\mathcal{L}$ 具有离散谱

$$\bar{\lambda}_0 = 0 < \frac{1}{2} < \bar{\lambda}_1 \leq \cdots \to \infty\,, \tag{2.37}$$

特征函数属于 $W^{1,2}$，且（参见 [CM2]）

$$\lambda_1(t_j) \to \bar{\lambda}_1\,. \tag{2.38}$$

该定理现在可由定理 0.7 中的第一个断言立即推出 . □

2.2. 尖锐性。下一个例子表明，定理 0.7 中的估计是尖锐的。在 $\mathbf{R}^n$ 上定义函数 f 和度量 g：

$$f(x,t) = \frac{|x|^2}{4} - \frac{n}{2}\,\log u(t) \text{ and } g(t) = u(t)\,\delta_{ij}\,, \tag{2.39}$$

其中函数 $u(t)$ 由下式给出。

$$u(t) = 1 + (u(t_0) - 1)\,\mathrm{e}^{t-t_0}\,. \tag{2.40}$$

容易看出，f 和 g 满足修正的里奇流方程（0.4）和（0.5）。注意，如果 $u(t_0) > 1$，那么 u 在增长，并且对所有 t 都有定义（即它是永恒的）。另一方面，当 $u(t_0) < 1$时，u 会在有限时间内收缩至零——但该解是远古的。

引理 2.41. 如果 $g = a\,\delta_{ij}$ 和 $f = \frac{|x|^2}{4}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上，那么 $\lambda_1 = \frac{a^{-1}}{2}$。

证明。给定一个函数 v，我们有 $(\nabla v)^i = g^{ij}v_j$，因此，

$$\langle \nabla v, \nabla f\rangle = g_{ik}(g^{ij}v_j)(g^{km}f_m) = g^{ij}v_i f_j = a^{-1}\,v_i\frac{x_i}{2}\,. \tag{2.42}$$

由此，结合 ∂_j 与 Δ 可交换这一事实（因为度量在空间上是常数），我们可以得到

$$\partial_j\,(\mathcal{L}\,v) = \mathcal{L}\,v_j - \frac{a^{-1}}{2}\,v_j\,. \tag{2.43}$$

由标准论证可知，$\mathcal{L}$ 的特征值出现在 $\frac{a^{-1}}{2}$ 的整数倍处，且由多项式给出。由于 $\Delta v = a^{-1}\,v_{ii}$，我们看到 $\Delta\,x_i = 0$，因此，

$$\mathcal{L}\,x_i = -\langle\nabla x_i, \nabla f\rangle = -a^{-1}\,\delta_{ij}\,f_j = -\frac{a^{-1}}{2}\,x_i\,. \tag{2.44}$$

x_i’s 将是最低的特征函数（常数函数之后），从而得到该引理。 □

推论 2.45. 解 (2.39)、(2.40) 的第一个特征值 $\lambda_1(t)$ 满足

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda_1(t_0)}{2\,\lambda_1(t_0)\,(1-\mathrm{e}^{t-t_0}) + \mathrm{e}^{t-t_0}}\,. \tag{2.46}$$

如果 $u(t_0) > 1$，那么我们得到一个永恒的修正的里奇流，其中 $\lambda_1(t) < \frac{1}{2}$ 对所有 t 都成立。

证明。由引理 2.41 和 (2.39) 可得

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2\,u(t)}\,. \tag{2.47}$$

特别地，$u(t_0) = \frac{1}{2\,\lambda_1(t_0)}$，因此，（2.40）表明，

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2\,u(t)} = \frac{1}{2\,\{1 + (u(t_0)-1)\,\mathrm{e}^{t-t_0}\}} = \frac{1}{2\left\{1 + \left(\frac{1}{2\,\lambda_1(t_0)} - 1\right)\,\mathrm{e}^{t-t_0}\right\}}\,. \tag{2.48}$$

化简后得到 (2.46)。 □

3. Splitting theorem

我们将在分部积分合理且积分收敛的假设下证明分裂定理，即定理 0.9。例如，当 M 具有有限的加权体积和对数 Sobolev 不等式时， [CxZ] 中的命题 1（参见 [HN]）保证 $\mathcal{L}$ 具有趋于无穷大的离散特征值，每个特征值的重数有限，并且其特征函数属于 $W^{1,2}$。

我们先给出分裂的一个更精确表述：

定理 3.1. 若对于某个 $k \geq 1$， $\lambda_k(t_0) = \frac{1}{2}$，且 $\lambda_1(t_1) \geq \frac{1}{2}$，其中 $t_0 < t_1$，则 $M = N^{n-k} \times \mathbf{R}^k$，并且存在度量 $g_N(t)$，定义在 N 上，以及函数 f_N: $N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得：

$$g(t) = g_N(t) + \sum_{i=1}^{k} dx_i^2 \,, \tag{3.2}$$

$$f = f_N + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \,, \tag{3.3}$$

$$\partial_t g = \partial_t g_N = g_N - 2\,\mathrm{Hess}_{\bar{f}} - 2\,\mathrm{Ric}_N \,, \tag{3.4}$$

$$f_t = \bar{f}_t = \frac{n-k}{2} - S_N - \Delta_N \bar{f} \,. \tag{3.5}$$

证明. 定理 0.7 表明，对于每个 $t \geq t_0$，都有 $\lambda_k(t) \leq \frac{1}{2}$；由于 $\lambda_1(t_1) = \frac{1}{2}$，我们得到

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{2} \text{ for every } t \in [t_0, t_1] \text{ and } 1 \leq i \leq k \,. \tag{3.6}$$

对于 $i = 1, \ldots, k$，令 u_i 满足

$$\partial_t u_i = \mathcal{L}\, u_i + \frac{1}{2} u_i \text{ for } t \geq t_0 \tag{3.7}$$

其中 $u_i(\cdot, t_0) = \bar{u}_i(\cdot)$ 是时刻 t_0 的第 i 个特征函数，且经过归一化，使得 $\int \bar{u}_i\, \bar{u}_j^2\, \mathrm{e}^{-f} = \delta_{ij}$。注意， $\int \bar{u}_i \mathrm{e}^{-f} = 0$，且 $\int \langle \nabla \bar{u}_i, \nabla \bar{u}_j \rangle \mathrm{e}^{-f} = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}$。令 $I_i, J_{ij}, E_i, D_{ij}, F_i$ 如 (2.18)、(2.19) 所示。引理 2.10 给出 $\int u_i\, \mathrm{e}^{-f} = 0$, $E_i'(t) = -2 \int |\mathrm{Hess}_{u_i}|^2\, \mathrm{e}^{-f}$,

$$J_{ij}'(t) = J_{ij}(t) - 2\, D_{ij}(t) \,, \tag{3.8}$$

$$F_i'(t) = \frac{-2 \int |\mathrm{Hess}_{u_i}|^2\, \mathrm{e}^{-f}}{I(t)} + F_i'(t)\,(2\,F_i(t) - 1) \leq F_i'(t)\,(2\,F_i(t) - 1) \,. \tag{3.9}$$

由于 $F_i(t_0) = \frac{1}{2}$，且 F_i 满足 (3.9)，引理 1.7 的第二个结论给出，对于每个 $t \geq t_0$，都有 $F_i(t) = \frac{1}{2}$。另一方面，对于每个 t， $\int u_i \mathrm{e}^{-f} = 0$，因此 u_i 是 $\lambda_1(t) = \frac{1}{2}$ 的一个有效测试函数，从而我们有 $F_i(t) \geq \frac{1}{2}$。由此可知，对于每个 $t \geq t_0$， $F_i(t) \equiv \frac{1}{2}$，因此每个 u_i 都是特征值为 1 2 的特征函数

–

$$\mathcal{L}\, u_i = -\frac{1}{2} u_i \text{ and } \partial_t\, u_i = 0 \text{ for every } t \geq t_0 \,. \tag{3.10}$$

利用这一结果并进行分部积分可得：

$$J_{ij}(t) = -2 \int (\mathcal{L}\, u_i)\, u_j\, \mathrm{e}^{-f} = 2\, D_{ij}(t) \,. \tag{3.11}$$

将此用于 (3.8)，由此可得 $J'_{ij}(t_0) = 0$。由于根据构造 $J_{ij}(t_0) = 0$，因此可得

$$0 = J_{ij}(t) = 2\, D_{ij}(t) = 2 \int \langle \nabla u_i, \nabla u_j \rangle \, \mathrm{e}^{-f} \text{ for every } t \geq t_0 \,. \tag{3.12}$$

再次利用 (3.9) 中 $F_i(t) \equiv \frac{1}{2}$，我们还可得知 $\mathrm{Hess}_{u_i} \equiv 0$，因此，向量场$\nabla u_i$ 对每个 i 都是平行的。由于它们是平行的，函数 $\langle \nabla u_i, \nabla u_j \rangle$ 对每个 t 都是常数；由 (3.12)，我们可得 $\langle \nabla u_i, \nabla u_j \rangle \equiv 0$。由于 $I_i(t) = 2\, E_i(t)$ 随时间保持常数，我们可以在将 u_i 乘以一个常数后令 $|\nabla u_i| \equiv 1$。

这些平行且正交归一的向量场给出了所需的分裂。

$$M = N \times \mathbf{R}^k \,, \tag{3.13}$$

其中，$N = \{u_1 = \cdots = u_k = 0\}$ 是 u_i的零点集。由于 ∇u_i是平行的，因此它们也是Killing场，并且沿 u_i 的平移是一个等距变换。因此，存在定义在 N 上的度量族 $g_N(t)$，使得

$$g(t) = g_N(t) + \sum_i du_i^2 \,. \tag{3.14}$$

由于 $\mathrm{Hess}_{u_i} = 0$，Δu_i也如此，因此，$\mathcal{L}\, u_i = -\frac{1}{2}\, u_i$意味着 $\langle \nabla u_i, \nabla f \rangle = \frac{1}{2}\, u_i$。由此，结合 ∇u_i 的正交性以及 $|\nabla u_i| = 1$，我们看到，对于每个 i

$$\langle \nabla u_i, \nabla \left(f - \frac{1}{4} \sum_j u_j^2 \right) \rangle = \langle \nabla u_i, \nabla f - \frac{u_i}{2} \nabla u_i \rangle = 0 \,. \tag{3.15}$$

由此可知，$\bar{f} = f - \frac{1}{4} \sum_j u_j^2$与 $\mathbf{R}^k$ 无关，因此仅取决于 N。

还需验证 (3.4) 和 (3.5)。利用 $\partial_t u_i = 0$, $g_t = g - 2\mathrm{Ric} - 2\mathrm{Hess} f$ 以及 $\mathrm{Hess}_{\bar{f}} = \mathrm{Hess}_f - \frac{1}{2} \sum du_i^2$，可得 (3.4)。类似地，由于 $\partial_t u_i = 0$, $S = S_N$，并且

$$\Delta f = \Delta_N \bar{f} + \frac{1}{4} \sum_i \Delta\, u_i^2 = \Delta_N \bar{f} + \frac{1}{2} \sum_i |\nabla u_i|^2 = \Delta_N \bar{f} + \frac{k}{2} \,, \tag{3.16}$$

我们有

$$\begin{aligned} \bar{f}_t = f_t &= \frac{n}{2} - S - \Delta\, f = \frac{n}{2} - S_N - \left(\Delta_N \bar{f} + \frac{k}{2} \right) \\ &= \frac{n-k}{2} - S_N - \Delta_N \bar{f} \,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

□

References

[Ba] R. Bamler，Ricci流非塌缩极限的结构理论，https://arxiv.org/abs/2009.03243（2020）。[Ca] H.D. Cao，Ricci孤立子的近期进展。几何分析最新进展，1–38，Adv. Lect. Math. (ALM)，11，Int. Press，Somerville，MA，2010。[CMZ1]P.-Y. Chan、Z. Ma 和 Y. Zhang，关于具有闭且光滑切流的Ricci流，arXiv:2109.14763（2021）。[CMZ2] P.-Y. Chan、Z. Ma 和Y. Zhang，具有闭且光滑切流的Ricci流的F-收敛速率，J. Geom. Anal. 32（2022），第12期，论文编号293。[CxZ] X. Cheng 和 D. Zhou，完备度量测度空间上漂移拉普拉斯算子的特征值，Commun. Contemp. Math. 19，1650001（2017）。

[ChL] B. Chow 和 P. Lu，关于在无穷远处分裂的 κ-非塌缩完备非紧致收缩梯度 Ricci 孤立子。Math. Ann. 366 (2016)，第 3-4 期，1195–1206。[ChLN] B. Chow、P. Lu 和 L. Ni，Hamilton 的 Ricci 流，GSM 77，AMS，Providence，RI，2006。[CM1] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，放大极限的唯一性与 Lojasiewicz 不等式，Ann. Math. 2，221–285 (2015)[CM2] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，Ricci 流的奇点与微分同胚，预印本。[CM3] T.H. Colding 和 W.P. Minicozzi II，抛物型系统的复杂性，Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. (2020) 83–135。[H] R. Hamilton，Ricci 流中的奇点形成。《微分几何综述》，第 II 卷（Cambridge, MA，1993），7–136，Int. Press，Cambridge, MA，1995。[HN] H.-J. Hein 和 A. Naber，新的对数 Sobolev 不等式及 Ricci 流的一个 ϵ-正则性定理，Comm. Pure Appl. Math. 67(9) (2014) 1543–1561。[MM] C. Mantegazza 和 R. M¨uller，Ricci 流 I 型奇点处的 Perelman 熵泛函，J. Reine Angew. Math. 703 (2015)，173–199。[P] G. Perelman，Ricci 流的熵公式及其几何应用。预印本，2002。arXiv:math/0211159。[SW] S. Sun 和 Y. Wang，K¨ahler-Ricci 流在 K¨ahler-Einstein 度量附近的性质，J. Reine Angew. Math. 699 (2015)，143–158。[T] P. Topping，Ricci 流讲义。London Math. Society Lecture Note Series，325。Cambridge University Press，Cambridge，2006。

MIT, Dept. of Math., 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139-4307.

电子邮箱地址：colding@math.mit.edu 和 minicozz@math.mit.edu