arXiv:2305.02431v1 [math-ph] 3 May 2023

关于四维空间中蒙日-安培方程的多辛与变分性质的一些评述

Radek Suchánek

摘要 我们描述了蒙日-安培偏微分方程和一阶拉格朗日量背景下，强逆变分问题局部可解性的一项必要条件。该条件基于对一阶射丛上的有效微分形式进行比较。为说明并应用我们的方法，我们研究了实四维流形上的线性克莱因-戈尔登方程、Plebański 的第一和第二天体方程、Grant 方程以及Husain方程。文中介绍了这些方程的两种多辛形式表述方法。

引言

自约瑟夫·刘维尔、加斯东·达布、索菲斯·李、埃利·嘉当等数学家在19世纪及20世纪初开展研究以来，几何在常微分方程和偏微分方程（PDE）的研究中发挥着重要作用，这一点早已为人所知。

所有非线性二阶偏微分方程中，有一类特殊的子类，即蒙日-安培（M-A）方程。它们出现在许多实例中，并在数学和数学物理的诸多领域有着广泛应用。在曲面的微分几何、流体动力学、声学、各种几何结构的可积性、变分法、黎曼几何、CR 几何和复几何、量子引力，乃至理论气象学（半地转理论和准地转理论）中，都能发现它们。还有许多其他实例可以列举。关于 M-A 方程有趣应用的详细介绍，尤其是二维和三维情形，参见 [10]。

R. Suchánek 数学与统计学系，马萨里克大学，08号楼，Kotlářská 2，611 37 布尔诺，捷克共和国；安茹数学研究实验室 - UMR CNRS 6093，昂热大学，2 Boulevard Lavoisier，49045，法国昂热 CEDEX 0。电子邮箱：r.suchanek.r@gmail.com

本文主要关注 M-A 方程的变分结构。特别是，我们研究能否将它们视为某些一阶拉格朗日量的欧拉-拉格朗日方程。我们的研究方法基于 V. Lychagin 的思路，将 Monge-Ampère 算子与辛几何（在 T^*M 上）和接触几何（在 J^1M 上）联系起来。他还定义了一类与 M-A 方程相关的变分问题 [8, 10]。

随后，我们借助 F. Hélein[2], 和 D. Harrivel [12]提出的两种略有不同的方法所得出的结果，考察了 M-A 方程与多辛几何之间的关系。我们发现了一些新方面，或可为理解这种联系提供启示。我们将这些观察应用于以下四维偏微分方程：它们因在几何和理论物理中的应用而广为人知，与爱因斯坦引力和相对论场论密切相关——普莱班斯基天界方程和克莱因-戈尔登方程。我们还研究了格兰特方程和侯赛因方程，它们与普莱班斯基第二天界方程非常接近。

1975年，J.F. Plebański 引入了他的第一和第二天体方程 [9],，它们属于四维 M-A 方程这一类。它们的近亲——格兰特方程和侯赛因方程——则是在较近时期引入的 [17, 14]。这些方程最初出现在爱因斯坦引力中，后来受到众多物理学家和数学家的研究 [9, 17, 14, 7, 18]。克莱因-戈尔登方程是 M-A 方程的另一个重要例子，它是一种非齐次相对论波动方程。该方程于 20世纪上半叶由 O. Klein 推导，后来由 W. Gordon 将其改写为更紧凑的形式 [15]。除了标量场之外，在更一般的情形下也能发现该方程的内在结构；了解其解与相对论微扰量子场论有关 [19]。下文将给出上述所有方程的具体形式，并进一步介绍相关细节。

在第一节中，我们定义 M-A 算子及相关概念，这些将是我们通过微分形式研究 M-A 方程的主要工具。我们还回顾了 J^1M 上的接触演算与辛几何演算，并在计算中大量运用。第二节介绍了 $\Omega^n(J^1M)$ 上欧拉算子的构造及其与变分问题的关系。第三节针对给定的 M-A 方程，提出了其强逆变分问题局部可解性的必要条件，并对前述五个四维实空间中的 M-A 方程进行了相应分析。第四节介绍两种多辛方法，并结合所讨论的具体 M-A 方程对它们进行比较。

下文中，我们将讨论光滑实值函数 $\phi \in C^\infty(M)$ 及其一阶延拓 $j^1\phi$: $M \to J^1M$，其中 $J^1M \to J^0M = M \times \mathbb{R}$ 是 pr1: $M \times \mathbb{R} \to M$ 的一阶射丛。

以 Hessian 矩阵（$\phi_{\mu\nu}$）的子式作 $C^\infty(J^1M)$-线性[1] 组合给出的二阶偏微分方程（μ）$_\nu$ 称为 Monge-Ampère 方程[2] [8, 10, 18, 12]。因此，每个这样的方程都可以通过 M-A 算子 $\Delta_\omega\phi := (j^1\phi)^*\omega$表示为 n形式在 J^1M 上的微分 n-形式。此外，还可以使用有效微分形式，它们能够唯一地表示 M-A 方程（相差一个处处不为零的函数倍数），且不含对应于平凡方程的项 [8, 10, 18]。一阶喷射空间上的有效形式在基流形上产生一阶拉格朗日量，并具有特别简单的局部表达式。它们在欧拉算子下的像表示欧拉-拉格朗日（E-L）方程 [10]。欧拉算子的这一性质，加上它保持有效形式这一事实，使我们能够在 J^1M上的微分形式层面研究给定 M-A 方程是否存在一阶拉格朗日量。此外，某些有效形式以非唯一的方式导出多辛形式 [12]。即使某个有效形式来自一个不具有一阶拉格朗日量的 M-A 方程，这种情况也可能发生。由于多辛重构通常从一个拉格朗日量 [2, 3, 6], 开始，这似乎是一个有趣的性质。我们将把这一形式体系应用于以下 M-A 方程：Plebański heavenly、格兰特、侯赛因和克莱因-戈尔登方程。我们将在实四维情形下考察这些方程。

Plebański 的天体方程最初于 [9] 以这种形式推导出

$$\phi_{13}\phi_{24} - \phi_{14}\phi_{23} = 1 \text{ (1st heavenly equation)}$$
$$\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2 + \phi_{13} + \phi_{24} = 0 \text{ (2nd heavenly equation)}$$

利用复流形四维黎曼空间上的自对偶 2-形式。这里的对偶性由 Hodge 星算子给出。Grant 方程和侯赛因方程均基于 Ashtekar-Jacobson-Smolin (AJS) 方程，而后者是爱因斯坦自对偶方程。AJS 方程是通过对时空进行 3 + 1ADS 分解而推导出来的，见 [16] 。它们刻画了具有自对偶曲率 2-形式的四维复度量。具有自对偶曲率形式的度量满足广义相对论的真空方程，因为它们是 Ricci 平坦的。在 [17], 中，引入了以下方程。

$$\phi_{11} + \phi_{24}\phi_{13} - \phi_{23}\phi_{14} = 0 \text{ (Grant equation)}$$

随后被改写为一个系统，使作者得以构造形式解。值得注意的是，*Grant* 方程等价于 *Plebański* 的第一天界方程 [17]。 [14], 中给出了 AJS 方程的另一种改写方式。

[1] 所谓 $C^\infty(J^1M)$-线性，是指系数可以是光滑函数及其一阶导数。[2] 请注意，秩为 1 的子式涵盖了所有二阶半线性微分方程，而高阶子式（包括整个矩阵的行列式）则加入了特定的非线性项。

为了将 AJS 识别为二维手征模型，并提供一种哈密顿形式。由此得到的方程

$$\phi_{13}\phi_{24} - \phi_{14}\phi_{23} + \phi_{11} + \phi_{22} = 0 \text{ (Husain equation)}$$

使 V. 侯赛因得以证明存在无穷多个非局部守恒流。另一类 M-A 方程是

$$\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{44} + m^2\phi^2 = 0 \text{ (Klein-Gordon equation)}$$

其中 m 是一个常数。克莱因-戈尔登方程曾以多种方式推导出来，例如 W. Gordon [15] 的推导。在其实数形式下，它可以被解释为洛伦兹流形上无电荷标量场的运动方程。上述方程之间的一个关键区别是，克莱因-戈尔登方程并非源于自对偶条件。

1 初步概念

本节中，我们将确定符号约定，并介绍与本文讨论相关的基本定义和命题。具体而言，我们将定义有效形式、Monge-Ampère 算子和蒙日-安培方程。本文所有讨论均为局部性的。需提醒读者注意一种常见的符号滥用：例如用 Ω 表示辛形式，用 $\Omega(M)$ 表示 M 上微分形式的外代数。

我们用 M 表示一个光滑的 n 维流形，$(q^1, \ldots\ldots, q^n)$ 是开子集 $U \subset M$ 上的局部坐标，TM 和 T^*M 分别是切丛和余切丛。设 J^1M 为 M 上光滑函数的 1-喷射空间，它是 $M \times \mathbb{R}$ 上的仿射丛

$$\pi : J^1M \to J^0M = M \times \mathbb{R}$$

其典型纤维为 T^*M。它也是一个以 M 为底空间的纤维丛

$$\mathrm{pr}_1 \circ \pi : J^1M \to M \ ,$$

其中 $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R} \to M$。我们用 $(q^1, \ldots\ldots, q^n, u, p_1, \ldots\ldots, p_n)$ 表示 J^1M 上诱导的局部坐标。$\phi \in C^\infty(M)$[3] 的一阶延拓是一个截面 $j^1\phi : M \to J^1M$，由 $x \mapsto (j^1\phi)(x) \in J^1M$ 给出。回顾一下，$(j^1\phi)(x)$ 是一类函数的等价类，这些函数在 x 处的偏导数一阶近似意义下相等。在局部坐标中，

$$j^1\phi = (q^\mu, \phi, \phi_\mu) \ ,$$

[3] 每个 $\phi \in C^\infty(M)$ 定义一个截面 $M \to M \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, \phi(x))$。

其中 $\phi_\mu \coloneqq \partial_{q^\mu}\phi \coloneqq \frac{\partial \phi}{\partial_{q^\mu}}$ 是沿坐标q^μ方向的偏导数。 J^1M 上的坐标函数的拉回为

$$(j^1\phi)^* q^\mu = q^\mu \qquad (j^1\phi)^* u = \phi \qquad (j^1\phi)^* p_\mu = \phi_\mu \ ,$$

在局部坐标中，我们有如下识别 $J^1U \cong T^*U \times \mathbb{R}$ （它不是典范的）。对我们来说最重要的是， J^1M 自然带有一个接触结构 [8, 10]。有关喷射丛及其上的结构的更多详情，请参见 [11]。

1.1 J^1M上的接触结构

定义 1. 设 $\omega \in \Omega^1(M)$ 不处处为零。设 $\mathrm{D} \subset TM$ 是由 $\mathrm{D} \coloneqq \ker \omega$给出的一个分布。若 ω 在 M上是一个接触形式，则称其为接触形式，其中 $d\omega|_{\mathcal{D}} \colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}^*$是非退化的。由接触形式描述的带有分布的流形称为接触流形，而 d 称为 M上的接触结构（或接触分布）。

注 *1.* 注意，分布 $\mathrm{D} = \ker \omega$ 满足 $\operatorname{codim} \mathrm{D} = 1$。此外，描述 D 的 1-形式并不唯一。考虑由$\tilde{\omega} \in [\omega]$ 给出的 1-形式类 $[\omega]$，当且仅当存在一个非零的 $f \in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde{\omega} = f\omega$。那么，该类 $[\omega]$ 的每个代表元都定义相同的分布 d。

一阶喷射空间自带嘉当分布，它无穷小地描述了这样一个条件：$J^1M \to M$ 的截面是函数 $\phi \in C^\infty(M)$ 的延拓。在诱导坐标下，该要求可由以下接触形式[4]描述

$$\mathfrak{c} = \mathrm{d}u - p_\mu \mathrm{d}q^\mu \ . \tag{1}$$

该1-形式满足定义1，因此我们可以将嘉当分布描述为 $\mathrm{C} = \ker \mathfrak{c}$。也就是说，$J^1M$ 是一个接触流形[5]。根据达布定理， J^1M 上的每个接触形式在局部都可表示为 (1)。接触形式通过以下条件定义 Reeb 向量场 χ

$$\chi \lrcorner \, \mathrm{d}\mathfrak{c} = 0 \text{ and } \mathfrak{c}(\chi) = 1 \ . \tag{2}$$

在满足条件 (1) 的局部坐标下，Reeb 场具有如下形式 $\chi = \partial_u$，这可直接由 (2) 得出。此外，由于 $\operatorname{codim}\mathrm{C} = 1$，我们得到 TJ^1U 的如下分解。

$$TJ^1U \cong C \oplus \operatorname{span}(\chi) \cong \ker \mathfrak{c} \oplus \ker \mathrm{d}\mathfrak{c} \ .$$

[4] 我们采用对重复指标求和的求和约定。[5] 嘉当分布在高阶喷射上也存在，但一阶喷射由于 $\operatorname{codim} \mathrm{C} = 1$而具有特殊性。

1.2 嘉当分布上的辛几何演算

J^1M 上的接触形式产生 C 上的辛形式 。

定义 2。设 V 是一个向量空间，维数为 $\dim V = 2n$。 V 上的辛形式是一个 2-形式 $\Omega \in \Lambda^2(V^*)$，它是非退化的，即 $\Omega^n := \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ 不恒为零。

考虑接触流形 J^1M 上的 2-形式 $\Omega := \mathrm{d}\mathfrak{c}$。那么 Ω 显然是闭的。在选定的坐标中，我们有

$$\Omega = \mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu \,. \tag{3}$$

注意，将 Ω 限制在 C 上时是非退化的。这意味着，对于每个 $x \in M$， Ω_x 都是 C_x 上的辛形式。利用辛形式，我们可以定义各种有用的算子。这引出对沿 Reeb 场 χ退化的微分 k-形式空间的考察。我们将这个 C^∞-模记为

$$\Omega^k(C) := \{\alpha \in \Omega^k(J^1U) \mid \chi \lrcorner \alpha = 0\} \,. \tag{4}$$

由于内积 $\lrcorner$ 满足关于楔积的分次莱布尼茨法则，该空间

$$\Omega(C) := \bigoplus_{k \leq 0} \Omega^k(C) \subset \Omega(J^1M)$$

具有分次代数结构。通过适当的投影， $\Omega(\mathsf{C})$ 可以转化为微分分次代数。

投影与投影导数。每个 $\alpha \in \Omega^k(J^1M)$ 都可以通过投影 $p\colon \Omega^k(J^1M) \to \Omega^k(\mathsf{C})$ 投影到 $\Omega^k(\mathsf{C})$ 上，该投影作用于任意的 k-形式 α，如下所示：

$$p(\alpha) = \alpha - \mathfrak{c} \wedge (\chi \lrcorner \alpha) \,. \tag{5}$$

下面证明 p 具有所述性质。首先， $p^2 = p$，因为

$$p(p(\alpha)) = \alpha - \mathfrak{c} \wedge (\chi \lrcorner \alpha) - \mathfrak{c} \wedge \big(\chi \lrcorner (\alpha - \mathfrak{c} \wedge (\chi \lrcorner \alpha))\big) = p(\alpha) \,.$$

其次， $p(\alpha) \in \Omega^k(\mathsf{C})$，因为

$$\chi \lrcorner p(\alpha) = \chi \lrcorner \alpha - \chi \lrcorner \alpha + (\chi \wedge \chi) \lrcorner \alpha \wedge \mathfrak{c} = 0 \,.$$

注意， $\alpha \in \Omega(\mathsf{C})$ 这一性质在外微分 $\mathrm{d}\colon \Omega^k(J^1M) \to \Omega^{k+1}(J^1M)$ 下并不保持。因此，利用投影 p，我们将 1 次导子 d_p 定义为以下复合映射：

$$\mathrm{d}_p := p \circ \mathrm{d}\colon \Omega^k(J^1M) \to \Omega^{k+1}(C) \,, \tag{6}$$

底算子。 由于 Ω 在 C 上是非退化的，映射 $\xi \mapsto \xi \lrcorner \Omega$ 定义了一个同构 $\iota\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}^*$，并进一步诱导出一个同构

$\Lambda^2\iota^{-1}$: $\Lambda^2\mathbb{C}^* \to \Lambda^2\mathbb{C}$。这使我们能够定义 $X_\Omega := \Lambda^2\iota^{-1}(\Omega)$。在坐标中,

$$X_\Omega = \partial_{q^\mu} \wedge \partial_{p_\mu} .$$

与 2-向量场 X_Ω 收缩得到 底算子 $\perp$: $\Omega^k(J^1U) \to \Omega^{k-2}(J^1U)$。更确切地说, 对于 k-形式 $\alpha, k > 1$,

$$\perp\alpha := X_\Omega \lrcorner \alpha . \tag{7}$$

对于 $k \leq 1$ 定义 $\perp\alpha = 0$。我们的约定是 $\perp\Omega = \partial_{p_\mu} \lrcorner \partial_{q^\mu} \lrcorner (\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu) = n$。定义底算子的动机将在接下来的段落中更加明显。

1.3 蒙日-安培算子与有效形式

定义 3. 设 $\omega \in \Omega^n(J^1M)$ 为任意一个 n-形式, 其中 $n = \dim M$。与 ω, Δ_ω: $C^\infty(M) \to \Omega^n(M)$ 相对应的 Monge-Ampère 算子定义为

$$\Delta_\omega\phi := (j^1\phi)^*\omega . \tag{8}$$

微分方程

$$\Delta_\omega\phi = 0 \tag{9}$$

称为 Monge-Ampère 方程。

注意, 表达式 $\Delta_\omega\phi = 0$ 只有在 M 上的 ω 是一个 $n = \dim M$-形式时, 才定义了一个方程。这样, M-A 算子使我们能够用微分形式表示 M-A 方程。注意, 由于以下原因, 这种表示具有一定的歧义性

$$(j^1\phi)^*\mathfrak{c} = \mathrm{d}\phi - \phi_\mu \mathrm{d}q^\mu = 0 .$$

一般而言, 这种歧义性由 J^1M 上外代数的一个理想描述, 该理想由接触形式及其外微分生成

$$\mathcal{I} = <\mathfrak{c}, \mathrm{d}\mathfrak{c}> \subset \Omega(J^1M) . \tag{10}$$

回顾一下, $\Omega(J^1M)$ 是一个分次代数, 这意味着 I 是一个分次理想

$$\mathcal{I}^k := \mathcal{I} \cap \Omega^k(J^1M) .$$

因此, M-A 方程中的冗余由下式给出

$$\omega \in \mathcal{I}^n \iff \Delta_\omega\phi = 0 \ \forall\phi . \tag{11}$$

这表明, 应采用 $\Omega^n(J^1M)/\mathrm{I}^n$ 的等价类, 而不是使用 $\Omega^n(J^1M)$ 中的任意形式来描述 M 上的 M-A 方程。然而, 这种方法在局部坐标下进行计算时并不十分方便。为了避免

对于这个问题，我们使用以下有效形式的定义，该定义体现了上述处理不包含冗余项的形式这一理念。

定义 4. 设 $\omega \in \Omega^k(J^1M)$， $k \leq n$。如果满足以下条件，则称 ω 为有效形式：

$$\chi \lrcorner \omega = 0 \text{ and } \perp\omega = 0 \,. \tag{12}$$

有关有效形式的更多细节，以及如何将上述定义与 $\Omega^n(J^1M)/\mathrm{I}^n$ 的等价类联系起来，请参见 [8, 10]。

回顾一下，$\chi \lrcorner \omega = 0$ 表示 $\omega \in \Omega^k(\mathrm{C})$（见（4））。条件（12）将作为我们处理有效形式时的工作定义。另请注意，条件 $\perp\omega = 0$ 等价于 $\Omega \wedge \omega = 0$ 当且仅当 $n = k$。

例 *1.* 例 1.3 设 $\beta = \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$，且 $\beta_\mu := \partial_{q^\mu} \lrcorner \beta$。则

$$\omega = b_\mu \beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu + b\beta$$

对于任意选择的 b， $b_\mu \in C^\infty(J^1M)$、 $\mu = 1, \ldots\ldots, n$，它都是有效形式。事实上， ω 不包含 $\mathrm{d}u$ 项，因此我们有 $\chi \lrcorner \omega = 0$。接下来，我们有

$$\perp\omega = b_\mu \perp(\beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu) + b\perp\beta$$

由于内积 $\chi \lrcorner$ 关于 $C^\infty(J^1M)$ 线性。回想一下，我们采用求和约定，因此 $\beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu$ 由 n 项组成。第一项是 $\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1 = \mathrm{d}q^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n \wedge \mathrm{d}p_1$。底算子给出

$$\perp(\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1) = (\partial_{q^\mu} \wedge \partial_{p_\mu}) \lrcorner (\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1) = \partial_{p_\mu} \lrcorner \partial_{q^\mu} \lrcorner (\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1) = \partial_{q^1} \lrcorner \beta_1 = 0 \,.$$

$\beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu$ 的所有其他项也同理。显然， $\perp\beta = 0$，因为 β 不含任何 $\mathrm{d}p$ 项。我们看到 ω 是有效形式。注意， ω 的系数可能依赖于 u。

有效形式理论中的一个重要结果是 Hodge-Lepage 分解，该分解由 V. Lychagin 于 [8] 借助 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的表示论证明。

定理 1。 每个 $\omega \in \Omega^k$（C）， $k \leq n$，都可以写成如下形式

$$\omega = \omega_\epsilon + x \wedge \Omega \,, \tag{13}$$

其中某个 $x \in \Omega^{k-2}$（C） 以及唯一确定的 $\omega_\epsilon \in \Omega^k$（C） 满足 $\perp\omega_\epsilon = 0$。

推论1。 假设 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(C)$ 确定相同的 *Monge-Ampère* 方程。那么有效部分满足

$$\omega_{1\epsilon} = k\omega_{2\epsilon} \tag{14}$$

对于处处非零函数 $k \in C^\infty(J^1M)$。

证明。 当且仅当对于所有 ϕ，两个形式确定同一个方程。

$$\Delta_{\omega_1}\phi = \tilde{k}\Delta_{\omega_2}\phi\,, \tag{15}$$

对于某个不为零的 $\tilde{k} \in C^\infty(M)$。注意， Δ 关于 ω 参数是 $C^\infty(J^1M)$-等变的，即对于任意的 ω 和 $k \in C^\infty(J^1M)$，我们有 [6]

$$\Delta_{k\omega}\phi = \big((j^1\phi)^* k\big)\Delta_\omega\phi\,.$$

此外， Δ 在下参数中是 $\mathbb{R}$-线性的，因此对于任意的 ω_1， ω_2以及所有 ϕ

$$\Delta_{\omega_1}\phi - \Delta_{\omega_2}\phi = \Delta_{\omega_1-\omega_2}\phi\,.$$

因此，(15) 可以改写为

$$\Delta_{\omega_1}\phi - \tilde{k}\Delta_{\omega_2}\phi = \Delta_{\omega_1-k\omega_2}\phi = 0\,,$$

对于适当的 $k \in C^\infty(J^1M)$，使得 $(j^1\phi)^* k = \tilde{k}$。上述方程对所有 ϕ成立，当且仅当

$$\alpha := \omega_1 - k\omega_2 \in \mathcal{I}^n$$

（见 (11)）。由于每个 $\alpha \in \mathrm{I}^n$ 都满足 $\alpha_\epsilon = 0$，且每个 $\omega \in \Omega(\mathrm{C})$都满足 $(k\omega)_\epsilon = k\omega_\epsilon$，我们得出 $\omega_{1\epsilon} = k\omega_{2\epsilon}$。

利用投影算子 (5) 以及 Hodge-Lepage 分解可知， J^1M 上的每个 k-形式 ω 都有唯一的有效部分 ω_ϵ（次数相同）。这意味着每个 M-A 方程 $\Delta_\omega\phi = 0$ 都可以用唯一的微分形式表示，该形式不含产生平凡方程的项。我们将利用这一观察来研究所考虑的偏微分方程的变分性质。

2 拉格朗日函数、变分问题与欧拉算子

将喷射空间上的 n-形式拉回，可得到底流形 M 上的 n-形式，并可在 M 上积分。设 ϕ 是紧支撑的， $\omega \in \Omega^n(J^1M)$。定义与 $\Delta_\omega\phi$ 对应的（作用量）泛函如下：

$$\Phi_\omega[\phi] = \int_M \Delta_\omega\phi\,. \tag{16}$$

定义 5. 我们将一个元素 $\omega \in \Omega^n(J^1M)$ 称为拉格朗日量。一阶拉格朗日量是一个 n-形式 ω，其中 $\Delta_\omega\phi$ 至多以一阶导数的形式依赖于 ϕ。

[6] 注意，由于 k 是一个函数，因此 $(j^1\phi)^* k = k \circ j^1\phi$。

2.1 一阶拉格朗日量。

我们重点关注第 5 节中定义的一阶拉格朗日量，因为它们给出了 M[7] 上所有可能的一阶拉格朗日函数。下面的引理描述了一阶拉格朗日量所能具有的最一般形式。

命题 1. 单个标量场 ϕ 的每个有效一阶拉格朗日量在局部都具有如下形式

$$L\beta = L(q^\mu, u, p_\mu)\mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n \,. \tag{17}$$

对于某个 $L \in C^\infty(J^1M)$。

证明。 设 $\omega \in \Omega^n(J^1M)$ 是任意的。若假定 $\Delta_\omega\phi$ 至多依赖于 ϕ 的一阶导数，则 ω 不能包含任何 $\mathrm{d}p_i$ 项。因此

$$\omega = L\beta + L_I \mathrm{d}q^I \wedge \mathrm{d}u \,,$$

其中 $\beta = \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$，且 $L, L_I \in C^\infty(J^1M)$，其中 $I = i_1 \ldots i_{k-1}$ 遍历所有满足 $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{k-1} \leq n$的可能组合。现在回想一下，$\omega$ 仍可能包含一些在拉回后结果为零的项。根据 Hodge-Lepage 分解（13），每个 ω 都有唯一的有效部分 ω_ϵ，相应的泛函满足

$$\int_M \Delta_\omega\phi = \int_M \Delta_{\omega_\epsilon}\phi \,.$$

因此，不失一般性，我们可以假设 ω 是有效的。这意味着两点：$\chi \lrcorner \omega = 0$ 和 $\perp\omega = 0$。第一个条件排除了含有 $\mathrm{d}u$ 的项，因此剩下 $\omega = L\beta$。容易验证 $\perp L\beta = 0$，这意味着 $L\beta$ 是有效的。因此我们得出结论，(17) 是一个标量场的一阶拉格朗日量的最一般形式 ϕ，其中不含任何在拉回到 M 后会消失的项。

2.2 欧拉-拉格朗日方程与欧拉算子。

每个泛函 $\Phi_\omega[\phi]$ 都定义了一个变分问题 $\delta\Phi_\omega[\phi] = 0$ 及其相应的欧拉-拉格朗日方程。固定一个泛函后，我们可以显式计算欧拉-拉格朗日方程。此时一个自然的问题是，我们能否找到 $\tilde{\omega} \in \Omega^n(J^1M)$，使得欧拉-拉格朗日方程 $\delta\Phi_\omega[\phi] = 0$ 由 Monge-Ampère 方程$\Delta_{\tilde{\omega}}\phi = 0$给出。答案是肯定的，并且可以利用欧拉算子E 确定 $\tilde{\omega}$。

定义 6. 欧拉算子 $\mathrm{E}: \Omega^n(J^1M) \to \Omega^n(J^1M)$, $n = \dim M$定义为

$$\mathcal{E} := \mathrm{d}_p \perp \mathrm{d}_p + \mathcal{L}_\chi \,, \tag{18}$$

[7] 经过 $(j^1\phi)^*$ 的拉回，并选择 M 上的体积形式

其中，d_P 由式（6）定义，$\perp$ 由式（7）定义，而 L_χ 是沿由式（2）给出的 Reeb 场的李导数。

我们研究欧拉算子的主要动机是下面这个等价关系

$$\delta\Phi_\omega[\phi]=0 \iff \Delta_{\mathcal{E}(\omega)}\phi=0\,. \tag{19}$$

换言之，由 ω 的泛函给出的变分问题由 $\mathrm{E}(\omega)$ 描述。该陈述的证明及许多其他有用性质，以及定义方程 (18) 的上同调起源的详细信息，可见于 [8, 10]。

我们有以下引理，它将用于表述给定偏微分方程存在一阶拉格朗日量的必要条件（即给定局部逆变分问题存在解的必要条件）。

引理1. 设 $L\beta\in\Omega^n(J^1M)$ 为一阶拉格朗日量，$\mathcal{E}$ 由(18)定义。那么

1. $\mathcal{E}(L\beta)$ 是有效的。*2.* $\Delta_{\mathcal{E}(L\beta)}\phi=0$ 是 $\Phi_{L\beta}[\phi]$ 的欧拉-拉格朗日方程。

证明。假设局部坐标满足 (1)，并注意到 $\chi\lrcorner L\beta = L_\chi\lrcorner\beta=0$。直接计算得出

$$\mathrm{d}_P\perp\mathrm{d}_P(L\beta)=\frac{\partial^2 L}{\partial p_\mu\partial p_\nu}\beta_\mu\wedge\mathrm{d}p_\nu-\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu\partial p_\mu}+p_\mu\frac{\partial^2 L}{\partial u\partial p_\mu}\Big)\beta\,,$$

其中 $\beta_\mu:=\partial_{q^\mu}\lrcorner\beta=\partial_{q^\mu}\lrcorner(\mathrm{d}q^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}q^n)$。利用嘉当公式 $\mathrm{L}=\lrcorner d+d\lrcorner$，我们进一步得到

$$\mathcal{L}_\chi(L\beta)=\frac{\partial L}{\partial u}\beta+L(\chi\lrcorner\mathrm{d}\beta+\mathrm{d}\chi\lrcorner\beta)=\frac{\partial L}{\partial u}\beta\,.$$

因此，根据定义 (18)，$\mathrm{E}(L\beta)$ 的坐标表达式为

$$\mathcal{E}(L\beta)=\frac{\partial^2 L}{\partial p_\mu\partial p_\nu}\beta_\mu\wedge\mathrm{d}p_\nu-\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial q^\mu\partial p_\mu}+p_\mu\frac{\partial^2 L}{\partial u\partial p_\mu}-\frac{\partial L}{\partial u}\Big)\beta\,. \tag{20}$$

我们记作 $B_{\mu\nu}:=\frac{\partial^2 L}{\partial p_\mu\partial p_\nu}$ 和 $\beta_{\mu\nu}:=(\partial_{q^\mu}\wedge\partial_{q^\nu})\lrcorner\beta$。因此 $B_{\nu\mu}=B_{\mu\nu}$，并且 $\beta_{\nu\mu}=-\beta_{\mu\nu}$。我们将验证 $\mathrm{E}(L\beta)$ 是有效的（见定义 12）。首先回顾 $\chi=\partial_u$，且（20）不包含 $\mathrm{d}u$，因此 $\chi\lrcorner\mathrm{E}(L\beta)=0$。其次，由于 $\perp\beta=0$,

$$\perp\mathcal{E}(L\beta)=B_{\mu\nu}(\partial_{q^\alpha}\wedge\partial_{p_\alpha})\lrcorner(\mathrm{d}p_\nu\wedge\beta_\mu)=-B_{\mu\nu}\partial_{q^\nu}\lrcorner\beta_\mu=\begin{cases}-B_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu} & \mu=\nu\\ 0 & \mu\neq\nu\end{cases}.$$

将 μ,ν 中的求和显式写出后，项 $B_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}$ 可写为

$$B_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}=\sum_{\mu<\nu}(B_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}+B_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu})=\sum_{\mu<\nu}B_{\mu\nu}(\beta_{\mu\nu}-\beta_{\mu\nu})=0\,,$$

这意味着 $\perp \mathrm{E}(L\beta) = 0$。

为了证明后一个陈述，我们首先注意到 E 是一个 0 次算子，这直接由 $\deg \mathrm{d}_p = 1$、$\deg \perp = -2$、$\deg \mathrm{L} = 0$ 得出。因此，从 $L\beta \in \Omega^n(J^1M)$ 出发，结果 $\mathrm{E}(L\beta)$ 也是一个 n-形式，而 $\Delta_{\mathcal{E}(\omega)}\phi = 0$ 是 M 上的良定义方程。于是，性质 (19) 对 $\omega = L\beta$ 可表述如下

$$\delta\Phi_{L\beta}[\phi] = \delta \int_M (j^1\phi)^* L\beta = 0 \iff \Delta_{\mathcal{E}(L\beta)}\phi = 0 \,.$$

利用式 (20) 给出的 $\mathrm{E}(L\beta)$ 的坐标描述，我们得到

$$\Delta_{\mathcal{E}(L\beta)}\phi = 0 \iff \frac{\partial (j^1\phi)^* L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial (j^1\phi)^* L}{\partial \phi_\mu} = 0 \,,$$

这是 M 上与 $\Phi_{L\beta}[\phi] = \int_M \Delta_{L\beta}\phi$ 相对应的一阶拉格朗日函数 $(j^1\phi)^* L = L(q^\mu、\ \phi、\ \phi_\mu)$ 的欧拉-拉格朗日方程的标准形式。

3 有效形式与逆变分问题

本节将说明如何用有效形式描述 M-A 方程。有效形式通过一阶喷射空间[8]上的微分形式，为方程提供唯一（相差一个标量倍数）的表示。这使我们能够证明，Plebański 天空方程、侯赛因方程和 Grant 方程都不存在能解决相应（局部）逆变分问题的一阶拉格朗日量。

第一步很简单：找到该方程的一个简单表示（见定义 7）。简单表示可能并非有效形式。事实上，上述所有方程都是如此。Hodge-Lepage 分解 (13) 保证我们总能找到给定形式的有效部分，尽管它并未提供具体的求解方法。因此，我们引入引理 3，它为在 $\dim M = 4$ 情况下确定 M-A方程的有效形式提供了一种高效的算法。下面的引理是一个中间步骤。

引理 2. 令 $\omega \in \Omega^2(C)$ 为任意形式，$\Omega = d\mathfrak{c}$ 为接触结构 $C \subset T(J^1M)$上的辛形式。以下结论成立

$$\perp(\omega \wedge \Omega) = (\perp\omega)\Omega + (n-2)\omega \,, \tag{21}$$

其中 $n =$ 维数 M。

证明。 回想一下，在满足 (1) 的局部坐标系中，我们有 $\Omega = \mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu$和 $\perp\omega = (\partial_{q^\mu} \wedge \partial_{p_\mu}) \lrcorner\, \omega = \partial_{p_\mu} \lrcorner\, \partial_{q^\mu} \lrcorner\, \omega$，这意味着 $\perp\Omega = n$。因此

$$\perp(\omega \wedge \Omega) = (\perp\omega)\Omega - \partial_{q^\mu} \lrcorner\, \omega \wedge \partial_{p_\mu} \lrcorner\, \Omega + \partial_{p_\mu} \lrcorner\, \omega \wedge \partial_{q^\mu} \lrcorner\, \Omega + n\omega \,. \tag{22}$$

[8] 可以通过 M-A 算子 (8) 从微分形式重构该方程。

我们将证明中间两项之和等于 -2ω。注意， $\Omega^2(\mathrm{C})$ 的基由以下各对组成：$\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\nu, \mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}p_\nu, \mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}p_\nu$。由于 ∂_q, ∂_p 是 $\mathrm{d}q, \mathrm{d}p$ 的对偶，因此 $\Omega^2(\mathrm{C})$ 的基满足

$$
\begin{aligned}
&\partial_{q^\mu} \lrcorner (\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}q^\xi) = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}q^\xi - \delta_{\mu\xi}\mathrm{d}q^\nu , \quad && \partial_{p_\mu} \lrcorner (\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}q^\xi) = 0 , \\
&\partial_{q^\mu} \lrcorner (\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi) = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}p_\xi , && \partial_{p_\mu} \lrcorner (\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi) = -\delta_{\mu\xi}\mathrm{d}q^\nu , \\
&\partial_{q^\mu} \lrcorner (\mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi) = 0 , && \partial_{p_\mu} \lrcorner (\mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi) = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}p_\xi - \delta_{\mu\xi}\mathrm{d}p_\nu .
\end{aligned}
$$

由于每个 $\omega \in \Omega^2(\mathrm{C})$ 都具有 $\omega = \omega_{IJ}\mathrm{d}q^I \wedge \mathrm{d}p_J$ 的形式，其中 $\omega_{IJ} \in C^\infty(J^1M)$ 是某些函数， I, J 是适当长度的升序多重指标。由于 $\lrcorner$ 对 C^∞ 具有线性性质，我们不失一般性地假设所有 ω_{IJ} 都是常函数，即 $\omega_{IJ} = 1$，并写作

$$
\omega = \sum_{\nu<\xi} \mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}q^\xi + \sum_{\nu,\xi} \mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi + \sum_{\nu<\xi} \mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi .
$$

利用上述关系，我们得到

$$
\partial_{q^\mu} \lrcorner \omega \wedge \partial_{p_\mu} \lrcorner \Omega = (\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}q^\xi - \delta_{\mu\xi}\mathrm{d}q^\nu + \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}p_\xi) \wedge (-\mathrm{d}q^\mu) = 2\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}q^\xi + \mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi ,
$$

类似地

$$
\partial_{p_\mu} \lrcorner \omega \wedge \partial_{q^\mu} \lrcorner \Omega = (-\delta_{\mu\xi}\mathrm{d}q^\nu + \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}p_\xi - \delta_{\mu\xi}\mathrm{d}p_\nu)\mathrm{d}p_\mu = -\mathrm{d}q^\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi - 2\mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}p_\xi .
$$

将最后两个结果结合起来，使其与式（22）中的各项相匹配，可得

$$
-\partial_{q^\mu} \lrcorner \omega \wedge \partial_{p_\mu} \lrcorner \Omega + \partial_{p_\mu} \lrcorner \omega \wedge \partial_{q^\mu} \lrcorner \Omega = -2\omega ,
$$

这证明了公式（21）。

我们利用前述引理证明如下结论。一般公式及其证明见 [8]。

引理 3. 设 $\omega \in \Omega^4(C)$ 任意， $n =$ 维数 $M > 2$。有效部分 ω_ϵ 为

$$
\omega_\epsilon = \omega - \frac{1}{n-2}\perp\omega \wedge \Omega + \frac{\perp^2\omega}{2(n-1)(n-2)}\Omega \wedge \Omega . \tag{23}
$$

证明。 考虑 Hodge-Lepage 分解

$$
\omega = \omega_\epsilon + x \wedge \Omega ,
$$

其中 $\omega_\epsilon \in \Omega^k(\mathrm{C})$ 是 ω 的唯一有效部分，而 $x \in \Omega^{k-2}(\mathrm{C})$ 不一定是有效的。在上述方程中两次应用 $\perp$ ，并结合公式 (21)，可得以下方程组

$$
\begin{aligned}
\perp\omega &= (\perp x)\Omega + (n-2)x , \\
\perp^2\omega &= 2(n-1)\perp x ,
\end{aligned}
$$

可据此求解 x

$$x = \frac{1}{(n-2)} \perp \omega - \frac{\perp^2 \omega}{2(n-1)(n-2)} \Omega \, .$$

将其代入 Hodge-Lepage 分解，即可得到 4-形式 ω 的有效部分公式。

如果一个微分 k-形式用规范坐标 (1) 表示时只含有一项，则称其为简单形式。例如，设 $k = 2$。那么 $\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2$是简单形式，而 $\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 + \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}q^4$ 不是简单形式。

定义 7. 考虑一个 M-A方程 $\Delta_\omega \phi = 0$。如果 ω 具有常系数且包含最少数量的简单项，则称其为该方程的简单表示。

注 *2.* 请注意，简单性这一性质是依赖基底的。另一方面，有效性是一个与基底无关的概念。

将拉格朗日函数及其定义在 J^1M 上的对应对象用同一个符号表示似乎很自然，即写作 $L = L(q^\mu, u, p_\mu)$，以及 $(j^1\phi)^* L = L(q^\mu, \phi, \phi_\mu)$。为避免混淆，在下面的命题中我们作如下区分。可在$M$ 上积分的拉格朗日函数记作 L，其 J^1M 对应对象记作 $\tilde{L}$。

命题 2. 设 $\Delta_\omega \phi = 0$ 是定义在光滑流形 M 的某个开子集上的 *M-A* 方程，维数 $M = n$。那么，一阶拉格朗日函数 $L = L(q^\mu, \phi, \phi_\mu)$ 成为与 $\Delta_\omega \phi = 0$ 对应的逆变分问题的局部解的一个必要条件是

$$k\omega_\epsilon = \mathcal{E}(\tilde{L}\beta) \, , \tag{24}$$

存在某个处处非零函数 $k \colon J^1M \to \mathbb{R}$，其中 ω_ϵ 是 ω 的有效部分，$\mathcal{E}$ 是由 (18) 给出的欧拉算子，$\tilde{L} \colon J^1M \to \mathbb{R}$ 满足 $\tilde{L} \circ j^1\phi = L(q^\mu, \phi, \phi_\mu)$，且 $\beta = \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \mathrm{d}q^n$。

证明。设 $\alpha \in \Omega^n(J^1M)$ 是定义 5 意义下的一阶拉格朗日量，即 $\Delta_\alpha \phi = L\beta$，其中 L 是某个关于 ϕ 的函数（也可能仅在局部定义），且该函数对导数光滑依赖至一阶，$L = L(q^\mu, \phi, \phi_\mu)$。假设 L 的欧拉-拉格朗日方程为 $\Delta_\omega \phi = 0$。定义

$$\Phi_\alpha[\phi] := \int_M \Delta_\alpha \phi = \int_M L\beta$$

（仅考虑 ϕ 紧支撑的情形）。不失一般性，我们可以限定α 为有效形式（参见有效形式小节中的讨论），因此根据命题 1，（局部地）有 $\alpha = \tilde{L}\beta$，其中适当的 $\tilde{L} \in C^\infty$（J^1M）满足$\tilde{L} \circ \ j^1\phi = L$。于是 $\Phi_\alpha[\phi] = \Phi_{\tilde{L}\beta}[\phi]$，并且根据引理1的第二个陈述，我们知道泛函 $\Phi_{\tilde{L}\beta}[\phi]$的欧拉-拉格朗日方程为$\Delta_{\mathcal{E}(\tilde{L}\beta)}\phi = 0$。由于我们

假设 L 局部地解出了由方程$\Delta_\omega\phi = 0$给出的逆变分问题，并且由于 ω 和 ω_ϵ 确定了同一个方程，因此我们有

$$\Delta_{\omega_\epsilon}\phi = 0 \iff \Delta_{\mathcal{E}(\tilde{L}\beta)}\phi = 0 .$$

根据引理1的第一条陈述，E ($\tilde{L}\beta$) 是一种有效形式。由于 ω_ϵ和 E ($\tilde{L}\beta$) 是确定同一方程的有效形式，推论1表明，这些形式必相差一个处处非零函数的倍数。

备注*3.* 尽管我们是在局部坐标系中开展工作，但请注意，在我们的框架下，逆变分问题存在解的必要条件是一个张量性陈述，因此与坐标的选择无关。

我们给出下面这个简单的例子，在维数为 $M = 2$ 的情形下展示如何使用命题2。

例*2.* 例：考虑一维波动方程（将两个坐标中的一个视为时间）

$$\phi_{11} - c\phi_{22} = 0 , \tag{25}$$

其中 $c > 0$ 是一个实常数， ϕ: $M \to \mathbb{R}$，且维数为 $M = 2$。我们希望求得$L(q^\mu, u, p_\mu) \in C^\infty(J^1U)$，使得 ($j^1\phi$)$^*L = L(q^\mu, \phi, \phi_\mu)$ 的欧拉-拉格朗日方程为 (25)。

简单表示为

$$\omega = -c\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}p_2 - \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}p_1 .$$

我们很容易看出， $\Delta_\omega\phi = 0$ 给出了原方程

$$(j^1\phi)^*\omega = -c\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 - \mathrm{d}q^2 \wedge d\phi_1 = (\phi_{11} - c\phi_{22})\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2 .$$

简单表示是有效的， $\omega = \omega_\epsilon$，因为它沿着 χ退化

$$\chi \lrcorner \omega = \partial_u \lrcorner (-c\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}p_2 - \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}p_1) = 0 ,$$

并且属于底算子的核

$$\perp\omega = \partial_{p_\mu} \lrcorner \partial_{q^\mu} \lrcorner (-c\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}p_2 - \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}p_1) = c\partial_{p_1} \lrcorner (-\mathrm{d}p_2) - \partial_{p_2} \lrcorner \mathrm{d}p_1 = 0 .$$

作用于一般一阶拉格朗日量 n-形式时，欧拉算子的坐标表达式由(20)给出。对于 $n = 2$ ，我们有 $\beta = \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2$ 以及 $\beta_1 = \partial_{q^1} \lrcorner \beta = \mathrm{d}q^2$, $\beta_2 = \partial_{q^2} \lrcorner \beta = -\mathrm{d}q^1$，因此(20)变为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(L\beta) = {} & \tfrac{\partial^2 L}{\partial {p_1}^2}\mathrm{d}q^2 \wedge dp_1 + \tfrac{\partial^2 L}{\partial p_1 \partial p_2}\mathrm{d}q^2 \wedge dp_2 - \tfrac{\partial^2 L}{\partial p_2 \partial p_1}\mathrm{d}q^1 \wedge dp_1 - \tfrac{\partial^2 L}{\partial {p_2}^2}\mathrm{d}q^1 \wedge dp_2 \\ & -(\tfrac{\partial^2 L}{\partial q^1 \partial p_1} + \tfrac{\partial^2 L}{\partial q^2 \partial p_2} + p_1\tfrac{\partial^2 L}{\partial u \partial p_1} + p_2\tfrac{\partial^2 L}{\partial u \partial p_2} + \tfrac{\partial L}{\partial u})\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}q^2\end{aligned}$$

我们可以将（24）中函数的值固定为常数，例如 $k = 1$，因为相差一个光滑非零 k 倍数的两个形式会给出相同的 M-A方程。因此，我们寻找满足 $\omega =$E $(L\beta)$ 的 $L \in C^\infty($ $J^1M)$，这意味着

$$\frac{\partial^2 L}{\partial {p_1}^2} = -1\,, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial {p_2}^2} = c\,, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0\,,\ \mu = 1,2\,.$$

因此 $L = L(p_\mu)$，我们可以通过以下选择解出前两个条件

$$L = \frac{1}{2}(-{p_1}^2 + c{p_2}^2)\,.$$

因为 M-A方程 $\Delta_{\mathcal{E}(L\beta)}\phi = 0$ 写道

$$\frac{\partial (j^1\phi)^* L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial (j^1\phi)^* L}{\partial \phi_\mu} = \phi_{11} - c\phi_{22} = 0\,.$$

我们看到，$(j^1\phi)^* L = \frac{1}{2}(-{\phi_1}^2 + c{\phi_2}^2)$ 是 (25) 的逆问题的一个解。□

3.1 Plebański、格兰特和侯赛因方程。

按照与前一个示例类似的方式，我们分析了维 $= 4$ 中的 Plebański 天空方程、格兰特方程和侯赛因方程。下表总结了简单表示，展示了它们的非有效性，并列出了上述偏微分方程的简单表示中的有效部分，其中 ϕ 为实函数。由于四维空间中的 M-A 方程的有效形式往往具有较长的表达式，因此我们引入以下简写符号，这也有助于计算。我们记作

$$d^\mu := \mathrm{d}q^\mu, \qquad\qquad d_\mu := \mathrm{d}p_\mu\,,$$

对于楔积，我们记作

$$d^\mu_\nu := \mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}p_\nu, \qquad\qquad d_\nu^\mu := \mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}q^\mu\,.$$

请注意，指标的位置和排列顺序十分重要，并且存在一些显而易见的关系，例如 $d^\mu_\nu = -d_\nu^\mu$，或者对于缩并运算，有 $\partial_{q^\mu} \lrcorner\, d^\nu = \delta^\mu_\nu$（克罗内克 δ）和 $\partial_{q^\mu} \lrcorner\, d_\nu = \partial_{p_\mu} \lrcorner\, d^\nu = 0$，等等。例如，在上述记号中，辛形式写作 $\Omega = d^1_{\ 1} + \ldots + d^n_{\ n}$，$M$ 上的体积形式为 $\beta = d^{1234}$，依此类推。

命题 2 得出以下结果。

推论2。 表 *3.1* 中的蒙日-安培方程不对应于一阶拉格朗日函数的变分问题。

证明。 表 3.1 展示了所考察的蒙日-安培方程的有效形式。在所有情况下，有效形式都至少包含一个形如 $d^{\mu\nu}_{\ \ \xi\eta}$ 的项。这些项不会出现在表达式 (20) 中。因此，命题 2 给出的存在一阶拉格朗日量的必要条件并不满足。

表 1 第一 Plebański 方程（P1）、第二 Plebański 方程（P2）、格兰特方程（G）和侯赛因方程（H）的简单表示（并非有效表示，$\perp\omega \neq 0$）。

	Monge-Ampère 方程	简单表示
第一 Plebański	$\phi_{13}\phi_{24} - \phi_{14}\phi_{23} = 1$	$\omega_{P1} = d^{12}{}_{12} - d^{12}{}_{34}$
第二 Plebański	$\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2 + \phi_{13} + \phi_{24} = 0$	$\omega_{P2} = d^{123}{}_{2} - d^{124}{}_{1} + d^{34}{}_{12}$
格兰特	$\phi_{11} + \phi_{24}\phi_{13} - \phi_{23}\phi_{14} = 0$	$\omega_{G} = -d^{234}{}_{1} - d^{12}{}_{12}$
侯赛因	$\phi_{13}\phi_{24} - \phi_{14}\phi_{23} + \phi_{11} + \phi_{22} = 0$	$\omega_{H} = d^{134}{}_{2} - d^{234}{}_{1} + d^{12}{}_{12}$

表 2 P1、P2、G 和 H 的简单表示的有效部分。

	有效形式 ω_{ϵ}
第一位 Plebański	$\omega_{P1\epsilon} = -d^{1234} + \frac{1}{3}(d^{12}{}_{12} + d^{34}{}_{34}) - \frac{1}{6}(d^{13}{}_{13} + d^{14}{}_{14} + d^{23}{}_{23} + d^{24}{}_{24})$
第二个 Plebański	$\omega_{P2\epsilon} = \frac{1}{2}(d^{124}{}_{1} + d^{123}{}_{2} + d^{234}{}_{3} + d^{134}{}_{4}) + d^{34}{}_{12}$
格兰特	$\omega_{G\epsilon} = -d^{234}{}_{1} + \frac{1}{3}(d^{12}{}_{12} + d^{34}{}_{34}) - \frac{1}{6}(d^{13}{}_{13} + d^{14}{}_{14} + d^{23}{}_{23} + d^{24}{}_{24})$
侯赛因	$\omega_{H\epsilon} = d^{134}{}_{2} - d^{234}{}_{1} + d^{12}{}_{12} + d^{34}{}_{34} - \frac{1}{2}(d^{13}{}_{13} + d^{14}{}_{14} + d^{23}{}_{23} + d^{24}{}_{24})$

我们想在此强调，尽管 Plebański 天体方程、格兰特方程和 Husain 方程不存在可使它们成为欧拉-拉格朗日方程的一阶拉格朗日量，但在另一种设定下可以找到一个拉格朗日量 [7, 13]。我们来考虑第二天体方程

$$\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2 + \phi_{13} + \phi_{24} = 0\,. \tag{26}$$

如果我们从 q^1、……、q^4 中选出一个坐标，例如 q^1，并引入一个新函数 ψ，那么我们可以将 (26) 写成关于 q^1 的演化系统

$$\psi - \phi_1 = 0\,, \tag{27}$$

$$\psi_1\phi_{22} - \psi_2{}^2 + \psi_3 + \phi_{24} = 0\,, \tag{28}$$

有趣的是，上述系统是一个变分问题，因为它由欧拉-拉格朗日方程给出

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu}\frac{\partial L}{\partial \phi_{\mu\nu}} = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu}\frac{\partial L}{\partial \psi_{\mu\nu}} = 0\,,$$

泛函的

$$L[\phi,\psi] = \psi\phi_1\phi_{22} + \frac{1}{2}\phi_1\phi_3 - \frac{1}{2}\psi^2\phi_{22} + \frac{1}{2}\phi_2\phi_4\,. \tag{29}$$

在 [13], 中，提出了一种处理一般蒙日-安培方程的方法，并在将其分解为演化系统后，系统地探讨了如何为其寻找拉格朗日函数。有关上述情形的更多细节，请参见 [7]。

下面的例子展示了一个具有一阶拉格朗日量的方程；其对应的有效形式不具有常系数，也不是余切丛上的微分形式。我们将看到，命题2的条件均得到满足。

3.2 克莱因-戈尔登方程。

设 M 是一个四维闵可夫斯基时空，其坐标为 q^μ ，平直度量为 $\eta_{\mu\nu}$，符号为 (+, –, –, –)。考虑（线性的）克莱因-戈尔登方程

$$\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{44} + m^2\phi^2 = 0\,, \tag{30}$$

其中 $m \in \mathbb{R}$ 是一个常数。我们可以通过以下形式将（30）描述为一个 M-A方程 $\Delta_\omega \phi = 0$

$$\omega = -\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \sum_{\mu=2}^{4} \beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu + m^2 u\beta\,.$$

由于系数m^2u不是常数，这个4-形式不是（30）的简单表示，但它是一个有效形式，见例1。将 ω 与一般 L 下 E ($L\beta$) 的局部形式（见（20））进行比较，可得以下条件组

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \tfrac{\partial^2 L}{\partial p_\mu \partial p_\nu},\ \mu,\nu = 1,\dots 4\,,\\ -m^2 u &= \tfrac{\partial^2 L}{\partial q^\mu \partial p_\mu} + p_\mu \tfrac{\partial^2 L}{\partial u \partial p_\mu} - \tfrac{\partial L}{\partial u}\,. \end{aligned}$$

很容易验证函数 L

$$L = \frac{1}{2}(-{p_1}^2 + \sum_{\mu=2}^{4} {p_\mu}^2 + m^2u^2) \in C^\infty(J^1M)$$

满足上述所有条件。因此可得，

$$(j^1\phi)^* L = \frac{1}{2}(-{\phi_1}^2 + \sum_{\mu=2}^{4} {\phi_\mu}^2 + m^2\phi^2)$$

是克莱因-戈尔登方程的一阶拉格朗日量。

4 多辛形式

在 [2] F. Hélein 给出了克莱因-戈尔登方程 (30)（在 n 维空间中）在配备多辛形式的 $\mathrm{M} := \Lambda^n T^*(M \times \mathbb{R})$ 上的多辛形式

$$\mathfrak{m} := \mathrm{d}e \wedge \beta + \mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \beta_\mu \,, \tag{31}$$

其中， e 是平凡线丛 $M \times \mathbb{R} \to M$的纤维坐标， p_μ 是余切坐标， $\beta = \mathrm{d}$ $q^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$ 和 $\beta_\mu = \partial_{q^\mu} \lrcorner \beta$，其中 q^μ 是 n维闵可夫斯基时空 M上的坐标。利用（31），在 M 上定义如下哈密顿函数，使其对应于（30）的解。

$$\mathcal{H} := e + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}p_\mu p_\nu + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \,,$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是具有符号序列 (+, –, . . . , –) 的闵可夫斯基度量。(30) 的每个解都被视为一条哈密顿 n-曲线，由以下方程定义

$$p_\mu = \eta^{\mu\nu}\phi_\nu, \mu = 1, \ldots, n \,,$$
$$e = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \,,$$

其中， $\eta^{\mu\nu}$ 是$\eta_{\mu\nu}$的逆。在上述论文中，F. Hélein 为克莱因-戈尔登方程提供了一种典范预量子化，并定义了可观测量概念及其括号运算，由此产生了海森堡代数的一个无限维类比。该方法的出发点是拉格朗日量的存在性，而在克莱因-戈尔登方程的背景下，拉格朗日量是一阶的。更多细节请参见 [1, 3, 2]。

以下定理归功于 D. Harrivel。它使我们能够将定义在 J^1M 上的某些有效形式与定义在 J^1M上的平凡线丛上的多辛对应形式（不唯一）联系起来。证明见 [12]。请注意，与 F. Hélein 先前提出的多辛形式相比，关键区别在于，该多辛形式可以与非变分的蒙日-安培方程相关联，也就是说，这些方程并非某个一阶拉格朗日量的欧拉-拉格朗日方程。正如我们在上一节所见，表 3.1 中的所有方程都属于这种情况。

定理2。 设 $\omega \in \Omega^n(C)$ 是一个有效形式， $n =$ 维数 M。考虑一个平凡线丛 $\mathcal{T}$: $= J^1M \times \mathbb{R} \to J^1M$， 其纤维坐标为 e。定义 $\mathfrak{m}_\omega \in \Omega^{n+1}(\mathcal{T})$ 如下:

$$\mathfrak{m}_\omega := \mathrm{d}e \wedge \beta + \mathfrak{c} \wedge \omega \,. \tag{32}$$

那么， $\mathfrak{m}_\omega$ 是多辛形式，当且仅当

1. The set $\mathcal{S}_\omega := \{\partial_{q^1} \lrcorner \omega, \ldots, \partial_{q^n} \lrcorner \omega\}$ *is linearly independent over* $\Omega^{n-1}(C)$*, and,*
2. $\mathrm{d}_p\omega = 0$*.*

一旦一个方程具有简单表示，相应的有效形式就具有常系数，因此定理2的第二个假设显然成立。

由于 $\mathrm{d}_P = P \circ \mathrm{d}$，条件得到满足。对于四维方程，集合 S_ω 的线性无关性是在 $\binom{\text{维}}{C\text{维}}_{M-1} = \binom{8}{3} = 56$ 维的 C 上 3-形式空间中判定的。在我们所有的情形中，几乎无需计算即可确定这一点。

4.1 Plebański、格兰特和侯赛因方程。

对于第一天界方程，我们有

$$\mathcal{S}_{P1} = \{-d^{234} + x, d^{134} + y, -d^{124} + z, d^{123} + w\}\,,$$

其中 x, y, z, w 是 $d^{\mu}{}_{\nu\xi}$ 的线性组合，其中 μ, ν, ξ 取适当值。我们看到 S_{P1} 线性无关。第二天体方程也同样有

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{P2} = \{\ &\tfrac{1}{2}(d^{24}{}_1 + d^{23}{}_2 + d^{34}{}_4) + d^{34}{}_2, \tfrac{1}{2}(-d^{14}{}_1 - d^{13}{}_2 + d^{34}{}_3) - d^{34}{}_1,\\ &\tfrac{1}{2}(d^{12}{}_2 - d^{24}{}_3 - d^{14}{}_4) + d^{4}{}_{12}, \tfrac{1}{2}(d^{12}{}_1 + d^{23}{}_3 + d^{13}{}_4) + d^{3}{}_{12}\}\,,\end{aligned}$$

这是一个线性无关集，因为简单项彼此不同。不难验证，格兰特方程和侯赛因方程对应的集合 S_G 和 S_H 也分别线性无关。因此，在表 3.1 所述的所有四种情形中，5-形式 $\mathfrak{m}_\omega$ 都是 $J^1M \times \mathbb{R}$ 上的多辛形式。

4.2 克莱因-戈尔登方程。

有趣的是，与 Plebański、格兰特和侯赛因方程不同，由 (32) 定义的 Klein-Gordon 方程的 5-形式并非多辛形式。为说明这一点，取微分 4-形式

$$\omega = -\beta_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \sum_{\mu=2}^{4} \beta_\mu \wedge \mathrm{d}p_\mu + m^2 u\beta\,,$$

正如我们已经讨论过的，它是有效的，并将 (30) 表示为 Monge-Ampère 方程 $\Delta_\omega \phi = 0$。由于 $m^2 u$ 项不是常数，外微分得到

$$\mathrm{d}\omega = m^2 \mathrm{d}u \wedge \beta\,,$$

它沿 Reeb 场并非非退化。因此 $\mathrm{d}_p \neq \mathrm{d}$，我们必须将该形式投影到 $\Omega(\mathsf{C})$ 上（有关 p 的定义，见 (5)）

$$\mathrm{d}_p\omega = m^2(\mathrm{d}u \wedge \beta - \mathfrak{c} \wedge \chi \lrcorner (\mathrm{d}u \wedge \beta)) = m^2 p_\mu \mathrm{d}q^\mu \wedge \beta\,.$$

我们看到，定理 2 的第二个条件不满足，因此由 (32) 给出的 $\mathfrak{m}_\omega$ 不是多辛形式。注意，定理的第一个条件并未被违反，因为集合 $\mathrm{S}\omega$ 是线性无关的。

5 结论与讨论

本文主要关注以下两个问题。首先，对于给定的 Monge-Ampère 方程，能否判定其是否存在一阶拉格朗日量？其次，受 F. Hélein [2] 和 D. Harrivel [12], 的工作启发，我们能否为那些相对于一阶拉格朗日量并非变分的方程赋予一个多辛形式?

关于第一个问题，我们通过为这一逆变分问题的局部解是否存在提出一个必要条件，给出了部分回答。具体做法是，用一阶喷射空间上的一个有效微分形式表示给定方程，并将其与一个能为一般一阶拉格朗日函数产生欧拉–拉格朗日方程的 n-形式进行比较。

比较有效形式，提供了一种计算简便的方法，可在强逆变分问题的背景下，获得有关 Monge-Ampère 方程的非平凡信息。运用该方法，我们证明 Plebański 天界方程、Grant 方程和 Husain方程在我们的意义下都不是变分的。回顾一下，经过适当的坐标变换 [17], 第一天界方程等价于 Grant 方程。采用类似的方法，我们证明了（如预期）克莱因-戈尔登方程是变分的，并找到了其众所周知的拉格朗日函数。我们的假设是，推导前述四个方程时施加的自对偶条件阻碍了一阶拉格朗日量的存在。我们希望在未来的工作中更深入地研究这一问题。

与显式求解局部逆问题相比，本文提出的方法更适合判断给定方程是否具有非变分性质。此外，该方法仅适用于一阶拉格朗日量的情形。不过，这一限制也可视为一种优势，因为一阶拉格朗日量在整个物理学领域都非常重要。

目前尚不清楚如何将我们的方法推广到包含更多函数的情形。通过引入多个欧拉算子，可以直接将这一过程扩展到更多标量场，但代价是会出现退化问题。这还会带来其他问题，例如，微分形式唯一分解为有效部分和非有效部分这一性质——这是我们方法中的重要工具——可能受到影响。在 [18], B. Banos 借助双有效形式的概念，高效地处理了复 Monge-Ampère 方程，并证明总能得到唯一的双有效分解。这显然不等同于上述直接推广，因为在我们的情形下，Verbitsky-Bonan 关系并不成立（见 [18], 定理 1）。这与我们没有限制

我们的形式的系数必须与 u 坐标无关有关，因此我们可以处理例如克莱因-戈尔登方程这样的方程。这个问题能否得到解决，将是我们未来研究的一部分。

关于聚焦于蒙日-安培方程多辛形式的问题。利用 [12], 的结果，我们为实四维 heavenly、Plebański、格兰特和侯赛因方程分别给出了多辛5-形式，而这些方程按照我们的定义都不是变分的。有趣的是，同样的方法并不适用于克莱因-戈尔登方程，因为相应的5-形式不是多辛的。

F. Hélein在 [2] 中对克莱因-戈尔登方程进行的多辛处理始于一个一阶拉格朗日函数。我们研究的另外四个蒙日-安培方程无法以同样的方式处理，除非转而考虑高阶拉格朗日函数。另一方面，定理2恰好为四个非变分情形提供了多辛形式，却不适用于克莱因-戈尔登方程。为了对此作出一些解释，将 [1, 2] 的方法与 [12] 中的方法在一般蒙日-安培方程情形下进行比较，会很有意思。

致谢

本文是在我根据联合培养协议于法国昂热大学访学期间完成的，访学是我博士研究的一部分。该协议由捷克共和国布尔诺的马萨里克大学与法国昂热大学签订。我感谢捷克教育部以及捷克科学基金会通过项目 GAČR EXPRO GX19-28628X 提供的资助，并感谢昂热大学在研究期间给予的热情款待。我还要感谢 Volodya Rubtsov 提出的许多宝贵建议和详尽评论，并感谢 Jan Slovák 对射流丛理论相关概念的阐释。研究成果曾在 Wisla 20-21冬季学校与研讨会 上报告；该活动由波罗的海数学研究所承办，是欧洲数学学会的一项活动。

参考文献

1. Hélein, F.，多维变分法与微扰- 理论的哈密顿形式体系。(arXiv,2002 0212036 2)，https://arxiv.org/abs/math-ph/ 。Hélein, F.，多辛形式体系与协变相空间。微分几何中的变分问题。第 94-126 页 (2011) 3. Hélein, F. & Kouneiher, J.，具有多个变量的变分法的协变哈密顿形式体系中的可观测量概念。理论与数学物理进展。**8**，735 - 777 (2004)，https://doi.org/ 4. Gaset, J. & Román-Roy, N.，爱因斯坦-希尔伯特引力的多辛统一形式体系。(arXiv)，https://arxiv.org/abs/1705 5 5 00569。v 。Román-Roy, N.，多辛流形的一些性质。(arXiv)，arXiv:1807.11774v2

6. Cédric M. Campos、Elisa Guzmán、Juan Carlos Marrero，《一阶经典场论与预多辛流形的拉格朗日子流形》。几何力学杂志。**4**（2012）7. Neyzi, F.、Nutku, Y. 和 Sheftel, M.：《Plebanski 第二天体方程的多哈密顿结构》。物理学杂志 *A*。**38** 第 8473 页（2005）8. Lychagin, V.：《接触几何与非线性二阶微分方程》。俄罗斯数学评论。**34**，149-180（1979,2）9. Plebanski, J.：《复爱因斯坦方程的一些解》。数学物理杂志。**16** 第 2395-2402 页（1975）10. Kushner, A.、Lychagin, V. 和 Rubtsov, V.：《接触几何与非线性微分方程》。（剑桥大学出版社，2006）11. Kolář, I.、P. Michor 和 Slovák, J.：《微分几何中的自然运算》。（施普林格出版社：柏林、海德堡，1993），https://www.emis.de/monographs/KSM/12. Harrivel, D.：《哈密顿形式体系、多辛形式体系与 Monge-Ampère 方程》。可积系统与量子场论。第 331-354 页（2008）13. Nutku, Y.：《实 Monge-Ampère 方程的哈密顿结构》。物理学杂志 *A*：数学与通论。**29**，3257-3280（1996,6），https://doi.org/10.1088/0305- 4470/29/12/02914. Husain, V.：《作为二维理论的自对偶引力与守恒律》。经典与量子引力。**11** 第 927-937 页（1993）15. Gordon, W.，物理学杂志。**40** 第 117-133 页（1926）16. Ashtekar, A.、Jacobson, T. 和 Smolin, L.：《爱因斯坦方程半平坦解的一种新刻画》。数学物理通讯。**115**，631 - 648（1988），https://doi.org/17. Grant, J.：《论自对偶引力》。物理评论 *D*。**48**，2606-2612（1993,9），https://link.aps.org/doi/10 2606 18 1103 48 . /PhysRevD. . .Banos, B.：《Monge-Ampère 方程的复解》。几何与物理杂志。**61**，2187-2198（2011），https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S039304401100164119. Radzikowski, M.：《曲率时空量子场论中 Hadamard 条件的微局部方法》。数学物理通讯。**179**，529 - 553（1996），https://doi.org/