基于实验的光纤放大器和激光器Er/Yb增益介质模型

D.K. Vysokikh，[1,2] A.P. Bazakutsa，[3] A.V. Dorofeenko，[1,2,3,4] 和 O.V. Butov[1,41]莫斯科物理技术学院，俄罗斯莫斯科州多尔戈普руд内[2]N.L. Dukhov莫斯科自动化研究所（VNIIA），俄罗斯莫斯科[3]俄罗斯科学院无线电工程与电子学研究所，俄罗斯莫斯科[4]俄罗斯科学院理论与应用电磁学研究所，俄罗斯莫斯科

研究了一种Er^{3+}/Yb^{3+} 共掺杂玻璃增益介质模型。建立了考虑描述实验数据所需最小过程集的速率方程组。因此，模型采用了适量的拟合参数，从而提高了模型的可靠性。对于Er^{3+} 和 Yb^{3+} 离子的能级布居数，获得了解析表达式，同时也获得了介质增益因子的解析表达式。通过在不同泵浦功率下，对不同长度的Er^{3+}/Yb^{3+} 光纤放大器进行一系列增益测量，对模型进行了验证。结果表明，在考虑泵浦功率沿光纤的空间非均匀性的情况下，模型参数能够很好地拟合实验数据。解析表达了高泵浦功率下铒的最大粒子数反转，从而描述了“瓶颈效应”。还确定了对整段光纤进行泵浦所需的功率。

1. 引言

基于 Er^{3+} 和 Yb^{3+} 共掺石英玻璃增益介质的高效激发方案，广泛应用于光纤激光器和放大器[1], 、微盘激光器[2] 等。

通常，Er/Yb方案由速率方程模型 [3-6] 描述。在参考文献 [3], 中，提出了一种基于 Er/Yb 的激光器基本模型，该模型未考虑镱离子的吸收饱和，并且计算得到的激光曲线与实验曲线相符。该模型的改进版本考虑了 Yb^{3+} 激发态布居数的饱和，以及 Er^{3+} 离子对泵浦功率的吸收、上转换过程、激发态吸收、Yb^{3+}离子与 Er^{3+} 离子之间伴随第二个光子吸收的激发转移；相关工作见参考文献 [3-5, 7]。在某些模型版本中，还额外考虑了不与 Er^{3+} 离子相互作用的 Yb^{3+} 离子的存在 [4]。所得模型能够计算自发发射光谱和激发弛豫速率 [8], ，确定光纤放大器增益与 Yb^{3+} 离子浓度、泵浦功率及光纤长度之间的关系 [9], , 确定激光阈值 [5], ，并分析激光量子产率的可能取值 [10]。模型参数是根据实验数据与计算数据之间的最佳吻合度确定的。

对于发光动力学曲线 [4], 光致发光强度 [8], 激发能级寿命 [9], 激光强度 [5]。

在 Er/Yb增益介质中，存在一种所谓的“瓶颈效应”：即使泵浦功率不断升高，Er^{3+} 离子的激发态布居数也无法超过某个有限值。在这种情况下，Yb^{3+}离子中由泵浦诱导的上跃迁和下跃迁占据主导地位。上跃迁和下跃迁速率之比决定了 Yb^{3+} 离子的激发态布居数，而后者又决定了向 Er^{3+} 离子进行激发转移的速率。因此，Er^{3+} 离子的激发能级布居数不会超过某个低于 1 的有限值。本文对这一数值进行了解析求解。

上述论文提出的模型可用于研究 Er/Yb增益介质的性质对各种参数的依赖关系。需要指出的是，这些性质对 Er^{3+} 离子和 Yb^{3+} 离子浓度的依赖关系并不简单，因为从 Yb^{3+} 离子到 Er^{3+} 离子的激发转移速率取决于离子间距；而离子间距又会受到 Yb^{3+} 离子为 Er^{3+} 形成有效场 [11], 以及团簇效应等因素的影响，因此其与浓度之间的关系并不显而易见。有些论文假设激发转移速率与 Yb^{3+}离子浓度呈线性关系 [5, 8, 12]。另一方面，我们通过在离子浓度固定的条件下进行测量，并改变泵浦功率和光纤长度，来确定模型参数，从而消除上述不确定性。

本文中，我们考虑了一个基于速率方程组的模型，该模型仅考虑描述实验所必需的效应，从而尽可能减少拟合参数的数量，并提高模型的可靠性。我们得到了有源光纤中增益系数的解析解。我们研究了“瓶颈效应”，并找到了对应的 Er^{3+} 和 Yb^{3+} 最大粒子数反转。我们开展了一项实验，验证了该模型并确定了其参数。

2. 实验方法

通过泵浦-探测实验测量有源光纤段的增益。图1给出了实验方案。泵浦光（波长为976 nm）和探测信号通过微型光纤复用器7注入Yb和Er共掺光纤段8。泵浦辐射由一台输出功率最高为400 mW、采用光纤输出的半导体激光二极管1提供。采用一台光纤输出的连续波半导体激光器3作为探测信号源，并通过光衰减器5将其功率限制在–33.5 dBm。探测信号源的波长在1526至1566 nm范围内调谐。有源光纤之后设置了输出熔融光纤复用器9。输出信号的光谱由Yokogawa AQ6370D光谱分析仪12测量，未吸收泵浦辐射的功率

由JDSU OLP-85 11光功率计记录。在实验中，采用断裂法[7]研究放大信号光谱。我们研究了长度为3、4和5 cm的有源光纤样品。

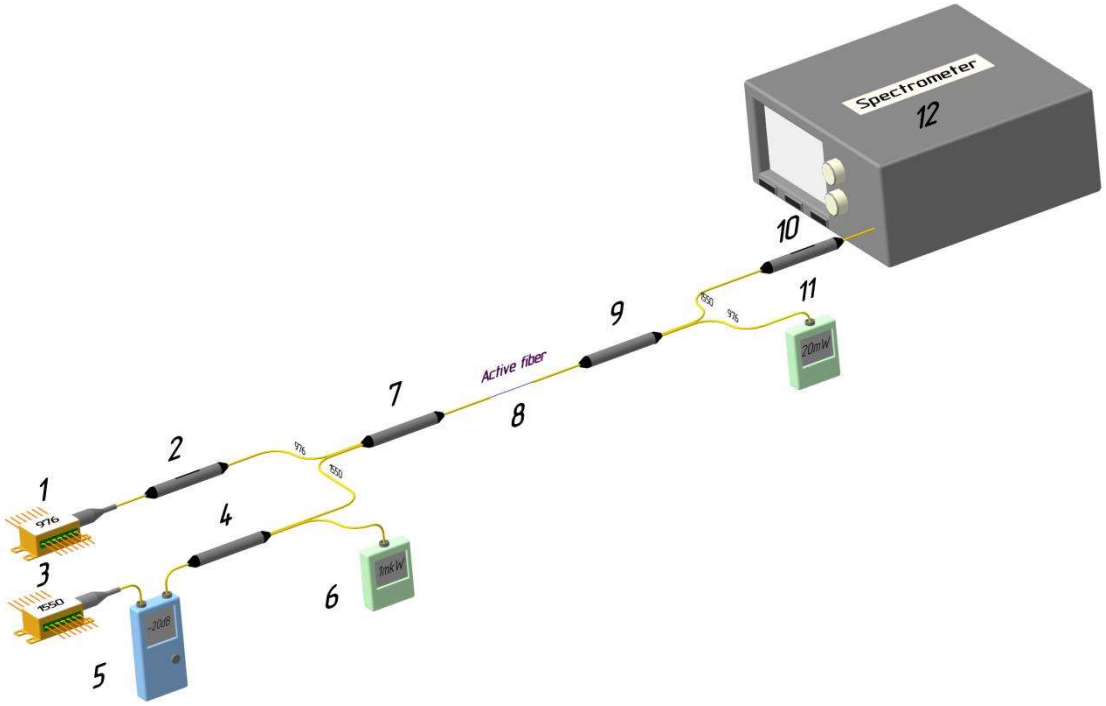


图 1. 实验方案。1 – 976纳米半导体激光器，2 – 976 nm 光隔离器，3 – 1550纳米半导体激光器，4 – 分光比为 1/99 的熔融光纤分路器，5 – 可调光纤衰减器，6 – 1550 nm（输入信号）功率计，7 – 用于

1550 nm 和 976 nm，8 – 正在研究的有源光纤样品，9 – 用于 1550 nm 和 976 nm 波长的熔融光纤解复用器，10 – 1550 nm 光纤隔离器，11 – 976 nm 未吸收泵浦辐射功率计，12 – 带光纤输入端的光谱分析仪。

3. 泵浦功率沿光纤非均匀分布的 Er/Yb增益介质模型

考虑一段Er/Yb有源光纤。描述Yb^{3+} 和Er^{3+} 离子与局部泵浦场的相互作用，并仅考虑成对相互作用。考虑以下过程（图2）：Yb^{3+} 离子在泵浦频率下的吸收和受激发射，其速率分别为γ_{1} p和γ_{2} p；Er^{3+} 离子在信号频率下的吸收和受激发射，其速率分别为Γ_{1} i和Γ_{2} i；Yb^{3+} и Er^{3+} 离子的激发弛豫，速率分别为γ_{1} и Γ_{1} ；以及从Yb^{3+} 到Er^{3+} 离子的无辐射能量转移，速率为Tγ 。单位时间内所有镱离子传递的、每单位光纤长度上的激发量子数等于Yb TC γ ，其中YbC为单位光纤长度上的Yb^{3+} 离子浓度。铒离子接收的激发数相同：Er YbT TC C Γ = γ 。因此，由于ErC和YbC不同，从Yb^{3+}离子转移的激发转移速率T^{γ} 与Er^{3+} 离子接收的激发接收速率T^{Γ}不同。

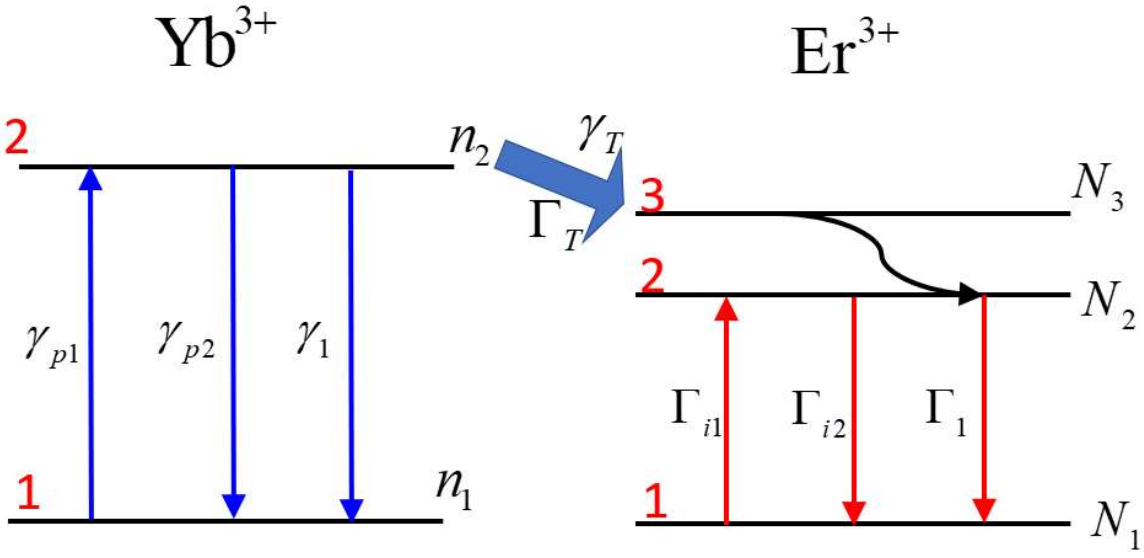


图2. Er/Yb体系中的能级及所考虑的过程

考虑到这些过程后，速率方程可写为

$$\dot{n}_2 = \gamma_{p1} n_1 - \gamma_{p2} n_2 - \gamma_1 n_2 - \gamma_T n_2 N_1, \tag{1}$$

$$\dot{N}_1 = \Gamma_1 N_2 - \Gamma_T n_2 N_1 - \Gamma_{i1} N_1 + \Gamma_{i2} N_2, \tag{2}$$

其中，激发转移的概率取决于镱上能级的布居数，以及铒上能级的可用程度（即铒下能级的布居数）。请注意，在此模型中，我们忽略了铒从能级 1 受激跃迁至能级 3 的可能性，因为铒的吸收截面约为镱吸收截面的十分之一，而镱浓度至少高出数倍。该近似的有效性将在参考文献 [3] 中讨论。

让我们忽略 Er^{3+} 离子中的受激过程（参见结论中的相关讨论）：

$$\dot{n}_2 = \gamma_{p1} n_1 - \gamma_{p2} n_2 - \gamma_1 n_2 - \gamma_T n_2 N_1, \tag{3}$$

$$\dot{N}_1 = \Gamma_1 N_2 - \Gamma_T n_2 N_1. \tag{4}$$

在稳态情形下，我们有 $\dot{N}_1 = 0$ 和 $\dot{n}_2 = 0$。联立求解方程（3）和（4），我们得到 N_1

$$N_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_{p1} + \gamma_{p2}}{\gamma_T} - 1 + \frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T}\frac{\Gamma_T}{\Gamma_1} + \sqrt{4\frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T}\frac{\Gamma_T}{\Gamma_1}\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_{p1} + \gamma_{p2}}{\gamma_T}\right) + \left(\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_{p1} + \gamma_{p2}}{\gamma_T} + 1\right) - \frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T}\frac{\Gamma_T}{\Gamma_1}\right)^2}\right) \tag{5}$$

指定后

$$\xi = \frac{\gamma_1 + \gamma_{p1} + \gamma_{p2}}{\gamma_T},\ \theta = \frac{\Gamma_T}{\Gamma_1} \text{ and } \phi = \frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T}\frac{\Gamma_T}{\Gamma_1}, \tag{6}$$

我们得到一个简化表达式:

$$N_1 = \left(1 - \xi - \phi + \sqrt{(\xi + \phi)^2 + 2\xi - 2\phi + 1}\right)/2. \tag{7}$$

类似地，我们得到n_2的表达式:

$$n_2 = \frac{\sqrt{\left((\xi + \phi)^2 + 2\xi - 2\phi + 1\right)} - \xi + \phi - 1}{2\xi\theta}. \tag{8}$$

接下来，需要以显式形式分离布居数对泵浦功率的依赖关系，因此我们定义变量:

$$\chi_1 = \frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T P_p},\ \chi_2 = \frac{\gamma_{p2}}{\gamma_T P_p},\ g = \frac{\gamma_1}{\gamma_T}. \tag{9}$$

注意，泵浦速率$_{1p}\gamma$ 和$_{2p}\gamma$ 与泵浦功率$_pP$成正比。因此， χ_1 的值不依赖于$_pP$。考虑公式（6），我们得到ξ 和ϕ 对泵浦功率的显式依赖关系:

$$\xi = g + (\chi_1 + \chi_2)P_p,\ \phi = \chi_1\theta P_p. \tag{10}$$

将（10）代入（7）和（8），我们得到模型参数$_1(\ \chi_1\ \chi_2\ \theta)$、$_pN\ P\ g$和$_2(\ \chi_1\ \chi_2\ \theta)$、$_pn\ P\ g$的函数，这些函数将在后续计算中使用。

注意，对于任意$\xi > 0$ 和$\phi > 0$的值，（7）的值都在0到1的范围内，这与布居数$_1N$的物理含义相符。然而，当θ 较小时，（8）的值可能超过1。这是因为参数化形式（6）没有考虑参数之间的关系。公式（10）考虑了这种关系，因此所得依赖关系$_1(\ \chi_1\ \chi_2\ \theta)$、$_pN\ P\ g$和 $_2(\ \chi_1\ \chi_2\ \theta)$、$_pn\ P\ g$的值均在0到1的范围内。

接下来，我们描述沿光纤的泵浦功率分布。泵浦功率的吸收系数可以表示为泵浦频率下光纤模式的波数$_p\beta''$ 的虚部，它取决于镱能级的布居数。为了确定这种依赖关系，我们写出模式能流$_pP$的微分方程:

$$dP_p / dz = -2\beta''_p P_p. \tag{11}$$

这里，因子“2”源于这样一个事实：波数描述场的空间依赖关系，而功率衰减/增益则由波数虚部的两倍描述。

另一方面，单位时间内转移至单位长度增益介质的能量等于 $11\ \ 2\ \ 2\ /(\ )_{p\ \ Yb\ \ p\ \ p\ \ p}\ dP\ dz\ C\ n\ n=\ \ \hbar\omega\ \ \gamma\ \ \ -\gamma$。因此，我们得到关系式

$$\beta_p'' = \frac{C_{Yb}\hbar\omega_p}{2}\frac{\gamma_{p1}n_1 - \gamma_{p2}n_2}{P_p}. \tag{12}$$

我们还引入泵浦场吸收系数的线性部分的记号，该线性部分对应于场强较小的情况，此时 $_1=1n$、 $_2=0n$ ：

$$\beta_{0p}'' = \frac{C_{Yb}\hbar\omega_p}{2}\frac{\gamma_{p1}}{P_p}. \tag{13}$$

于是，式（12）可改写为

$$\beta_p'' = \beta_{0p}''\left(1 - \frac{\gamma_{p2}+\gamma_{p1}}{\gamma_{p1}}n_2\right). \tag{14}$$

现在考虑处于 Er^{3+} ($N_2 \to N_1$) 工作跃迁频率的场，该场满足方程

$$dP/dz = -2\beta'' P. \tag{15}$$

对于跃迁频率处光纤模式的波数虚部 β''，类比式（12），我们得到比值

$$\beta'' = \beta_0''\left(\frac{\Gamma_{i1}+\Gamma_{i2}}{\Gamma_{i1}}N_1 - \frac{\Gamma_{i2}}{\Gamma_{i1}}\right), \tag{16}$$

其中， β_0'' 是跃迁频率处场吸收系数的线性部分。我们定义新变量 $_3\ \ _{i2}\ \ _1/_i\chi\ =\Gamma\ \ \Gamma$。

利用式（7）、（8）以及关系式（6）、（10），我们得到能级布居数，从而可以求解关于泵浦功率分布的非线性方程（11）。

4. 根据实验数据确定模型参数

下面我们根据实验数据确定模型参数。我们将实验中测量输出探测信号功率的结果表示为平均衰减系数

$$\langle\beta''\rangle = \frac{1}{2L}\ln\left(\frac{P(0)}{P(L)}\right), \tag{17}$$

其中，L 表示光纤段长度。这里，分母中的系数“2”[另请参见公式（11）后的注释] 源于辐射功率的空间依赖关系，其特征是加倍波数。

让我们通过模型计算得出相同的值。对公式（15）积分后，可写为 $\left(\quad (0) \right) = 2\int_0 \beta''$l n ( ) ( ) $_L P\ zdz\ P\ L$ 。因此，

$$\langle \beta'' \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \beta''(z)dz\,. \tag{18}$$

为了用模型参数表示 ( )zβ″ ，我们对微分方程（11）进行数值求解，并采用边界条件 0(0)$_p$ pP P=，即给定输入泵浦功率。这里，我们使用形式为 (14) 的 pβ ″ ，其中 2n 取决于 ξ 、 ϕ 和 θ [（见 (8)], ），而它们又取决于 $_p$P 和模型参数 χ_1、 χ_2、g 及 θ [（见公式（10）]）。由此，我们得到泵浦功率 pP 沿光纤的分布。进一步，通过计算布居数 $_1$N 沿光纤的分布 [（见公式（7）], ），我们得到 β″\ [（见 (16)、(18)], ），它取决于输入泵浦功率 0pP 以及模型参数 χ_1、 χ_2、 χ_3、g、θ 、 β_0''p、 β″。请注意，使用公式（17）还需要额外计算探测信号功率沿光纤的分布 ( )P z，因此我们采用公式（18）。

通过改变模型参数，我们根据光纤三个长度分别为3、4和5 cm的光纤段中 β″\ 随泵浦功率变化的计算关系与实验关系的最佳拟合（采用最小二乘法），得到这些参数的最优值（图3）。

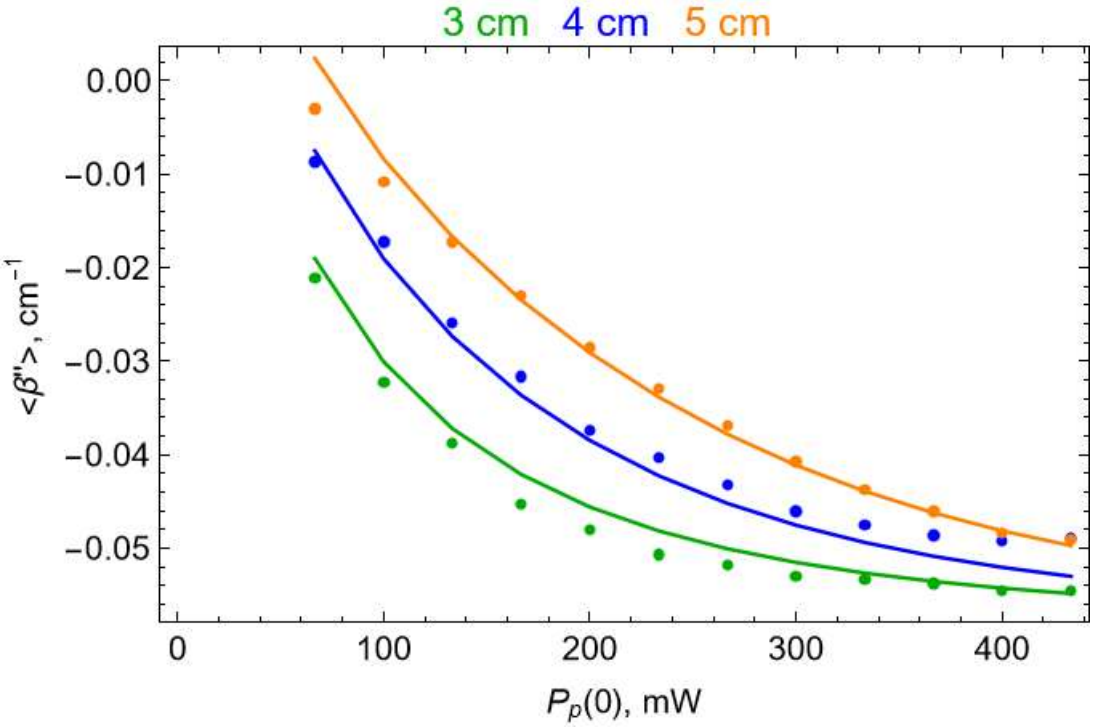


图3. 长度为3 cm（绿色）、4 cm（蓝色）和5 cm（橙色）的光纤段中，探测信号平均衰减系数随泵浦功率变化的实验值（点）与计算值（曲线）。所得参数值：$58.9g = , _1 0.$ $\chi = 29, _2 0.\chi = 01, _3 1.\chi = 21, \theta = 20\ 05. , _0 0.\beta'' = 054, \beta_{0p}'' = 0\ 49. .$

5. 数值与解析结果

让我们基于所得的计算模型研究增益介质的特性。

首先，考虑镱离子和铒离子的布居数随其所处介质中的局部泵浦能量密度的变化情况。泵浦功率的增加会导致镱和铒的上能级布居数增加（图4）。镱作为泵浦频率下的吸收介质或放大介质的性质，由一个量的符号决定$_2 \ _2 \ _{11} \ _p \ _p n \ n\gamma \quad -\gamma$ [见公式（3）]，该量可以改写为 $^{p1} \quad ^2 \ _p \ n^{\gamma \ +\gamma} \quad \delta$ 。这里，

$$\delta n = \frac{2\gamma_{p2}}{\gamma_{p1}+\gamma_{p2}} n_2 - \frac{2\gamma_{p1}}{\gamma_{p1}+\gamma_{p2}} n_1 \tag{19}$$

是一种有效粒子数反转，其负号表明镱离子在泵浦频率处吸收能量。然而，当泵浦功率超过某一阈值时，铒粒子数反转$\delta \quad = \frac{2\Gamma_{i2}}{\Gamma_1+\Gamma_2} \ ^2 - \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2} \ ^1 \ _{iiiii} NNN$变为正值，此时整个介质在探测信号的频率处表现出放大作用。

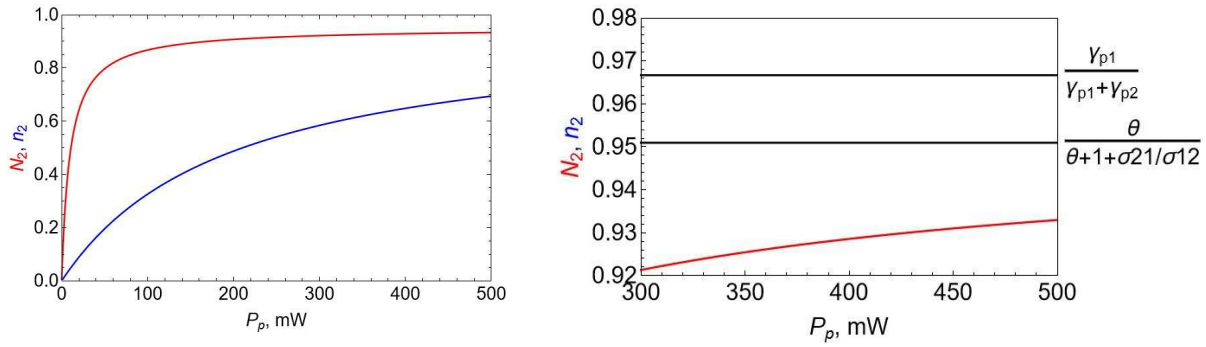


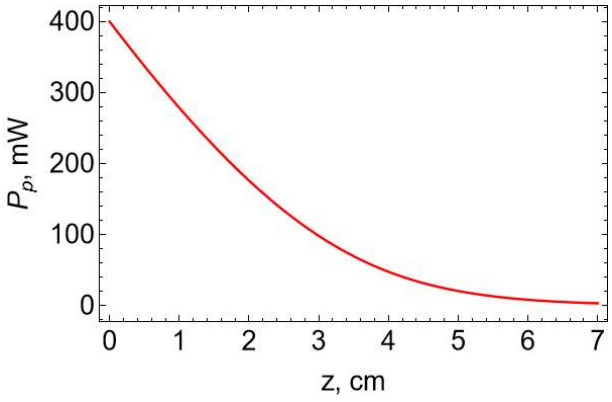
图4. 铒（$_2N$ ）和镱（$_2n$）离子的激发态布居数随泵浦场局部功率$_pP$ 的变化，参数取自实验确定的数值（第4节）。图中采用了两种刻度。图中还显示了$_2n$，$\gamma \ _1 \quad _p \quad _p \quad _p$ $\gamma \ _1+\gamma \ _2$ 的特征值，低于该值时镱离子会吸收光。此外还显示了$_2N$，$1 \quad _{p2} \quad _1/_p \theta \quad \theta + \ +\gamma \quad \gamma$ 的最大值，该值对应于无限高的泵浦功率。

让我们考虑高泵浦功率极限下出现的铒粒子数反转最大值问题。众所周知，[4, 9], 随着泵浦功率增大，铒离子第二能级的布居数不会趋近于1（“瓶颈效应”）。在我们的模型中，$_{1p}\gamma$ 、$_{2p}\gamma$ $\to\infty$ 的极限会导致$_1\to\frac{1+\gamma_{p2}\ \gamma_1}{1+\gamma_2\ \gamma_1+\theta}//_{p\,p\,p}N$，即^2 1 $_{p2}$ $_1/_pN$ $\to\frac{\theta}{\theta+\ +\gamma\ \ \gamma}$（附录），并使粒子数反转达到 $\frac{2\ \ _2\ \ _1}{_1\ \ _2\ \ 1\ \ _2\ \ _1}\left(1\ \ _2\ \ _1\right)//_{iippiippN}$

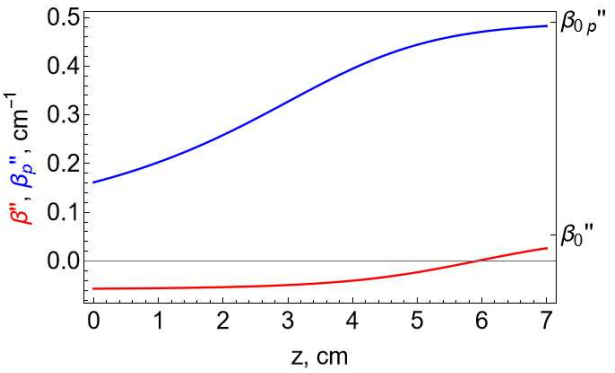
$\delta\ =\frac{\Gamma\ \theta-\Gamma\ \ +\gamma\ \ \gamma}{\Gamma\ +\Gamma\ \ +\gamma\ \ \gamma\ +\theta}$。在所选波长下，镱离子向上的跃迁比向下的跃迁高效得多：$\gamma_{p2}\ \gamma_1<<1/_p$。此外，$\theta>>1$，这意味着离子间相互作用比铒离子的弛豫更快。在这些近似条件下，铒的粒子数反转趋近于最大值$\delta\ =\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}{}_{i\,i\,i}N$。因此，参数的选择能够消除“瓶颈效应”（图4）。

我们来考察泵浦功率以及泵浦频率和信号频率下吸收系数/放大系数的分布（图5）。请注意，当z足够大时，$(\ )_pP\ \ z$ 呈指数变化，这是因为吸收系数与场强无关（线性区域）。当z 较小时，泵浦辐射功率较高，介质表现出非线性特性：吸收系数随场强增大而减小。具体而言，在该区域，泵浦辐射功率并非呈指数变化，而是呈线性空间依赖关系（图5a）。

根据上述内容，在β_0'' и $_{0p}\beta\ \ ''$线性区域，吸收系数趋于稳态值（图5b），这对应于离子处于基态。在非线性区域，β'' и $_p\beta\ ''$的值相对于稳态值有所下降，尤其是β''变为负值，这对应于信号放大。



(a)



(b)

图 5. 泵浦功率的空间分布（a），以及泵浦辐射（蓝色曲线）和信号（红色曲线）的吸收/放大系数的空间分布（b）。

我们来估算使介质开始具有放大作用的泵浦辐射功率水平，即$\delta = 0N$。对应的布居数为 $_1 \quad _1^{zp} \sim \quad _1^2 \quad _2^i \quad _i \quad _i \quad N \quad N \triangleq \quad \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma}$。由公式（7）可得

即 $(\quad)_1 = \left(1-\xi-\phi+\sqrt{\xi+\phi^2+2\xi-2\phi+1 \quad 2}\right)/N$ 和

$$\xi = N_1^2 + N_1(\xi+\phi-1), \tag{20}$$

导致

$$\xi = N_1 \frac{N_1+\phi-1}{1-N_1}. \tag{21}$$

因此，由（9）和（10）式可得：

$$\frac{\gamma_1+\gamma_{p1}+\gamma_{p2}}{\gamma_T} = N_1 \frac{N_1+\frac{\gamma_{p1}}{\gamma_T}\frac{\Gamma_T}{\Gamma_1}-1}{1-N_1}, \tag{22}$$

其中，将 γ_1, γ_{1p}、$_{2p}\gamma$ 通过模型参数表示的值代入$_{zp}NN=$ 后，可得

$_1 \quad _1$

$$P_P^* = \frac{\left(1-\frac{\chi_3}{1+\chi_3}\right)g+\frac{\chi_3}{1+\chi_3}-\left(\frac{\chi_3}{1+\chi_3}\right)^2}{\frac{\chi_3}{1+\chi_3}\chi_1\theta-\left(1-\frac{\chi_3}{1+\chi_3}\right)(\chi_1+\chi_2)}, \tag{23}$$

或者，经过变换后，

$$P_P^* = \frac{g+\chi_3-\frac{\chi_3^2}{1+\chi_3}}{\chi_3\chi_1\theta-\chi_1-\chi_2}. \tag{24}$$

如果局部泵浦功率超过该值，则介质会产生增益。在我们的

参数，$P_p^* \approx 88$ mW。通过向光纤输入端注入这样的功率，$P_{p0} = P_p^*$，我们可以在光纤起始处获得一个较短的放大段。为了使整个长度为L的光纤都实现放大，必须施加更大的输入功率，该功率由条件$P_{p0} \geq P_p^*(L)$确定（图6）。

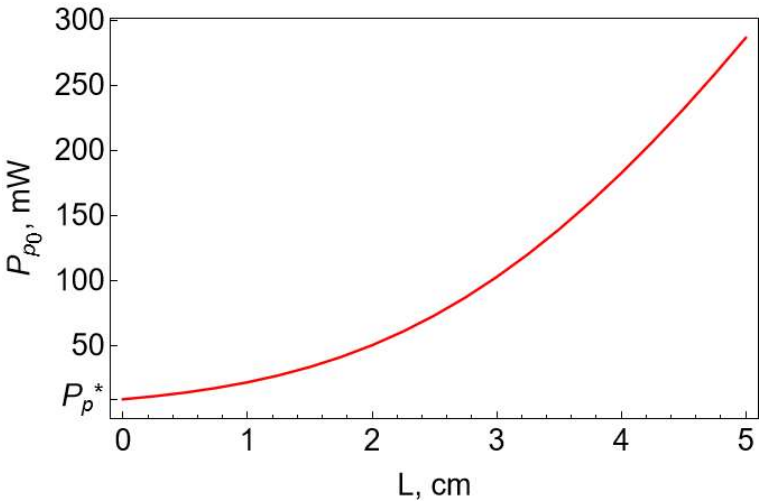


图 6. 实现光纤完全泵浦所需的输入泵浦功率与光纤长度的关系。

6. 结论

本文提出了一种基于速率方程的模型，用于描述铒/镱离子共掺光纤放大器。该模型仅考虑描述增益介质所必需的过程。这种简化减少了拟合参数的数量，从而确保了模型的可靠性。通过将数值计算得到的曲线拟合至信号增益相关的实验数据，确定了这些参数，并获得了良好的一致性。计算了泵浦增益和有用增益沿光纤长度的分布。研究了“瓶颈效应”，并确定了铒和镱粒子数反转的阈值。

所提出的模型可用于描述光放大器以及具有布拉格谐振腔的光纤激光器。在这类器件中，由于泵浦场的吸收，泵浦功率沿光纤长度的非均匀性十分显著。描述激光振荡时，可使用式（1）和式（2），其中考虑了铒离子中的受激跃迁。不过，这并非总是必要的。例如，确定激光阈值时，式（3）和式（4）就足够了，因为激光产生是由低场强状态的不稳定性决定的 [5, 13]。

资金来源

本研究由俄罗斯科学基金会资助，项目编号为 20-72-10057。

参考文献

1. G. Karlsson, F. Laurell, J. Tellefsen, B. Denker, B. Galagan, V. Osiko, S. Sverchkov. 用于高平均功率激光二极管泵浦的 Yb-Er 激光玻璃的开发与表征。《应用物理*B*》 **75**, 41-46 (2002). 2. P. Laporta, S. Taccheo, S. Longhi, O. Svelto, C. Svelto. 铒-镱微型激光器：光学性质与激光特性。《光学材料》 **11**, 269-288 (1999). 3. E. Tanguy, C. Larat, J.-P. Pocholle. 铒-镱激光器建模。《光通信》 **153**, 172-183 (1998). 4. L. Dong, T. Matniyaz, M.T. Kalichevsky-Dong, J. Nilsson, Y. Jeong. 高功率 Er/Yb 光纤激光器建模。《光学快报》 **28**, 16244-16255 (2020). 5. B. Simondi-Teisseire, B. Viana, D. Vivien, A. Lejus. 人眼安全激光材料 Yb: Er: $Ca_2Al_2SiO_7$中的 Yb^{3+} 向 Er^{3+} 能量转移及速率方程形式。《光学材料》**6**, 267-274 (1996). 6. A. Rybaltovsky, D. Lipatov, A. Lobanov, A. Abramov, A. Umnikov, A. Bazakutsa, K. Bobkov, O. Butov, A. Gur'yanov. 用于连续波单频光纤激光器应用的光敏高浓度 Er/Yb 共掺磷硅酸盐光纤。《美国光学学会杂志*B*》 **37**, 3077-3083 (2020). 7. J. Yang, Y. Tang, R. Zhang, J. Xu. 增益开关二极管泵浦 Er-Yb 共掺光纤激光器的建模与特性。《*IEEE*量子电子学杂志》 **48**, 1560-1567 (2012). 8. L. Shanfeng, M. Zhang, P. Yang, Q. Zhang, Z. Mingshan. Er/Yb 共掺硼硅酸盐玻璃红外与上转换发射的速率方程模型分析。《稀土学报》 **28**, 237-242 (2010). 9. C. Strohhöfer, A. Polman. Er^{3+}–Yb^{3+}掺杂波导放大器中增益与 Yb^{3+} 浓度的关系。《应用物理学杂志》 **90**, 4314-4320 (2001). 10. E. Cantelar, F. Cussó. LiNbO3: Er^{3+}/Yb^{3+}中转移速率方程的解析解。《物理学杂志：凝聚态》 **12**, 521 (2000). 11. W. Zhang, Y. Wang, J.-f. Li, Z.-j. Zhu, Z.-y. You, C.-y. Tu. Er/Yb、Er/Nd、Er/Dy: $BaLaGa_3O_7$ 晶体的光谱分析与激光性质模拟。《发光学杂志》 **208**, 259-266 (2019). 12. S. Taccheo, G. Sorbello, S. Longhi, P. Laporta. Er–Yb掺杂磷酸盐玻璃中能量转移与上转换常数的测量。《光学与量子电子学》**31**, 249-262 (1999). 13. O.V. Butov, A.A. Rybaltovsky, A.P. Bazakutsa, K.M. Golant, M.Y. Vyatkin, S.M. Popov, Y.K. Chamorovskiy. 1030 nm Yb^{3+} 分布式反馈短腔硅基光纤激光器。《美国光学学会杂志*B*》 **34**, A43-A48 (2017).

附录

让我们求出在较大泵浦功率下所能达到的布居数$_1N$的最大值。采用以下符号表示。

$$A=\xi+\phi\ ,\ B=2(\xi-\phi) \tag{25}$$

我们将公式（7）改写为以下形式

$$N_1=(1-A+\sqrt{A^2+B+1})\,. \tag{26}$$

接下来，我们将平方根按小参数 $_2 1\ A\quad B+$ 展开为泰勒级数：

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(1 - A + \sqrt{A^2 + B}\left(1 + \frac{1}{2\left(A^2 + B\right)} + \ldots\right)\right) \tag{27}$$

然后，在式 (27) 的分母中提取出 ^2A，并按参数 ^2B A 展开。我们得到

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(1 - A + \sqrt{A^2 + B}\left(1 + \frac{1}{2A^2\left(1 + \frac{B}{A^2}\right)} + \ldots\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{2A} + \ldots\right). \tag{28}$$

因此，在高泵浦功率极限下，我们得到

$$\lim_{\substack{\gamma_{p1} \to \infty \\ \gamma_{p2} \to \infty}} N_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{2A}\right), \tag{29}$$

或者，结合式（25），

$$\lim_{\substack{\gamma_{p1} \to \infty \\ \gamma_{p2} \to \infty}} N_1 = \frac{1}{1 + \phi / \xi}. \tag{30}$$

此外，在同一极限下，$\phi \quad \xi = \begin{matrix} \gamma & \Gamma \\ \gamma + \gamma & + \gamma \quad \Gamma \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & \theta & & & \\ & & & + \gamma & & & \gamma \end{matrix}$。因此，

$$\lim_{\substack{\gamma_{p1} \to \infty \\ \gamma_{p2} \to \infty}} N_1 = \frac{1 + \gamma_{p2} / \gamma_{p1}}{1 + \gamma_{p2} / \gamma_{p1} + \theta}. \tag{31}$$