arXiv:2305.02445v2 [cs.CG] 3 Jul 2024

在线几何覆盖与刺穿*

Minati De[†1]、Saksham Jain[1],Sarat Varma Kallepalli[1],和 Satyam Singh[⋆‡1]

[1]印度理工学院德里分校数学系，印度，{minati,satyam.singh⋆}@maths.iitd.ac.in, sakshampv@gmail.com，saratvarmakallepalli@gmail.com

2024年7月4日

摘要

我们研究刺穿集问题的在线版本：几何对象逐个到达，在线算法必须通过作出不可撤销决策，为已到达的对象维护一个有效的刺穿集。容易看出，对于 $\mathbb{R}$ 上的区间，任何解决该问题的确定性算法，其竞争比至少为 $\Omega(n)$。本文研究大小相近的对象的刺穿集问题。我们提出一种适用于 $\mathbb{R}^d$中大小相近的胖对象的确定性在线算法。对于边长范围为 $[1,k]$的 $\mathbb{R}^d$ 中的相似超立方体，我们提出一种竞争比至多为 $3^d\lceil\log_2 k\rceil+2^d$的确定性算法。最后，我们给出 $\mathbb{R}^2$ 中大小相近的 α胖对象以及$\mathbb{R}^d$中的相似超立方体的竞争比确定性下界。请注意，刺穿一个凸对象的平移副本等价于单位覆盖问题，该问题在在线场景中已得到广泛研究。令人惊讶的是，对于相应对象不是球或超立方体的单位覆盖问题，此前尚无已知的竞争比上界。我们的结果为 $\mathbb{R}^d$中以任意凸对象为相应对象的单位覆盖问题给出了竞争比上界。

关键词。 竞争比、胖对象、几何对象、在线算法、刺穿集问题、单位覆盖问题。

1 引言

刺穿是计算几何中最重要的问题之一。若点集 $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{R}^d$ 中的每个几何对象 $\mathcal{S}$ 都至少包含一个来自 $\mathcal{P}$ 的点，则称 $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{R}^d$ 为几何对象集 $\mathcal{S}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的刺穿集。给定对象集 $\mathcal{S}$，问题是求一个基数最小的刺穿集 $\mathcal{P}$。

本文研究该问题的在线版本，其中几何对象逐个到达，在线算法需要为已经到达的对象维护一个有效的刺穿集。当一个新的几何对象 σ 到达时，如果现有的刺穿集尚未刺穿该对象，则在线算法需要放置一个点 $p\in\sigma$。需要注意的是，在线算法可以向刺穿集中添加点，但不能从中移除点，即在线算法需要做出不可撤销的决策。该问题的目标是使刺穿集的基数最小化。我们通过竞争分析 [5]来分析在线算法的性能。在线算法的竞争比定义为 $\sup_\beta \frac{\mathcal{A}_\beta}{\mathcal{O}_\beta}$，其中 β 表示一个输入序列，$\mathcal{O}_\beta$ 和 $\mathcal{A}_\beta$ 分别表示针对输入序列 β，由最优离线算法和在线算法生成的解的代价。这里，上确界是在所有可能的输入序列 β上取得的。

*本文的初步版本曾发表于第 42 届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS）论文集， 2022 [11]。

†本研究部分由 SERB-MATRICS资助 MTR/2021/000584 资助。
‡本研究得到 CSIR 资助（档案编号：09/086(1429)/2019-EMR-I）。*通讯作者

无线网络中的一项应用启发了该问题的在线版本 [19]。在这里，点表示基站，而对象的中心表示客户端。每个客户端的接收范围具有某种几何形状（例如，圆盘、六边形等）。算法必须放置一个基站，以服务于一个新出现的、尚未被覆盖的客户端。由于安装基站的成本较高，总体目标是放置数量最少的基站。

1.1 相关工作

在离线设置下，刺穿集问题是一个经过充分研究的问题 [8, 18, 24]。对于一维区间，可以在 $O(n\log c)$ 时间内找到最小刺穿集，其中 n 是一维区间的数量， c 是最小刺穿集的大小 [26]。另一方面，对于单位正方形，计算最小刺穿集是 NP完全问题 [22]。Chan [8] 为α-胖凸对象提出了一个多项式时间近似方案。尽管刺穿集问题在离线设置下已经得到充分研究，但令人惊讶的是，对于其他模型中的这一问题，相关研究却很少。Katz 等人 [24] 研究了动态设置下一维区间的这一问题。在该设置中，对象可以到达，也可以离开；但不同于在线模型，在这里，决策可以被撤销。对于 $\mathbb{R}$中的区间集合 $\mathcal{S}$，他们提出了一种线性规模的动态数据结构，使得每次插入或删除操作都能在 $O(c(\mathcal{S})\log|\mathcal{S}|)$ 时间内计算出新的最小刺穿集，其中 $c(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{S}$ 的最小刺穿集大小。

集合覆盖问题和击中集问题与刺穿集问题密切相关。设 $\mathcal{P}$ 是一个元素集合，设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{P}$ 的子集族。集合覆盖是一个子集 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{C}$ 中集合的并集覆盖 $\mathcal{P}$ 中的所有元素；击中集是一个点集 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{P}$，使得集合 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{S}$ 中的每个集合 s 都相交。集合覆盖问题（分别为击中集问题）旨在寻找基数最小的集合覆盖 $\mathcal{C}$ （分别为击中集 $\mathcal{H}$）。如果 $\mathcal{P}=\mathbb{R}^d$，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的对象族，那么相应的击中集问题与刺穿集问题相同。众所周知，元组 $(\mathcal{P},\mathcal{S})$ 的集合覆盖是元组 $(\mathcal{P}^\perp,\mathcal{S}^\perp)$ 的击中集 [1]。这里，对于每个集合 $s\in\mathcal{S}$， $\mathcal{P}^\perp$ 中都有一个元素；对于每个元素 $p\in\mathcal{P}$， $\mathcal{S}^\perp$ 中都有一个集合 s_p，即 $s_p=\{s\in\mathcal{S}\mid p\in s\}$。在离线设置中，如果 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}$ 且集合 $\mathcal{S}$ 由 $\mathbb{R}$ 中的区间组成，则集合覆盖问题可以在多项式时间内求解。然而，当 $\mathcal{S}$ 由简单几何对象（如 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘和 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^2$ [20]）组成时，集合覆盖问题和击中集问题都是 NP-困难的。Alon 等人 [2] 开创了在线集合覆盖问题的研究。在他们的模型中，有限集合 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$ 已经已知。然而，集合 $\mathcal{P}$ 中点的到达顺序未知。当 $\mathcal{P}$ 中一个未被覆盖的点到达时，在线算法必须选择一个覆盖该点的集合 $s\in\mathcal{S}$。Alon 等人提出的算法 [2] 的竞争比为 $O(\log n\log m)$，其中 $|\mathcal{P}|=n$ 和 $|\mathcal{S}|=m$。最近，在同一模型中，Khan 等人 [25] 针对集合覆盖问题提出了一个具有最优竞争比 $\Theta(\log n)$ 的算法，其中 $\mathcal{S}$ 由同心（平移和缩放）正方形组成，且 $\mathcal{P}$ 由 $\mathbb{R}^2$ 中的 n 个点组成。Even 和 Smorodinsky [19] 研究了在线击中集问题，其中集合 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$ 都预先已知，但 $\mathcal{S}$ 中输入对象的到达顺序未知。在该模型中，他们针对区间、半平面或单位圆盘提出了一个具有最优竞争比 $\Theta(\log n)$ 的算法，其中 n 是集合 $\mathcal{S}$ 的基数。最近，Khan 等人 [25] 研究了击中集问题：对于给定的正整数 N，点集 $\mathcal{P}$ 是 $[0,N)^2$ 中整点的子集，而 $\mathcal{S}$ 由 $\mathbb{R}^2$ 中顶点来自 $[0,N)^2$ 的轴平行正方形组成。他们为这一变体获得了一个最优的 $\Theta(\log N)$ 竞争算法。作为对 Even 和 Smorodinsky [19], 结果的扩展，De 等人 [12] 最近研究了在线模型中的集合覆盖问题（分别为击中集问题），其中只有集合 $\mathcal{S}$ （分别为 $\mathcal{P}$）预先已知。集合 $\mathcal{P}$ （分别为 $\mathcal{S}$）事先未知，且集合 $\mathcal{P}$ （分别为 $\mathcal{S}$）中的元素依次被揭示。在该模型中，当 $\mathcal{S}$ 中的对象是正则 k 边形的平移副本（$k\geq4$）或圆盘，且 $\mathcal{P}$ 由 $\mathbb{R}^2$ 中的点组成时，他们提出了一个最优的 $\Theta(\log n)$ 竞争算法。当 $\mathcal{P}=\mathbb{Z}^d$ 且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的几何对象族时，相应的在线击中集问题在 [13] 中进行了研究。

一个相关问题是单位覆盖问题（集合覆盖问题的一种特殊变体），其中 $\mathcal{P}$ 是一个点集，而集合 $\mathcal{S}$ 由给定对象 s所有（无限多个）可能的平移副本组成。注意，当对象 s 为凸对象时，单位覆盖问题等价于刺穿集问题的一个特例：其中对象是凸对象 $-s$ 的平移副本（见第2.2节）。在线单位覆盖问题中，集合 $\mathcal{S}$ 并非预先已知。Charikar等人 [10] 研究了在线单位覆盖问题，其中 $s\subset\mathbb{R}^d$ 是一个单位球。他们提出了一种在线算法，其竞争比为 $O(2^d d\log d)$。他们还证明了$\Omega(\log d/\log\log\log d)$是确定性下界。

该问题的竞争比。Dumitrescu 等人 [16] 将竞争比的上界和下界分别改进为 $O(1.321^d)$ 和 $\Omega(d+1)$。当 $s \subset \mathbb{R}^d$ 是一个中心对称凸体时，他们证明了每一种确定性在线算法的竞争比至少为 $I(s)$，其中 $I(s)$ 是对象 s的照明数（定义见第 2 节）。最近，Dumitrescu 和 T´oth [17] 证明，当 $\mathcal{P} = \mathbb{R}^d$ 且 s 是 $\mathbb{R}^d$中的一个超立方体时，单位覆盖问题的任何确定性在线算法的竞争比至少为 2^d 。令人惊讶的是，我们发现，当 s 不是球或超立方体时，尚无关于竞争比的任何上界。本文提出了这一问题，并为其得出了一个非常一般的上界。

另一个相关问题是由 Friedman 和 Linial [21] 首次提出的凸对象追逐问题。与刺穿集问题类似，在该问题中，凸对象 σ_i 在时刻 i到达，在线算法需要放置一个刺穿点 $p_i \in \sigma_i$，并支付当前已放置的点 p_i与上一个已放置的点 p_{i-1}之间的距离成本，即 $d(p_i, p_{i-1})$。需要注意的是，该问题的目标与刺穿集问题不同。这里的目标是最小化连续刺穿点之间的总距离 $\Sigma_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})$，其中 n 是输入对象的数量。Friedman 和 Linial [21] 证明，对于 $\mathbb{R}^d$中的凸对象追逐问题，不存在竞争比优于 $\sqrt{d}$ 的确定性在线算法。他们提出了一种在线算法，其在$\mathbb{R}^2$中追逐直线时的竞争比至多为 $9\sqrt{2} + 5\sqrt{10}$。随后，Bienkowski 等人 [4] 通过提出一种算法，将 $\mathbb{R}^d$中直线追逐问题的竞争比改进至至多 3，从而改进了这一结果。Bubeck 等人 [7] 提出了一种在线算法，其在 $\mathbb{R}^d$中的凸对象追逐问题上的竞争比为 $2^{O(d)}$ 。与此同时，Bubeck 等人 [6] 提出了一种在线算法，当 $\mathbb{R}^d$ 中的凸对象彼此嵌套时，其竞争比为 $O(\min(d, \sqrt{d} \log n))$。随后，Sellke [28] 和 Argue 等人 [3] 分别独立地改进了这一结果，证明对于 $\mathbb{R}^d$中的凸对象追逐问题，存在一种在线算法，其竞争比分别为 $O(\sqrt{d} \log n)$ 和 $O(\min(d, \sqrt{d} \log n))$。

1.2 我们的贡献

首先，我们注意到，对于任意确定性在线算法，其刺穿 $\mathbb{R}$ 中区间的竞争比至少为 $\Omega(n)$，其中 n 是输入序列的长度。（定理 1）。接下来，我们证明，刺穿凸对象的平移副本等价于单位覆盖问题（定理2）。由此，文献中所有针对使用凸对象平移副本的在线单位覆盖问题的已有结果，都可以推广到凸对象平移副本的刺穿集问题。因此，根据 [16], ，对于中心对称凸体 C的平移副本，任意确定性在线算法的竞争比至少为该对象的照明数 C （定理3）。

接下来，我们探讨当对象大小相近时会发生什么。我们研究大小相近的胖对象。为此，我们在第2.3节定义 α-胖和 α-纵横比$_\infty$ 胖对象。对于 α-胖对象， α的值在平移、旋转、反射和缩放下保持不变；而对于 α-纵横比$_\infty$ 胖对象， α 的值在平移、反射和缩放下保持不变。对于 $\mathbb{R}^d$中的任意对象， α 的值位于区间（$0, 1]$。

为获得上界，我们考虑一种经过充分研究的 [16, 17] 算法， Algorithm-Center，其工作方式如下。收到一个新的输入对象 σ时，如果现有的刺穿集没有刺穿它，我们的在线算法就会将 σ 的中心加入刺穿集。对于超立方体 σ， σ 中的一个点是中心 ，它使到 σ 中任意点的最大距离最小。对于 α-胖且宽高比为 α的$_\infty$ 胖对象，中心的广义定义见第2.3节。胖对象宽度的定义见第2.3节。

1. 首先，我们证明，对于刺穿 $\mathbb{R}^d$ 中具有相似尺寸、 α-纵横比$_\infty$ 且宽度处于范围$[1, k]$, Algorithm-Center 内的胖对象，竞争比至多为 $\left(\left\lceil 2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d\right)\left\lceil \log_{1+\alpha}\binom{2k}{\alpha}\right\rceil + 1$（定理4）。

2. 接下来，我们证明，对于刺穿 $\mathbb{R}^3$ 中具有相似尺寸、 α-胖且宽度处于范围 $[1, k]$,Algorithm-Center 内的对象，竞争比至多为 $\left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3 - 1\right)\left\lceil \log_{1+x}\binom{2k}{\alpha}\right\rceil + 1$，其中 $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$ 且 $x = \frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$（定理 5）。对于刺穿 $\mathbb{R}^2$ 中具有相似尺寸、 α-胖且宽度处于范围 $[1, k]$ 内的对象，我们也得到了类似结果（定理 6）。

3. 随后，对于 $\mathbb{R}^d$ 中边长范围为 $[1,k]$ 的相似超立方体的刺穿问题，我们提出了一种算法 ALGORITHM-VERTEX，其竞争比至多为 $3^d\lceil\log_2 k\rceil + 2^d$（定理7）。

4. 接下来，我们考虑该问题的下界。我们证明，对于在 $\mathbb{R}^2$ 中刺穿大小相近、宽度范围为 $[1,k]$ 的 α-胖对象的每个确定性在线算法，其竞争比至少为 $\left\lfloor \log_{\alpha}^{2+\epsilon}(k) \right\rfloor + 1$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ 是一个足够接近 0 的小常数（定理 8）。

5. 随后，我们将这一上界结果推广到高维情形，证明对于 $\mathbb{R}^d$ 中边长范围为 $[1,k]$ 的相似超立方体，任何用于刺穿这些超立方体的确定性在线算法，其竞争比至少为 $d\left\lfloor \log_{(2+\epsilon)^2} k \right\rfloor + 2^d$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ 是一个足够接近 0 的小常数（定理 9）。

1.3 结构安排

本文组织结构如下。首先，我们在第2节中给出一些相关定义和预备知识。第2.2节讨论单位覆盖与单位刺点问题之间的关系。第2.3节给出与胖对象相关的定义。第3节介绍所有与上界相关的结果。第4节介绍所有与下界相关的结果。最后，我们在第5节给出结论。

2 预备知识

我们用 $\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{R}^+$ 表示正整数集和正实数集。对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，我们用$[n]$ 表示集合 $\{1,2,\ldots,n\}$。对于任意 $i \in [d]$，点 $p \in \mathbb{R}^d$ 的第 i个坐标记作 $p(x_i)$。除非另有说明，我们用“对象”表示 $\mathbb{R}^d$ 中的紧集，且其内部非空。对象 σ 的内部记作 $\mathrm{int}(\sigma)$。如果对象集合 $\mathcal{S}$ 中最大对象直径与最小对象直径之比有一个固定上界，则称该集合中的对象大小相近。任何形如 $\lambda\sigma + x = \{\lambda c + x \mid c \in \sigma\}$的集合（其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}^+$）称为 σ的相似变换副本。若对象集合 $\mathcal{S}$ 中的每个对象 $\sigma \in \mathcal{S}$ 都是其他任一对象 $\sigma' \in \mathcal{S}$的相似变换副本，则称该集合为相似变换对象集。对象 σ的照明数记作 $I(\sigma)$，定义为其并集包含 σ [27]的较小相似变换副本（$\lambda < 1$）的最少数量。若线段yy' 的中点为 x，则称点 y' 是点 y 关于平面上的点 x 的反射。现在，我们定义对象σ 关于点 $c \in \mathbb{R}^d$的反射，记作 $-\sigma(c)$，为 $-\sigma(c) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \frac{x+y}{2} = c$和 $x \in \sigma\} = \{2c - x \mid x \in \sigma\}$（见图1）。注意，对任意 c_1，$c_2 \in \mathbb{R}^d$，$-\sigma(c_1) = -\sigma(c_2) + \tau$，其中 $\tau = 2(c_1 - c_2)$是平移向量。我们用 $-\sigma$ 表示 $-\sigma(c)$的一个平移副本。若存在一点 $c \in \sigma$ 使得 $\sigma = -\sigma(c)$，则称对象为中心对称的。

设 x 和 y 是 $\mathbb{R}^d$ 中任意两个点。我们用 $d(x,y)$（分别用 $d_\infty(x,y)$）表示在 L_2（分别在 L_∞）范数下 x 和 y 之间的距离。设 C 是一个凸对象，原点位于其内部。我们将 C 沿向量 x 平移，并考虑从 x 穿过 y 的射线。令 v 表示这条射线与 C 的边界相交的唯一点。由对象 C 诱导的函数 $d_C(x,y)$ 定义为 $d_C(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,v)}$ [23]。注意，当 C 是中心对称凸体时，函数 d_C 是一个度量（距离函数）；一般情况下，以下性质是众所周知的。

性质 1。设 C 为任意凸对象，x和 y 为 $\mathbb{R}^d$中的任意两个点。那么，$d_C(x,y) = d_{-C}(y,x)$。

2.1 下界

首先，我们观察到，对于一维区间，刺穿集问题的竞争比具有 $\Omega(n)$ 的悲观下界。

定理 1. 在 $\mathbb{R}$ 中刺穿区间的每个确定性在线算法的竞争比至少为 $\Omega(n)$，其中 n 是输入序列的长度。

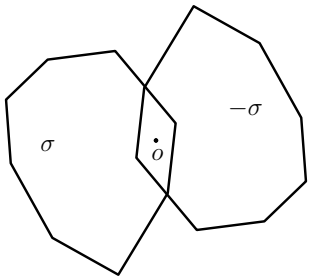


图1：关于点 o反射对象 σ 。

证明. 设 σ_1 是对手呈现给在线算法的第一个区间。设 p_1 是在线算法放置的、用于刺穿区间 σ_1 的一个点。点 p_1 将区间 σ_1 划分为两部分，其中设 σ_1^L 是较大且不包含点 p_1 的部分。此时，对手可以放置一个完全包含在 σ_1^L 中的区间 σ_2 。对于新区间 σ_2，任何在线算法都需要一个新的刺穿点 p_2。再次，可以根据点 p_2 的位置对 σ_2 划分，得到划分 σ_2^L，使得 σ_2^L 不包含 p_2；对手则会放置一个完全包含在 σ_2^L 中的区间 σ_3 。如此一来，对手可以自适应地构造 n 个区间，使得任何在线算法都需要 n 个不同的点才能将其刺穿，而离线最优解只需要一个点。因此，竞争比的下界为 $\Omega(n)$。

□

2.2 单位覆盖与单位刺点

定义1 （单位刺点问题）。 对于任意 $d \in \mathbb{Z}^+$，给定凸对象 $C \subset \mathbb{R}^d$ 的一族平移副本 $\mathcal{S}$，在单位刺点问题中，我们需要在 $\mathbb{R}^d$ 中放置最少数量的点，以刺穿 $\mathcal{S}$ 中的每个对象。

定义2 （单位覆盖问题）。 对于任意 $d \in \mathbb{Z}^+$，给定一个点集 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$，在单位覆盖问题中，我们需要放置最少数量的凸对象 $-C \subset \mathbb{R}^d$ 的平移副本，以覆盖 $\mathcal{P}$ 中的所有点。

下面的定理将上述两个问题联系起来。

定理2。 单位刺点问题等价于单位覆盖问题。

为证明这一点，我们首先证明以下引理。

引理1. 设 x 和 y 是 $\mathbb{R}^d$中的任意两点。那么， x 属于 $y + C$ 当且仅当 y 属于 $x +(-C)$。

证明. 如果 x 属于 $y+C$，那么 $d_C(y, x) \leq 1$。根据性质 1， $d_{-C}(x, y) = d_C(y, x) \leq 1$。因此， y 属于$x + (-C)$。反过来，同样可以证明。由此，引理得证。另一种基于几何的证明如下。设 x 属于 $y + C$。注意，x 属于 $y + C$ 当且仅当 $x - y$ 属于 C，当且仅当$y - x$ 属于 $-C$，当且仅当 y 属于 $x +(-C)$。第一个和第三个等价关系显然成立；第二个等价关系可通过关于原点作反射得到。 □

定理*2*的证明. 对于单位刺点问题，假设 $\mathcal{S}$ 中的每个单位对象都是 $C \subset \mathbb{R}^d$的一个平移副本。根据引理1，我们知道，某个点 $x \in \mathbb{R}^d$ 刺穿对象 $y + C$，当且仅当对象 $x +(-C)$ 覆盖点 y。因此，我们可以将这个问题转化为一个等价的单位覆盖问题，其中点集 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{S}$中所有对象的中心，而我们需要用 $(-C)$ 的平移副本覆盖这些点。类似地，可以证明等价关系的另一方向。□

作为定理2的推论，在 [9, 10, 16, 17] 中研究的与在线单位覆盖问题相关的所有结果（总结于表1）均适用于在线刺穿问题。具体而言，由于 [16,定理 4], ，我们对中心对称凸对象得到以下下界结果。为完整起见，给出一份改编自 [ibid.], 的证明，该证明本身也可能具有独立的意义。

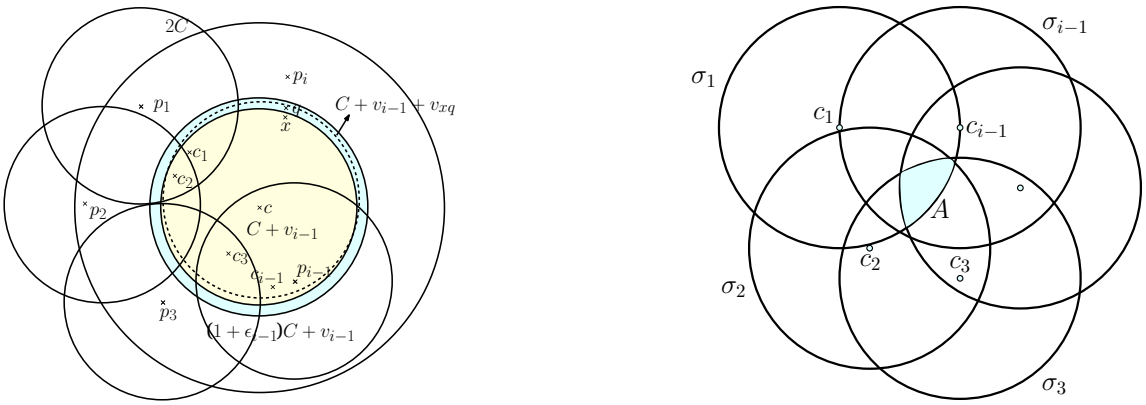


图2：(a) 一个中心对称凸对象 $C + v_{i-1}$（黄色部分）包含点 c_1，c_2、.....、c_{i-1}。注意，$(1 + \epsilon_{i-1})C + v_{i-1}$ 是 $C + v_{i-1}$ 的 ϵ_{i-1}-邻域。距离 $d_C(q, x) < \epsilon_{i-1}$，其中$q \in \text{int}((1 + \epsilon_{i-1})C + v_{i-1})$ 且 $x \in \text{int}(C + v_{i-1})$。平移副本 $C + v_{i-1} + v_{xq}$（虚线部分）包含 c_1，c_2、.....、c_{i-1} 和 q。(b) 青色区域表示交集区域 A，即 $\cap_{k=1}^{i-1}\sigma_k$。

定理3。 对于刺穿一组中心对称凸对象的平移副本的每个确定性在线算法，其竞争比至少为 $I(C)$，其中 $I(C)$ 表示 C的照明数。

证明。 为证明下界，我们可以设想 Alice 和 Bob 之间进行一场博弈。在这场博弈中，Alice 扮演对手，Bob 则扮演在线算法。Alice 向 Bob 呈现 C 的一个平移副本 σ_i，如果先前放置的刺穿点尚未刺穿它，Bob 就需要放置一个刺穿点 p_i 来刺穿 σ_i，其中 $i \in [I(C)]$。我们声称，Alice 可以找到一个以 c_i 为中心的对象 σ_i，使得以下不变量成立。

(I) 对象 ct σ_i 未被此前放置的任何刺穿点 p_j刺穿，其中 $j \in [i-1$].

(II) 对象集 $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i\}$ 可由一个点刺穿。换言之，$\bigcap_{k=1}^{i} \sigma_k \neq \emptyset$。

不变量 (I) 意味着 Bob 被迫放置 $I(C)$ 个刺穿点，而不变量 (II) 则确保对象集 $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i\}$ 可由一个点刺穿。因此，离线最优解只需要一个刺穿点，而任何在线算法都需要 $I(C)$ 个刺穿点来刺穿 σ_1，σ_2，.....，$\sigma_{I(C)}$。因此，任何确定性在线算法的竞争比至少为 $I(C)$。我们通过对 i 使用归纳法证明这一结论。当 $i = 1$ 时，不变量 (I) 和 (II) 都显然成立（基础情形）。对于 $i \in \{1, 2, \ldots I(C) - 1\}$，假设两个不变量均成立（归纳假设）。现在只需证明 Alice 能找到一个以 c_i 为中心的对象 σ_i，使得对于 $i = I(C)$，两个不变量均成立。

断言 1. 设 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$ 是中心分别位于 $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$ 的中心对称凸体 C 的平移副本。这里，$\cap_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ 非空，当且仅当存在一个平移向量 v_{i-1}，使得 $C + v_{i-1}$ 包含所有中心 $c_1, \ldots, c_{i-1}$。

证明。假设 $\cap_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ 非空，并令 x 为 $\cap_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ 中的任意一点（见图2b）。对于每个 $j \in [i-1]$，x 到所有中心 c_j 的距离均小于1，即 $d_C(x, c_j) < 1$。因此，以 x为中心的 C的一个平移副本将分别包含对象 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$ 的所有中心 $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$。反过来，假设以 c 为中心的 C 的一个平移副本（记为 $C + v_{i-1}$）包含所有中心$c_1, \ldots, c_{i-1}$。这里，对于每个 $j \in [i-1]$，$d_C(c, c_j)$ 小于1。由于 C是一个中心对称对象，对于每个 $j \in [i-1]$，$d_C(c_j, c)$ 也小于1。因此，对于每个 $j \in [i-1]$，点 c 均属于 σ_j。故 $\cap_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ 非空。

□

设 $C+v_{i-1}$ 是 C 的一个平移副本，包含所有中心 $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$。设 ϵ_{i-1} 是最大值，使得以 $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$ 为中心的 $\epsilon_{i-1}C$ 的平移副本包含在 $C+v_{i-1}$ 中，其中 $v_{i-1} \in \mathbb{R}^d$ 是一个平移向量（见图2a）。注意，$(1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1}$ 是 $C+v_{i-1}$ 在 L_C 范数下的 ϵ_{i-1}-邻域。

由于 p_j 是 σ_j 的刺穿点，σ_j 对象的中心 c_j 与刺穿点 p_j 之间的 d_C 距离至多为一，即 $d_C(c_j, p_j) \leq 1$，对每个 $j \in [i-1]$ 均成立。由于 $d_C(p_j, c_j) \leq 1$，因此所有刺穿点 $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ 都将位于 C 的 C-邻域内（见图2a）。

断言2. 设 $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ 为 C 的平移副本，其中心分别位于 $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$。那么 $\cup_{j=1}^{i-1} P_j$ 将无法完全覆盖 $(1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1}$。

证明。 如果 $\cup_{j=1}^{i-1} P_j$ 覆盖了整个区域 $(1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1}$，那么这就与照明数的定义相矛盾。

□

由于断言2，我们可以将点 c_i（对象 σ_i 的中心）放置在 $\text{int}((1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1})$ 中，使得 $d_C(p_j, c_i) > 1$，对所有 $j \in [i-1]$ 都成立。现在，如果我们能证明 C 的某个平移副本能够覆盖 c_i 以及所有之前的 c_j，其中 $j \in [i-1]$，那么就完成了。

断言3. 对于任意点 $q \in (1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1}$，存在某个 C (平移副本（设为 σ_{new}），使得 σ_{new} 的内部包含所有中心 $\{c_1, \ldots, c_{i-1}, q\}$。

证明。 如果 $q \in \text{int}(C+v_{i-1})$（以黄色标出，见图2a），那么 $C+v_{i-1}$ 包含所有之前的中心 $c_1, \ldots, c_{i-1}$ 以及 q。不失一般性，假设 q 位于环形区域 $\text{int}((1+\epsilon_{i-1})C+v_{i-1}) \setminus \text{int}(C+v_{i-1})$ 内（以蓝色标出，见图2a）。容易看出，存在一点 $x \in \text{int}(C+v_{i-1})$，使得向量 $v_{xq} = q-x$ 小于 ϵ_{i-1}（按 L_C 范数）。注意，$q \in \text{int}(C+v_{i-1}+v_{xq})$（见图2a）。

根据对 $\epsilon_{i-1} > 0$ 的选择，点 c_1、c_2、.....、c_{i-1} 和 $\partial(C+v_{i-1})$ 之间的 d_C 距离至少为 ϵ_{i-1}，且 v_{xq} 也小于 ϵ_{i-1}。这意味着，$\text{int}(C+v_{i-1}+v_{xq})$ 包含中心 c_1、c_2、.....、c_{i-1} 以及 q。

□

根据上述断言3，可以找到 C 的一个平移副本，使其覆盖点 c_i 以及之前的所有点 c_j，其中 $j \in [i-1]$。根据断言1，$\cap_{j=1}^{i} \sigma_j$ 也非空。因此，定理得证。 □

已知，对于 $\mathbb{R}^d$ [16, 27] 中的任意满维平行六面体，都有 $I(C) = 2^d$。因此，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的超立方体，$I(C) = 2^d$ 的值为。因此，我们有如下结论。

推论 1. 在 $\mathbb{R}^d$ 中，刺穿超立方体平移副本的每个确定性在线算法的竞争比至少为 2^d。

几何对象	下界	上界
区间的平移副本	2 [10]	2 [9]
正方形的平移副本	4 [16, 17]	4 [9]
$\mathbb{R}^d$ 中超立方体的平移副本	2^d [17]	2^d [9]
全等圆盘	4 [16]	5 [16]
$\mathbb{R}^3$ 中的全等球	5 [16]	12 [16]
$\mathbb{R}^d$、$d > 3$ 中的全等球	$d+1$ [16]	$O(1.321^d)$ [16]
中心对称的平移副本- 度量凸对象 $C \subset \mathbb{R}^d$	$I(C)$ [16]	★ [推论 3]

★本文所得结果。

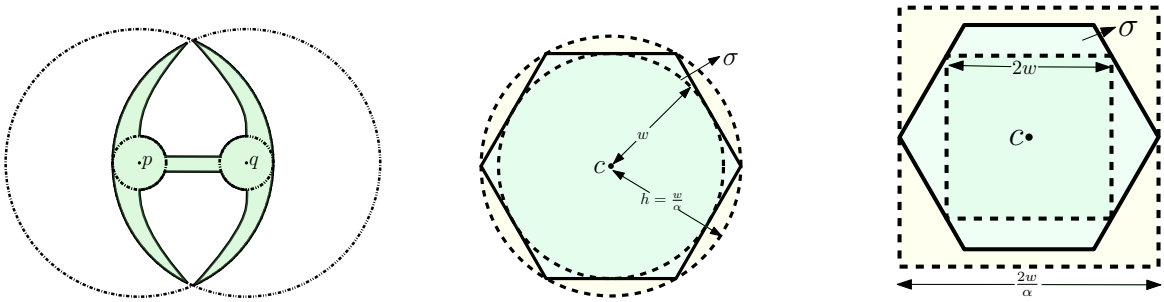
表 1：在线刺穿集问题的已知结果汇总。

2.3 胖对象

几何学文献中存在多种不同的胖度定义（即不会极其细长的形状） [8]。例如，参见 [14, 18]中的诸多参考文献。根据我们的研究目的，我们给出以下恰当的定义。

设 σ 是一个对象， x 是 σ 中的任意一点。令 $\alpha(x)$ 表示从 x 到对象 σ 的边界 $\delta(\sigma)$ 的最小距离与最大距离之比（按 L_2 范数计算）。换言之， $\alpha(x) = \min_{y\in\delta(\sigma)} d(x,y) \max_{y\in\delta(\sigma)} d(x,y)$，其中 $d(x,y)$ 是 x 与 y 之间的距离。对象 σ 的纵横比 $\alpha(\sigma)$ 定义为任意点 $x \in \sigma$ 对应的 $\alpha(x)$ 的最大值，即 $\alpha(\sigma) = \max\{\alpha(x) : x \in \sigma\}$。如果一个对象的纵横比恰好为 α，则称其为 α-胖对象。若点 $c \in \sigma$ 满足 $\alpha(c) = \alpha(\sigma)$，则将其定义为对象 σ 的中心（见图 3b）。注意， α-胖对象的中心可能不唯一。例如见图 3a。如果对象 σ 有多个点满足中心的性质，那么为了我们的目的，可以任意选取其中一个作为 σ 的中心。从中心到对象边界的最小距离（最大距离）分别称为该对象的宽度（高度）。

注意，对于任意对象 σ，我们都有 $0 < \alpha(\sigma) \leq 1$。 α 的最大可能值在 $\mathbb{R}^d$ 中的对象为球时取得，而当对象为 $\mathbb{R}^d$ 中的超立方体时， α 的值为 $\frac{1}{\sqrt{d}}$。如果存在常数 $0 < \alpha \leq 1$，使得 $\mathcal{S}$ 中的每个对象都是 α-胖对象，则称对象集合 $\mathcal{S}$ 为胖 对象集合。对于由胖对象组成的集合 $\mathcal{S}$，其中的每个对象 $\sigma \in \mathcal{S}$ 不必是凸的，也不必是连通的。当 $\mathcal{S}$ 中对象的最大宽度与 $\mathcal{S}$ 中对象的最小宽度之比被某个固定常数所界定时， α-胖对象的集合 $\mathcal{S}$ 称为大小相近的胖对象 。



(a) (b) (c)

图 3: （a）绿色对象在 p 和 q 处有两个中心。（b-c）分别为纵横比和纵横$_\infty$ 比的几何解释。

观察以下 α-胖对象的性质。

性质 2. 设 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 α-胖对象，则

- 任意 σ 的旋转副本 σ' 都是一个 α-胖对象；
- 任意平移副本 σ' 的 σ 都是一个 α-胖对象；
- 任意反射副本 $-\sigma$ 的 σ 都是一个 α-胖对象；
- 缩放副本 $\lambda\sigma$ 是一个 α-胖对象，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+$。

性质 3. 设 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 是一个以点 c 为中心、宽度为 w 的 α-胖对象，则

c 处以 w 为半径的球完全包含在 σ 中，并且

- 一个以 c 为中心、半径为 $\frac{w}{\alpha}$ 的球包含对象 σ。

考虑使用 L_∞ 范数而不是 L_2 范数，与上文类似，可以定义对象的长宽比、中心、宽度和高度。长宽比为 α 的对象称为 α-长宽比$_\infty$ 胖对象（见图 3c）。注意，对于任意对象 σ， $\alpha_\infty(\sigma)$ 的值也严格大于零，且 $\alpha_\infty(\sigma)$ 的最大可能值在轴对齐超立方体上取得。与大小相近的娱乐注册

胖对象，我们可以定义大小相近的纵横比为∞ 的胖对象。与性质 2 和 3 类似，我们有以下性质。

性质 4. 设 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 α-纵横比$_\infty$ 胖对象，那么

- 任意 σ' 的 σ 平移副本 α-方面$_\infty$ 都是一个胖对象；
- $-\sigma$ 的任意 σ 反射副本 α都是纵横比为∞ 的胖对象；
- 的缩放副本 $\lambda\sigma$ 是一个 α长宽比的胖对象，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+$。

性质 5。 设 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 α-宽高比的胖对象对象，其中心为点 c，宽度为 w，则

- 一个以 c 为中心、边长为 $2w$ 的超立方体完全包含在 σ 中，并且
- 一个边长为$\frac{2w}{\alpha}$ 、中心位于 c 的超立方体包含对象 σ。

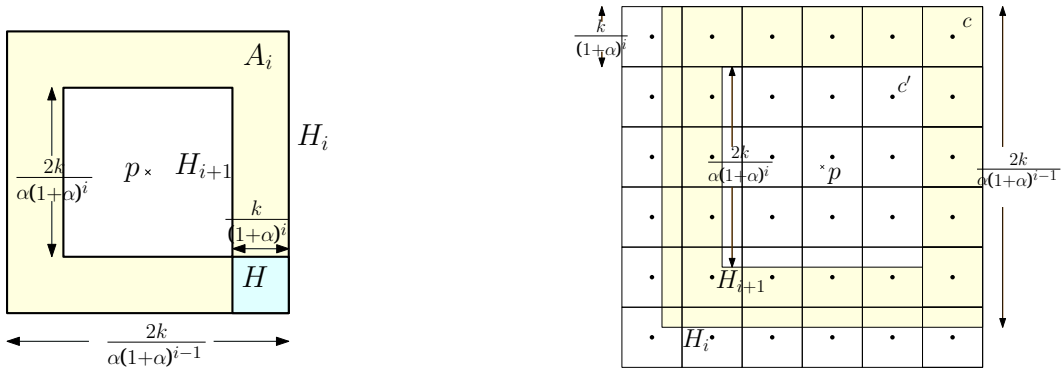
3 上界

在小节 3.1 和 3.2 中，我们分别分析 Algorithm-Center 刺穿大小相近的α宽高比$_\infty$ 胖对象和 α胖对象的性能，这些对象的宽度范围为 $[1, k]$。两种情形的分析本质上相似。为了界定竞争比，我们确定 Algorithm-Center 针对离线最优解中的每个点 p 放置的点数。为了计算我们的算法放置的刺穿点数量，我们考虑包含所有可被点 p刺穿的对象的中心的区域。我们将该区域划分为 $\lceil \log k \rceil$ 个环带区域，使得 Algorithm-Center在每个环带区域中放置相同数量的刺穿点。最后，我们给出我们的算法在每个环带区域中放置的点总数的上界。竞争比为 $\lceil \log k \rceil$ 乘以该数量。

3.1 对于尺寸相近的纵横比为 $_\infty$ 的胖对象

本节给出了在 $\mathbb{R}^d$ 中刺穿大小相近 α、宽高比为$_\infty$ 的胖对象的竞争比上界。在以下定理的证明中，若未明确说明，所有距离均采用 L_∞ 范数，所有超立方体均为轴平行的。

定理4。 对于刺穿 $\mathbb{R}^d$ 中宽度范围为 $[1, k]$，Algorithm-Center 的同等大小 α-长宽比$_\infty$ 胖对象，$\left(\left\lceil 2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d\right)\left\lceil$ 的竞争比至多为$\log_{1+\alpha}\binom{2k}{\alpha}\right\rceil + 1$。



(a) (b)

图4: （a）环形区域 $A_i = H_i \setminus H_{i+1}$的示意图。（b）描绘了 Δ' 的单元，其中单元 $c \in \Delta'$ 的一个角与 H_i 的一个角重合。

证明。 设 $\mathcal{I}$ 为提交给算法的 α-长宽比∞ 胖对象集合。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{O}$ 分别为 ALGORITHM-CENTER 返回的刺穿集和针对 $\mathcal{I}$的离线最优解。设 $p \in \mathcal{O}$ 为一个刺穿点，并设$\mathcal{I}_p \subseteq \mathcal{I}$ 为被点 p刺穿的所有输入 α-长宽比∞ 胖对象的集合。设 $\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$ 为 ALGORITHM-CENTER 放置的刺穿点集合，用以刺穿 $\mathcal{I}_p$中的所有输入对象。显然，$\mathcal{A} = \cup_{p\in\mathcal{O}}\mathcal{A}_p$。 因此，我们算法的竞争比上界为$\max_{p\in\mathcal{O}} |\mathcal{A}_p|$。

任取一点 $a \in \mathcal{A}_p$。 由于 a 是一个宽高比为 α 的胖对象 ∞ $\sigma \in \mathcal{I}_p$ 的中心，该对象包含点 p，且宽度至多为 k，因此 a 与 p 之间的距离至多为 $\frac{k}{\alpha}$。 因此，以 p 为中心、边长为 $\frac{2k}{\alpha}$ 的超立方体 H_1 包含 $\mathcal{A}_p$ 中的所有点。令 H_i 为以 p 为中心、边长为 $\alpha\frac{2k}{1+\alpha}(\frac{1}{1+\alpha})^{i-1}$ 的超立方体，其中 $i \in [m]$，且 m 是满足 $\alpha\frac{2k}{1+\alpha}(\frac{1}{1+\alpha})^{m-1} \le 1$ 的最小整数。注意， H_1、H_2、.....、H_m 是同心超立方体。定义环形区域 $A_i = H_i \setminus H_{i+1}$，其中$i \in [m-1]$（见图4a）。令 $\mathcal{A}_{p,m} = \mathcal{A}_p \cap H_m$ 和 $\mathcal{A}_{p,i} = \mathcal{A}_p \cap A_i$ 为 $\mathcal{A}_p$ 中包含在区域 A_i 内的子集，其中 $i \in [m-1]$。由于 H_m 中任意两点之间的距离至多为 1，且 $\mathcal{I}_p$ 中任一对象的宽度至少为 1，因此，任何属于 $\mathcal{I}_p$ 且中心位于 H_m 的对象都包含整个超立方体 H_m。因此，我们的在线算法在 H_m 中至多放置一个刺穿点。于是，$|\mathcal{A}_{p,m}| \le 1$。

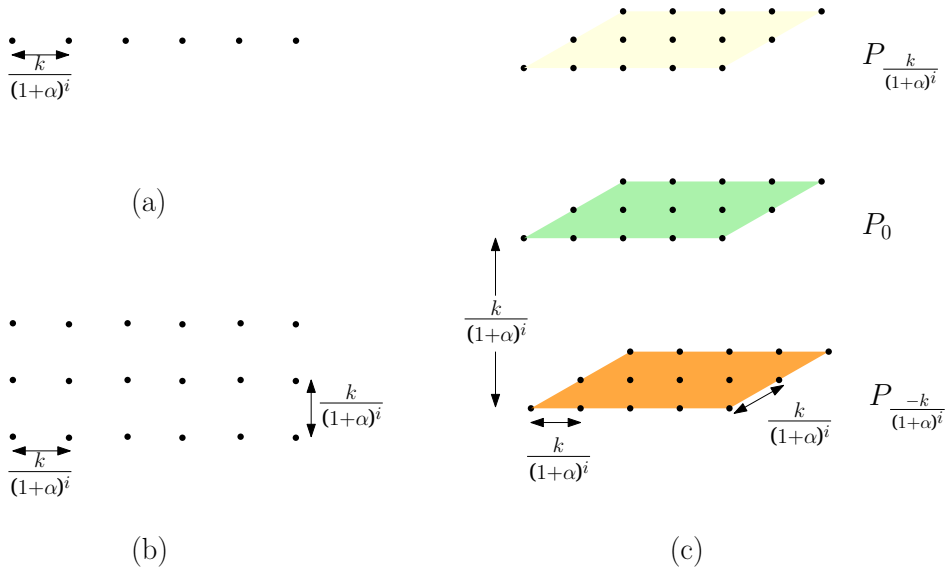


图5： Π_d 的点分别绘制于 (a) $d = 1$、(b) $d = 2$ 和 (c) $d = 3$。设 P_q 为超平面 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x(x_3) = q\}$。在图 (c) 中，展示了将 Π_3 投影到矩形区域上的平面 $P_{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}$（黄色）、$P_0$（绿色）和 $P_{\frac{-k}{(1+\alpha)^i}}$（橙色）的情形。

引理 2. $|\mathcal{A}_{p,i}| \le \left\lceil 2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha}\right\rfloor^d$，其中 $i \in [m-1]$。

证明。设 H 是任意一个边长为 $k(1+\alpha)^i$ 的超立方体，满足 $H \cap A_i \neq \emptyset$。首先，我们说明在线算法在 $H \cap A_i$ 中至多放置一个刺穿点，以刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的对象。设 q_1 是在线算法在 $H \cap A_i$ 中放置的第一个刺穿点。为导出矛盾，假设在线算法又放置了一个刺穿点 $q_2 \in H \cap A_i$。设 $\sigma \in \mathcal{I}_p$ 是中心位于 q_2、因该刺穿点而被放置的对象。由于对象 σ 包含 p，且 p 与 q_2 之间的距离至少为 $\alpha k(1+\alpha)^i$，因此对象 σ 的高度至少为 $\alpha k(1+\alpha)^i$，宽度至少为 $k(1+\alpha)^i$。注意， H 中任意两点之间的距离至多为 $k(1+\alpha)^i$。因此，q_1 与 q_2 之间的距离至多为 $k(1+\alpha)^i$。由于 σ 的宽度至少为 $k(1+\alpha)^i$，对象 σ 已被 q_1 刺穿。这与我们的算法矛盾。因此，区域 $H \cap A_i$ 中至多包含一个 $\mathcal{A}_{p,i}$ 的刺穿点。为完成证明，接下来我们将说明，如何使用至多 $\left(\left\lceil 2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha}\right\rfloor^d\right)$ 个内部不相交的边长为 A_i 的超立方体覆盖环形区域

边长为 $k^{(1+\alpha)^i}$。

我们可以使用边长为 $k^{(1+\alpha)^i}$ 的超立方体对 $\mathbb{R}^d$ 进行划分。形式化地，设 $\Pi_d = \left\{\alpha_1 \frac{k}{1+\alpha}^{()^i}\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \frac{k}{(1+\alpha)^i}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_d \frac{k}{(1+\alpha)^i}\mathbf{e}_d \,\middle|\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d\right\}$ 为一个格点，其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\ldots, \mathbf{e}_d$ 是标准单位向量（关于 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中格点的示意图，见图5）。

引命题 4。对于任意点 q 属于 $\mathbb{R}^d$，存在一点 r 属于 Π_d，使得 $d_\infty(q, r) \leq 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}$.

证明。注意，对于任意点 $r \in \Pi_d$，r 的每个坐标都是 $k^{(1+\alpha)^i}$ 的整数倍。对于任意点 $q \in \mathbb{R}^d$，对于每个 $j \in [d]$，点 q 的第 j 个坐标都可以唯一地写成 $q(x_j) = z_j + y_j$，其中 $z_j \in \left(\frac{k}{1+\alpha}^{()^i}\right)\mathbb{Z}$ 且 $y_j \in \left[0, \frac{k}{1+\alpha}^{()^i}\right)$。这里，$\beta\mathbb{Z}$ 表示集合 $\{\beta z \mid z \in \mathbb{Z}\}$。现在，我们根据 q 的坐标定义点 $r \in \Pi_d$。对于每个 $j \in [d]$，将 r 的第 j 个坐标设置如下。

$$r(x_j) = \begin{cases} z_j, & \text{if } y_j \in \left[0, \frac{k}{2(1+\alpha)^i}\right) \\ z_j + \frac{k}{(1+\alpha)^i}, & \text{if } y_j \in \left[\frac{k}{2(1+\alpha)^i}, \frac{k}{(1+\alpha)^i}\right). \end{cases}$$

根据点 r 的构造，对于每个 $j \in [d]$，我们有 $|r(x_j) - q(x_j)| \leq 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}$。因此，$d_\infty(r, q) = \max_{j\in[d]} |r(x_i) - q(x_i)| \leq 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}$。 ——— □

令 Δ 为以点 Π_d 为中心、边长为 $k^{(1+\alpha)^i}$ 的超立方体集合。Δ 中的每个超立方体称为一个单元。根据格点的构造，Π_d 中任意两个不同点之间的距离至少为 $k^{(1+\alpha)^i}$。因此，Δ 中的单元两两内部不相交。根据断言4，Δ 中的单元覆盖了整个 $\mathbb{R}^d$。

通过将 Δ 中的每个单元平移一个平移向量，构造 Δ 的一个副本 Δ'，使得单元 $c \in \Delta'$ 的一个角点与 H_i 的一个角点重合（见图4b）。例如，若平移向量为 $\left(\left(p(x_1) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1} - 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}\right), \left(p(x_2) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1} - 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}\right), \ldots, \left(p(x_d) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1} - 2^{\frac{k}{(1+\alpha)^i}}\right)\right)$，那么 H_i 的角点 $\left(\left(p(x_1) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1}\right), \left(p(x_2) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1}\right), \ldots, \left(p(x_d) + \alpha\ \frac{k}{1+\alpha}()^{i-1}\right)\right)$ 将与单元 $c \in \Delta'$ 的一个角点重合。令 $\mathcal{C}$ 为 Δ' 中覆盖超立方体 H_i 的单元的最小集合。容易看出，$\mathcal{C}$ 的基数至多为 $\left\lceil 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d$。注意，根据格点的构造，存在一个完全包含于 H_{i+1} 中的单元 $c' \in \Delta'$，其一个角点与 H_{i+1} 的一个角点重合。因此，在集合 $\mathcal{C}$ 中，至少有 $\left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d$ 个单元包含于 H_{i+1} 中。由此，至多 $\left(\left\lceil 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d\right)$ 个边长为 $k^{(1+\alpha)^i}$ 的超立方体的并集完全覆盖环形区域 A_i。于是，引理得证。 □

由于 $\cup \mathcal{A}_{p,\,i} = \mathcal{A}_p$，我们有 $|\mathcal{A}_p| \leq \left(\left\lceil 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d\right)(m-1) + 1$。由于 $m - 1 \leq \left\lceil \log_{1+\alpha}\binom{2k}{\alpha} \right\rceil$ 的值，定理得证。 □

∞ 中球的长宽比值为 $\frac{1}{\sqrt{d}}$。因此，我们得到以下结论。

推论 2. 对于半径范围为 $[1, k]$、ALGORITHM-CENTER 的 $\mathbb{R}^d$ 中的球进行刺穿，$\left(\left\lceil 2\left(1 + \sqrt{d}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor 2\sqrt{d} \right\rfloor^d\right)\lceil \log^{1+\frac{1}{\sqrt{d}}}(2k\sqrt{d})\rceil + 1$ 可实现至多为该值的竞争比。

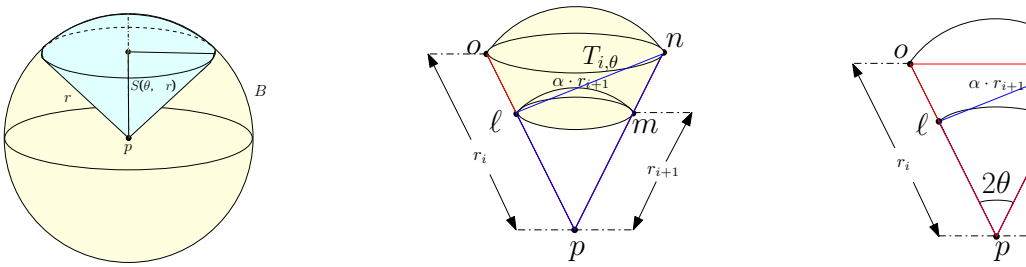
$\mathbb{R}^d$中的单位覆盖问题

在定理4中，如果固定 $k = 1$的值，那么根据定理2，我们可以得到关于单位覆盖问题的以下结果。

推论3。对于在 $\mathbb{R}^d$中使用凸对象的平移副本解决单位覆盖问题，存在一种确定性在线算法，其竞争比至多为 $\left(\left\lceil 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\rceil^d - \left\lfloor \frac{2}{\alpha} \right\rfloor^d\right)\left\lceil \text{对数}_{1+\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right\rceil + 1$，其中 α 是 C的长宽$_\infty$ 比。

3.2 三维实数空间中大小相近的胖对象

定理 5。 对于刺穿大小相近的 α-胖对象，在 $\mathbb{R}^3$ 中宽度范围为 $[1,k]$、ALGORITHM-CENTER的对象可达到至多为 $\left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3-1\right)\left\lceil\log_{1+x}\binom{2k}{\alpha}\right\rceil+1$的竞争比，其中 $\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$且 $x=\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$。



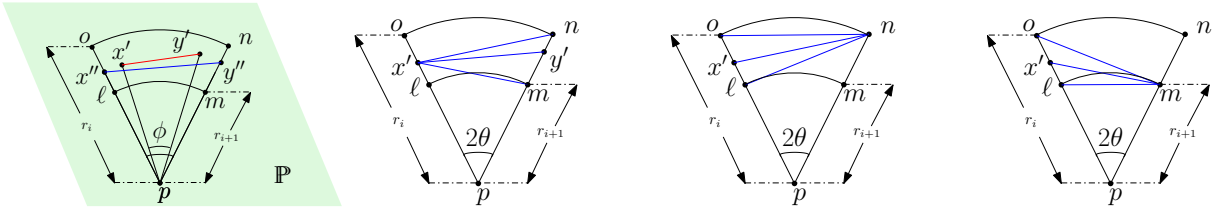
(a) (b) (c)

图 6：（a）使用球形扇区 $S(\theta, r)$ 将半径为 r 的球 B 划分。（b）球形扇区 $S(\theta, r_i)$ 和球形块 $T_{i,\theta}$ 的描述。（c）球形扇区 $S(\theta, r_i)$ 的投影。

证明。设 $\mathcal{I}$ 是算法接收的大小相近的 α-胖对象集合。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{O}$ 分别是由 ALGORITHM-CENTER 返回的针对 $\mathcal{I}$ 的两个刺穿集，以及离线最优解。设 p 是 $\mathcal{O}$ 中任意一个刺穿点。设 $\mathcal{I}_p \subseteq \mathcal{I}$ 是被点 p 刺穿的输入对象集合。设 $\mathcal{A}_p$ 是我们的算法放置的刺穿点集合，用于刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的所有对象。为证明该定理，我们将给出 $|\mathcal{A}_p|$ 的一个上界。

任取一点 $a \in \mathcal{A}_p$。由于 a 是一个 α-胖对象 $\sigma \in \mathcal{I}_p$ 的中心（该对象包含点 p），且其宽度至多为 k（高度至多为$\frac{k}{\alpha}$），因此 a 与 p 之间的距离至多为$\frac{k}{\alpha}$。因此，以 p为中心、半径为 $\frac{k}{\alpha}$ 的球 B_1 包含 $\mathcal{A}_p$中的所有点。令 $x=\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$ 为一个正常数。令 B_i 为一个以 p 为中心、半径为$r_i=\frac{k}{\alpha}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{i-1}$ 的球，其中 $i \in [m]$，而 m 是满足$\alpha\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-1} \le \frac{1}{2}$）的最小整数。注意，$B_1$、$B_2$、……、$B_m$是以 p为中心的同心球。令 $\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$为(0, $\frac{\pi}{10}$]中的一个常数角。由于 $\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$，且$x=\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$，我们有$\cos(2\theta)=(x+2)/2(x+1)$以及 $x^2+x=\alpha^2$。令 $S(\theta, r_i)$为一个球形扇区，它是从球 B_i 中截取的部分，其边界为顶点位于该球中心 p 处、半锥角为 θ 的圆锥（示意见图6a）。对于任意 $i \in [m-1]$，定义第 i个球形块$T_{i,\theta}=S(\theta, r_i) \setminus S(\theta, r_{i+1})$。

命题 5。 $T_{i,\theta}$ 中任意两点之间的距离至多为 αr_{i+1}。



(a) (b) (c) (d)

图7：（a）平面 $\mathbb{P}$ 的描述。（b）三角形 $\triangle my'x'$ 和 $\triangle ny'x'$ 的示意图。（c）三角形 $\triangle oox'n$ 和 $\triangle \ell x'n$ 的示意图。（d）三角形 $\triangle ox'm$ 和 $\triangle x'\ell m$ 的示意图，在 $T_{i,\theta}$ 中。

证明。令 x' 和 y' 为$T_{i,\theta}$中的一对最远点。令 $\mathbb{P}$ 为经过点 p、 x'和 y'的平面（见图7c）。令 ℓ、 m、 n、 o 为$T_{i,\theta}\cap\mathbb{P}$的角点（见图7(b-d)）。若 $\angle x'py' < 2\theta$，则可找到两点 x''、$y'' \in \mathbb{P}\cap T_i$、$_\theta$，使得 $d(p,x') = d(p,x'')$， $d(p,y') = d(p,y'')$且 $\angle x''py'' = 2\theta$（见图7a）。根据余弦定理，容易看出 $d(x'',y'') > d(x',y')$。因此，角 $\angle x'py' = 2\theta$。换言之， x' 和 y' 必定分别位于线段 ℓo 和 mn上。在这种情况下，$d(x',y')$至多为$\max\{d(o,n)\ d(\ell,n)\}$。为说明这一点，考虑三角形 $\triangle my'x'$和 $\triangle ny'x'$（见图7b）。由于点 y' 在线段 mn上，角 $\angle x'y'n$ 或角 $\angle x'y'm$至少为 $\frac{\pi}{2}$。根据正弦定理，我们有 $d(\overline{x',y'}) \leq \max\{d(x',n)\ d(x',m)\}$。同理，我们有 $d(x',n) \leq \max\{d(o,n)\ d(\ell,n)\}$（见图7c），以及 $d(x',m) \leq \max\{d(o,m)\ d(\ell,m)\} = d(o,m)$（见图7d）。根据余弦定理，我们有 $d(\ell,n) = d(o,m)$。因此， $d(x',y')$至多为$\max\{d(o,n)\ d(\ell,n)\ d(o,m)\} = \max\{d(o,n)\ d(\ell,n)\}$。

现在，我们将证明 $d(o,\ n) = d(\ell,\ n) = \alpha r_{i+1}$。首先，考虑三角形 $\triangle\ell pn$（见图 6b 和 6c）。这里，我们有

$$
\begin{aligned}
d^2(\ell,n) =& d^2(p,\ell) + d^2(p,n) - 2d(p,\ell)d(p,n)\cos(2\theta) && \text{(Due to the law of cosines)}\\
=& {r_{i+1}}^2 + {r_i}^2 - 2r_{i+1}r_i\cos(2\theta) && \text{(Since } d(p,\ell) = r_{i+1} \text{ and } d(p,n) = r_i\text{)}\\
=& \left(\frac{k}{\alpha(1+x)^i}\right)^2 + \left(\frac{k}{\alpha(1+x)^{i-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{k}{\alpha(1+x))^i}\right)\left(\frac{k}{\alpha(1+x))^{i-1}}\right)\cos(2\theta)\\
& && \text{(Since } r_{i+1} = \tfrac{k}{\alpha(1+x)^i} \text{ and } r_i = \tfrac{k}{\alpha(1+x)^{i-1}}\text{)}\\
=& \left(\frac{k}{\alpha(1+x)^i}\right)^2 \left(1 + (1+x)^2 - 2(1+x)\cos(2\theta)\right)\\
=& r_{i+1}^2\left(1 + (1+x)^2 - 2(1+x)\cos(2\theta)\right) && \text{(Since } r_{i+1} = \tfrac{k}{\alpha(1+x)^i}\text{)}\\
=& r_{i+1}^2\left(1 + (1+x)^2 - (x+2)\right) && \text{(Since } \cos(2\theta) = \tfrac{x+2}{2(x+1)}\text{)}\\
=& r_{i+1}^2\left(1 + 1 + x^2 + 2x - x - 2\right) = r_{i+1}^2\left(x^2 + x\right)\\
=& \left(\alpha r_{i+1}\right)^2. && \text{(Since } x^2 + x = \alpha^2\text{)}
\end{aligned}
$$

现在，考虑三角形 $\triangle opn$ （见图 6b 和 6c）。这里，我们有

$$
\begin{aligned}
d^2(o,n) =& d^2(p,o) + d^2(p,n) - 2d(p,o)d(p,n)\cos(2\theta) && \text{(Due to the law of cosines)}\\
=& {r_i}^2 + {r_i}^2 - 2r_ir_i\cos(2\theta) && \text{(因为 } d(p,\ o) = d(p,\ n) = r_i\text{)}\\
=& 2{r_i}^2(1 - \cos(2\theta))\\
=& 2r_{i+1}^2(1+x)^2(1 - \cos(2\theta)) && \text{(Since } r_i = r_{i+1}(1+x)\text{)}\\
=& 2r_{i+1}^2(1+x)^2\left(1 - \frac{(x+2)}{2(x+1)}\right) && \text{(Since } \cos(2\theta) = \tfrac{x+2}{2(x+1)}\text{)}\\
=& 2r_{i+1}^2(1+x)^2\left(\frac{2(x+1) - (x+2)}{2(x+1)}\right) = r_{i+1}^2\left(x^2 + x\right)\\
=& \left(\alpha r_{i+1}\right)^2. && \text{(Since } x^2 + x = \alpha^2\text{)}
\end{aligned}
$$

因此，我们有 $d(o,\ n) = d(\ell,\ n) = \alpha r_{i+1}$。因此， αr_{i+1}是区域$T_{i,\ \theta}$中任意两点之间的最大距离。

□

命题 6。 对于每个 $i \in [m]$，我们的算法至多在球形块 $T_{i,\ \theta}$ 中放置一个刺穿点，以刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的任意对象。

证明。 令 q_1 为 $T_{i,\theta}$ 中由 ALGORITHM-CENTER 放置的第一个刺穿点。为导出矛盾，假设 ALGORITHM-CENTER 又放置了另一个刺穿点 $q_2 \in T_{i,\theta}$，其中 q_2 是某个对象 $\sigma \in \mathcal{I}_p$ 的中心。由于 σ 包含点 p，且 p 与 q_2 之间的距离至少为 r_{i+1}，因此 σ 的高度和宽度分别至少为 r_{i+1} 和 αr_{i+1}。根据命题 5，球形块 $T_{i,\theta}$ 中任意两点之间的距离至多为 αr_{i+1}。因此， q_1 与 q_2 之间的距离至多为 αr_{i+1}。由于 σ 的宽度至少为 αr_{i+1}，对象 σ 已经被 q_1 刺穿。这与我们的

算法矛盾。因此， Algorithm-Center 在球形块 $T_{i,\theta}$ 中至多放置一个刺穿点，以刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的对象。□

根据 [15, 引理 5，3], 对于任意固定的 $\theta \in (0, \pi/2)$，我们至多需要 $\left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3-1\right)$ 个球面扇区 $S(1, \theta)$ 才能完全覆盖球 B_1。结合命题 6，可得 $|\mathcal{A}_p| \le \left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3-1\right)m$。我们可以给出稍好的估计如下。由于最内层球 B_m 中任意两点之间的距离至多为 1，任何以 $q \in B_m$ 为中心且属于 $\mathcal{I}_p$ 的对象都包含整个球 B_m。因此，我们的在线算法在 B_m 中至多放置一个刺穿点。于是，$|\mathcal{A}_p| \le \left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3-1\right)(m-1)+1 \le \left(\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)^3-1\right)\left\lceil \log_{1+x}\left(\frac{2k}{\alpha}\right)\right\rceil + 1$。至此，定理得证。□

类似于定理 5，我们对 α中的 $\mathbb{R}^2$胖对象也有类似的结果。这里，我们考虑中心角为 2θ 的圆形扇形 $C(\theta, r)$，而不是中心角为 2θ的球面扇形 $S(\theta, r)$。

定理 6。对于 $\mathbb{R}^2$ 中宽度范围为 $[1, k]$、Algorithm-Center的同等大小 α胖对象进行刺穿，$\left\lceil \frac{\pi}{\theta}\right\rceil\left\lceil \log_{1+x}(2k/\alpha)\right\rceil + 1$，其中 $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$ 且 $x = \frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$。

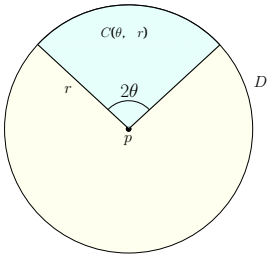


图 8：使用圆形扇形 $C(\theta, r)$对半径为 r 的圆盘 D 进行划分。

证明。设 $\mathcal{I}$ 为提交给算法的 $\mathbb{R}^2$ 中的输入 α胖对象集合。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{O}$ 分别为 $\mathcal{I}$ 的两个刺穿集，它们分别由 Algorithm-Center 和离线最优解返回。设 p 为离线最优解 $\mathcal{O}$ 中的任意一个刺穿点（见图 8）。设 $\mathcal{I}_p \subseteq \mathcal{I}$ 为被点 p刺穿的输入对象集合。设 $\mathcal{A}_p$为我们的算法为刺穿 $\mathcal{I}_p$中的所有对象而放置的刺穿点集合。我们将给出 $|\mathcal{A}_p|$ 的上界，以证明该定理。

考虑任意点 $a \in \mathcal{A}_p$。由于 a 是一个宽度至多为 k（高度至多为 $\frac{k}{\alpha}$）的 α-胖对象 $\sigma \in \mathcal{I}_p$ 的中心，因此 a 与 p 之间的距离至多为 $\frac{k}{\alpha}$。因此，以 p 为中心、半径为 $\frac{k}{\alpha}$ 的圆盘 D_1 包含 $\mathcal{A}_p$ 中的所有点。设 $x = \frac{\sqrt{1+4\alpha^2}-1}{2}$ 为一个正常数。设 D_i 为一个以 p 为中心、半径为 $r_i = \frac{k}{\alpha}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{i-1}$ 的圆盘，其中 $i \in [m]$，且 m 是满足 $\frac{k}{\alpha}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-1} \le \frac{1}{2}$ 的最小整数。注意，D_1、D_2、.....、D_m 是以 p 为中心的同心圆盘。设 $2\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}\right)$ 为区间 $(0, \frac{\pi}{5}]$ 内的一个常数角。对于 $C(\theta, r_i)$，将圆盘 D_i 中以圆盘中心 p 为顶点、半锥角为 θ 的圆锥边界所截取的部分定义为一个圆形扇区。对于任意 $i \in [m-1]$，定义第 i 个圆形块 $T_{i,\theta} = C(\theta, r_i) \setminus C(\theta, r_{i+1})$。

与断言 5 和 6 的证明类似，可以证明如下结论。

断言 7. $T_{i,\theta}$ 中任意两点之间的距离至多为 αr_{i+1}。

声明 8. 对于每个 $i \in [m]$，我们的算法在圆形块 $T_{i,\theta}$ 中最多放置一个刺穿点，以刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的任意对象。

由于 $\left\lceil \frac{2\pi}{2\theta} \right\rceil$ 圆扇形将完全覆盖 D_1，我们的在线算法为刺穿 $\mathcal{I}_p$ 中的对象而放置的刺穿点总数 $\mathcal{A}_p$ 至多为 $\left\lceil \frac{\pi}{\theta} \right\rceil \left\lceil \log_{1+x}(2k/\alpha) \right\rceil + 1$。注意，半径为 $\leq 1/2$ 的圆盘是所有圆扇形共有的。对于该圆盘，只需一个刺穿点即可。因此，不需要将 1 乘以 $\left\lceil \frac{\pi}{\theta} \right\rceil$。由此，定理得证。

□

注意，对于实数集中的超立方体，α 的值为 $\frac{1}{\sqrt{d}}$。作为定理 5（分别为定理 6）的推论，我们有如下结论。

推论 4。对于在 $\mathbb{R}^3$（分别在 $\mathbb{R}^2$）中刺穿边长范围为$[1,k]$的大小相近的超立方体，Algorithm-Center 可达到至多为 $909\left\lceil \text{对数}^{\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}(2\sqrt{3}k) \right\rceil + 1$（的竞争比；分别为 $12\left\lceil \log_{\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}(2\sqrt{2}k) \right\rceil + 1$）.

注意，对于球，α 的值为 1。作为定理 6 的推论，我们得到以下上界，它比推论 2 对 $\mathbb{R}^2$中的球给出的上界更优。

推论 5。对于刺穿半径范围为 $[1,k]$的 $\mathbb{R}^2$ 中的球，Algorithm-Center 可达到至多为 $10\left\lceil \text{对数}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(2k) \right\rceil + 1$的竞争比。

3.3 $\mathbb{R}^d$中的相似超立方体

由于（轴对齐）超立方体的长宽比∞ 为1，并且边长在范围 $[1,k]$ 内的超立方体等价于宽度在范围 $[\frac{1}{2},\frac{k}{2}]$内的超立方体，根据定理4的推论，Algorithm-Center对于刺穿边长在范围 $[1,k]$内的相似超立方体，其竞争比至多为 $2^d\left(2^d-1\right)\lceil \log_2 k \rceil + 1$。在此，我们提出了一种具有更优竞争比的算法。

设 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 为一个边长为 ℓ的超立方体。我们将超立方体 σ 划分为 2^d 个更小的子超立方体，每个子超立方体的边长为 $\ell/2$。令 P_σ^j 为 σ的第 j个子超立方体，其中 $j \in [2^d]$。

观察 1。对于每个 $j \in [2^d]$，如果我们将点放置在 P_σ^j的顶点处，那么 σ 恰好包含 3^d 个不同的点。

证明。不失一般性，设 σ 的中心与原点重合，且 σ 的边长为二。注意，子超立方体 P_σ^j 是一个边长为一的超立方体。因此，P_σ^j 的角点是整数点。要证明该观察，只需计算超立方体 σ中包含的不同整数点的数量。由于 σ 以原点为中心且边长为二，σ中任意整数点的每个坐标均有来自 $\{-1,0,1\}$的三个可能取值。因此，σ恰好包含 3^d 个整数点。

□

Algorithm-Vertex：设 $\mathcal{A}$ 是我们的算法用于刺穿输入超立方体而维护的刺穿集。最初，$\mathcal{A}=\emptyset$。我们的算法在接收到新的输入超立方体 σ时执行以下操作。

- 如果现有的刺穿集能刺穿 σ，则不作任何操作。
- 否则，
  - 如果 σ 是一个单位超立方体，我们的在线算法会将 σ 的所有顶点添加到 $\mathcal{A}$中。
  - 否则，对于所有 $j \in [2^d]$，我们的在线算法会将 P_σ^j 的所有顶点添加到 $\mathcal{A}$ 中。

由于观察 1，当一个超立方体到达时，Algorithm-Vertex 至多添加 3^d 个不同的点。

定理7。对于边长范围为 $[1,k]$，Algorithm-Vertex 的 $\mathbb{R}^d$ 中的相似超立方体刺穿问题，其竞争比至多为 $3^d\lceil \text{对数}_2 k \rceil + 2^d$。

证明。 设 $\mathcal{I}$ 为提交给算法的 $\mathbb{R}^d$ 中的输入超立方体集合。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{O}$ 分别为我们的算法和离线最优解针对 $\mathcal{I}$ 返回的两个刺穿集。设 p 为离线最优解 $\mathcal{O}$中的任意一个刺穿点。设 $\mathcal{I}_p \subseteq \mathcal{I}$ 为被点 p刺穿的输入对象集合。设 $\mathcal{A}_p$ 为我们的算法为刺穿 $\mathcal{I}_p$中的所有对象而放置的刺穿点集合。我们将给出 $|\mathcal{A}_p|$的上界，以证明该定理。设 $H_i \subset \mathcal{I}_p$为 $\mathcal{I}_p$ 中边长为 $\left(\frac{k}{2^i}, \frac{k}{2^{i-1}}\right]$的超立方体集合，其中$i \in [\lceil$对数$_2\, k\rceil]$; 设 $H_{\lceil \log_2 k\rceil+1}$为 $\mathcal{I}_p$ 中所有边长为1的超立方体组成的集合。注意，$\mathcal{I}_p = \cup_{j=1}^{\lceil \log_2 k\rceil+1} H_j$。

对于每个 $j \in [\lceil \log_2 k\rceil]$，我们声称，对于 H_j 中的所有超立方体，我们的在线算法至多放置 3^d 个刺穿点。不失一般性，假设 $\sigma \in H_j$ 是到达时第一个未被刺穿的超立方体。为了刺穿 σ，我们的在线算法添加所有 P_σ^j 的顶点，其中 $j \in [2^d]$ 到 $\mathcal{A}_p$。设 P_σ^t 包含点 p，其中 $t \in [2^d]$。令 $\sigma'(\neq \sigma) \in H_j$ 为任意一个超立方体。注意， P_σ^t 的边长至多为 $\frac{k}{2^j}$，而 $\sigma' \in H_j$ 的边长至少为 $\frac{k}{2^j}$，并且 $\sigma' \cap P_\sigma^t \neq \emptyset$。因此，$\sigma'$ 至少包含 P_σ^t 的一个顶点。于是，对于 σ'，我们的算法不会向 $\mathcal{A}_p$ 添加任何点。换言之，根据观察 1，对于 H_j 中的所有超立方体，我们的在线算法会向 $\mathcal{A}_p$ 添加 3^d 个互不相同的点，其中 $j \in [\lceil \log_2 k\rceil]$。

现在，我们将证明，对于$H_{\lceil \log_2 k\rceil+1}$中的所有超立方体，我们的在线算法至多放置 2^d 个刺穿点。假设单位超立方体 $\sigma \in H_{\lceil \log_2 k\rceil+1}$是到达时未被刺穿的第一个超立方体。为了刺穿 σ，我们的在线算法将 σ 的所有顶点加入 $\mathcal{A}_p$。注意， $H_{\lceil \log_2 k\rceil+1}$ 中的任意超立方体σ'都是 σ的一个平移副本，而 p是它们的公共交点。因此，超立方体 σ' 至少包含 σ的一个角点。由此，我们的算法至多向 $\mathcal{A}_p$添加 2^d 个刺穿点，以刺穿 $H_{\lceil \log_2 k\rceil+1}$中的所有超立方体。

因此， $\mathcal{A}_p$ 至多包含 $3^d\lceil \log_2 k\rceil + 2^d$ 个点。由此可得该定理。 □

备注。 注意，对于刺穿超立方体的平移副本， Algorithm-Vertex 与使用超立方体的平移副本求解单位覆盖问题的已知最佳结果一致 [9]。

4 下界

为了获得下界，我们将其视为两名玩家之间的博弈：Alice 和 Bob。在这里，Alice 扮演对手的角色，而 Bob 扮演在线算法的角色。在博弈的每一轮中，Alice 提出一个对象，使得 Bob 需要放置一个新的刺穿点，即该对象不包含此前放置的任何刺穿点。为了获得竞争比 Ω(z) 的下界，只需证明 Alice 能够在博弈的 z 个连续轮次中依次提出一系列 z 嵌套对象，使得离线最优算法只需使用一个点即可刺穿所有这些对象。在本节中，$0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ 是一个任意接近 0 的常数。例如， $\epsilon = 10^{-10}$ 也同样适用。我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中大小相近的 α 胖对象，随后讨论 $\mathbb{R}^d$ 中的相似超立方体。

4.1 $\mathbb{R}^2$中大小相近的胖对象

定理 8。 对于 $\alpha \in (0,1]$ 和 $k \geq 1$，在 $\mathbb{R}^2$ 中刺穿宽度范围为 $[1,k]$、大小相近的 α-胖对象的每种确定性在线算法，其竞争比至少为 $\left\lfloor \log_{\frac{2+\epsilon}{\alpha}} k \right\rfloor + 1$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ 是一个充分接近 0 的常数。

证明。 为证明下界，Alice 自适应地构造一个由 $m = \left\lfloor \log_{\frac{2+\epsilon}{\alpha}} k \right\rfloor + 1$ 个对象组成的序列，每个对象的纵横比为 α，宽度在范围 $[1,k]$ 内，使得 Bob 至少需要 m 个刺穿点才能刺穿它们，而离线最优解只需要一个点。令 $w(\sigma)$ 和 $h(\sigma)$ 分别为对象σ的宽度和高度。令 σ_1 为 Alice 呈现的第一个输入对象，其宽度为 $w(\sigma_1) = k$。为简单起见，假设 σ_1 的中心 c_1 与原点重合。Alice 根据 Bob 放置的刺穿点 p_1、p_2、...、p_{m-1} 的位置，自适应地呈现所有剩余对象 σ_2、σ_3、...、σ_m。对于 $i = 1$、2、...、$m = \left\lfloor \log_{\frac{2+\epsilon}{\alpha}} k \right\rfloor + 1$，我们维持以下两个不变量。

(1) 具有宽度 $k\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-1}$ 的对象 σ_i 未被先前放置的任何刺穿点 p_j 刺穿，其中 $j \in [i-1]$;

(2) 对象 σ_i 完全包含在对象 σ_{i-1} 内。

不变量 (1) 确保 Bob 需要 m 个刺穿点，而不变量 (2) 确保所有对象σ_1，σ_2、.....、σ_m都可以由一个点刺穿。对于 $i=1$，两个不变量都显然成立。在第$i=1$、2、.....、$m-1$轮结束时，假设两个不变量均成立。在第 $i=m$ 轮结束时，我们将证明这两个不变量仍然成立。根据先前放置的刺穿点 p_{i-1}的位置，在博弈的第 i轮，Alice 向 Bob 呈现一个对象 σ_i，其宽度为 $w(\sigma_i)=k\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-1}$。$\sigma_i$的中心 c_i 定义如下。

$$c_i=\begin{cases} c_{i-1}+\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}, & \text{if } p_{i-1}(x_1)\le c_{i-1}(x_1),\\ c_{i-1}-\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}, & \text{otherwise } (i.e., p_{i-1}(x_1)>c_{i-1}(x_1)),\end{cases}$$

其中，$p_{i-1}(x_1)$ 和 $c_{i-1}(x_1)$ 分别表示 p_{i-1} 和 c_{i-1}的第一个坐标。

首先，我们证明 σ_i 完全包含于 σ_{i-1}中。注意，根据 p_{i-1}的位置，σ_i 的中心或者是 $c_{i-1}+\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}$，或者是 $c_{i-1}-\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}$。在这两种情况下，都有 $d(c_{i-1},c_i)=\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}$。另一方面，$h(\sigma_i)=\frac{k}{2+\epsilon}\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-2}<\frac{k}{2}\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-2}=\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}$。因此，$\sigma_i$ 完全包含于 σ_{i-1} 中。于是，不变量（2）得以保持。

注意，$d(p_{i-1},c_i)$ 大于 σ_i 的高度，因为

$$d(p_{i-1},c_i)>\frac{w(\sigma_{i-1})}{2}=\frac{k}{2}\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-2}>\frac{k}{2+\epsilon}\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{i-2}=h(\sigma_i).$$

第一个不等式由 c_i 的定义得到。因此，σ_i 不包含点 p_{i-1}。根据归纳假设，σ_{i-1} 不包含先前为 $j\in[i-2]$ 放置的任何刺穿点 p_j；根据不变量（2），我们知道 σ_i 包含于 σ_{i-1}中。因此，σ_i 不包含先前为 $j\in[i-1]$放置的任何刺穿点 p_j。于是，不变量（1）得以保持。

注意，当 $m>\log_{\frac{\alpha}{2+\epsilon}} k+1$时，对象 σ_m的宽度，即 $k\left(\frac{\alpha}{2+\epsilon}\right)^{m-1}$，小于1。换言之，对于任意 $\log_{\frac{\alpha}{2+\epsilon}} k<m\le\log_{\frac{\alpha}{2+\epsilon}} k+1$，我们都可以构造满足两个不变量的输入序列。由于 m 的值必须是整数，因此有 $m=\left\lfloor\log_{\frac{\alpha}{2+\epsilon}} k\right\rfloor+1$。由此定理得证。□

我们知道，对于 $\mathbb{R}^2$ 中的球，α 的值为 1。因此，我们有

推论 6。 对于 $k\ge 1$，在$\mathbb{R}^2$ 中刺穿半径范围为 $[1,k]$ 的球的每种确定性在线算法，其竞争比至少为 $\lfloor\log_{2+\epsilon} k\rfloor-1$，其中 $0<\epsilon<\frac{1}{4}$ 是一个足够小且接近0的常数。

4.2 实数集中的相似超立方体

在本小节中，所有超立方体均为轴对齐。首先，我们建立以下基本结果，以证明主要结论。

引理 3. GAME-OF-SAME-SIDE$(r)(GSS(r))$:

对于任意 $r\ge 1$，在博弈的连续 d 轮次中，*Alice* 可以自适应地给出 d 个超立方体 σ_1、σ_2、.....、σ_d，每个超立方体的边长为 r，且包含在边长为 $r(2+\epsilon)$ 的超立方体 S 内，使得

(i) Bob 需要放置 d 个点才能刺穿它们;

(ii) 公共交集区域 $Q=\cap_{i=1}^{d}\sigma_i$ 非空;

(iii) 此外，Q 包含一个边长至少为 $\frac{r}{2+\epsilon}$ 的空超立方体 E，其中不含 *Bob* 放置的任何 d 个刺点;

$0<\epsilon<\frac{1}{4}$ 是一个充分接近0的常数。

我们将满足上述引理的 d 连续博弈轮次称为 $GSS(r)$。超立方体S 称为起始对象，而超立方体 E 则称为空超立方体，因为它不包含 Bob 在 $GSS(r)$中放置的任何刺点。

证明。 在本引理的证明过程中，为简便起见，我们假设 S 的中心是原点。设 Alice 在博弈第一轮中给出的超立方体 σ_1 的边长为 r。设 σ_1 的中心与 S 的中心相同。Alice 根据 Bob 的行动，自适应地给出其余的超立方体 $\sigma_2, \ldots, \sigma_d$。我们保持以下两个不变量：对于 $i = 1, \ldots, d$，当 Alice 给出边长均为 r 的超立方体 $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$，而 Bob 给出刺穿点 $p_1, \ldots, p_i$ 时，

(I) 超立方体 σ_i 包含于 S 内，且 σ_i 未被此前放置的任何刺穿点 p_j刺穿，其中 $j \in [i-1]$; (II) 公共交集区域 $Q_i = \cap_{j=1}^{i} \sigma_j$ 是一个超矩形，其前（$i-1$）条边的长度均为$\frac{r}{2+\epsilon}$，其余各边的长度均为 r。此外，Q_i 不包含任何点p_j，其中 $j \in [i-1]$。

平面版本的博弈示意图见图 9。对于 $i = 1$，两个不变量显然都成立。对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, d-1$，假设两个不变量都成立。现在，对于 $i = d$，我们将证明两个不变量都成立。定义平移向量 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^d$ 为 $\mathbf{v}_i = \left(s(1)\left(\frac{r}{2-\epsilon}\right), s(2)\left(\frac{r}{2-\epsilon}\right), \ldots\ldots, s(i-1)\left(\frac{r}{2-\epsilon}\right), 0, \ldots\ldots, 0\right)$，其中 $s(j)$对于 $j \in [i-1]$ 的定义如下

$$s(j) = \begin{cases} +1, & \text{if } p_j(x_j) < 0, \text{ where } p_j(x_j) \text{ is } jth \text{ coordinate of } p_j, \\ -1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 $\sigma_i = \sigma_1 + \mathbf{v}_i$。首先，我们将证明 σ_i 包含在超立方体 S 内。由于 $\sigma_i = \sigma_1 + \mathbf{v}_i$，$\sigma_1$ 的中心与 σ_i 中任意一点之间的距离至多为 $\frac{r+2\frac{r}{2-\epsilon}}{2}$，严格小于$r(2+\epsilon)/2$。因此，$\sigma_i$ 包含在S内。现在，我们将证明 σ_i 不包含点 p_j。对于任意 $j < i$，根据平移向量 $\mathbf{v}_i$ 的第 j 个分量的定义，超立方体 σ_i 不包含点 p_j。因此，不变量 (I) 得以保持。

注意，$\sigma_1 \cap \sigma_i$ 是一个超矩形，其前（$i-1$）条边的长度均为$\frac{r}{2+\epsilon}$，其余各条边的长度均为 r。另一方面，根据假设，我们知道 Q_{i-1} 是一个超矩形，其前（$i-2$）条边的长度均为 $\frac{r}{2+\epsilon}$，其余各条边的长度均为 r。因此，$Q_i = Q_{i-1} \cap \sigma_i$是一个超矩形，其前（$i-1$）条边的长度均为$\frac{r}{2+\epsilon}$，其余各条边的长度均为 r。由于 σ_i 不包含任何满足 $j < i$的点 p_j，超矩形 $Q_i \subseteq \sigma_i$也不包含其中任何一点。因此，不变量 (II) 得以维持。

在博弈的第 d轮结束时，我们得到超矩形 $Q = Q_d$（其第 d条边的长度仅为 r，其余各边的长度均为 $\frac{r}{2+\epsilon}$），该超矩形不包含任何满足 $j < d$的点 p_j，但可能包含点 p_d。根据点 p_d的第 d个坐标，我们可以构造一个边长为 $\frac{r}{2+\epsilon}$ 且不包含点 p_d的超立方体$E \subset Q$。因此，引理得证。 □

现在，我们证明以下主要定理。

定理 9. 对于 $k \geq 1$，在 $\mathbb{R}^d$ 中刺穿边长范围为 $[1, k]$ 的相似超立方体的任意确定性在线算法，其竞争比至少为 $d\left\lfloor \log_{(2+\epsilon)^2} k \right\rfloor + 2^d$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ 是一个足够接近 0 的小常数。

证明。 我们维持以下两个不变量：对于 $i = 1, \ldots, z = d\left\lfloor \log_{(2+\epsilon)^2} k \right\rfloor + 2^d$，当 Alice 呈现超立方体 $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$，而 Bob 呈现刺穿点 $p_1, \ldots, p_i$ 时，

(III) 超立 be σ_i 不被任何先前放置的刺穿点 p_j 刺穿，其中 $j \in [i-1$];

(IV) 交集区域 $\cap_{j=1}^{i} \sigma_j$ 非空。

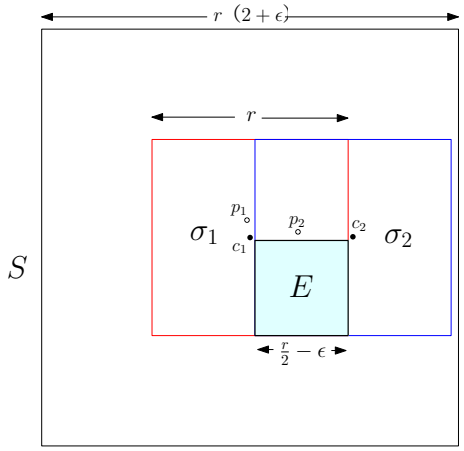


图 9： $d=2$的 $GSS\ (r)$ 示意图。起初，Alice 在博弈的第一轮中给出了边长为 r 的超立方体 σ_1 。随后，Alice 根据 Bob 的行动自适应地给出第二个超立方体 σ_2 ，使得 $p_1 \notin \sigma_2$。此外，公共交集区域 $\cap_{j=1}^{2}\sigma_j$ 是一个矩形，其边长分别为 $\frac{r}{2+\epsilon}$ 和 r。而且，交集区域包含一个边长至少为$\frac{r}{2+\epsilon}$的空超立方体 E，且该超立方体不包含 p_1 和 p_2。

不变量 (III) 表明，Bob 被迫放置 z 刺点，而不变量 (IV) 确保所有超立方体 σ_1、σ_2、.....、σ_z都可以由一个刺穿点刺穿。

我们以不同的 $r=k$、$\frac{k}{(2+\epsilon)^2}$、.....、$\frac{k}{((2+\epsilon)^2)^{t-1}}$，调用 $GSS\ (r)$，持续 $t=\left\lfloor \log_{(2+\epsilon)^2} k \right\rfloor$ 时间。更具体地，对于任意 $t' \in [t-1]$，由第t'场 GSS 博弈 $GSS\left(\frac{k}{2+\epsilon}\frac{()}{()^{2(t'-1)}}\right)$生成的、边长为 $\frac{k}{(2+\epsilon)^{2t'-1}}$的空超立方体 $E_{t'}$，充当第 $(t'+1)$ 次调用 GSS 博弈$GSS\left(\frac{k}{2+\epsilon}\frac{()}{()^{2t'}}\right)$的起始对象。由于第 $(t'+1)$ 场博弈中的所有超立方体 d 都位于空超立方体 $E_{t'}$的内部，因此很容易看出，超立方体集合 td σ_1、σ_2、.....、σ_{td} 以及点集合 td p_1、p_2、.....、p_{td}满足不变量 (III) 和 (IV)。在第 t轮 GSS结束时，空超立方体 E_t 的边长至少为 $(2+\epsilon)$。注意，由于推论 1，Alice 可以自适应地给出 2^d 个边长均为 1 的超立方体，使得 Bob 需要放置 2^d 个不同的刺穿点，而离线最优解只需一个点就能刺穿所有这些超立方体 2^d 。由于所有这些边长为 1 的超立方体 2^d 都有公共交集区域，因此它们都可以放置在一个边长为 2 的超立方体内。因此，Alice 可以在 E_t 内自适应地给出 2^d 个边长均为 1 的超立方体，同时维持不变量 (III) 和 (IV)。定理得证。

□

5 结论

对于刺穿区间，不存在竞争比低于 Ω(n) 的确定性在线算法。鉴于这一悲观结果，我们将注意力限制在大小相近的对象上。我们提出了在高维中刺穿大小相近的 α-长宽比胖对象的上界。通过为 α 赋予特定值，可以得到 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中大小相近的对象（如区间、正方形、圆盘和 α-长宽比多边形）的紧渐近界。在高维中，上界和下界之间存在差距。我们提出弥合这些差距作为未来的研究方向。我们只考虑确定性模型，这引出了随机化是否有帮助的问题。

致谢

作者感谢匿名审稿人提出建设性意见，提升了本文的质量。

利益冲突

作者声明，不存在与本文内容相关的财务或非财务利益冲突。

参考文献

[1] Pankaj K. Agarwal 和 Jiangwei Pan。几何击中集与集合覆盖的近线性算法。离散计算几何，63(2):460–482，2020年。[2] Noga Alon、Baruch Awerbuch、Yossi Azar、Niv Buchbinder 和 Joseph Naor。在线集合覆盖问题。SIAM J. Comput.，39(2):361–370，2009年。[3] Charles J. Argue、Anupam Gupta、Ziye Tang 和 Guru Guruganesh。以线性竞争比追逐凸体。J. ACM，68(5):32:1–32:10，2021年。[4] Marcin Bienkowski、Jaroslaw Byrka、Marek Chrobak、Christian Coester、Lukasz Jez 和 Elias Koutsoupias。在线直线追逐的更优界。载于：第44届数学基础国际研讨会（MFCS 2019），2019年8月26日至30日，LIPIcs第138卷，第8:1–8:13页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019年。[5] Allan Borodin 和 Ran El-Yaniv。在线计算与竞争分析。剑桥大学出版社，1998年。[6] S´ebastien Bubeck、Bo'az Klartag、Yin Tat Lee、Yuanzhi Li 和 Mark Sellke。近乎最优地追逐嵌套凸体。载于：2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA 2020，2020年1月5日至8日，第1496–1508页。SIAM，2020年。[7] S´ebastien Bubeck、Yin Tat Lee、Yuanzhi Li 和 Mark Sellke。以竞争方式追逐凸体。载于：第51届ACM SIGACT理论计算机科学年会论文集（STOC 2019），2019年6月23日至26日，第861–868页。ACM，2019年。[8] Timothy M. Chan。用于装箱和刺穿胖对象的多项式时间近似方案。J. Algorithms，46(2):178–189，2003年。[9] Timothy M. Chan 和 Hamid Zarrabi-Zadeh。在线单位聚类的随机化算法。Theory Comput. Syst.，45(3):486–496，2009年。[10] Moses Charikar、Chandra Chekuri、Tom´as Feder 和 Rajeev Motwani。增量聚类与动态信息检索。SIAM J. Comput.，33(6):1417–1440，2004年。[11] Minati De、Saksham Jain、Sarat Varma Kallepalli 和 Satyam Singh。几何对象的在线刺穿。载于：第42届IARCS软件技术与理论计算机科学基础年会，FSTTCS 2022，2022年12月18日至20日，LIPIcs第250卷，第17:1–17:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。[12] Minati De、Ratnadip Mandal 和 Satyam Singh。超越单位球的在线几何击中集与集合覆盖，适用于 $\mathbb{R}^2$。CoRR，abs/2304.06780，2023年。[13] Minati De 和 Satyam Singh。通过$\mathbb {Z}ˆd$中的点在线击中几何对象。载于：计算与组合——第28届国际会议（COCOON 2022），2022年10月22日至24日，计算机科学讲义第13595卷，第537–548页。Springer，2022年。[14] Mark de Berg、A. Frank van der Stappen、Jules Vleugels 和 Matthew J. Katz。几何算法的现实输入模型。Algorithmica，34(1):81–97，2002年。[15] Luc Devroye、L´aszl´o Gy¨orfi 和 G´abor Lugosi。《模式识别的概率理论》。随机建模与应用概率。Springer New York，1997年。

[16] Adrian Dumitrescu、Anirban Ghosh 和 Csaba D. T´oth。欧几里得空间中的在线单位覆盖。理论计算机科学，809:218–230，2020年。[17] Adrian Dumitrescu 和 Csaba D. T´oth。高维中的在线单位聚类与单位覆盖。*Algorithmica*，84(5):1213–1231，2022年。[18] Alon Efrat、Matthew J. Katz、Frank Nielsen 和 Micha Sharir。胖对象的动态数据结构及其应用。计算几何，15(4):215–227，2000年。[19] Guy Even 和 Shakhar Smorodinsky。在线击中集与唯一最大着色。离散应用数学，178:71–82，2014年。[20] Robert J. Fowler、Mike Paterson 和 Steven L. Tanimoto。平面中的最优装箱与覆盖是NP完全问题。信息处理快报，12(3):133–137，1981年。[21] Joel Friedman 和 Nathan Linial。关于凸体追逐。离散计算几何，9:293–321，1993年。[22] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：*NP*完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979年。[23] Christian Icking、Rolf Klein、Ngoc-Minh Lˆe 和 Lihong Ma。三维空间中的凸距离函数各不相同。*Fundamenta Informaticae*，22(4):331–352，1995年。[24] Matthew J. Katz、Frank Nielsen 和 Michael Segal。区间刺穿集的维护及其应用。*Algorithmica*，36(1):59–73，2003年。[25] Arindam Khan、Aditya Lonkar、Saladi Rahul、Aditya Subramanian 和 Andreas Wiese。几何集合覆盖与击中集的在线和动态算法。载于：第*39*届计算几何国际研讨会，*SoCG 2023*，*2023*年*6*月*12*日至*15*日，*LIPIcs*第258卷，第46:1–46:17页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023年。[26] Frank Nielsen。高维空间中快速刺穿盒子。理论计算机科学，246(1-2):53–72，2000年。[27] J´anos Pach、Peter Brass 和 William Moser。离散几何中的研究问题。*Research Problemsin Discrete Geometry*，2005年1月。[28] Mark Sellke。最优地追逐凸体。载于：*2020*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA 2020*，*2020*年*1*月*5*日至*8*日，第1509–1518页。SIAM，2020年。