# 面向外部正系统的基于模型与基于数据的动态输出反馈

Abed AlRahman Al Makdah 和 Fabio Pasqualetti

arXiv:2305.02472v1 [eess.SY] 4 May 2023

摘要——**本文推导了能够使闭环系统具有外部正性的动态输出反馈控制器。我们首先在输入输出行为的空间中表示离散时间线性时不变系统类和动态控制器类，在该空间中，动态控制器可表示为静态行为反馈增益。我们利用控制器的静态形式，推导出能够实现对非负常值参考输出进行单调输出跟踪的输出反馈控制器。此外，我们还提出一种直接的数据驱动方法，用于推导单输入单输出（SISO）系统的单调跟踪输出反馈控制器。我们提出的基于模型和基于数据的方法均可用于获得使闭环系统具有外部正性的输出反馈控制器。最后，我们通过无人机着陆控制问题进行数值验证。**

## I. 引言

在许多自然现象和技术现象中，所关注的变量是天然非负的物理量（例如人口、浓度、电荷量、光强、价格等）。用于描述这类变量动态特性的数学模型应当纳入非负约束。这促使人们研究一类称为正系统的系统，这类系统的状态和输出在任何非负输入和非负初始状态下都呈现非负演化 [1]。正系统已应用于多个研究领域，例如生物学和药理学 [2], [3], 、化学反应系统[4], 、经济学 [5],、电力系统 [6], 、交通与拥堵[7], 以及马尔可夫链和随机模型 [8]。外部正系统是正系统的一种宽泛类别：若系统在任意非负输入和零初始状态下的输出均为非负，则称该系统具有外部正性 [1]。本文研究如何设计输出反馈控制器，使给定系统具有外部正性。尽管如下文所述，这一问题已针对特定情况（例如单输入单输出系统和从静止状态开始的系统）得到解决，但据我们所知，目前尚无该问题的一般性解决方案 [9]。

**相关工作**。关于正系统的分析已有大量研究 [1], [10], ，研究人员探讨了正系统的性质，例如可达性、可控性和可观测性。一系列研究聚焦于正系统的反馈控制综合。在 [11], 中，作者研究了单输入单输出正系统的极点配置问题。在 [12],中，作者利用格尔什戈林定理，给出了确保闭环正性的稳定状态反馈控制器存在的充分条件。在[13], 中，作者给出了状态反馈控制器存在的充要条件，以保证闭环正性和渐近稳定性。在 [14], [15], 中，作者研究了单输入单输出系统的静态输出反馈控制器设计问题，旨在确保闭环正性和渐近稳定性。尽管 [15] 中的作者研究了多输入多输出情形，但控制器增益矩阵上的秩约束限制了所提方法的适用性。在 [16], 中，作者提出了一种直接的数据驱动方法，用于求解能够确保闭环正性的稳定状态反馈控制器。更详尽的参考文献列表请参见 [17]。与正系统领域相比，针对确保闭环外部正性的控制器设计技术，相关研究较少。外部正系统具有非负脉冲响应 [1]。多种控制设计方法致力于设计使闭环脉冲响应非负的控制器 [18]–[21], ，这等价于实现单调的闭环阶跃响应。在 [18], 中，作者提出了一种基于极点零点配置、能够实现无超调闭环响应的补偿器设计方法。在 [19], 中，作者给出了一种可确保脉冲响应非负的补偿器结构。在 [20], [21], 中，作者构建了一种线性规划方法，用于设计能够确保渐近稳定性和单调阶跃响应的输出反馈控制器。这些方法均假设系统为单输入单输出系统，且系统从静止状态开始。在 [22], [23], 中，作者提出了适用于多输入多输出系统、针对任意初始状态设计单调跟踪状态反馈控制器的方法。在 [24],中，作者给出了外部正性的充分性证书，并利用该证书设计能够确保闭环外部正性的状态反馈控制器。一般而言，如何设计使闭环系统具有外部正性的输出反馈控制器，仍是一个开放问题 [9]。

**贡献**。 本文有两项贡献。首先，我们借鉴 [25] 中的方法，在行为空间中为离散时间线性时不变系统和动态输出反馈控制器构造等价表示（第 III节），并将动态输出反馈控制器表示为行为空间中的静态行为反馈控制器。随后，我们结合系统和控制器的行为表示以及 [23]中的公式，推导出动态输出反馈控制器，使其能够从

本研究部分受 ONR- N00014-19-1-2264 项目资助。A. A. Al Makdah 和 F. Pasqualetti 分别任职于加州大学河滨分校电气与计算机工程系和机械工程系，{aalmakdah, fabiopas}@engr.ucr.edu。

非负初始输出出发（第 IV节），单调跟踪恒定非负参考输出。其次，我们提出一种直接的数据驱动方法，为单输入单输出系统设计动态输出反馈控制器，使其能够从非负初始输出出发，单调跟踪恒定非负参考输出（第 V节）；该方法使用从动力学未知的系统中采集的输入输出数据。这两项贡献均可用于设计输出反馈控制器（基于模型或基于数据），使闭环系统具有外部正性。数据驱动方法使得能够直接利用从单条输入输出轨迹采集的数据在线设计输出反馈控制器，而无需辨识系统。我们针对无人机着陆控制问题，通过数值计算验证了理论结果（第 VI节）。

## II. 问题表述

考虑如下离散时间线性时不变系统

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示状态，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示控制输入，$y(t) \in \mathbb{R}^p$ 表示测量输出，系统矩阵$A$、$B$ 和 $C$ 具有适当的维数。对于系统（1），输出反馈控制器写为：

$$\begin{aligned} x_c(t+1) &= Ex_c(t) + Fy(t), \quad t \geq 0 \\ u(t) &= Gx_c(t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示控制器在时刻$t$的内部状态，矩阵 $E$、$F$和 $G$ 具有适当的维数。采用 Luenberger 观测器的输出反馈控制器可写为形式（2），其中 $E = A-BK-LC$、$F = L$和$G = -K$，其中 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 分别为控制器增益和观测器增益。本文中，对于向量 $w \in \mathbb{R}^q$，$w \geq 0$意味着 $w$ 的所有分量均为非负。在陈述问题表述之前，我们先介绍文献中的以下定义。

定义 *1*：（外部正系统 *[1]*）当且仅当对于每个输入序列 $u$（$t$）$\geq 0$ 对于 $t \geq 0$，且 $x$（0）$= 0$，输出 $y$（$t$）$\geq 0$ 对于 $t \geq 0$成立时，系统（1）才称为外部正系统。本文旨在设计一个输出反馈控制器，使闭环系统成为外部正系统，即，（1）的闭环输出响应为非负$\forall t \geq 0$。形式化地：

问题 *1*：给定一个相对阶为 $d$ 的系统（1），设计形式为（2）的控制器，使得对于任意 $y$（0）$\geq 0$:

（i）闭环系统渐近稳定。（ii）闭环输出响应收敛于期望的非负输出 $y_{ss}$。（iii）闭环系统为外部正系统。

□

要使问题 1 可解，需要满足以下条件。

假设 *2.1*：（关于初始输出的假设）给定一个相对阶为 $d$ 的系统（1），以及任意 $y(0) \geq 0$，输出 $\{y(1) \cdots, y(d-1)\}$ 为非负。□

注意，由于相对阶 $d$，序列 $\{y(1) \cdots, y(d-1)\}$ 不会受到任何输入的影响。因此，假设2.1 是问题1可解的必要条件。在本文中，我们针对基于模型和基于数据的情形研究问题1 ，重点设计单调跟踪控制器，使系统从非负初始输出出发，跟踪恒定非负参考输出。单调跟踪确保闭环输出收敛至非负参考输出，且不会出现超调或欠调，从而保证对于所有非负初始输出，闭环输出始终保持非负。因此，求解问题1 归结为设计一个单调跟踪动态输出反馈控制器。为此，我们首先在第III节中利用 [25] 中的方法，给出系统输入输出行为状态下（1）和（2）的等价表示，并将（2）的形式转化为静态反馈控制器的形式。随后，在第IV节中，我们利用第III节中的行为系统和控制器表示，以及 [23] 中的结果，设计一个行为反馈控制器，以单调跟踪恒定非负参考输出。在第V节中，我们提出一种直接的数据驱动方法，利用一次实验采集的输入输出数据，为单输入单输出系统设计行为反馈单调跟踪控制器。为确保系统（1）能够从任意初始条件 [23]出发跟踪恒定参考输出，需要满足以下标准假设。

假设 *2.2*：（关于系统（1）的假设）对$(A, B)$ 和$(A, C)$ 分别可稳定且可观测，并且系统（1）右可逆，且没有等于1的不变零点。□

## III. 行为表示

本节中，我们在输入—输出行为的空间中推导系统（1）和控制器（2）的等价表示。为此，我们将（1）的行为空间定义为

$$z(t) \triangleq [U(t-1)^\mathsf{T}, Y(t-1)^\mathsf{T}]^\mathsf{T}, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} U(t-1) &\triangleq \left[u(t-n)^\mathsf{T}, \cdots, u(t-1)^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}, \\ Y(t-1) &\triangleq \left[y(t-n)^\mathsf{T}, \cdots, y(t-1)^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

利用 [25], 中的方法，我们可以将（1）写成行为空间 $z$ 中的形式

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t-n+1) \\ \vdots \\ u(t-1) \\ u(t) \\ y(t-n+1) \\ \vdots \\ y(t-1) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{z(t+1)} &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & I & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots I & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & I & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots I \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t-n) \\ \vdots \\ u(t-2) \\ u(t-1) \\ y(t-n) \\ \vdots \\ y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t), \\ y_z(t) &= \underbrace{[0 \cdots 0 | 0 \cdots 0\ I]}_{\mathcal{C}} z(t). \end{aligned} \tag{4}$$

关于式（4）的推导，请读者参阅附录 A。这意味着，给定一列控制输入，状态

$z$ 包含系统输出 $y$ 随时间的变化，并可用于重构系统状态 $x$的精确值。这也意味着，可以等价地基于动态关系（4）为系统（1）设计控制器。在 [25, 引理 5 中，3], 作者证明，系统（1）的任意动态控制器（2）都可以等价地表示为系统（4）的静态控制器

$$u(t) = \mathcal{K}z(t), \tag{5}$$

其中 $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times r}$是静态反馈增益，且 $r = n(m+p)$。这意味着，为系统 (2) 设计形式为 (1) 的输出反馈控制器，等价于为系统 (5) 设计形式为 (4) 的静态反馈控制器。我们可以将问题 1 等价地改写为

问题 *2*：给定一个相对阶为 $d$的系统 (4)，设计一个形式为 (5) 的控制器，使得对于任意 $y_z(n+d) \geq 0$:

(i) 闭环系统渐近稳定。(ii) 闭环输出响应收敛到期望的非负输出 $y_{\text{ss}}$。(iii) 闭环系统外部正。

□

以下结果给出了问题2 等价于问题 1的充要条件。

定理 *3.1*：**(**问题 *1* 与 *2*的等价性**)** 在假设 2.1下，问题 2 等价于问题 1 当且仅当存在输入序列 $\{u(0)\ \cdots,\ u(n-1)\}$，使得相应的输出序列 $\{y(d)\ \cdots,\ y(n+d-1)\}$ 为非负。

证明：（充分性）设假设 2.1 成立，并设$\{u(0)\ \cdots, u(n-1)\}$，使得相应的输出$\{y(d)\ \cdots, y(n+d-1)\}$ 为非负。由于系统 (1) 和 (4) 等价（根据引理 A.1），且控制器 (2) 和 (5) 等价（根据 [25, 引理 5.3]），因此问题 2 和问题 1 等价。

（必要性）我们通过逆否命题进行证明。设假设2.1 成立，并假设不存在一个序列$\{u(0)\ \cdots,\ u\ (n-1)\ \}$，使得相应的输出序列 $\{y\ (d)\ \cdots,\ y\ (n+d-1)\ \}$ 为非负。于是，问题1 不存在解，而问题2 存在解。因此，问题1 和问题2不等价。

■

我们在附录 B 中验证定理 3.1。

## IV. 基于模型的单调跟踪控制

在本节中，我们设计一个形式为 (5) 的控制器，以解决问题 2，并在假设 2.1 和定理 3.1 中的条件下，等价地解决问题 1。为此，我们为系统 (4) 设计一个单调跟踪控制器，用于跟踪任意 $y_{\text{ss}}$ 恒定非负参考输出$y_z(d+n) \geq 0$。假设 2.2 保证存在$x_{\text{ss}} \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_{\text{ss}} \in \mathbb{R}^m$，使其满足

$$\begin{aligned} x_{\text{ss}} &= Ax_{\text{ss}} + Bu_{\text{ss}}, \\ y_{\text{ss}} &= Cx_{\text{ss}}, \end{aligned}$$

对于任意 $y_{\text{ss}} \in \mathbb{R}^p$。等价地，根据引理 A.1，我们可以写成

$$\begin{aligned} z_{\text{ss}} &= \mathcal{A}z_{\text{ss}} + \mathcal{B}u_{\text{ss}}, \\ y_{\text{ss}} &= \mathcal{C}z_{\text{ss}}, \end{aligned}$$

其中 $z_{\text{ss}} = \left[u_{\text{ss}}^{\mathsf{T}}, \cdots, u_{\text{ss}}^{\mathsf{T}}, y_{\text{ss}}^{\mathsf{T}}, \cdots, y_{\text{ss}}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$。令 $\zeta(t) \triangleq z(t) - z_{\text{ss}}$以及 $\epsilon(t) \triangleq y_z(t) - y_{\text{ss}}$。那么，我们可以将 $\zeta$和 $\epsilon$ 的动态方程写为

$$\begin{aligned} \zeta(t+1) &= \mathcal{A}\zeta(t) + \mathcal{B}v(t), \qquad t \geq 0, \\ \epsilon(t) &= \mathcal{C}\zeta(t), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $v(t) = \mathcal{K}\zeta(t)$。应用于 (4) 的跟踪控制器形式如下

$$u(t) = \mathcal{K}\left(z(t) - z_{\text{ss}}\right) + u_{\text{ss}} = v(t) + u_{\text{ss}}. \tag{7}$$

注意到 $\epsilon(t)$ 在 (6) 中既可能为负 ($y(t) < y_{\text{ss}}$)，也可能为正 ($y(t) > y_{\text{ss}}$，即使 $y(t)$ 和 $y_{\text{ss}}$ 均非负。因此，我们需要 $\epsilon(t)$ 的每个元素都单调收敛至零。根据 [23], 当且仅当以下条件成立时，才能实现全局单调性

$$\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1\lambda_1^t & \cdots & \alpha_p\lambda_p^t \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{8}$$

其中 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$为正实数且小于 1，并且$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$为依赖于初始条件的实常数。以下定理根据 [23, 定理 3。1] 针对我们的情形进行了改编，并给出了存在能够解决问题 2的控制器的充要条件。

定理 *4.1*：（问题 *2* 可解的充要条件）设 $\lambda_1$，.....，$\lambda_p \in [0, 1)$。存在反馈增益 $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 能够解决问题 2，当且仅当存在 $M \in \mathbb{R}^{r\times r} \succ 0$ 和 $N \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 能够解以下线性矩阵不等式问题：

$$\begin{bmatrix} M & \mathcal{A}M + \mathcal{B}N \\ M^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{T}} + N^{\mathsf{T}}\mathcal{B}^{\mathsf{T}} & M \end{bmatrix} \succ 0, \tag{9}$$

$$\mathcal{C}_i\left(\mathcal{A}M + \mathcal{B}N\right) = \lambda_i\mathcal{C}_iN, \qquad i \in 1, \ldots, p. \tag{10}$$

此外，增益 $\mathcal{K} = NM^{-1}$能够解决问题 2。

证明：系统（6）在 $v = \mathcal{K}\zeta$ 下闭环稳定，当且仅当存在 $P \in \mathbb{R}^{r\times r} \succ 0$ 满足以下李雅普诺夫不等式

$$\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}\right)P\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}\right)^{\mathsf{T}} - P \prec 0. \tag{11}$$

令 $M = P$和 $\mathcal{K} = NM^{-1}$，则我们可以将（11）改写为

$$M - \left(\mathcal{A}M + \mathcal{B}N\right)M^{-1}\left(\mathcal{A}M + \mathcal{B}N\right)^{\mathsf{T}} \succeq 0. \tag{12}$$

条件（9）成立，当且仅当（12）成立；对（9）的 (2,2)-块求舒尔补即可验证这一点。根据 [23, 引理 3。1], 对于 8），闭环输出跟踪误差的形式为（ $\lambda_1$，$\cdots\lambda_p \in [0, 1)$ 当且仅当存在 $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 使得

$$\mathcal{C}_i\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K}\right) = \lambda_i\mathcal{C}_i, \tag{13}$$

其中，$\mathcal{C}_i$ 是 $\mathcal{C}$的第 $i$行，适用于 $i \in \{1, \cdots, p\}$。将 $M$ 从右侧相乘，可由 (13) 得出条件 (10)。对于所有初始条件，条件 (9) 和 (10) 是系统 (6) 在 $v = NM^{-1}\zeta$下实现稳定性和全局单调性的必要充分条件。因此，条件 (9) 和 (10) 足以保证问题 2 可解。为证明其必要性，设 $v(t)$是适用于 $t \geq n$ 的控制器，且不满足条件 (10)。那么，从满足 $y_z(d+n) \geq 0$ 的任意初始状态出发，在控制器 $v(t)$作用下，

跟踪误差 $\epsilon(t)$ 将不满足 (8)，因此输出不会单调地跟踪恒定非负参考输出，并且可能超调至负值。因此，问题 2 不可解。类似地，如果在 $v(t)$下不满足条件 (6，系统将不稳定，因此问题 2 不可解。

注意，条件（9）确保所获得的控制器具有稳定性，而条件（10）确保 $\epsilon$ 具有（8）的形式，从而确保闭环输出响应的单调性。

## V. 基于数据的单调跟踪控制

在本节中，我们设计一个具有（5）形式的控制器，利用通过一次实验从系统（1 ）采集的输入输出数据来解决问题 2。在本节始终假设，系统（1）是一个单输入单输出（SISO）系统（即 $m = p = 1$），且稳态输出和稳态输入均等于零（即 $y_{\text{ss}} = 0$ 和 $u_{\text{ss}} = 0$）。[1]我们使用以下符号来表示时间范围为 $T$ 的轨迹所采集的数据:

$$u_{0:T} \triangleq [u(0), \cdots, u(T)], \quad y_{0:T} \triangleq [y(0), \cdots, y(T)], \tag{14}$$

对应的汉克尔矩阵为[2]

$$\left[\frac{U_{0,n,T-n+1}}{Y_{0,n,T-n+1}}\right] \triangleq \begin{bmatrix} u(0) & \cdots & u(T-n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n-1) & \cdots & u(T-1) \\ \hline y(0) & \cdots & y(T-n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(n-1) & \cdots & y(T-1) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

注意，系统（4）的输入状态数据可以由（14）和（15）中的输入输出数据获得，具体如下:

$$u_{n:T} \triangleq [u(n), \cdots, u(T)], \quad z_{n:T} \triangleq \left[\frac{U_{0,n,T-n+1}}{Y_{0,n,T-n+1}}\right]. \tag{16}$$

接下来，我们利用 [26] 中的结果，得到系统（4）闭环动态的数据依赖表示。然后，我们推导出与定理 4.1 中的条件等价、且以（16）中的数据表示的条件。下面需要用到以下假设和引理。

假设 *5.1*：**(持续激励)**（14）中的数据是在输入 $u_{0:T}$ 满足 $T \geq 4n$ 且持续激励阶数为 $2n+1$ 的情况下采集的。□

引理 *5.2*：**(秩条件)** 给定从单输入单输出系统（16）中采集的数据（1），其输入为 $u_{0:T}$，且满足假设 5.1。则

$$\text{Rank}\left(\left[\frac{u_{n:T}}{z_{n:T}}\right]\right) = 2n+1. \tag{17}$$

证明： 我们首先注意到

$$\begin{aligned}\text{Rank}\left(\left[\frac{u_{n:T}}{z_{n:T}}\right]\right) &= \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c} u_{n:T} \\ \hline U_{0,n,T-n+1} \\ \hline Y_{0,n,T-n+1} \end{array}\right]\right) \\ &= \text{Rank}\left(\left[\frac{U_{0,n+1,T-n+1}}{Y_{0,n,T-n+1}}\right]\right).\end{aligned}$$

利用（1），我们可以将输入输出响应写为

$$\left[\frac{U_{0,n+1,T-n+1}}{Y_{0,n,T-n+1}}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{F} & \mathcal{O} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{H}} \begin{bmatrix} U_{0,n+1,T-n+1} \\ x_{0:T-n} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & \cdots & CB & 0 \end{bmatrix}.$$

对于单输入单输出系统，矩阵 $\mathcal{H}$ 是方阵且满秩，其中秩 $(\mathcal{H}) = 2n+1$，并且由于输入信号 $u_{0:T}$ 满足假设 5.1，利用 [27,推论 2-(iii)]可得

$$\text{Rank}\left(\begin{bmatrix} U_{0,n+1,T-n+1} \\ x_{0:T-n} \end{bmatrix}\right) = 2n+1,$$

于是有

$$\text{Rank}\left(\left[\frac{u_{n:T}}{z_{n:T}}\right]\right) = \text{Rank}\left(\left[\frac{U_{0,n+1,T-n+1}}{Y_{0,n,T-n+1}}\right]\right) = 2n+1.$$

下一个定理将用式 (16) 中的数据给出与定理 4.1 中的条件等价的充要条件。

定理 *5.3*：**(利用数据判定问题 *2* 可解性的充要条件)** 设式 (14) 中的数据采集自单输入单输出系统 (1)，其输入 $u_{0:T}$ 满足假设 5.1。设 $\lambda \in [0, 1)$。存在反馈增益 $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 可解问题 2 当且仅当存在$P \in \mathbb{R}^{r\times r} \succ 0$ 和 $Q \in \mathbb{R}^{m\times r}$，使其满足以下线性矩阵不等式问题:

$$\begin{bmatrix} P & z_{n+1:T+1}Q \\ Q^{\mathsf{T}} z_{n+1:T+1}^{\mathsf{T}} & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{19}$$

$$z_{n:T}Q = P, \tag{20}$$

$$\mathcal{C} z_{n+1:T+1}Q = \lambda \mathcal{C} P. \tag{21}$$

此外，增益 $\mathcal{K} = u_{n:T}QP^{-1}$ 求解问题 2。

证明： 在定理 4.1的证明中，我们证明控制器 $u = \mathcal{K}z$ 求解问题 2 当且仅当存在$P \succ 0$ 使得（11）和（13）成立。接下来，我们用数据（11）和（13）表示条件（16）。由于 $u_{0:T}$满足假设 5.1，（17）中的秩条件成立，因此利用 [26, 定理 2], 我们可以将（4）的闭环动态写为

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{K} = z_{n+1:T+1}\mathcal{G}, \tag{22}$$

其中 $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{(T-n+1)\times r}$ 满足

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K} \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n:T} \\ z_{n:T} \end{bmatrix} \mathcal{G}. \tag{23}$$

设 $Q \triangleq \mathcal{G}P$，则条件 (11) 和 (13) 等价于存在 $Q$ 和 $P \succ 0$ 使得

$$z_{n+1:T+1}QP^{-1}Q^{\mathsf{T}} z_{n+1:T+1}^{\mathsf{T}} - P \prec 0, \tag{24}$$

$$z_{n:T}Q = P, \tag{25}$$

$$\mathcal{C} z_{n+1:T+1}Q = \lambda \mathcal{C} P, \tag{26}$$

[1]令 $y_{\text{ss}} = 0$ 且 $u_{\text{ss}} = 0$ 不会影响结果的一般性（参见备注 1）。

[2]我们采用与 [26] 类似的记号：第一个下标表示获取第一个样本的时间，第二个和第三个下标分别表示每列和每行的样本数。

其中，(24) 和 (26) 分别通过将 (22) 代入 (11) 和 (13) 得到，而 (25) 则由 (23) 得到。不等式 (19) 和 (24) 是等价的，这一点可以通过对 (19) 关于$(2,2)$-块取舒尔补来观察得到。最后，由 (23)，可得 $\mathcal{K} = u_{n:T}QP^{-1}$。 ■

请注意，条件（19）和（20）确保所获得的控制器具有稳定性，并且它们等价于 [26, 定理 8] 中推导出的条件。条件（21）确保闭环输出响应的单调性，其中 $\lambda$ 是一个设计参数，对应于（8）中出现的闭环特征值，而 $\mathcal{C}$ 是行为空间（4）中系统的输出矩阵，其结构是固定的。本节以以下评论作结。

备注 *1*：**(**非零稳态输入和输出**)**当稳态输入和输出均非零时，控制器采用以下形式 (7)，其中 $\mathcal{K}$ 按照定理 5.3利用在 (14) 中收集的数据获得。 □

注 *2*：（多输入多输出情形）对于多输入多输出（MIMO）系统的情形，定理中的结果5.3 可能不成立，因为（17）中的秩条件不成立，且矩阵 $\begin{bmatrix} u_{n:T} \\ z_{n:T} \end{bmatrix}$ 秩下降，其中 秩 $\left(\begin{bmatrix} u_{n:T} \\ z_{n:T} \end{bmatrix}\right) \leq ($ $n+1$ $m+)$。这可以从 $($ $)$ 中观察到。 $n$ 18

□

## VI. 无人机着陆控制

本节通过无人机着陆控制问题来说明我们的理论结果。我们考虑仅限于垂直轴运动的无人机动力学，其遵循

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_{\mathrm{s}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ T_{\mathrm{s}} \end{bmatrix}}_{B} u(t), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t), \end{aligned} \tag{27}$$

其中，$x(t) \in \mathbb{R}^2$ 包含无人机的高度和垂直速度，$u(t) \in \mathbb{R}$ 是输入信号，$y(t) \in \mathbb{R}$ 是对应于无人机高度的输出信号，$T_{\mathrm{s}} > 0$ 是采样时间。在此例中，我们有 $T_{\mathrm{s}} = 0.1$。地面高度对应于 $y = 0$，高于地面的高度对应于 $y > 0$。我们的目标是设计一个形式为 (7) 的输出反馈控制器，使无人机安全着陆而不撞击地面，即闭环输出应始终非负 $\forall t \geq 0$ 和$y(t) \to y_{\mathrm{ss}}$，其中 $t \to \infty$，且 $u_{\mathrm{ss}} = 0$和 $y_{\mathrm{ss}} = 0$。我们考虑两种情形：基于模型的情形，此时我们可以访问系统动力学 (27)；以及基于数据的情形，此时我们无法访问系统动力学，但可以访问由 (27) 采集、形式为 (14) 的输入输出数据。

*1)* 基于模型: 使用定理 4我们得到 $\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} -1.889 & -1.442 & 188.887 & -235.882 \end{bmatrix}$。如果放宽定理（10）中的条件4.1，该条件保证闭环输出响应的单调性，则可得到$\mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.317 & -0.464 & 18.571 & -19.785 \end{bmatrix}$。图1 展示了由基于模型的控制器驱动的系统（27）的闭环输出响应。图1（a）展示了控制器 $\mathcal{K}_1$ 在不同非负初始输出下的情况。我们观察到，输出单调收敛至期望输出，且没有超调；无人机因此能够安全着陆而不会坠毁。图1（b）展示了控制器 $\mathcal{K}_2$ 在与图1（a）相同初始条件下的闭环输出响应。我们观察到，输出在收敛至零之前超调至负值，这意味着无人机会撞向地面。

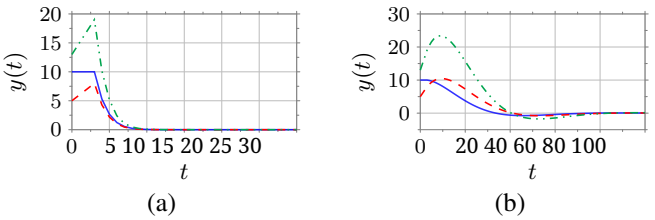


图 1. 此图展示了由基于模型的控制器驱动的 (27) 的闭环输出响应。在两个面板中，蓝色实线、红色虚线和绿色点划线分别对应 $x(0) = [10, 0]^{\mathsf{T}}$、$[5, 10]^{\mathsf{T}}$和 $[13, 20]^{\mathsf{T}}$。面板 (a) 展示了使用定理 4.1 获得的控制器的闭环输出响应。面板 (b) 展示了使用定理 4.1 获得的控制器的闭环输出响应，但放宽了条件 (10)，该条件确保闭环输出响应具有单调性。请注意，假设 2.1 和定理 3.1 均成立。

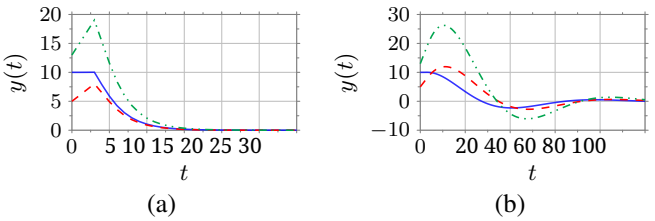


图 2. 该图展示了由基于数据的控制器驱动的 (27) 的闭环输出响应。在两个面板中，蓝色实线、红色虚线和绿色点划线分别对应 $x(0) = [10, 0]^{\mathsf{T}}$、$[5, 10]^{\mathsf{T}}$和 $[13, 20]^{\mathsf{T}}$。面板 (a) 展示了使用定理 5.3 得到的控制器所对应的闭环输出响应。面板 (b) 展示了使用定理 5.3 得到的控制器所对应的闭环输出响应，但放宽了条件 (21)，该条件确保闭环输出响应具有单调性。请注意，假设 2.1 和定理 3.1 均成立。

*2)* 基于数据: 我们按照 (14) 采集数据，输入为$u_{0:T}$，满足假设 5.1。使用定理 5.3 并令 $\lambda$ =0。4，得到 $\mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} -1.248 & -1.084 & 124.835 & -146.322 \end{bmatrix}$。若放宽定理 21中的条件 (5.3)，该条件确保闭环输出响应具有单调性，则得到$\mathcal{K}_4 = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.257 & 5.774 & -6.258 \end{bmatrix}$。图2 展示了由基于数据的控制器驱动的系统 (27) 的闭环输出响应。图 2(a) 展示了控制器 $\mathcal{K}_3$ 在不同非负初始输出下的闭环输出响应。我们观察到，输出单调地收敛至期望输出，且没有超调；此时无人机安全着陆，没有发生坠毁。图 2(b) 展示了控制器 $\mathcal{K}_4$ 在与图 2(a) 相同初始条件下的闭环输出响应。我们观察到，输出在收敛至零之前超调至负值，这意味着无人机会坠毁在地面上。

## 七、结论与未来工作

在本研究中，我们推导了能够使闭环系统呈现外部正性的动态输出反馈控制器。首先，

我们在行为空间中为离散时间线性时不变系统引入一种等价表示，并利用 [25] 中的方法，将任意动态控制器表示为静态行为反馈增益。随后，我们结合系统的行为表示与 [23] 中的结果，推导出一种行为反馈控制器，使其能够单调跟踪恒定非负参考输出。此外，我们还推导出一种直接的数据驱动方法，利用输入输出数据为单输入单输出系统获得能够单调跟踪恒定非负参考输出的行为反馈控制器。基于模型和基于数据的这两种方法均可用于获得输出反馈控制器，使闭环系统具有外部正性。最后，我们通过无人机着陆控制问题对结果进行数值验证。我们的方法通过任意配置闭环特征值，使闭环系统稳定且具有外部正性。未来可探索多个方向，包括对特征值进行最优配置以优化指定的性能指标，以及提高所推导控制器对扰动的鲁棒性，从而使闭环系统在噪声环境中部署时仍保持稳定且具有外部正性。

## 附录

### A. 行为空间中的系统表示

下面的引理给出了1在行为空间中的等价表示 $z$，其写作4。

引理 *A.1*：（等价动力学 *[25,* 引理 *5。2]*）设 $z$如3所示。则 $z$ 的演化可写为4，其中$\mathcal{A}_u \triangleq \mathcal{F}_2 - CA^n\mathcal{O}^\dagger\mathcal{F}_1$，且 $\mathcal{A}_y \triangleq CA^n\mathcal{O}^\dagger$，并且

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & \cdots & CB & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{F}_2 \triangleq \begin{bmatrix} CA^{n-1}B & \cdots & CB \end{bmatrix}.$$

□

引理A.1中要求系统具有可观测性。引理A.1 的证明与 [25, 引理 52]的证明步骤类似。

### B. 验证定理*3.1*中的条件

在本附录中，我们验证定理 3.1 中的条件。特别地，我们给出一种计算输入序列的方法$u_{0:n-1} \triangleq [u(0)^\mathsf{T}, \cdots, u(n-1)^\mathsf{T}]^\mathsf{T}$ 使得相应的输出序列 $y_{d:n+d-1} \triangleq [y(d)^\mathsf{T}, \cdots, y(n+d-1)^\mathsf{T}]^\mathsf{T}$ 在基于模型和基于数据两种情形下均为非负。

*1*）基于模型：给定相对阶为 $d$ 的系统（1）。序列 $y_{d:n+d-1}$ 可写成如下形式

$$y_{d:n+d-1} = \mathcal{O}_d x(0) + \mathcal{F}_d u_{0:n-1}, \tag{28}$$

其中

$$\mathcal{O}_d \triangleq \begin{bmatrix} CA^d \\ \vdots \\ CA^{d+n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_d \triangleq \begin{bmatrix} CA^{d-1}B & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{d+n-2}B & \cdots & CA^{d-1}B \end{bmatrix}.$$

我们可以选择 $u_{0:n-1}$，使得 $y_{d:n+d-1} = v \geq 0$，如下：

$$u_{0:n-1} = \mathcal{F}_d^\dagger (v - \mathcal{O}_d x(0)) + w, \tag{29}$$

其中 $w \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_d)$。注意，矩阵 $\mathcal{F}_d$ 为满行秩，因为该系统右可逆（假设 2.2）。此外，向量 $w$ 可以任意选取，因为将$u_{0:n-1}$ 代入（29）再代入（28）后，向量 $w$ 会消失（$\mathcal{F}_d w = 0$）。因此，我们可以选择 $w = 0$。

*2*）基于数据：考虑 $N \geq 2n$ 长度为 $n$的输入输出轨迹，这些轨迹通过向满足假设1）2.2 且相对阶为 $d$的单输入单输出系统施加持续激励输入，并从任意初始状态出发采集得到。数据表示为

$$\begin{aligned} U_N &\triangleq \begin{bmatrix} u^1_{0:n-1} \cdots u^N_{0:n-1} \end{bmatrix}, \quad X_0 \triangleq \begin{bmatrix} x^1(0) \cdots x^N(0) \end{bmatrix}, \\ Y_N &\triangleq \begin{bmatrix} y^1_{d:n+d-1} \cdots y^N_{d:n+d-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中，$u^i_{0:n-1}$、$x^i(0)$ 和 $y^i_{d:n+d-1}$ 分别表示第 $i$条轨迹的输入、初始状态和相应输出，其中$i = \{1, \cdots, N\}$。由于 $u$ 是持续激励的，$U_N$具有满行秩，且我们有秩 $\begin{bmatrix} U_N \\ X_0 \end{bmatrix} = 2n$，因此，利用 [26,引理 2]，，可以将具有指定初始状态的任意输入输出轨迹分别表示为 $U_N$、$Y_N$和 $X_0$各列的线性组合。特别地，对于任意输入序列 $u_{0:n-1}$、初始状态 $x_0$及其相应输出$y_{d:n+d-1}$，我们可以写为

$$u_{0:n-1} = U_N\alpha, \quad y_{d:n+d-1} = Y_N\alpha, \quad x_0 = X_0\alpha, \tag{31}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^N$。我们的目标是，给定一个初始状态 $x_0$，找到一个序列 $u_{0:n-1}$，使得 $y_{d:n+d-1} \geq 0$，这归结为选择 $\alpha$使得 $y_{d:n+d-1} \geq 0$。由（31），可写成$\alpha = X_0^\dagger x_0 + X_{\text{null}}\mu$，其中 $X_{\text{null}}$是核（$X_0$）的一个基，且 $\mu \in \mathbb{R}^n$ 是任意向量，可将其选取为满足 $y_{d:n+d-1} \geq 0$。接下来，我们将用到以下引理。

引理 *B.1*：（$Y_N X_{\textbf{\textit{null}}}$的秩）给定（30）中的数据，其中$X_{\text{null}}$ 表示 核（$X_0$）的基。则

$$\mathrm{Rank}\,(Y_N X_{\text{null}}) = n.$$

证明：由（28）可得

$$Y_N X_{\text{null}} = \mathcal{O}_d X_0 X_{\text{null}} + \mathcal{F}_d U_N X_{\text{null}} = \mathcal{F}_d U_N X_{\text{null}}.$$

我们有 秩（$U_N$）$= n$，且$\begin{bmatrix} U_N \\ X_0 \end{bmatrix}$的各行线性无关，因为输入是持续激励的；并且秩（$X_{\text{null}}$）$= N - n$，因为 $X_0$ 是满行秩[3]。因此，秩（$U_N X_{\text{null}}$）$= n$。此外，注意，对于相对阶为 $d$ 且满足假设 2.2的单输入单输出系统（1），矩阵$\mathcal{F}_d$ 是方阵且满秩，并且 秩（$\mathcal{F}_d$）$= n$。因此，我们有 秩（$\mathcal{F}_d U_N X_{\text{null}}$）$= n$。 ■

设 $y_{d:n+d-1} = v \geq 0$，则由（31）可得

$$\begin{aligned} y_{d:n+d-1} = Y_N\alpha = Y_N X_0^\dagger x_0 + Y_N X_{\text{null}}\mu = v, \\ \implies \mu = (Y_N X_{\text{null}})^\dagger \left(v - Y_N X_0^\dagger x_0\right) + w, \end{aligned}$$

[3]对于初始状态的随机选择，这一条件通常都能满足。

其中 $w \in$ 核 $(Y_N X_{\text{null}})$。于是我们可以将 $\alpha$ 写成

$$\alpha = X_0^\dagger x_0 + X_{\text{null}} \left(Y_N X_{\text{null}}\right)^\dagger \left(v - Y_N X_0^\dagger x_0\right) + X_{\text{null}} w, \tag{32}$$

注意，根据（32）、（31）和引理 B.1，对于 $w \in$ 核（$Y_N X_{\text{null}}$）的任意选择，我们都有 $y_{d:n+d-1} = Y_N \alpha = v$，因此可以选择 $w = 0$。最后，根据（32），确保 $u_{0:n-1} = U_N \alpha$ 的输入序列可写为

$$u_{0:n-1} = U_N X_0^\dagger x_0 + U_N X_{\text{null}} \left(Y_N X_{\text{null}}\right)^\dagger \left(v - Y_N X_0^\dagger x_0\right).$$

## 参考文献


[1] T. Kaczorek.《正一维和二维系统》。Springer Science & Business Media，2002年。[2] W. M. Haddad、V. Chellaboina 和 Q. Hui。《非负与分舱动力系统》。普林斯顿大学出版社，2010年。[3] J. A. Jacquez。《生物学与医学中的分舱分析》。爱思唯尔，1972年。[4] M. Feinberg. 一类化学反应网络稳态的存在性与唯一性。《理性力学与分析档案》，132(4)：311–370，1995年。[5] J. W. Nieuwenhuis、C. I. Byrnes 和 A. Lindquist. 关于列昂惕夫型模型的一些结果。载于《线性系统的频域与状态空间方法》，第213–225页。Elsevier Science，1986年。[6] A. Zappavigna、T. Charalambous 和 F. Knorn. Foschini–Miljanic 算法的无条件稳定性。《自动化》，48(1)：219–224，2012年。[7] R. Shorten、F. Wirth 和 D. Leith. TCP 类拥塞控制的正系统模型：渐近结果。《IEEE/ACM 网络汇刊》，14(3)：616–629，2006年。[8] E. Seneta.《非负矩阵与马尔可夫链》。Springer Science & Business Media，2006年。[9] A. Schwab 和 J. Lunze. 如何设计外部正反馈回路——控制理论中的一个开放问题。《at 自动化技术》，68(5)：301–311，2020年。[10] L. Farina 和 S. Rinaldi.《正线性系统：理论与应用》。约翰·威立父子出版公司，2000年。[11] V. G. Rumchev 和 D. J. G. James. 正线性离散时间系统的谱特征刻画与极点配置。《国际系统科学杂志》，26(2)：295–312，1995年。[12] T. Kaczorek. 通过状态反馈稳定化正线性系统。《测量、自动化与控制》，45：2–5，1999年。[13] H. Gao、J. Lam、C. Wang 和 S. Xu. 稳定性与正性的控制：等价条件与计算。《IEEE 电路与系统汇刊 II：快报》，52(9)：540–544，2005年。[14] B. Roszak 和 E. J. Davison. 正线性时不变系统可稳定性的充要条件。《系统与控制快报》，58(7)：474–481，2009年。[15] M. A. Rami. 正线性时不变系统静态输出反馈稳定化的可解性。《系统与控制快报》，60(9)：704–708，2011年。[16] B. Shafai、A. Moradmand 和 M. Siami. 线性系统的数据驱动正稳定化。载于《国际控制、决策与信息技术会议》，第1卷，第1031–1036页，土耳其伊斯坦布尔，2022年5月。IEEE。[17] A. Rantzer 和 M. E. Valcher. 正系统与大规模控制教程。载于《IEEE 决策与控制会议》，第3686–3697页，美国佛罗里达州迈阿密，2018年12月。IEEE。[18] S. Jayasuriya 和 J. W. Song. 无超调阶跃响应补偿器的综合。载于《1992年美国控制会议》，第683–684页，美国伊利诺伊州芝加哥，1992年6月。[19] S. Darbha. 连续时间线性时不变系统非负脉冲响应控制器的综合。《自动化》，39(1)：159–165，2003年。[20] H. Taghavian 和 M. Johansson. 单调闭环响应的固定阶控制器综合：一种线性规划方法。《IFAC 在线论文》，53(2)：4682–4687，2020年。[21] H. Taghavian 和 M. Johansson. 线性系统离散化中外部正性的保持。《欧洲控制杂志》，62 74，2021 69：–。[22] R. Schmid 和 L. Ntogramatzidis. 无超调和无欠调多变量状态反馈跟踪控制器的设计。《系统与控制快报》，61(6)：714–722，2012年。[23] E. Garone 和 L. Ntogramatzidis. 全局单调跟踪控制的线性矩阵不等式。《自动化》，61：173–177，2015年。[24] C. Grussler 和 A. Rantzer. 关于二阶锥正系统。《*SIAM* 控制与优化杂志》，59(4)：2717–2739，2021年。[25] A. A. Al Makdah、V. Krishnan、V. Katewa 和 F. Pasqualetti. 最优 LQG 控制的行为反馈。载于*IEEE* 决策与控制会议，墨西哥坎昆′，2022年12月。[26] C. De Persis 和 P. Tesi. 数据驱动控制公式：稳定化、最优性与鲁棒性。*I EEE*《自动控制汇刊》，65(3)：909–924，2020年。[27] J. C. Willems、P. Rapisarda、I. Markovsky 和 B. L. M. De Moor. 关于持续激励的注记。《系统与控制快报》，54 329，2005 4 325( )：–。