arXiv:2305.02479v2 [math.AG] 5 May 2024

属2曲线割线簇的自由分解

李立

摘要

Ein、Niu 和 Park 在 [ENP20] 中证明，若亏格为 g 的曲线上的线丛 L 的次数至少为 $2g+2k+1$，则该曲线通过由 L 的完全线性系所定义的嵌入得到的第 k 个割线簇是正规、射影正规且算术 Cohen–Macaulay 的；他们还证明了贝蒂图的一些消失性质。然而，亏格为 $g \geq 2$ 的曲线的割线簇 Σ_k 的自由分解中权重为 $k+1$ 的线性带长度仍然不为人所知。本文利用 Boij-S¨oderberg 理论计算亏格 2 曲线的割线簇的完整贝蒂图。主要思路是通过计算贝蒂图的一些特殊位置，找出对割线簇贝蒂图有贡献的纯图表。

1 引言

设 C 是复数域 $\mathbb{C}$ 上亏格为 g 的光滑射影曲线。设 C 上有一个非常丰沛线丛 L，其完全线性系定义了一个嵌入 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$。对于整数 $k \geq 0$，定义 k 阶割线簇 $\Sigma_k = \Sigma_k(C, L) \subset \mathbb{P}^r$ 为 $\mathbb{P}^r$ 中所有关于 C 的 $(k+1)$- 割线 k- 平面的并的扎里斯基闭包。形式上，割线簇可以实现为割线丛的射影化的像。具体而言，设 $pr\colon C \times C_k \to C$ 是在第一因子上的投影，其中 C_k 表示 C 的 k 阶对称积。我们有典范态射 $\sigma\colon C \times C_k \to C_{k+1}$，它将 (x, ξ) 映射到 $x + \xi$。于是，$(k+1)$ 阶割线层 $E_{k+1,L}$，或简称为 E_L，定义为秩为 $k+1$ 的向量丛 $\sigma_* pr^* L$。射影丛定义为射影化 $B^k(L) := \mathbb{P}(E_L)$。令 $\mathcal{O}_{B^k}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_L)}(1)$ 为 B^k 上的典范丛。它诱导出态射 $\beta\colon B^k \to \mathbb{P}H^0(C_{k+1}, E_L) = \mathbb{P}^r$。$k$ 阶割线簇 Σ_k 可实现为像 β。我们可以假设 $r \geq 2k+3$，因为根据 [Lan84]，曲线的割线簇总是具有预期维数，这意味着对于 $\Sigma_k \subset \mathbb{P}^r$，有 $\dim \Sigma_k = \min\{2k+1, r\}$。具体而言，$\Sigma_k = \mathbb{P}^r$ 若 $r \leq 2k+1$ 且 Σ_k 是一个超曲面，其次数由命题 5.10 中计算得出；若 [ENP20]，则 $r = 2k+2$。令 $\mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)$ 为 Σ_k 上的线丛，它是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ 的拉回。

我们关注 Σ_k 的合志。为此，我们引入一些记号。设 X 是通过非常丰沛线丛 L 嵌入 $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}H^0(X, L)$ 中的射影簇。令 $S = \mathrm{Sym}H^0(X, L)$ 和 $R = \bigoplus H^0(X, B \otimes mL)$ 为分次 S-模，其中 B 是 X 上的相干层。根据希尔伯特合志定理，R 在 S 上有一个最小分次自由分解：

$$\cdots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0,$$

其中 E_p 是一个自由 S-模。我们将 Koszul 上同调群 $K_{p,q}(X, B; L)$ 定义为满足 $E_p = \bigoplus K_{p,q}(X, B; L) \otimes_{\mathbb{C}} S(-p-q)$ 的适当 $\mathbb{C}$-线性空间。q

Koszul 上同调群 $K_{p,q}(X, B; L)$ 可与以下微分的同调对应:

$$\bigwedge^{p+1} H^0(L) \otimes H^0(B \otimes (q-1)L) \to \bigwedge^{p} H^0(L) \otimes H^0(B \otimes qL) \to \bigwedge^{p-1} H^0(L) \otimes H^0(B \otimes (q+1)L),$$

其中，态射 $\bigwedge^{p} H^0(L) \otimes H^0(B \otimes qL) \to \bigwedge^{p-1} H^0(L) \otimes H^0(B \otimes (q+1)L)$ 由以下公式给出

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes M \mapsto \sum_{i=1}^{p} (-1)^i x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_p \otimes x_i M,$$

对于任意的 p、$q \in \mathbb{Z}$。若 $B = \mathcal{O}_X$ X 上的结构层，则 Koszul 上同调群简记为 $K_{p,q}(X, L)$。我们有 Betti 图，其中第 p 列和第 q 行的元素为 $\dim K_{p,q}(X, L) =: b_{p,q}$。

	0	1	2	$\cdots$
0	$b_{0,0}$	$b_{1,0}$	$b_{2,0}$	$\cdots$
1	$b_{0,1}$	$b_{1,1}$	$b_{2,1}$	$\cdots$
2	$b_{0,2}$	$b_{1,2}$	$b_{2,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

本文将重点讨论亏格为 2 的曲线，此时曲线上典范丛的求值映射的核丛是一个线丛，因此更容易描述。我们假设 $r \geq 2k+3$，这意味着 $\deg(L) \geq 2k+5$。[ENP20] 证明了 Σ_k 满足性质 $N_{k+2, r-2k-3}$ 即 $\dim K_{i, j}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = 0$，其中 $i \leq r-2k-3$ 和 $j \geq k+2$，且 $\dim K_{r-2k-1, 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = k+2$。此外，根据 Danila 定理（见 [Dan07]），对于 $j \leq k$，有 $\dim K_{i, j}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = 0$；但 $(i, j) = (0, 0)$ 除外，此时 $\dim K_{0, 0}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = 1$。我们将证明以下结论:

定理 1.1. 对于亏格为 2 的曲线的割线簇 Σ_k，我们有 $\dim K_{r-2k-2, 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = r-2k-1$ 以及 $K_{r-2k-1, 2k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = 0$。

根据上述计算出的值，我们可以确定线性带的长度以及未知的 Koszul 上同调群 $K_{r-2k-1, 2k+1}$。

定理 1.2. 设 Σ_k 为一条亏格为 2 的曲线的割线簇。
(1)我们有 $\dim K_{r-2k-2,2k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = r-k-2$. (2)对于 $k \geq 1$，我们有等价关系 $\dim K_{i, k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \neq 0 \iff 1 \leq i \leq r-2k-3$；而对于 $k = 0$，我们有 $\dim K_{i,1}(C, \mathcal{O}_C(1)) \neq 0 \iff 1 \leq i \leq r-2$。

(3)对于 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq r-2k-3$，我们有

$$\begin{aligned} &\dim K_{i,k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \\ = \ &\frac{(r-k-2)![r^3-(i+k+1)r^2-(i+k+2)r+2(k+1)(i+k+1)]}{(k+1)!(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k-1)(r-i-k)}. \end{aligned}$$

(4) 对于 $k=0$ 和 $1 \leq i \leq r-2$，我们有

$$\dim K_{i,1}(C, \mathcal{O}_C(1)) = \frac{(r-1)!(r^2-ir-2i-2)}{(i+1)(i-1)!(r-i)!}.$$

综合以上结果，我们可推得 $\Sigma_k (k \geq 1)$ 的 Betti 图如下：

	0	1	2	$\cdots$	$r-2k-3$	$r-2k-2$	$r-2k-1$
0	1						
$\vdots$							
$k+1$		*	*	$\cdots$	*		
$\vdots$							
$2k+1$						$r-k-2$	
$2k+2$						$r-2k-1$	$k+2$

其中空白处为 0，星号表示非零项，其具体值已在定理 1.2 (3) 中给出。

2 K_{r-2k-1}的$2k+1$ 消失

在证明本节的主定理之前，先介绍 Koszul 上同调的对偶性很有帮助。

命题 2.1. 设 L 是光滑射影概形 X 上的一个全局生成线丛，且 X 的维数为 n， B 是 X 上任意一个线丛。若对于 $i=1$、$\cdots$、$n-1$，有 $H^i(X, B\otimes L^{q-i}) = H^i(X, B\otimes L^{q-i+1}) = 0$，则有同构 $K_{p,\ q}(X, B;\ L)^\vee \cong K_{r-n-p,\ n+1-q}(X, \omega_X \otimes B^\vee; L)$，其中 $r = h^0(X, L) - 1$，且 ω_X 是 X 上的典范层。

证明。该证明与 [AN10] 的定理 2.25 的证明基本相同。然而，由于其关键依据是 Serre 对偶，因此那里所假设的光滑性并非必要条件。 □

从现在起，假设 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亏格 2 光滑射影曲线，且L 是次数至少为 $2k+5$ 的线丛。 L 的完全线性系定义了一个嵌入 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$，其中 $r \geq 2k+3$。令 $\Sigma_k \subset \mathbb{P}^r$ 为 C的第 k个割线簇。由于根据 [ENP20], 中的定理 5.2 和定理 5.8，所有满足 $l \in \mathbb{Z}$和 $1 \leq i \leq 2k$的中间上同调 $H^i(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(l))$ 均为零，因此对偶性成立。换言之，我们有

$K_{r-2k-1,\ 2k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \cong K_{0,\ 1}(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k};\ \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))^\vee$，其中 ω_{Σ_k}是 Σ_k上的典范层。因此，要证明这个群消失，等价于证明以下内容：

定理 2.2。该态射

$$\phi : H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}) \to H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}(1))$$

在假设 $r \geq 2k+3$ 下是满射的。

证明。根据割线簇的构造以及 [ENP20]，中的定理 5.8，我们知道$H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = H^0(C, L)$，$H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}) = S^{k+1}H^0(C, K)$，以及$H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}(1)) = H^0(C, K+L) \otimes S^k H^0(C, K)$，其中 K 是 C 上的典范除子，并且态射 ϕ 变为

$$H^0(C, L) \otimes S^{k+1}H^0(C, K) \to H^0(C, K+L) \otimes S^k H^0(C, K),$$

定义为

$$x \otimes v_1 \cdots v_{k+1} \mapsto \sum_{i=1}^{k+1} v_i x \otimes v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_{k+1}.$$

我们仍将其记为 ϕ，并假设 $J = \mathrm{Im}(\phi)$。设 $H^0(C, K) =$ 张成 $\{1, v\}$，其中 1 和 v 被视为 C 的某个仿射开子集上的有理函数。

从现在起，为简洁起见，省略符号 $\otimes$。只要乘法态射$\psi_0 \colon H^0(K) \otimes H^0(L) \to H^0(K+L)$是满射的，$H^0(K+L) \otimes S^k H^0(K)$ 中的元素就由两类元素张成，即 $x \otimes v^m$ 和 $vx \otimes v^m$，其中 $0 \leq m \leq k$ 和 $x \in H^0(L)$。显然，元素 $vx \otimes v^k$ 属于 J，因为 $\phi(x \otimes v^{k+1}) = (k+1)vx \otimes v^k$；$x \otimes 1$ 也属于 J，因为 $\phi(x \otimes 1) = (k+1)x \otimes 1$。我们只需证明对于 $0 \leq m \leq k$ 和 $x \in H^0(L)$ 有 $x \otimes v^m \in J$。一旦证明了这一点，对于所有 $x \in H^0(L)$ $1 \leq m \leq k$，我们就有 $vx \otimes v^{m-1} \in J$，因为对于所有 $1 \leq m \leq k$，$\phi(x \otimes v^m)$ 是 $x \otimes v^m$ 和 $vx \otimes v^{m-1}$ 的组合。我们对 m 进行归纳证明。

对于 $x \otimes 1$，上文已经讨论过。

假设对于所有 $x \in H^0(L)$ 和 $1 \leq m \leq k$，$x \otimes v^{m-1} \in J$。我们想证明 $x \otimes v^m \in J$。如果进一步假设 $\psi_1 \colon H^0(K) \otimes H^0(L-K) \to H^0(L)$ 是满射，则我们可以写成 $x = vx_1 + y_1$，其中 x_1，$y_1 \in H^0(L-K)$。注意到 $y_1 \otimes v^m$ 属于 J，因为 $\phi(y_1 \otimes v^m)$ 是 $vy_1 \otimes v^{m-1}$ 和 $y_1 \otimes v^m$ 的组合，并且根据归纳假设，我们有 $vy_1 \otimes v^{m-1} \in J$。因此，对于 $x_1 \in H^0(L-K)$，我们只需证明 $vx_1 \otimes v^m \in J$。

假设我们已将问题归结为证明对所有 $x_p \in H^0(L-pK)$ 都有 $v^p x_p \otimes v^m \in J$。如果进一步假设 $\psi_{p+1} \colon H^0(K) \otimes H^0(L-(p+1)K) \to H^0(L-pK)$ 是满射，那么对于某些 x_{p+1}、$y_{p+1} \in H^0(L-(p+1)K)$，我们可以写成 $v^p x_p = v^p(vx_{p+1} + y_{p+1})$。注意到 $v^p y_{p+1} \otimes v^m \in J$，因为 $\phi(v^p y_{p+1} \otimes v^m)$ 是 $v^p y_{p+1} \otimes v^m$ 和 $v^{p+1} y_{p+1} \otimes v^{m-1}$ 的组合，而根据归纳假设，后者属于 J。剩下需要证明 $v^{p+1} x_{p+1} \otimes v^m \in J$。我们将上述步骤重复 k 次。于是剩下需要对 $x_k \in H^0(L-kK)$ 证明 $v^k x_k \otimes v^m \in J$。

为了证明 $v^k x_k \otimes v^m \in J$，只需证明 $v^{k-1} v_k \otimes v^{m+1} \in J$，因为 $\phi(v^{k-1} v_k \otimes v^{m+1})$ 是一个 4

$v^k x_k \otimes v^m$ 与 $v^{k-1} v_k \otimes v^{m+1}$的组合。同样，为了证明 $v^{k-1} v_k \otimes v^{m+1} \in J$，只需证明 $v^{k-2} v_k \otimes v^{m+2} \in J$。最后，我们只需证明 $v^m x_k \otimes v^k \in J$。这是显然的，因为$\phi($ $v^{m-1} x_k \otimes v^{k+1}) = (k+1) v^m x_k \otimes v^k$。

为了完成上述推导，我们需要态射的满射性

$$\psi_{p+1} : H^0(K) \otimes H^0(L - (p+1)K) \to H^0(L - pK)$$

对于 $-1 \leq p \leq k-1$。注意，态射 $H^0(K) \otimes \mathcal{O}_C \to K$ 的核是一个线丛，因此它是 $-K$。考虑正合列

$$0 \to L \otimes K^{-(p+2)} \to H^0(K) \otimes L \otimes K^{-(p+1)} \to L \otimes K^{-p} \to 0.$$

要验证所需的满射性，只需检查 $H^1(L-(p+2)K) = 0$，即 $H^0((p+3)K-L) =0$。注意，$\deg((p+3)K - L) \leq 2(k+2) - \deg(L) = 2k + 2 - r < 0$。因此，其整体截面群为零。

□

推论 2.3。我们有 $\dim K_{r-2k-2,\ 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = r - 2k - 1$。

证明。由对偶性可知 $K_{r-2k-2,\ 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))^\vee = K_{1,\ 0}(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k};\ \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))$，其中后一个群是下列序列的同调

$$\bigwedge^2 H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}(-1)) \to H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}) \to H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}(1)).$$

根据 [ENP20] 的定理 5.2，我们有 $H^0(\omega_{\Sigma_k}(-1)) = H^{2k+1}(\mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))^\vee = 0$。根据定理 2.2，右侧的映射是满射。因此

$$\begin{aligned}
\dim K_{r-2k-2,2k+2} &= \dim \ker(H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\omega_{\Sigma_k}) \to H^0(\omega_{\Sigma_k}(1))) \\
&= \dim H^0(\mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\omega_{\Sigma_k}) - \dim H^0(\omega_{\Sigma_k}(1)) \\
&= \dim H^0(L) \otimes S^{k+1} H^0(K) - \dim H^0(K+L) \otimes S^k H^0(K) \\
&= (r+1)(k+2) - (r+3)(k+1) \\
&= r - 2k - 1.
\end{aligned}$$

□

3 Boij-S¨oderberg 理论

本节回顾 Boij-S¨oderberg 理论中的一些有用事实。关于这部分内容，可参阅[ES09] 和 [Tay22] 。

$_\infty$定义 3.1。称有理向量空间 $\mathbb{B} = \bigoplus \mathbb{Q}^{n+1}$ 为有理 Betti$_{-\infty}$图表空间，其有 $n+1$ 列，行以整数编号。

De定义 3.2。纯图表 β(e) 是由一个次数序列所刻画的图表。 ce

$\mathbf{e} = (e_0, \cdots, e_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$，其中 $e_0 < e_1 < \cdots < e_n$，其 Betti 数定义为

$$\dim K_{p,q}(\beta(\mathbf{e})) = \begin{cases} n! \prod_{i \neq e_p} \frac{1}{|e_i - e_p|}, & p + q = e_p \\ 0, & else \end{cases}$$

由 [ES09], 的定理 0.1 和定理 0.2 可得关于将 Cohen-Macaulay 模的 Betti 图分解为纯图组合的定理。

定理 3.3. 设 S为多项式环 $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_r]$。对于任意有限生成的 Cohen-Macaulay 分次 S-模 M，其 Betti 图 $\beta(M)$ 可以（不一定唯一地）分解为 $\sum c_{\mathbf{e}} \beta(\mathbf{e})$，其中 $c_{\mathbf{e}} \geq 0$。

接下来，我们引入模的重数，并将其推广到形式图。

定义 3.4. 设 S 如上所述， M 为分次 S-模。$HS_M(t)$ 的 Hilbert 级数 $= \sum \dim M_j t^j$ 可唯一表示为 $\frac{HN_M(t)}{(1-t)^{\dim M}}$，其中 $HN_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 且 $HN_M(1) \neq 0$。

$$HS_M(t) = \frac{HN_M(t)}{(1-t)^{\dim M}}.$$

定义 M 的重数为 $HN_M(1)$。

由 [HK84] 的推论和 [HM85], 的定理 1.2 可知

定理 3.5. 对于纯分解

$$0 \to S(-d_n)^{b_n} \to \cdots \to S(-d_1)^{b_1} \to S \to R \to 0,$$

满足条件 $b_i = |\prod_{j \neq i, \ j \geq 1} \frac{d_i}{d_j - d_i}|$ 对于 $1 \leq i \leq n$，其中 R 是一个分次 S-模，且实际上 R 是 Cohen-Macaulay 的，并满足 b_i 的数值条件， R 的重数为 $\mu(R) = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{n!}$.

回顾一下，模的希尔伯特函数完全由 Betti 数线性决定（ [Eis05] 的推论 1.10）。因此，它们可以推广到形式图。进一步地，可以定义形式图的重数。重数也应完全由 Betti 数线性决定。因此，我们可以计算定义 3.2 中定义的纯图的重数。

命题 3.6. 定义 3.2 中定义的纯图的重数为 1。

证明。我们首先验证，当归一化使得 $\dim K_{0,0} = 1$ 时，纯图表的 Betti 数满足定理 3.5 中的条件。事实上，我们有

$$\frac{\dim K_{i,e_i-i}}{\dim K_{0,0}} = \frac{\prod_{j \neq i, j \geq 0} \frac{1}{|e_j - e_i|}}{\prod_{j \neq 0} \frac{1}{|e_j|}} = |\prod_{j \neq i, j \geq 1} \frac{e_i}{e_j - e_i}|.$$

由于重数完全由 Betti 数决定，且纯图表的 Betti 数除以 $\dim K_{0,0}$ 后满足定理 3.5 中的条件，因此定理 3.5 的结果可以形式化地推广。于是，β(e) $\dim K_{0,0}$ 的重数为 $\frac{\prod_{i=1}^{n} e_i}{n}!$。因此，$\prod_{n} e_i\ \beta$(e) 的重数为 $\dim K_{0,0} \cdot \frac{i=1}{n}! = 1$。

□

4 Σ_k 的完整 Betti 图

我们首先证明，射影簇的重数与其次数相同 .

命题 4.1. 设 $V \subset \mathbb{P}^r$ 是一个射影簇。设 $S = \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_r]$ 和 I 是 V 的消去理想。那么 S/I 的重数与 V 的次数相同。这里的次数指交集 $V \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim V}$ 中点的个数，其中 H_i 是 $\mathbb{P}^r$ 中的一般超平面。

证明. V 的 Hilbert 级数 $HS_V(t)$ 具有如下形式： $HS_V(t) = \sum H_V(j)t^j$，其中 $H_V(t)$ 是 V 的 Hilbert 多项式j。于是 $tHS_V(t) = \sum H_V(j)t^{j+1}$。将这两个等式$i$相减，得到 $(1-t)HS_V(t) \cong \sum[H_V(j) - H_V(j-1)]t^j = \sum H_{V\cap H_1}(j)t^j$。这里的 j j 符号 $\cong$ 表示，从充分大的次数项开始它们相等。归纳可得N $\infty(1-t)^{\dim V} HS_V(t)$ $= \sum c_j t^j + \sum Dt^j$，其中 $D =$deg(V)。将等式两边$j=0$ $j=N+1$乘以 $(1-t)$，可推出

$$HS_V(t) = \frac{(1-t)P(t) + Dt^{N+1}}{(1-t)^{\dim V+1}} = \frac{(1-t)P(t) + Dt^{N+1}}{(1-t)^{\dim S/I}}.$$

根据重数的定义，我们可以看出它等于次数。 □

我们固定一些记号。注意，对于 Σ_k 的 Betti 图，$\dim K_{1,k+1} \neq 0$，且右下角为 $(r-2k-1, 2k+2)$。这意味着刻画构成 Σ_k 的 Betti 图的图表 β(e) 的序列 e，其第一个非零项从$k+2$开始，最后一项至多为 $r+1$。

设 i $= (i_0, \cdots, i_k)$，其中 $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k$。令 π_k(i; d) 为与序列相关联的纯图表。

$$\{0, 1, \cdots, r+1\} \setminus \{1, \cdots, k+1, r+1-(i_k+k), \cdots, r+1-i_0\},$$

其中 $r = d-2$。

根据 [SV09] 的定理 1.3，我们知道 Σ_k 的权重为 $k+1$ 的线性带的长度至少为 $r-2k-3$。这意味着 $k+1+r-2k-3 < r+1-(i_k+k) \Rightarrow i_k \leq 2$。

写作 $\overline{\beta}(\Sigma_k) = \beta(\Sigma_k)/\deg(\Sigma_k)$。那么图表 $\overline{\beta}(\Sigma_k)$ 的重数为 1。 [Tay22] 中证明了这一点。

引理 4.2. 存在图表 $\overline{\beta}(\Sigma_k) = \sum c_{\mathbf{i};d}\pi_k(\mathbf{i};d)$ 的分解，其中 $\sum c_{\mathbf{i};d} = 1_{\mathbf{i}|i_k\leq 2}$ $\mathbf{i}$ $|i_k\leq 2$以及 $0 \leq c_{\mathbf{i};d} \leq 1$。

现在我们可以证明我们的主定理：

定理 4.3。假设 $k \geq 1$。那么对于亏格为 2 的曲线的 Σ_k 割线簇，我们有：(1)$\dim K_{r-2k-2,2k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) = r-k-2$; (2)$\dim K_{i,k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \neq 0 \iff 1 \leq i \leq r-2k-3$.

证明。考虑 $K_{r-2k-1,2k+2}$。对于一个由 e 表征、对 $K_{r-2k-1,2k+2}$ 有贡献的纯图表，我们有 $e_{r-2k-1} = r-2k-1+2k+2 = r+1$。这意味着只有满足 $i_0 > 0$ 的那些 i 才会对 $K_{r-2k-1,2k+2}$ 有贡献。将引理 4.2 应用于 $K_{r-2k-1,2k+2}$，我们得到

$$(k+2)/\deg(\Sigma_k) = \sum_{i_0>0} c_{\mathbf{i};d} \dim K_{r-2k-1,2k+2}(\pi_k(\mathbf{i};d)). \tag{1}$$

根据定义，$\dim K_{r-2k-1,2k+2}(\pi_k(\mathbf{i};\ d)) = (r-2k-1)!\ (r+1)$
$\prod \quad |r+1-e_j|_{j\neq r-2k-1}$.
由于我们有

$$\begin{aligned}\prod_{j\neq r-2k-1} |r+1-e_j| \cdot r\cdots(r-k)\prod_{j=0}^{k}(i_j+j) &= r! \\ \prod_{j\neq r-2k-1} |r+1-e_j| &= \frac{(r-k-1)!}{\prod_{j=0}^{k}(i_j+j)},\end{aligned}$$

$= {}_{k}\prod_{j=0}(i_j+j)$ 可推出 $\dim K_{r-2k-1,2k+2}(\pi_k(\mathbf{i};d))$
$r-k-1\,.\,(r+1)\prod \quad jj=r-2k$

由 [ENP20] 的命题 5.10 可以推导出，当 $k \geq 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\deg(\Sigma_k) &= \binom{r-k}{k+1} + 2\binom{r-k-1}{k} + \binom{r-k-2}{k-1} \\ &= \frac{(r^2+r-2k-2)\prod_{j=r-2k}^{r-k-2} j}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

因此，方程（1）变为

$$k+2 = \sum_{i_0>0} \frac{(r^2+r-2k-2)\prod_{j=r-2k}^{r-k-2} j}{(k+1)!} \cdot c_{\mathbf{i};d} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{k}(i_j+j)}{(r+1)\prod_{j=r-2k}^{r-k-1} j}$$

$$(k+2)! = \sum_{i_0>0} \frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)} c_{\mathbf{i};d} \prod_{j=0}^{k} (i_j + j). \tag{2}$$

考虑 $K_{r-2k-2,\ 2k+2}$。对于由 e 表征且对 $K_{r-2k-2,\ 2k+2}$ 有贡献的纯图，我们有 $e_{r-2k-2} = r-2k-2+2k+2 = r$，这意味着 $e_{r-2k-1} = r+1 \Rightarrow i_0 = 2$。因此，只有 $\pi_k((2,\cdots,2);d)$ 对 $K_{r-2k-2,\ 2k+2}$ 有贡献，也就是说

$$\frac{r-2k-1}{\deg(\Sigma_k)} = c_{(2,\cdots,2);d} \dim K_{r-2k-2,2k+2}(\pi_k(2,\cdots,2);d).$$

根据定义，$\dim K_{r-2k-2,2k+2}(\pi_k(2,\cdots,2);\ d) = \dfrac{(r-2k-1)!}{r \prod |r-e_p|_{e_p \neq r}}$

由于我们有

$$\begin{aligned} \prod_{e_p \neq r} |r-e_p| \cdot (r-1)\cdots(r-k-1) \prod_{j=0}^{k} |j+1| &= (r-1)! \\ \prod_{e_p \neq r} |r-e_p| &= \frac{(r-k-2)!}{(k+1)!} \end{aligned}$$

我们知道 $\dim K_{r-2k-2,2k+2} = \dfrac{(k+1)!}{r^{r-k-2} \prod j_{j=r-2k}}$

因此，

$$\begin{aligned} c_{(2,\cdots,2);d} &= \frac{r-2k-1}{\deg(\Sigma_k) \dim K_{r-2k-2,2k+2}} \\ &= (r-2k-1) \cdot \frac{(k+1)!}{(r^2+r-2k-2) \prod_{j=r-2k}^{r-k-2} j} \cdot \frac{r \prod_{j=r-2k}^{r-k-2} j}{(k+1)!} \\ &= \frac{r^2-2kr-r}{r^2+r-2k-2}. \end{aligned}$$

现在将 $c_{(2,\cdots,2);d}$ 的值代入方程 (2)：

$$\begin{aligned} (k+2)! &= \sum_{i_0>0} \frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)} c_{\mathbf{i};d} \prod_{j=0}^{k} (i_j+j) \\ (k+2)! &= \frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)} \frac{r^2-2kr-r}{r^2+r-2k-2} (k+2)! + \\ &\quad \sum_{i_0=1} \frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)} c_{\mathbf{i};d} \prod_{j=0}^{k} (i_j+j) \end{aligned}$$

移项　　将含有 $(k+2)$ 的项移至等式左边，并约去因子 $r^2+r-2k-2$，我们得到

get

$$(k+2)![1-\frac{r^2-2kr-r}{(r+1)(r-k-1)}]=\sum_{i_0=1}\frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)}c_{\mathbf{i};d}\prod_{j=0}^{k}(i_j+j) \tag{3}$$

对于右端，注意到对于每个 \(i\)，当 $1\le j\le k$ 时，我们有 $i_0=1$ 和 $i_j\le 2$。因此

$$\prod_{j=0}^{k}(i_j+j)\le(1+0)(2+1)\cdots(2+k)=\frac{(k+2)!}{2}.$$

将此不等式应用于 (3)，我们得到

$$\begin{aligned}
(k+2)![1-\frac{r^2-2kr-r}{(r+1)(r-k-1)}] &\le \sum_{i_0=1}\frac{r^2+r-2k-2}{(r+1)(r-k-1)}c_{\mathbf{i};d}\frac{(k+2)!}{2}\\
(k+2)!(rk+r-k-1) &\le \sum_{i_0=1}(r^2+r-2k-2)c_{\mathbf{i};d}\frac{(k+2)!}{2}\\
&= \frac{(k+2)!}{2}(r^2+r-2k-2)\sum_{i_0=1}c_{\mathbf{i};d}\\
&\le \frac{(k+2)!}{2}(r^2+r-2k-2)(1-c_{(2,\cdots,2);d})\\
&= \frac{(k+2)!}{2}(2kr+2r-2k-2).
\end{aligned}$$

这些不等式实际上都是等式！这首先意味着，在满足 $i_0=1$ 的 i 中，只有 (1, 2, $\cdots$, 2) 的系数非零；其次，$\sum c_{\mathbf{i};d}=c_{(1,2,\cdots,2);d}$ 恰好是 $1-c_{(2,\cdots,2);d}$。换句话说，Σ_k 的 Betti 图可分解为 2 个纯图的组合，它们分别由 (2, $\cdots$, 2) 和 (1, 2, $\cdots$, 2) 表示。

与 (2, $\cdots$, 2) 相关联的次数序列是 $(0,k+2,\cdots,r-k-2,r,r+1)$，与 (1, 2, $\cdots$, 2) 相关联的次数序列是 $(0,k+2,\cdots,r-k-2,r-1,r+1)$。对 $K_{r-2k-2,2k+1}$ 有贡献的纯图必须满足 $e_{r-2k-2}=r-1$。因此，只有 (1, 2, $\cdots$, 2) 对这一项有贡献。于是我们有

$$\begin{aligned}
\dim K_{r-2k-2,2k+1} &= \deg(\Sigma_k)\cdot c_{(1,2,\cdots,2)}\cdot\frac{(r-2k-1)!}{(r-1)(\prod_{j=k+1}^{r-k-3}j)2}\\
&= \frac{(r^2+r-2k-2)\prod_{j=r-2k}^{r-k-2}j}{(k+1)!}\cdot\frac{2(k+1)(r-1)}{r^2+r-2k-2}\cdot\frac{(r-2k-1)!}{(r-1)(\prod_{j=k+1}^{r-k-3}j)2}\\
&= r-k-2.
\end{aligned}$$

此外，这两个纯图表的线性带长度均为 $r-2k-3$。证明至此完成。

□

推论 4.4. 使用与定理 4.3 相同的记号，对于 $1 \le i \le r-2k-3$，我们有

$$\begin{aligned} & \dim K_{i,k+1}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \\ = \ & \frac{(r-k-2)![r^3-(i+k+1)r^2-(i+k+2)r+2(k+1)(i+k+1)]}{(k+1)!(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k-1)(r-i-k)}. \end{aligned}$$

证明。根据纯图表的定义，我们有

$$\dim K_{i,k+1}(\pi_k((2,\cdots,2);d)) = \frac{(r-2k-1)!}{(i+k+1)(p-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-1)(r-i-k)},$$

$$\dim K_{i,k+1}(\pi_k((1,2,\cdots,2);d)) = \frac{(r-2k-1)!}{(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k)}.$$

将它们代入 $\dim K_{i,k+1}$，得到

$$\begin{aligned} & \dim K_{i,k+1} \\ = \ & \deg(\Sigma_k)[c_{(2,\cdots,2);d}\dim K_{i,k+1}(\pi_k((2,\cdots,2);d)) + c_{(1,2,\cdots,2);d}\dim K_{i,k+1}(\pi_k((1,2,\cdots,2);d))] \\ = \ & \deg(\Sigma_k)[\frac{r^2-2kr-r}{r^2+r-2k-2}\frac{(r-2k-1)!}{(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-1)(r-i-k)} \\ & +\frac{2(k+1)(r-1)}{r^2+r-2k-2}\frac{(r-2k-1)!}{(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k)}] \\ = \ & \frac{\deg(\Sigma_k)(r-2k-1)![(r^2-2kr-r)(r-i-k-2)+2(k+1)(r-1)(r-i-k-1)]}{(r^2+r-2k-2)(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k-1)(r-i-k)}. \end{aligned}$$

Recall that $\deg(\Sigma_k) = \dfrac{(r^2+r-2k-2)\prod_{j=r-2k}^{r-k-2} j}{(k+1)!}$. We have

$$\dim K_{i,k+1} = \frac{(r-k-2)![r^3-(i+k+1)r^2-(i+k+2)r+2(k+1)(i+k+1)]}{(k+1)!(i+k+1)(i-1)!(r-i-2k-3)!(r-i-k-2)(r-i-k-1)(r-i-k)}.$$

□

对于 $k=0$ 的情况，割线簇就是曲线本身。关于线性带长度的问题就是 Green-Lazarsfeld 猜想，该猜想已在 [EL15]中得到解决。不过，我想用 Boij-S¨oderberg 理论重新计算，因为它可以给出精确的数值。

定理 4.5. 设 $C \subset \mathbb{P}^r$ 是一条亏格 2 的光滑射影曲线，它通过线丛 L 的线性系嵌入，且该线丛的次数至少为 5。那么我们有：
(1)$\dim K_{r-2,1}(C,L) = r-2$; (2)$\dim K_{i,1}(C,L) \neq 0 \iff 1 \le i \le r-2$;
(3)对于 $1 \le i \le r-2$，我们有 $\dim K_{i,1}(C,L) = (r-1)!(r^2-ir-2i-2)$
$(i+1)(i-1)!(r-i)!$.

证明。与上文类似，只有包含 $i_0 > 0$ 的序列才会对 $K_{r-1,\ 2}$ 有贡献。与 $i_0 = 1$ 相关联的图表由 $\{0,2,3,\cdots,r-1,r+1\}$ 表征，而与 $i_0 = 2$ 相关联的图表则由

$\{0,2,3,\cdots,r-2,r,r+1\}$ 表征。曲线的次数为 $r+2$。因此我们有

$$\frac{\dim K_{r-1,2}}{r+2}=\frac{2}{r+2}=c_{1;d}\cdot\frac{(r-1)!}{(r+1)(r-1)!}+c_{2;d}\cdot\frac{(r-1)!}{(r-3)(r-1)\cdots 3}. \tag{4}$$

另一方面，注意到维数 $K_{r-2,2}=r-1$ 和 $\pi_0(2;\ d)$ 是唯一对 $K_{r-2,2}$ 有贡献的图表。根据定义，$\dim K_{r-2,2}(\pi_0(2;\ d))=(r-1)!\,r\cdot(r-2)!$。因此

$$c_{2;d}\cdot\frac{(r-1)!}{r\cdot(r-2)!}=\frac{r-1}{r+2},$$

这意味着 $c_{2;d}=\frac{r}{r+2}$。将 $c_{2;d}$ 的值代入 (4)，可得 $c_{1;d}=\frac{2}{r+2}$。由于 $c_{1;d}$ 和 $c_{2;d}$ 之和为 1，因此只有这两个对应的纯图对曲线的 Betti 图有贡献。由于只有 $\pi_0(1;d)$ 对 $K_{r-2,1}$ 有贡献，我们有

$$\frac{\dim K_{r-2,1}}{r+2} = c_{1;d}\dim K_{r-2,1}(\pi_0(1;d))$$

$$\begin{aligned}\frac{\dim K_{r-2,1}}{r+2} &= \frac{2}{r+2}\cdot\frac{(r-1)!}{(r-1)(r-3)!2}\\ \dim K_{r-2,1} &= r-2.\end{aligned}$$

由于 $\pi_0(1;d)$ 的线性带长度为 $r-2$，而 $\pi_0(2;\ d)$ 的线性带长度为 $r-3$，它们的和的线性带长度为 $r-2$。

对于 (3)，与 $k\geq 1$ 的计算类似，我们有

$$\dim K_{i,1}(\pi_0(1;d))=\frac{(r-1)!}{(i+1)(i-1)!(r-i-2)!(r-i)},$$

$$\dim K_{i,1}(\pi_0(2;d))=\frac{(r-1)!}{(i+1)(i-1)!(r-i-3)!(r-i-1)(r-i)}.$$

将这些代入 $\dim K_{i,\ 1}$，得到

$$\begin{aligned}\dim K_{i,1} &= \deg(C)[c_{1;d}\dim K_{i,1}(\pi_0(1;d))+c_{2;d}\dim K_{i,1}(\pi_0(2;d))]\\ &= (r+2)[\frac{2}{r+2}\frac{(r-1)!}{(i+1)(i-1)!(r-i-2)!(r-i)}\\ &\quad +\frac{r}{r+2}\frac{(r-1)!}{(i+1)(i-1)!(r-i-3)!(r-i-1)(r-i)}]\\ &= \frac{(r-1)!(r^2-ir-2i-2)}{(i+1)(i-1)!(r-i)!}.\end{aligned}$$

□

在本文的最后，我将证明 $N_{k+2,\ r-2k-3}$ 的一个补充性结果。我们可以观察到 $K_{i,\ 2k+2}(\Sigma_k,\ \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))\neq 0$ 当且仅当 $r-2k-2\leq i\leq r-2k-1$。对于亏格为 2 的曲线，从对其割线簇的 Betti 图有贡献的纯图的形状中可以轻易看出这一点，

但我将为一般亏格的曲线证明一个更一般的结果。

命题 4.6。设 C 是一条亏格为 $g \geq 1$ 的曲线。设 L 是一个非常丰沛线丛，且 $\deg(L) \geq 2g+2k+1$，因此 $H^0(L-K) \neq 0$。假设嵌入 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ 由 L 的完全线性系定义。设 Σ_k 为 C 的第 k 阶割线簇。那么

$$K_{i,2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \neq 0 \iff r-g-2k \leq i \leq r-1-2k.$$

证明。从左到右的蕴含已在 [ENP20] 的定理 5.2 (4) 中证明。

现在假设 $r-g-2k \leq i \leq r-1-2k$。我们要证明 $K_{i,\ 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \neq 0$。我们主要采用 [EL12] 中命题 5.1 的证明思路。注意到我们有对偶性 $K_{i,\ 2k+2}(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \cong K_{r-(2k+1)-i,\ 0}(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k};\ \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))^\vee$。本质上，我们需要证明该态射

$$\bigwedge^i H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}) \to \bigwedge^{i-1} H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1)) \otimes H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k}(1))$$

对 $0 \leq i \leq g-1$ 而言不是单射。我们关注 $i \geq 1$ 的情形。取 $f_0, \cdots, f_i$，它们是 $H^0(C, K_C)$ 和 $s \in H^0(C, L-K)$ 的线性无关截面。于是 $\forall F \in S^k H^0(C, K_C)$ 非零，该元素

$$\sum_{j=0}^{i} f_0 s \wedge \cdots \wedge \widehat{f_j s} \wedge \cdots \wedge f_i s \otimes F f_j$$

被映射为 0。这里我们将 $H^0(\Sigma_k, \omega_{\Sigma_k})$ 与 $S^{k+1}H^0(C, K_C)$ 等同，并将 $H^0(\Sigma_k, \mathcal{O}_{\Sigma_k}(1))$ 与 $H^0(C, L)$ 等同。 □

参考文献

[AN10] M. Aprodu 和 J. Nagel。《Koszul 上同调与代数几何》，大学讲座丛书第 52 卷。美国数学会，2010 年。[Dan07] G. Danila。《曲面 Hilbert 点概形上典范丛张量幂的截面》。伦敦数学会通报，39(2):311–316，2007 年。[Eis05] D. Eisenbud。《合志几何》，数学研究生教材第 229 卷。Springer，纽约，2005 年。[EL12] L. Ein 和 R. Lazarsfeld。《代数簇的渐近合绳》。数学发明，190:603–646，2012 年。[EL15] L. Ein 和 R. Lazarsfeld。《大次数代数曲线合志上的冈纳利猜想》。高等科学研究所数学出版物，122:301–313，2015 年。[ENP20] L. Ein、W. Niu 和 J. Park。《光滑射影曲线割线簇的奇点与合志》。数学发明，222:615–665，2020 年。[ES09] D. Eisenbud 和 F.-O. Schreyer。《分次模的 Betti 数与向量丛的上同调》。美国数学会杂志，22(3):859–888，2009 年 7 月。

[HK84] J. Herzog 和 M. K¨uhl。《有限纯分解与线性分解的 Betti 数》。代数通讯，12:1627–1646，1984 年。[HM85] C. Huneke 和 M. Miller。《关于具有纯自由分解的 Cohen–Macaulay 代数重数的一则注记》。加拿大数学杂志，37:1149–1162，1985 年。[Lan84] H. Lange。《曲线的高阶割线簇与 Nagata 关于 ruled surfaces 的定理》。数学手稿，47:263–269，1984 年。[SV09] J. Sidman 和 P. Vermeire。《曲线割线簇的合志》。代数与数论，3(4):445–465，2009 年。[Tay22] G. Taylor。《曲线割线簇的渐近合绳》。纯粹与应用代数杂志，6，2022 年 12 月。

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Germany*E-mail address*, lili@hu-berlin.de