arXiv:2305.02488v1 [physics.soc-ph] 4 May 2023

亮点

接种条件下意见与疫情耦合动力学中的最优重连

Andr´e L. Oestereich、Marcelo A. Pires、Nuno Crokidakis、Daniel O. Cajueiro

- 最优重连的存在性
- 双稳态与亚稳态
- 非单调效应

疫苗接种条件下意见与疫情耦合动力学中的最优重连

Andr´e L. Oestereich[a,*]，Marcelo A. Pires[b]，Nuno Crokidakis[c]，Daniel O. Cajueiro[a,d,e]

[a]巴西利亚大学经济系，达西·里贝罗大学城 - *FACE*，巴西利亚，*DF 70910-900*。´阿拉戈阿斯联邦大学，*57480-000*，阿拉戈阿斯州德尔米罗·古维亚，巴西´弗卢米嫩塞联邦大学物理研究所，尼泰罗伊*/RJ*，巴西[b]国家复杂系统科学与技术研究所（*INCT-SC*），巴西。[c]巴西利亚大学（*UnB*）金融与组织机器学习实验室（*LAMFO*），*70910-900*，巴西利亚，巴西。

摘要

本文研究了一个动态网络中的疫苗接种流行病模型与意见动力学的耦合。意见不同的个体会彼此断开连接，并与对疫苗接种持相似意见的个体建立连接，从而使网络结构不断演变。我们考虑一种带有额外接种疫苗状态的类SIS模型。个体可以持有连续意见；每当某个个体与一位邻居断开连接时，便会与一位新邻居建立连接。我们观察到网络同质性的出现，并且在某些情况下，网络会完全碎片化。蒙特卡洛模拟还显示了伴有亚稳态的一阶相变。重连概率的增加会产生双重效应，即：（a）短期内可能加剧流行病峰值；（b）长期来看，则可能降低感染率。流行病峰值的这种暂时性上升，归因于网络碎裂成更小、彼此断开的子网络。因此，我们的结果表明，重连概率应尽可能高，但须低于网络开始碎裂的临界值，这样才是最优重连。

关键词：社会系统动力学、疫情传播、集体现象、计算机模拟、临界现象

*通讯作者：andrelo@id.uff.br

预印本已提交至 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* *2023*年*5*月*5*日

1. 引言

统计物理学是一门科学领域，通常研究由构成单元之间的微观相互作用所产生的宏观现象。多年来，研究人员已表明，统计物理学框架为描述超越传统物理学范畴的现象提供了宝贵的工具箱 [1, 2]。

在集体现象的框架下，一个复杂的问题随之浮现：疫苗接种、流行病与意见动力学之间错综复杂的相互作用，可能导致哪些宏观情景？这一主题意义重大，因为疫苗接种运动的成效不仅取决于疫苗可及性、疫苗效力和流行病学变量等因素，也取决于公众对疫苗接种的意见 [3]。将意见动力学与流行病模型相结合，有助于捕捉并理解传统疫情传播模型（如 SIS、SIR 和易感者-感染者-康复者-易感者模型）无法呈现的新现象[4, 5, 6, 7, 8, 9]。

我们的研究旨在超越以往的研究工作 [5, 6, 7] ，纳入一个额外的动力学过程，即演化网络。具体而言，所提出的模型赋予每个人根据其互动对象的意见调整自身邻域的能力。

通过蒙特卡洛模拟，我们研究了不同情景，这些情景取决于流行病参数、重连特征和意见动力学属性。研究结果表明，存在伴随亚稳态的一级相变。除了流行病模型和意见动力学模型所描述的常见过程外，我们还观察到，重连过程会促进网络同质性，进而影响流行病的短期和长期动力学。

2. 文献综述

我们采用基于主体的计算模型，研究一种多重耦合动力学，其中涵盖意见动力学、流行病传播、疫苗接种和重连动力学之间的相互作用。基于主体的计算模型是研究社会中复杂问题的有效工具 [10, 11, 12]。通过模拟系统的行为，这些模型能够全面呈现不同条件和参数取值下可能出现的结果。

意见动力学是一个科学领域，显著促进了人们对意见形成、演变和传播过程的理解 [13, 14,15, 16, 17, 18]。最初基于典型的物理系统，观点动力学模型

逐渐纳入个体的角色和行为，例如固执、独立和唱反调行为。这些模型还考虑了外部影响，例如假新闻、信息操纵、算法过滤等 [19]。有关意见动力学建模的最新综述，请参见 [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]。

流行病和疫苗接种动力学是重要的研究领域，旨在理解疫情过程并协助控制传染病 [2]。SIS（易感者-感染者-易感者）、SIR（易感者-感染者-移除者）及其他分舱模型，为描述疫情传播提供了典型框架。为研究疫苗接种，可在这些模型中添加一个额外的舱室 V，以表示通过接种疫苗获得的免疫力，或修改舱室 R，使其包含疫苗诱导的免疫力。

重连动力学是指网络中的个体随时间改变其连接的过程。这类变化可能由个体行为、外部事件或进化压力等因素驱动 [27]。将重连引入流行病动力学后，会出现新的现象。例如，在开创性研究 [28]，中，研究人员考察了动态网络中的易感者-感染者-易感者模型，其中易感个体可以通过重连来改变其邻域，从而避免与感染者接触。他们展示了动力学与结构相互作用所产生的丰富现象。在本研究的语境中，重连动力学在塑造网络拓扑结构方面发挥作用，而网络拓扑结构会影响意见形成和疫情传播的动力学。

3. 模型

该模型是近期开发的一种意见与流行病模型耦合模型的变体 [6]。该模型的主要区别在于，现在意见不一致的个体可以断开连接。我们考虑一个埃尔德什-雷尼随机图，其中 N 个节点各由一个个体占据，并有 $M = Nk$ 条连接。该社会中的每个个体 i 都持有一个意见 o_i，即取值范围为 $[-1, +1]$ 的实数。正值（负值）表示对疫苗接种运动 [6] 持赞成（反对）态度。意见趋近于 $+1$ 和 -1 表示个体具有极端倾向。最后，意见接近 0 表示个体持中立态度或尚未作出决定。我们将考察与疫苗接种相关的意见动力学耦合的流行病动力学，并将个体分为以下几类：

- 意见状态：支持疫苗（意见为 $o_i > 0$）或反对疫苗（意见为 $o_i < 0$）的个体；
- 疫情舱室：易感者（S）、感染者（I）或接种疫苗者（V）；

介绍模型的基本构成后，模型动力学的演化算法如下：

1. 初始状态：将比例为 D 的意见设为 $+1$，其余设为 -1；将 10% 的个体设为 INFECTED，其余设为 SUSCEPTIBLE。2. 意见更新：(a) 随机选择一个个体 i 及其一个邻居 j；(b) 如果 $|o_i - o_j| > \epsilon$，并且在可能的情况下以概率 r 移除 i 与 j 之间的连接，并将 i 与满足 $|o_i - o_k| < \epsilon$ 的有效随机个体 k 建立连接。如果无法建立新连接，则保留之前的连接，以维持网络的平均连通性；(c) 否则，将个体的意见更新为 $o_i = o_i + \eta o_j + wI_i$，其中 I_i 是 i 的邻居的感染率（即，I_i 是个体 i 的感染邻居所占的比例），w 是风险感知参数，η 是取值范围为 $[0, 1]$ 的随机变量。因此，如果该个体未进行重新连边，它将与所选邻居进行交互。3. 流行病更新：(a) 随机选择个体 i；(b) 如果个体 i 处于 SUSCEPTIBLE 状态：i. 以概率 $(o_i + 1)/2$ 变为 VACCINATED；ii. 否则，个体 i 以概率 λI_i 变为 INFECTED。由于 I_i 是局部感染率，感染概率取决于与个体 i 相连的个体；(c) 如果个体 i 处于 INFECTED 状态，则以概率 α 变为 SUSCEPTIBLE；(d) 如果个体 i 处于 VACCINATED 状态，则以概率 ϕ 变为 SUSCEPTIBLE。

4. 重复前两个步骤 t 次，其中 t 是蒙特卡洛步数。

模型参数及其含义和默认值汇总见表 1。下一节呈现的结果取自多次蒙特卡洛模拟的平均值。

4. 结果

在图1中，我们可以看到由意见动力学形成的、具有 $N = 1000$ 的图的稳态示例。值得注意的是，这种动力学倾向于将不同意见分隔成各个社群，而这些社群可能与其他节点断开连接

变量	默认值	说明
N	10000	智能体数量
k	50	每个智能体的平均连接数
D		初始意见的比例 $+1$
r		重连概率
ϵ	1	待重连意见之间的距离
w		风险感知强度
λ		感染率
α	0.1	康复率
ϕ	0.01	疫苗效力衰减率

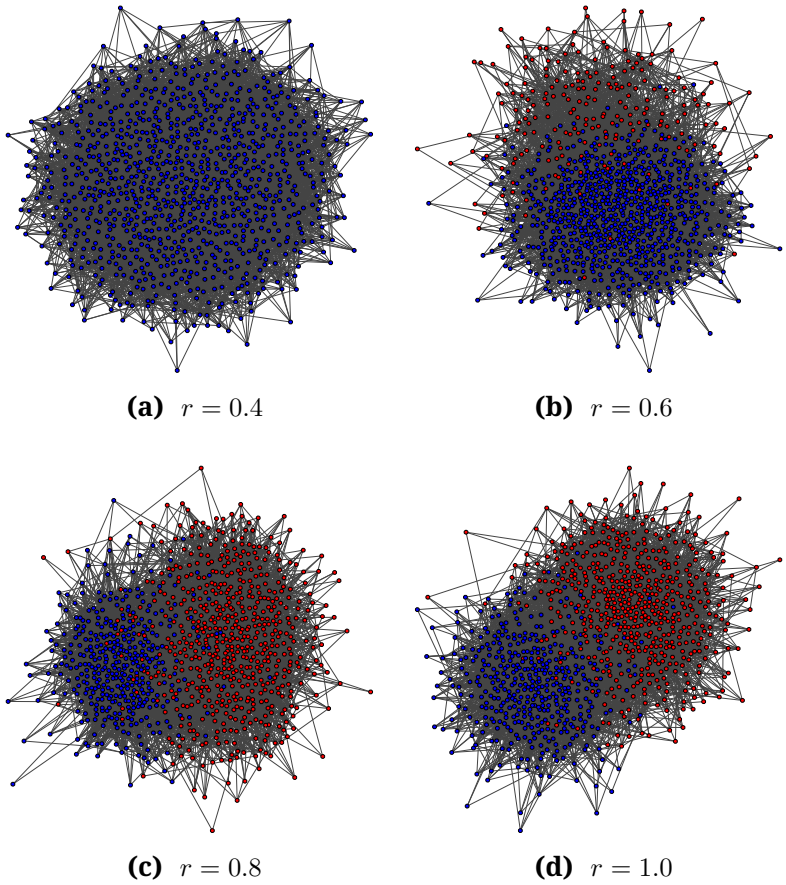
表 1. 模型参数及其含义。除非明确说明，否则参数均设为默认值。

。随着重连参数（r）增大，我们还可以看到网络的同质性随之增强。在更极端的情况下，这可能导致网络碎片化为若干小型网络，其中所有节点都持有相同的意见。随着网络同质性增强，达成共识会变得更加困难，因此 r 的增加往往会使平均意见更接近零。这一点也得到了后续章节所呈现结果的印证。

在图 2 中可以观察到亚稳态的证据。图中展示了两个具有相同配置的样本的时间序列，其中一个最终进入地方病状态，而另一个最终达到无病状态。在该图中，我们还可以看到，对于这一参数配置，决定动力学演化方向的关键因素是意见，因为意见的分化先于平均感染率的分化。这是因为风险感知（w）的取值相对较低，因此感染对意见的反馈并不太强烈。

时间序列中通常会重复出现相同的一般模式。最初的几个时间步中没有任何已接种疫苗的个体，因此 I 增加。对支持接种疫苗的个体进行初始接种后，I 会下降，除非支持接种疫苗的个体初始比例过低。在最后阶段，结果取决于个体的稳态平均意见。

在接下来的小节中，我们将考察 D 的不同取值，即正面（支持疫苗）意见的初始比例。与 [6], 中意见



(a) $r = 0.4$ **(b)** $r = 0.6$

(c) $r = 0.8$ **(d)** $r = 1.0$

图1。 $N = 1000$, $k = 5$, w =0。4, $\lambda = 0.4$ 和 $D = 0.4$ 的稳态意见分布图，其中红点表示反疫苗个体，蓝点表示支持疫苗的个体。

动力学在 $D > 0.5$ 时的情况类似，该情况下总体意见为正面（支持疫苗），因此会在 $o_i = 1 \forall i$ 中达成共识， $\eta \geq 0$，且 $wI_i \geq 0$。这意味着每个个体都必然会接种疫苗，进而阻止疫情传播。因此，我们将考察更有趣的情形，即初始多数反对疫苗接种，也就是 $D < 0.5$，以便分离并更好地理解其他变量的影响。

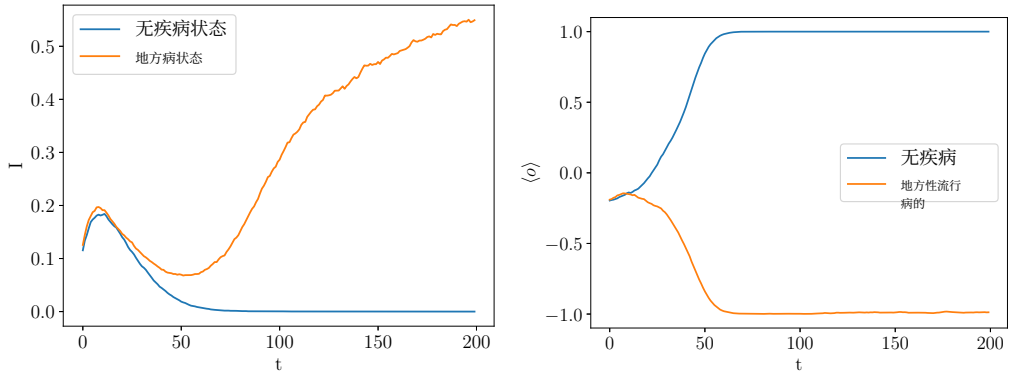


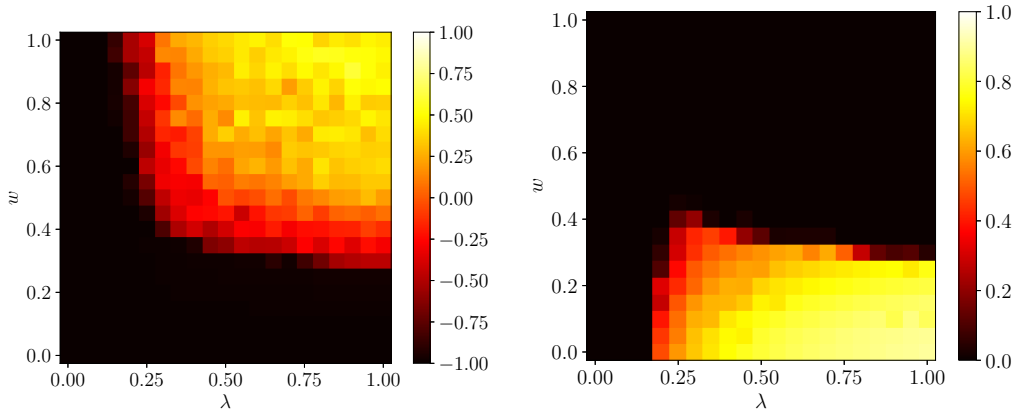
图 2. 两个样本的时间序列：一个样本中，由于对疫苗接种持积极意见，疫苗接种阻止了疾病传播；另一个样本中，由于对疫苗接种持消极意见，疾病持续传播。时间以蒙特卡罗步数计量，两个样本均有$w = 0.3$, $D = 0.4$, $r = 0.5$ 和 $\lambda = 0.5$。

4.1. $D = 0.0$

D 是设定个体之间初始分歧程度的参数。因此，对于 $D = 0.0$，我们有一致反疫苗极端主义，$o_i = -1\ \forall i$。在这种情况下，重连参数并不特别重要，因为个体已经达成共识，无论重连参数取何值，都不会发生重连。这种情况下的结果与 [6],中呈现的结果非常相似，可见于图3。

无论重连概率如何，个体的意见之间都必须存在最小距离 ϵ 。这意味着，当意见过于紧密地聚集在一起时，无法进行重连。因此，在这种情况下，我们最终得到的是前一个模型 [6], 的网络化版本，结果也与之相似。

这种意见分组在一定程度上是意料之中的，因为 LCCC 模型在稳态下的意见方差较低，[29], 且外部场在图的各个区域中作用得相对均匀。由于重连模型取决于意见之间的一定距离，这种距离必须在初始状态中形成，因此结果对初始状态有很强的依赖性。



(a) 平均意见　　**(b)** 感染率

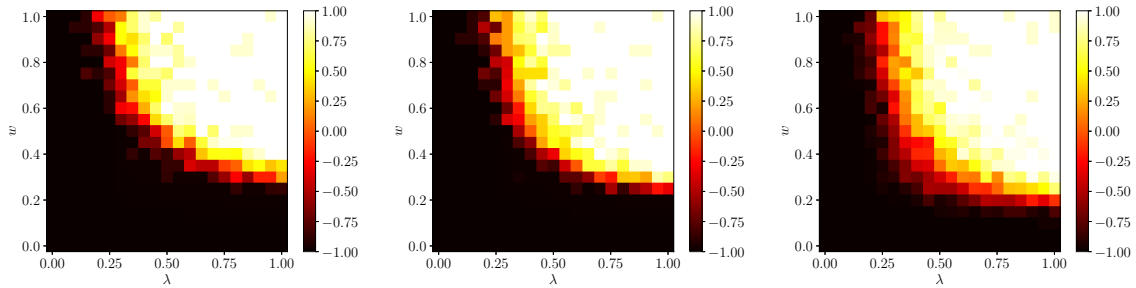
图3. 在 $r = 1$ 和$D = 0$条件下，平均意见和感染率随感染率和风险感知的变化。在这种设定中，所有个体最初的意见都相同，因此重连不会产生明显影响。

4.2. $D = 0.2$

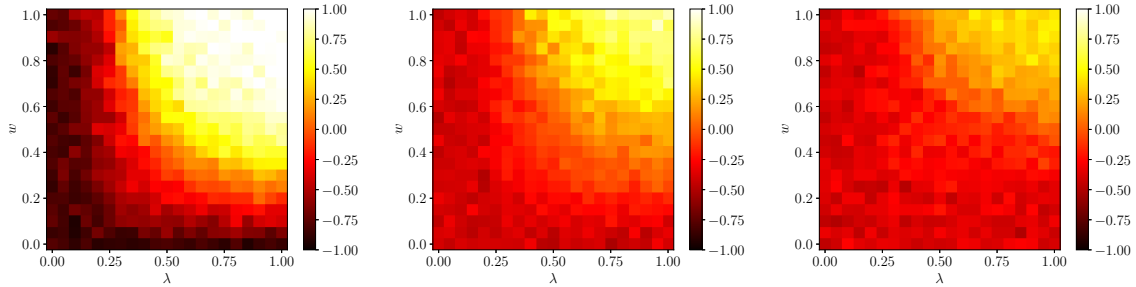
有了 $D = 0.2$，我们现在有了不同的初始观点，重连也随之可能发生。由于初始时仍存在明显的多数，重连往往主要在 r 值较高时出现。重连开始使意见不同的个体之间产生分化。这反过来使系统中的两种意见都得以保留，因此平均意见也更加温和。

图4展示了稳态下的平均意见。我们从图中可以看到，随着 r 增加，中等意见区域开始扩大。首先是在相变附近，随后当 $r \approx 1$ 时，该区域便扩展至整个区域。这正体现了这一策略的双刃剑性质：一方面，重连降低了形成反疫苗共识的可能性；另一方面，也降低了形成支持疫苗共识的可能性。

从长远来看，这种影响似乎总体上是积极的，如图5所示，该图展示了稳态下的平均感染率。从长远来看，适度的疫苗覆盖率似乎足以阻止疫情传播，因为随着 r 增加，地方性流行区域会缩小。当重连程度更高时，这种影响会更加显著，正如我们将在下一节中看到的那样。

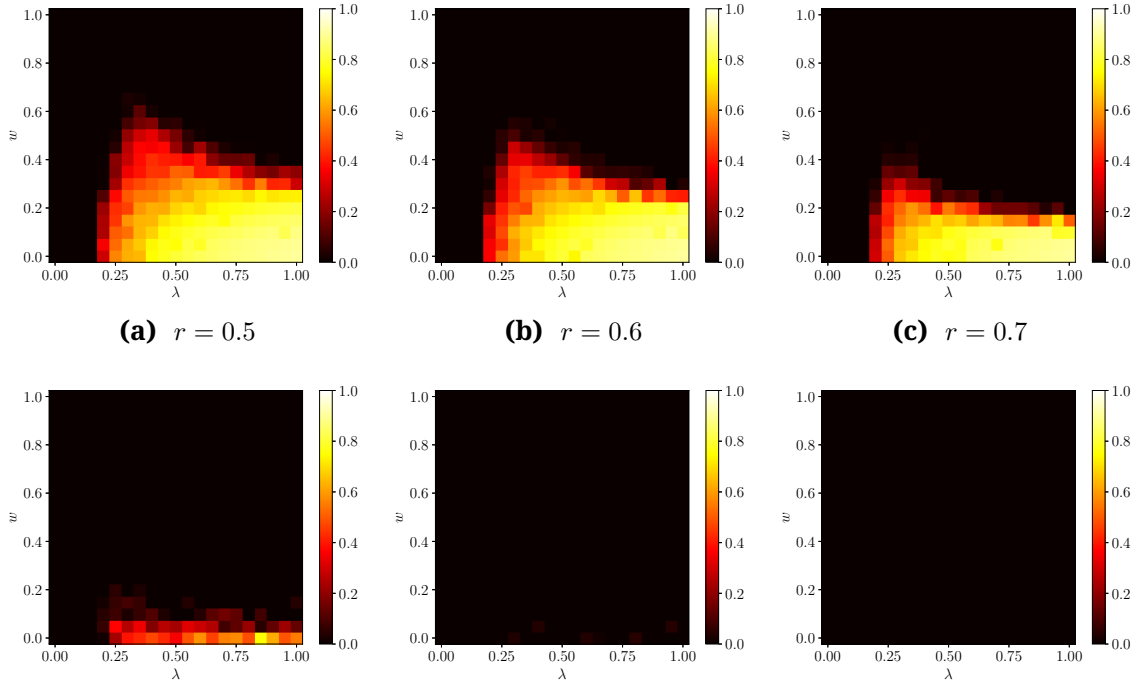


(a) $r = 0.5$ **(b)** $r = 0.6$ **(c)** $r = 0.7$



(d) $r = 0.8$ **(e)** $r = 0.9$ **(f)** $r = 1.0$

图4。 $D = 0.2$ 和不同重连概率下，平均意见与感染率及风险感知的关系。当初始意见存在一定差异时，重连概率开始对稳态产生显著影响；也就是说，在较高的 r 值下，形成支持或反对疫苗接种的共识的可能性会降低。



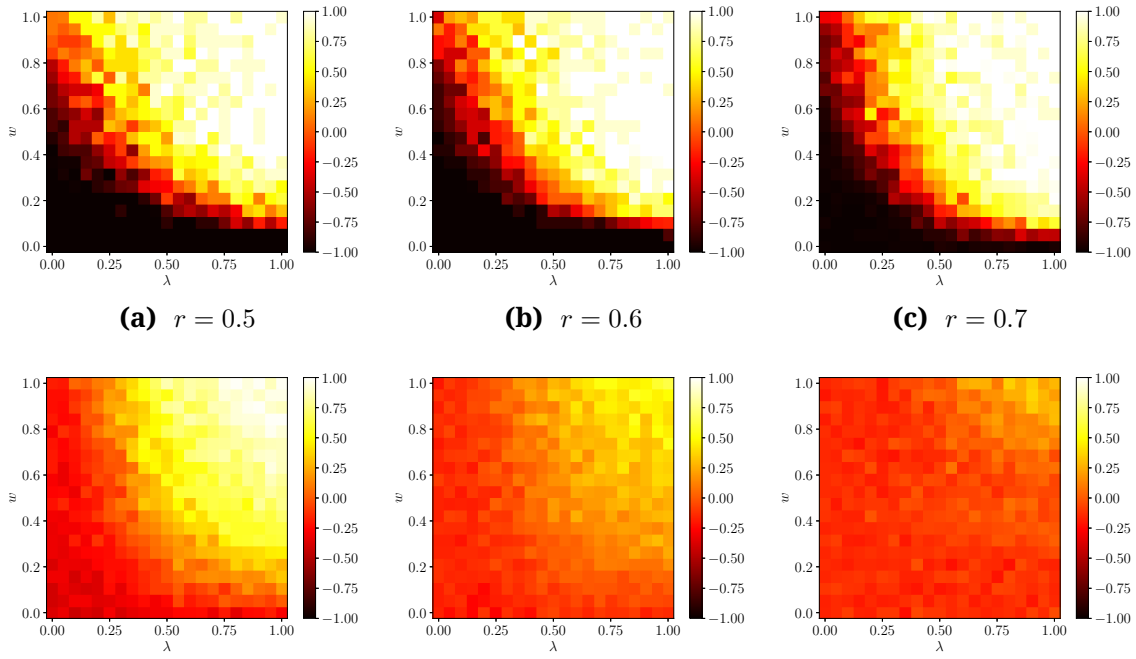
(a) $r = 0.5$ **(b)** $r = 0.6$ **(c)** $r = 0.7$

(d) $r = 0.8$ **(e)** $r = 0.9$ **(f)** $r = 1.0$

图5. $D = 0.2$ 和不同重连概率下的感染率与感染率、风险感知之间的关系。

4.3. $D = 0.4$

对于 $D = 0.4$，个体起初存在更强烈的意见分歧。这促进了重连过程，使重连更有可能发生。我们现在将观察到，上一节中提到的影响得到了强化。



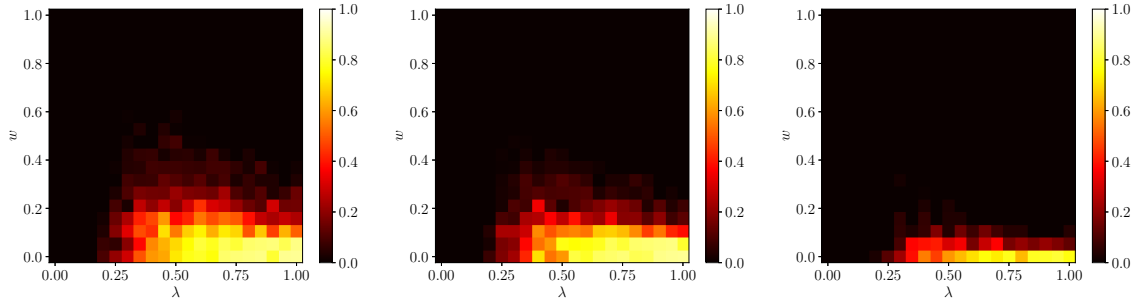
(a) $r = 0.5$ **(b)** $r = 0.6$ **(c)** $r = 0.7$

(d) $r = 0.8$ **(e)** $r = 0.9$ **(f)** $r = 1.0$

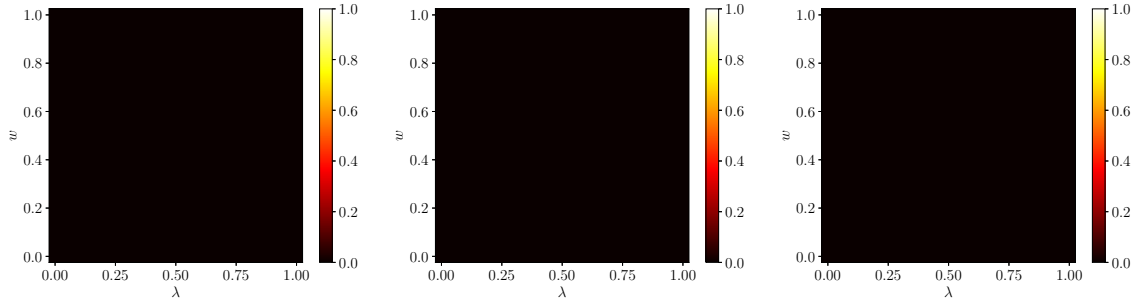
图6. 不同参数配置下的平均意见

在图6中，我们看到，对于 $r \approx 0.6$，持支持疫苗意见的区域有所增加。值得注意的是，随着重连概率的增加，即使疫情传播如图7所示逐渐消失，反对疫苗接种的意见仍得以保留。一方面，重连保留了反对疫苗接种个体聚集形成的区域；另一方面，它抑制了疫情传播。这表明，重连概率越高，疫苗覆盖率越低。

在疫苗覆盖率较低时，较高的重连值往往无法在短期内控制疫情传播。如图8所示，我们考察了感染峰值，即同时感染的个体数量的最大值。从图中可以看出，该值持续下降至 $r \approx 0.7$，随后开始再次上升。



(a) $r = 0.5$ **(b)** $r = 0.6$ **(c)** $r = 0.7$



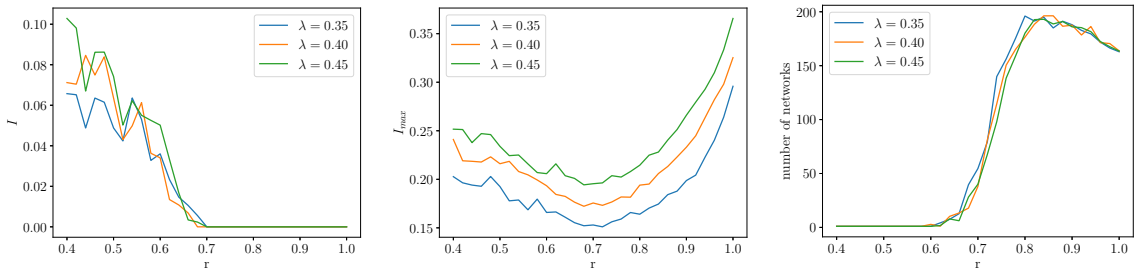
(d) $r = 0.8$ **(e)** $r = 0.9$ **(f)** $r = 1.0$

图7。 不同参数配置下的感染率

对于公共政策而言，最值得考虑的因素之一是同时感染的个体数量。这是因为医疗卫生系统只能为一定数量的患者提供护理，而这个数量通常只占人口的一小部分。因此，至关重要的是，要使人口的感染比例低于医疗卫生系统的相对容量。

当网络开始瓦解时，会出现最优重连。当反疫苗个体彼此隔离时，他们尤其容易受到疾病传播的影响。未接种疫苗者之间高度紧密的连接会导致疾病传播速度加快，从而使流行病峰值升高。为了防止流行病峰值上升，完全分离支持疫苗接种群体与反疫苗群体并不可取。

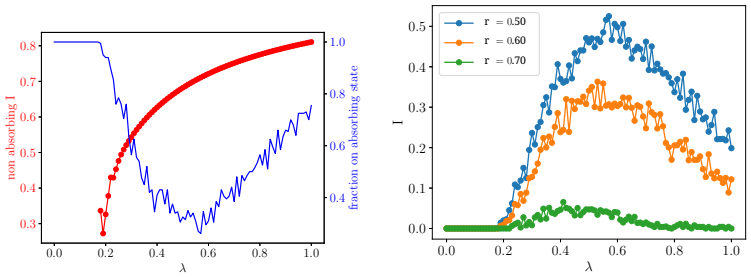
图 9 中还可以观察到另一种非单调效应：对于某些参数，感染率提高时，稳态下的感染者比例只会增加到某个程度。然而，感染率进一步提高反而会使其降低。这种效应此前已有研究



(a) 稳态感染率。 **(b)** 峰值感染率。 **(c)** 平均断开连接的数量-连接网络。

图 8. 不同 λ、$w = 0.4$ 和 $D = 0.4$ 取值下，稳态感染率的值（a）、随时间变化的最大感染率（b）以及稳态下不连通网络的数量（c）随重连程度的变化关系。这里可以看到，流行病峰值的值在 $r \approx 0.7$ 处达到最小值，随后开始增加。

在一个类似的模型 [6] 中观察到，并且与疾病传播速度加快时风险感知增强有关。



(a) $r = 0.50$ (b)

图 9. (a) 中红色表示人口的感染比例，蓝色表示最终处于吸收态的样本比例；(b) 中为样本的平均感染率，二者均随感染率变化。两者均采用 $D = 0.4$ 和 $w = 0.2$，而 (a) 中采用 $r = 0.5$。这里我们观察到平均值呈现出明显的非单调行为。

5. 总结

总之，我们对非静态网络中意见动力学、疫苗接种与疫情传播之间相互作用的研究，为公共卫生政策提供了重要的理论和实践启示。

从非平衡动力学的角度来看，我们的蒙特卡洛模拟揭示了伴随亚稳态的一级相变，这表明存在多个稳态。这一结果意义重大，因为它表明，网络参数的微小变化可能对疫情动力学产生显著影响。这一发现提出了一种亚稳态涌现的新机制，与此前的相关文献相符 [17, 30, 31]。

我们的结果表明，网络结构会演化并趋向于同质性，最终在某些情况下导致网络完全碎片化。这一发现凸显了理解与传染病传播相关的多重耦合动力学的重要性。

此外，我们的研究揭示了一种有趣的现象：由于网络分裂成规模较小的互不连通网络，重连概率增加可能会使短期流行病峰值升高。然而，从长期来看，重连概率增加会导致感染率下降。这些发现表明，通过疫苗接种计划控制流行病的公共卫生宣传活动，应考虑动态网络中的最佳重连水平。此外，这一发现也增添了疫苗接种动力学中可能出现的反直觉现象 [30, 32, 33, 34, 35, 36, 37]。

总体而言，我们的研究深入揭示了在具有疫苗接种和意见动力学的动态网络中，传染病传播的复杂动力学。本研究的理论和实践意义有助于制定有效的公共卫生政策，以控制现实场景中的流行病。

参考文献

[1] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, 《社会动力学的统计物理学》, 《现代物理学评论》81（2009）591–646。doi:10.1103/RevModPhys.81.591。[2] Z. Wang, C. T. Bauch, S. Bhattacharyya, A. d'Onofrio, P. Manfredi, M. Perc, N. Perra, M. Salath´e, D. Zhao, 《疫苗接种的统计物理学》, 《物理学报告》664（2016）1–113。doi:10.1016/j.physrep.2016.10.006。[3] E. Dub´e, D. Gagnon, N. E. MacDonald 等, 《旨在应对疫苗犹豫的策略：已发表综述的回顾》, 《疫苗》33（34）（2015）4191–4203。

[4] Z. Wang, M. A. Andrews, Z.-X. Wu, L. Wang, C. T. Bauch，复杂网络上的疾病–行为耦合动力学：综述，《生命物理评论》15（2015）1–29。doi:10.1016/j.plrev.2015.07.006。[5] M. A. Pires, N. Crokidakis，疫苗接种下的疫情传播动力学：社会压力与参与度的影响，《物理学A辑：统计力学及其应用》467（2017）167–179。[6] M. A. Pires, A. L. Oestereich, N. Crokidakis，疫苗接种下意见与疫情耦合动力学中的突变，《统计力学杂志：理论与实验》2018（5）（2018）053407。doi:10.1088/1742-5468/aabfc6。[7] M. A. Pires, A. L. Oestereich, N. Crokidakis, S. M. D. Queir´os，社交网络时代的反疫苗运动与疫情传播：非单调效应、双稳态与网络隔离，《物理评论E》104（3）（2021年9月）。doi:10.1103/physreve.104.034302。[8] A. Teslya, H. Nunner, V. Buskens, M. E. Kretzschmar，健康观点之间的竞争对流行病动力学的影响，《美国国家科学院院刊：枢纽》1（5），pgac260（2022年）。[9] C. Leung, M. E. Gibbs, P. E. Par´e，疫苗犹豫对疫情传播的影响，载于：2022年美国控制会议（ACC），电气电子工程师学会，2022年，第3656–3661页。[10] F. Squazzoni，基于主体的计算社会学，约翰·威立父子出版公司，2012年。[11] F. Bianchi, F. Squazzoni，社会学中的基于主体的模型，《Wiley跨学科评论：计算统计学》7（4）（2015）284–306。[12] R. Conte, N. Gilbert, G. Bonelli, C. Cioffi-Revilla, G. Deffuant, J. Kertesz, V. Loreto, S. Moat, J. P. Nadal, A. Sanchez, A. Nowak, A. Flache, M. S. Miguel, D. Helbing，计算社会科学宣言，《欧洲物理学杂志特刊》214（1）（2012年）325–346。doi:10.1140/epjst/e2012-01697-8。[13] S. Galam，社会物理学，施普林格美国公司，2012年。doi:10.1007/978-1-4614-2032-3。

[14]S. Galam, 《社会物理学：Galam 模型综述》, 《现代物理学国际期刊C》19 (03) (2008) 409–440。doi:10.1142/ S0129183108012297。[15] P. Sen、B. K. Chakrabarti, 《社会物理学：导论》, 牛津大学出版社, 2014年。[16] A. L. Oestereich、M. A. Pires、N. Crokidakis, 《模块化网络中的三态意见动力学》, 《物理评论E》100 (3) (2019) 032312。doi:10.1103/ physreve.100.032312。[17]A. Oestereich、M. Pires、S. Duarte Queir´os、N. Crokidakis, 《复杂网络中连续类动力学交换意见动力学的滞后现象与无序诱导有序》, 《混沌、孤子与分形》137 (2020) 109893。[18] M. A. Pires、N. Crokidakis, 《具有激活动力学的动力学交换意见模型中的双重转变》, 《英国皇家学会哲学汇刊A辑》380 (2022) 1–10。[19] P. Sobkowicz, 《如今，意见模型研究者将走向何方？》, 《物理学前沿》8 (2020) 587009。[20] Q. Zha、G. Kou、H. Zhang、H. Liang、X. Chen、C.-C. Li、Y. Dong, 《金融与商业中的意见动力学：文献综述与研究机遇》, 《金融创新》6 (2020) 1–22。[21] H. Xia、H. Wang、Z. Xuan, 《意见动力学：多学科综述及未来研究展望》, 《知识与系统科学国际期刊》（IJKSS）2 (4) (2011) 72–91。[22] B. D. Anderson、M. Ye, 《影响力网络上意见动力学建模与分析的最新进展》, 《自动化与计算国际期刊》16 (2) (2019) 129–149。[23] Y. Dong、M. Zhan、G. Kou、Z. Ding、H. Liang, 《意见动力学中的融合过程综述》, 《信息融合》43 (2018) 57–65。[24] A. Sˆırbu、V. Loreto、V. D. Servedio、F. Tria, 《意见动力学：模型、扩展与外部效应》, 《参与式感知、意见与集体意识》（2017）363–401。[25] A. F. Peralta、J. Kert´esz、G. I˜niguez, 《社交网络中的意见动力学：从模型到数据》（2022）。arXiv:2201.01322。

[26] S. Biswas、A. Chatterjee、P. Sen、S. Mukherjee、B. K. Chakrabarti，通过动力学交换实现的社会动力学：bchs模型（2023年）。arXiv:2304. 03575。[27] T. Gross、B. Blasius，自适应协同演化网络：综述，《英国皇家学会界面》5（20）（2008年）259–271。[28]T. Gross、C. J. D. D'Lima、B. Blasius，自适应网络上的流行病动力学，《物理评论快报》96（20）（2006年5月）。doi:10.1103/ physrevlett.96.208701。[29] M. Lallouache、A. S. Chakrabarti、A. Chakraborti、B. K. Chakrabarti，动力学交换模型中的意见形成：自发对称性破缺转变，《物理评论E》82（2010年）056112。doi:10.1103/PhysRevE.82. 056112。[30] X. Chen、F. Fu，不完美疫苗与滞后现象，《英国皇家学会学报B辑》286（1894）（2019年）20182406。[31] J. Elster，关于社会科学中滞后现象的注记，《综合》33（1）（1976年）371–391。[32] H. Zhang、F. Fu、W. Zhang、B. Wang，考虑自愿接种疫苗时，理性行为是一把"双刃剑"，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 391（20）（2012年）4807–4815。[33] Z.-X. Wu、H.-F. Zhang，同伴压力是疫苗接种动力学中的一把双刃剑，《欧洲物理快报》104（1）（2013年）10002。[34] H.-F. Zhang、Z. Yang、Z.-X. Wu、B.-H. Wang、T. Zhou，流行病博弈中的布雷斯悖论：更好的条件带来更低的收益，《科学报告》3（1）（2013年）1–8。[35] H.-F. Zhang、Z.-X. Wu、M. Tang、Y.-C. Lai，行为响应和疫苗接种政策对疫情传播的影响——基于演化博弈动力学的方法，《科学报告》4（1）（2014年）1–10。[36] G. Ichinose、T. Kurisaku，社会影响对网络中演化疫苗接种博弈的正面和负面作用，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 468（2017年）84–90。

[37] B. Steinegger、A.Cardillo、P. DeLos Rios、J. G´omez-Garde˜nes、A.Arenas，成本与收益之间的相互作用引发了非平凡的疫苗接种行为，《物理评论E》97 (3) (2018) 032308。