单叶函数与阿贝尔全纯微分的格伦斯基范数

Samuel L. Krushkal

Abstract. 我们证明，圆盘上任意规范化单叶函数的格伦斯基范数，完全由阿贝尔全纯微分的平方决定（与此相反，特希米勒范数则与所有可积全纯二次微分有关）。

这一结果有许多重要而有趣的应用。特别是，它给出了所有拟共形曲线的弗雷德霍姆特征值的显式表示。

arXiv:2305.02495v1 [math.CV] 4 May 2023

2020年数学主题分类：主要分类：30C55、30C62、30F45；次要分类：30F60、32F45、32G15、46G20

关键词：单叶函数、格伦斯基范数、拟共形延拓、万有 Teichm¨uller 空间、Teichm¨uller 范数、双曲度量、广义高斯曲率、Minda最大值原理

1. 预备知识

1.1. 格伦斯基范数及其主导函数。1939年的经典格伦斯基定理给出了黎曼球面上有限连通域中全纯函数单叶性的充要条件，其表述涉及一组无限的系数不等式。特别地，对于典范圆盘： $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}: \quad |z| > 1\}$该定理表明，在 $z = \infty$ 的一个邻域内的全纯函数 $f(z) = z+\text{const} \ +O(z^{-1})$，当且仅当该函数的泰勒系数 α_{mn} 满足.....时，才能延拓为 $\mathbb{D}^*$ 上的单叶全纯函数。

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} z^{-m} \zeta^{-n}, \quad (z, \zeta) \in (\mathbb{D}^*)^2, \tag{1}$$

称为 $f(z)$ 的格伦斯基系数，满足不等式

$$\Big| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn} \ \alpha_{mn} x_m x_n \Big| \leq 1, \tag{2}$$

对于希尔伯特空间 l^2 中单位球面 $S(l^2)$ 上的任意序列 $\mathbf{x} = (x_n)$，其范数为$\infty\|\mathbf{x}\| = (\sum |x_n|^2)^{1/2}$；此处取对数函数的主值分支（参见 [6]）。[1]

日期：2023年5月5日（GruAbel(2).tex）。

该量

$$\varkappa(f)=\sup\Big\{\Big|\sum_{m,n=1}^{\infty}\sqrt{mn}\;\alpha_{mn}x_mx_n\Big|:\;\mathbf{x}=(x_n)\in S(l^2)\Big\}\le 1$$

称为 f 的格伦斯基范数。

允许沿单位圆 $\mathbb{S}^1=\partial\mathbb{D}^*$ 拟共形延拓至圆盘 $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ 的单叶函数 $f(z)$ $=z+b_0+b_1z^{-1}+\dots$ 属于 $\mathbb{D}^*$ 类。为了确保给定贝尔特拉米系数 $\mu(z)=\partial_{\overline{z}}f/\partial_z f$ 属于 $\mathbb{D}$ 时其唯一性，以及在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛拓扑中的紧性等，我们加入第三个规范化条件

$$f(0)=0.$$

所有此类 $f\in\Sigma_Q$ 在 $\mathbb{D}^*$ 中均无零点，因此其倒数函数 $F_f(z)=1/f(1/z)=z+a_2z^2+\dots$ 在圆盘 $\mathbb{D}$ 中全纯且单叶，并且满足 $F_f(\infty)=\infty$。函数 f 和 F_f 具有相同的格伦斯基系数，且 $\varkappa(F_f)=\varkappa(f)$。

另请注意，范数 $\varkappa(f)$ 对所有 $f\in\Sigma_Q$ 均有定义，且不依赖于在 0 处附加的规范化。

对于具有 k-拟共形延拓的函数（$k<1$），我们得到一个比（2）更强的界。

$$\Big|\sum_{m,n=1}^{\infty}\sqrt{mn}\;\alpha_{mn}x_mx_n\Big|\le k\quad\text{for any}\quad\mathbf{x}=(x_n)\in S(l^2),\tag{3}$$

最早由 [15] 建立（另见 [12]）。

注意，Grunsky 矩阵算子 $\mathcal{G}(f)=(\sqrt{mn}\;\alpha_{mn}(f))_{m,n=1}^{\infty}$ 是一个线性算子 $l^2\to l^2$，它会压缩元素 $\mathbf{x}\in l^2$ 的范数；该算子的范数等于$\varkappa(f)$。

Grunsky 不等式的方法在几个方向上得到了推广，相应地，格伦斯基范数也得到了推广。在本文中，继 [13], 我们将只讨论圆盘的典范情形 $\mathbb{D}^*$。

1.2. 一些已知结果。格伦斯基范数 $\varkappa(f)$ 不超过泰希米勒范数 $k(f)$，后者等于 $=\|\mu\|_\infty$ 从 f 到 $\mathbb{C}$的拟共形$\widehat{}$扩张的伸缩率 $k(w^\mu)$ 的下确界。这里， w^μ 表示在 $\mathbb{C}$ 上满足贝尔特拉米方程$\partial_{\overline{z}}w=\mu\partial_z w$ 并扩张 f的同胚解；相应地， μ 被称为 w的贝尔特拉米系数（或复伸缩率）。

对于大多数函数 f，我们有严格不等式 $\varkappa(f)<k(f)$（此外，满足此不等式的函数构成 Σ_Q 的一个稠密子集），而范数相等的函数在许多应用中起着至关重要的作用。

另一方面，Pommerenke 和 Zhuravlev 的重要结果指出，若函数 $f\in\Sigma$ 满足带有某个常数 $k<1$ 的不等式 $\varkappa(f)<k$，那么 f 有一个到 $\mathbb{C}$ 的拟共形延拓，其伸张率为 $k_1=k_1(k)\ge k$ [20], [23]；[14], , 第 82–84 页。

(4) 中的每个系数 $\alpha_{mn}(f)$ 都表示为 f 的有限个初始系数 b_1、b_2、.....、b_s 的多项式；因此，它全纯地依赖于 f 的拟共形延拓的贝尔特拉米系数以及施瓦茨导数

$$S_f(z)=\Big(\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big)'-\frac{1}{2}\Big(\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big)^2,\quad z\in\mathbb{D}^*.$$

这些导数在复巴拿赫空间 $\mathbf{B}(\mathbb{D}^*)$ 中构成一个有界域，该空间由范数为

$$\|\varphi\|_{\mathbf{B}} = \sup_{\mathbb{D}^*}(|z|^2-1)^2|\varphi(z)|.$$

该区域在 T 的全纯贝尔斯嵌入中，刻画了万有 Teichm¨uller 空间 T（圆盘上复结构的空间）。该空间的复几何为本文涉及的许多相关结果提供了背景。

函数 $f(z) \in \Sigma_Q$ 的拟共形延拓的贝尔特拉米系数 w^μ 取遍单位球

$$\mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \ \mu(z)|\mathbb{D}^* = 0, \ \ \|\mu\|_\infty < 1\},$$

而众所周知的极值性判据（汉密尔顿-克鲁什卡尔-赖希-施特雷贝尔定理）表明，贝尔特拉米系数 $\mu_0 \in \mathbf{Belt}(\mathbb{D})_1$ 是极值的，当且仅当

$$\|\mu_0\|_\infty = \sup_{\|\psi\|_{A_1(\mathbb{D})}=1} |\langle \mu, \psi\rangle_{\mathbb{D}}|,$$

其中

$$\langle \mu, \psi\rangle_{\mathbb{D}} = \iint_{\mathbb{D}} \mu(z)\psi(z)dxdy \quad (z = x+iy),$$

and

$$A_1(\mathbb{D}) = \{\psi \in L_1(D) : \ \psi \ \text{ holomorphic in } \ \mathbb{D}\}.$$

对于空间 T 原点处沿方向 $t\phi_{\mathbf{T}}(\mu_0)$ 的 μ_0 无穷小极值性，同一条件也是充分必要的，其中 $\phi_{\mathbf{T}}$ 是定义（因子分解）全纯投影 $\mathbf{Belt}(\mathbb{D})_1 \to \mathbf{T}$；例如参见 [3], [4], [7]。

格伦斯基范数与阿贝尔全纯微分 $\omega(z)dz$ on $\mathbb{D}$ 的平方所构成的子集有关:

$$A_1^2(\mathbb{D}) = \{\psi = \omega^2 \in A_1(\mathbb{D}) : \ \omega \ \text{ holomorphic in } \ \mathbb{D}\}$$

该子集由阿贝尔全纯微分 $\omega(z)dz$ 的平方的可积平方构成。由于 [8]（以及 [12] 中更一般的结果），等式 $\varkappa(f^\mu) = k(f^\mu)$ 成立当且仅当

$$\|\mu\|_\infty = \sup_{\psi \in A_1^2(\mathbb{D}), \|\psi\|_{A_1}=1} |\langle \mu, \psi\rangle_{\mathbb{D}}|;$$

此外，若 μ 具有 Teichm¨uller 形式，即 $\mu = k|\psi|/\psi$ 且满足 $\psi \in A_1(\mathbb{D})$，则必有 $\psi \in A_1^2$。

N还要注意，由于 [8]，$A_1^2(\mathbb{D})$ 中的元素可表示为以下形式

$$\psi(z) = \omega(z)^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn}\ x_m x_n z^{m+n-2},$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_{l^2} = \|\omega\|_{L_2}$；这里 $\mathbf{x} = (x_n)$。

1.3. 格伦斯基范数的下界。[13] 中确立的以下关键估计，是证明主定理的关键步骤之一。

引理 1. 每个函数的格伦斯基范数 $\varkappa(f)$

$$f(z) = z + b_0 + b_m z^{-m} + b_{m+1}z^{-(m+1)} + \cdots \in \Sigma_Q, \quad m \geq 1$$

满足不等式

$$\varkappa(f) \geq \alpha_{\mathbb{D}}(f) := \sup_{\psi \in A_1^2(\mathbb{D}), \|\psi\|_{A_1}=1} |\langle \mu_0, \psi \rangle_{\mathbb{D}}| = \sup_{\omega \in A_2(\mathbb{D}), \|\omega\|_2=1} |\langle \mu_0, \omega^2 \rangle_{\mathbb{D}}|, \tag{4}$$

其中， μ_0 是将 f 延拓到$\mathbb{D}$的拟共形延拓 f^μ 中的一个极值贝尔特拉米系数。

对于具有相等的 Grunsky 范数和 Teichm¨uller 范数的函数 f，式 (4) 中取等号，反之亦然（参见 [8], [12], [17]）；但迄今尚不清楚是否存在满足 $\varkappa(f) < k(f)$ 且 $\varkappa(f) = \alpha_{\mathbb{D}}(f)$ 的函数 $f \in \Sigma_Q$。

$\varkappa(f)$ 这一下界的证明基于文献 [10], [21] 中给出的阿尔福斯-施瓦茨引理向具有可积广义负曲率的度量的几何延拓。

我们将一个 a 也使用不等式 (4) 的无穷小形式。稍后将介绍它。 .

1.4. 负广义高斯曲率的共形度量。我们将使用一些关于圆盘 $\mathbb{D}$ （其中 $\lambda(t) \geq 0$）上的次调和共形度量 $ds = \lambda(t)|dt|$ 的已知结果，这些度量具有负广义高斯曲率。

回顾一下，定义域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中上半连续芬斯勒度量 $ds = \lambda|dt|$ 的广义高斯曲率 κ_λ 定义为

$$\kappa_\lambda(t) = -\frac{\Delta \log \lambda(t)}{\lambda(t)^2}, \tag{5}$$

其中 Δ 是广义拉普拉斯算子

$$\Delta\lambda(t) = 4 \liminf_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(t + re^{i\theta}) d\theta - \lambda(t) \Big\}$$

（假设 $-\infty \leq \lambda(t) < \infty$）。与 C^2 函数类似，对于这类函数， Δ 与通常的拉普拉斯算子一致；由此可得， λ 在 Ω 上次调和，当且仅当 $\Delta\lambda(t) \geq 0$；因此，在 λ 的局部极大值点 t_0 处，若 $\lambda(t_0) > -\infty$，则有 $\Delta\lambda(t_0) \leq 0$。

复巴拿赫流形 X 上芬斯勒度量的截面全纯曲率，定义方式类似：对于给定的像中的切向方向，取圆盘到 X 的全纯映射的适当集合上曲率 (5) 的上确界。

众所周知， [1], [9], 通用 Teichm¨uller 空间 T 上的 Kobayashi-Teichm¨uller 度量 $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}(x, v)$的全纯曲率在 T 上方切丛 $\mathcal{T}$(T)的所有点 (x, v) 处均等于 -4。相比之下，由 $\mathbb{D}$ 上的格伦斯基芬斯勒结构生成的度量 $\lambda_\varkappa$ 的全纯曲率满足不等式 $\Delta\log\ \lambda \geq 4\lambda^2$，其中 Δ 仍为广义拉普拉斯算子（见 [11]）。因此， $\lambda_\varkappa(t)$ 在空间 T 的任意全纯圆盘上 ≤ -4 。

这是曲率满足不等式 $\Delta\log\ \lambda \geq K\lambda^2$、常数为 $K > 0$的度量的一个特例。所有此类度量都是次调和的。

我们还将使用满足以下不等式的上半连续度量 λ

$$\Delta \log \lambda \geq K\lambda, \quad K = \text{const} > 0 \tag{6}$$

（此时 $u = \log\lambda$ 可能为负）。对于此类度量，我们有如下 Minda 最大值原理:

引理 2. 如果函数 $u: D \to [-\infty, +\infty)$ 在区域 $D \subset \mathbb{C}$中是上半连续的，且其广义拉普拉斯算子满足不等式 $\Delta u(z) \geq Ku(z)$，其中某个正

常数 K 在任意点 $z \in D$处，其中 $u(z) > -\infty$，并且如果

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le 0 \quad for\ all\ \zeta \in \partial D,$$

则要么对于所有 $z \in D$， $u(z) < 0$；要么 $u(z) \equiv 0$ 在 D 上。

这个与 Ahlfors-Schwarz引理相关的引理的证明见 [19]；其变体见 [2]。

2. 主定理及其应用

2.1. 主定理。以下定理完整回答了格伦斯基范数与阿贝尔全纯微分之间的关系。

定理 1. 对任意单叶函数，我们都有等式。

$$\varkappa(f) = \alpha_{\mathbb{D}}(f). \tag{7}$$

只需考虑函数 $f \in \Sigma_Q$，因为对于不允许拟共形延拓的函数，式 (7) 的两边都等于 1。

2.2. 应用。我们提及定理 1 的两个重要应用。

1. 多重次调和性。令 $\alpha_{\mathbb{D}}(S_{f^\mu}) = \alpha_{\mathbb{D}}(f^\mu)$，可以将此量视为通用 Teichm¨uller 空间 T 上的函数（也可视为球 Belt$(\mathbb{D})_1$ 上的函数）。以下定理 1 的推论解决了 [10] 中提出的问题。

推论 1. 函数 $\alpha_{\mathbb{D}}(S_{f^\mu})$ 在空间 T 和球 Belt$(\mathbb{D})_1$ 上是多重次调和的。

这由等式 (7) 得出，因为其左侧在 T 上是多重次调和的。事实上，所述多重次调和性是关系式 (10) 以及下文定义的函数 (9) 的全纯性的结果。另一种证明见 [12]。

2. 在Jordan曲线的弗雷德霍姆特征值中的应用。 ρ_n 有向光滑闭Jordan曲线 $L \subset \mathbb{C}$ 的弗雷德霍姆特征值，是其双层位势的特征值，或等价地，是下列积分方程的特征值

$$u(z) + \frac{\rho}{\pi}\int\limits_L u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log\frac{1}{|\zeta - z|}ds_\zeta = h(z),$$

其中， n_ζ 表示外法线， ds_ζ 表示 $\zeta \in L$处的弧长元素。这些数值在解决数学各领域的许多问题时具有重要应用。

通常需要了解最小正特征值 $\rho_L = \rho_1$。这一数值自然地与涉及 L 的保角映射和拟保角映射相关，并且可以针对任意定向闭若尔当曲线 L 通过以下方式定义。

$$\frac{1}{\rho_L} = \sup\frac{|\mathcal{D}_G(u) - \mathcal{D}_{G^*}(u)|}{\mathcal{D}_G(u) + \mathcal{D}_{G^*}(u)},$$

其中， G 和 G^* 分别是 L的内部和外部； $\mathcal{D}$ 表示狄利克雷积分，上确界取遍所有在 $\mathbb{C}$ 上连续且在$G\cup G^*$上调和的函数 u 。特别地， $\rho_L=\infty$ 仅对圆成立。

注意，最后一个等式的两边在莫比乌斯群 $PSL(2,\mathbb{C})$ 的作用下均保持不变。

所示第一特征值与外部共形映射函数 f_L^*： $\mathbb{D}^*\to D^*$ 的格伦斯基系数有着内在联系；这一点通过著名的 K¨uhnau-Schiffer 定理得到了定性表达，该定理指出，值 ρ_L isreciprocal to the 格伦斯基范数 $\varkappa(f_L^*)$（见 [16], [22]）。

结合这一结果，定理 1 明确给出了每条拟共形曲线 $L\subset\mathbb{C}$ 的第一个弗雷德霍姆特征值 ρ_L。也就是说，我们有

推论 2. 对于任意拟圆 $L\subset\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\rho_L}=\sup_{\psi\in A_1^2(D),\|\psi\|_{A_1}=1}|\langle\mu_0,\psi\rangle_{\mathbb{D}}|, \tag{8}$$

其中， μ_0 是适当归一化的外部共形映射函数 f_L^* 的极值贝尔特拉米系数之一，在该函数上可达到 f_L^* 的泰希米勒范数。

此外，在（8）中令 $\mu_0=t|\psi|/\psi$ 为 $|t|<1$ ，且 $\psi\in A_1$ 为 ρ_L，即可得到可能特征值的一个稠密子集。

反之，给定一个拟圆 $L\subset\mathbb{C}$，取外部共形映射 f_L^*的拟共形延拓 f^μ 。其贝尔特拉米系数 μ 在子集 $\{\psi\in A_1^2(\mathbb{D}):\ \|\psi\|_{A_1}=1\}$ 于 $A_1(\mathbb{D})$的单位球面上的线性张成空间 A 上确定了一个线性泛函 $\mu(\psi)=\langle\mu,\psi\rangle_{\mathbb{D}}\sim$。将其哈恩-巴拿赫延拓到 $L_1(\mathbb{D})$上，便得到 $\mathbb{D}$ 中的一个极值贝尔特拉米系数 μ_0 ，其满足 (8)。

3. 具有 $\varkappa(f)=k(f)$ 的 Teichmüller 映射。我们还提及 Teichmüller 极值映射的以下一项有用性质。

推论 3. 如果 f 的等价类是施特雷贝尔点，且 $\varkappa(f)=k(f)$，那么 μ_0 必然具有 $\mu_0(z)=\|\mu_0\|_\infty|\psi_0(z)|/\psi_0(z)$ 的形式，其中 $\psi_0\in A_1^2(\mathbb{D})$，关系式 (8) 补充为

$$\varkappa(f^{\mu_0})=k(f^{\mu_0})=q_L=\frac{1}{\rho_L}=\sup_{\psi\in A_1^2(D),\|\psi\|_{A_1}=1}|\langle\mu_0,\psi\rangle_{\mathbb{D}}|,$$

其中 $L=f^{\mu_0}(\mathbb{S}^1)$， q_L表示其拟反射系数。（等于保向反拟共形同胚的伸缩率$\partial_zW/\partial-\overline{z}W$ 的最小值，这些同胚作用于球面 $\mathbb{C}$ ，逐点保持拟圆 $L\subset\mathbb{C}$ 不变，并交换其内部域和外部域。

作者此前甚至已对任意拟圆盘中的单叶函数证明了这一点（参见例如 [12] （特殊情形由 K¨uhnau [17] 证明）），但它可由 (7) 立即推出。

回顾一下，定向拟圆的拟反射系数 $L'\subset\mathbb{C}$ 是球面 $\mathbb{C}$上保向反拟共形同胚 $\partial_zW/\partial-\overline{z}W$ 的最小伸缩率，这些同胚逐点保持拟圆 $L\subset\mathbb{C}$ 不变，并交换其内部域和外部域。

定理 1 还有其他重要的推论和应用。这些结果将在别处介绍。

3. 定理 1 的证明

1⁰. 首先注意，函数 $f^\mu \in \Sigma_Q$ 的格伦斯基系数 $\alpha_{mn}(f^\mu)$ 对每个 $\mathbf{x} = (x_n) \in l^2$ 且满足 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 生成全纯映射

$$h_{\mathbf{x}}(f^\mu) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}(f^\mu) x_m x_n : \ \mathrm{Belt}(D)_1 \to \mathbb{D}, \tag{9}$$

and

$$\sup_{\mathbf{x}} |h_{\mathbf{x}}(f^\mu)| = \varkappa_{D^*}(f^\mu). \tag{10}$$

这些函数的全纯性由系数 α_{mn} 关于上述贝尔特拉米系数 $\mu \in \mathrm{Belt}(D)_1$ 的全纯性推出，应用估计式即可

$$\Big| \sum_{m=j}^{M} \sum_{n=l}^{N} \beta_{mn} x_m x_n \Big|^2 \le \sum_{m=j}^{M} |x_m|^2 \sum_{n=l}^{N} |x_n|^2 \tag{11}$$

该估计对任意有限的 M、N 以及 $1 \le j \le M$、$1 \le l \le N$ 均成立（见 [20], 第 61 页）。

类似的论证表明，将映射 (9) 视为关于点 $\varphi^\mu = S_{f^\mu}$ 的函数时，它们在 Teichmüller 万有空间 T 上全纯。这种全纯性与等式 (10) 一起表明，将格伦斯基范数 $\varkappa_{D^*}$ 视为关于 Schwarzian 导数S_f 的函数时，它在空间 T 上是对数拟次调和的。此外，正如[12], 中所证明的，函数 $\varkappa_{D^*}(S_f)$ 是连续的；而且在该空间上还是 Lipschitz 连续的。Teichmüller 范数也具有类似性质。

现在，给定一个函数 $f \in \Sigma_Q$，取其极值延拓 f^μ（即满足 $k(f) = \|\mu\|_\infty$），并考虑其极值圆盘

$$\mathbb{D}(\mu) = \{t\mu/\|\mu\|_\infty : \ |t| < 1\} \subset \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1.$$

令 $\mu^* = \mu/\|\mu\|_\infty$。

利用函数 (9)，我们将圆盘 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量 $\lambda_{\mathbb{D}}(t)|dt| = |dt|/(1-|t|^2)$ 拉回，由此可知，该圆盘上的共形度量 $\lambda_{h_{\mathbf{x}}}(t)|dt|$ 满足

$$\lambda_{h_{\mathbf{x}}}(t) = |h'_{\mathbf{x}}(t)|/(1-|h_{\mathbf{x}}(t)|^2).$$

所有这些度量在其非临界点处的高斯曲率均为 -4。我们取这些度量的上包络

$$\lambda_\varkappa(t) = \sup\{\lambda_{h_{\mathbf{x}}}(t) : \ \mathbf{x} \in S(l^2)\}$$

再对其作上半连续正则化，由此确定单位圆盘上的一个对数次调和度量 $\lambda_\varkappa(t)$。它具有圆对称性，即 $\lambda_\varkappa(t) = \lambda_\varkappa(|t|)$。该度量由 f 的格伦斯基系数生成，实际上是范数 $\varkappa(f)$ 的微分（无穷小）形式。

通常，可以得到 $\lambda_\varkappa$ 在其任意非临界点处都有 t_0 一个支撑次调和度量 λ_0，其高斯曲率至多为 -4，因此，$\kappa_{\lambda_\varkappa} \le -4$；详情参见，例如，[9]。

证明了，在 [13], 中，若初始函数 $f \in \Sigma_Q$ 在 $\mathbb{D}^*$ 中具有展开式

$$f(z) = z + b_n z^n + b_{n+1} z^{-n-1} + \ldots, \quad b_n \ne 0, \quad n \ge 1.$$

那么，相应的度量 $\lambda_\varkappa$ 满足以下关系

$$\lim_{r\to 0}\frac{\lambda_\varkappa(r)}{r^n}=\sup_{\mathbf{x}\in S(l^2)}\frac{|dh_{\mathbf{x}}(0)(t\mu_0/\|\mu_0\|_\infty|)}{|t|}\geq\sup_{\psi\in A_1^2(\mathbb{D}),\|\psi\|_{A_1}=1}\Big|\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\mu_0(z)}{\|\mu_0\|_\infty}\,\psi(z)dxdy\Big|, \quad (12)$$

这是（4）的无穷小版本。

2⁰。为了求 $\varkappa(f)$ 的上界（小于 $k(f)$），我们对函数 $h_{\mathbf{x}}(f^{t\mu^*})$ 应用 Golusin 对经典施瓦茨引理所作改进 [5] 的一个特例，如下所述:

引理 3. 一个全纯函数

$$g(t)=c_mt^m+c_{m+1}t^{m+1}+\cdots:\mathbb{D}\to\mathbb{D}\quad(c_m\neq 0,\quad m\geq 1),$$

在 $\mathbb{D}$ 中满足估计

$$|g(t)|\leq|t|^m\frac{|t|+|c_m|}{1+|c_m||t|}, \quad (13)$$

等号仅当函数

$$g_m(t)=t^m\frac{t+c_m}{1+\overline{c}_mt}=c_mt^m+\dots\ . \quad (14)$$

相应的微分度量相关联为

$$g^*\lambda_{\mathbb{D}}(r)\leq\lambda_j(r):=\frac{j'(r)}{1-j(r)^2} \quad (15)$$

其中 $r=|t|<1,\lambda_{\mathbb{D}}(r)=1/(1-r^2)$ 是曲率为-4的单位圆盘的双曲度量，并且

$$j(r)=r^m\ \frac{r+|c_m|}{1+r|c_m|}.$$

注意到，拉回度量 $\lambda_j(r)$ 在去心圆盘$\{0<|t|<1\}$ 上具有常曲率 -4，并且根据 (10)，任何函数 (9) 都被满足 $|c_m|\geq\alpha_{\mathbb{D}}(f)$ 的 (14) 所控制。

3⁰。为了显式计算由（4）右端给出的量 $\alpha(f)$，可以使用函数 $f^\mu(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\dots$的变分公式，该公式来自 Σ^0，其延拓满足 $f^\mu(0)=0$ （参见 [13]）。具体而言，对于足够小的 $\|\mu\|_\infty$,

$$f^\mu(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\mu(w)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)d\xi d\eta+O(\|\mu^2\|_\infty),\quad\zeta=\xi+i\eta,$$

其中，比值 $O(\|\mu^2\|_\infty^2)/\|\mu^2\|_\infty^2$ 在 $\mathbb{C}$ 的紧集上一致有界。于是

$$b_n=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}}\mu(\zeta)\zeta^{n-1}d\xi d\eta+O(\|\mu^2\|_\infty),\quad n=1,2,\dots,$$

and

$$\alpha_{mn}(\mu)=-\pi^{-1}\iint\limits_{\mathbb{D}}\mu(z)z^{m+n-2}dxdy+O(\|\mu\|_\infty^2),\quad\|\mu\|_\infty\to 0.$$

使用归一化系数 $\mu^*=\mu/\|\mu\|_\infty$，并相应地对系数 $t\mu^*$（其中 $|t|<1$）进行处理，可推导出相应映射 $h_{\mathbf{x}}(t\mu^*)$ 在零点的微分，该微分具有

沿极值圆盘 $\{t\mu^* \in \mathbf{Belt}(\mathbb{D})_1\}$ 的 $\mathbf{x} = (x_n) \in S(l^2)$: $|t| < 1\}$ （及其在空间 T 中的像）由下式给出

$$dh_{\mathbf{x}}(0)(t\mu^*) = -\frac{t}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{D}} \mu^*(z) \sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn}\; x_m x_n z^{m+n-2} dxdy$$

另一方面，正如在 [7], 中所证明的， $A_1^2(\mathbb{D})$ 的元素可表示为以下形式

$$\psi(z) = \omega(z)^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn}\; x_m x_n z^{m+n-2} \quad \text{with} \quad \|\mathbf{x}\|_{l^2} = \|\omega\|_{L_2}.$$

现在，令 $|t| < 1$ ，并将关系式 (4) 和引理 3 应用于 $h_{\mathbf{x}}(t\mu^*)$，可得

$$|h_{\mathbf{x}}(t\mu^*)| \le |t|\frac{|t| + |\langle \mu^*, \psi\rangle_{\mathbb{D}}|}{1 + |\langle \mu^*, \psi\rangle_{\mathbb{D}}||t|}$$

并对 $\mathbf{x} \in S(l^2)$ 取上确界,

$$\varkappa(f^{t\mu^*}) \le |t|\frac{|t| + \alpha(\mu^*)}{1 + \alpha(\mu^*)|t|}, \tag{16}$$

with

$$\alpha(\mu^*) = \sup_{\psi \in A_1^2(\mathbb{D}), \|\psi\|_{A_1}=1} |\langle \mu^*, \psi\rangle_{\mathbb{D}}| =: \alpha.$$

由关系式 (4)、(12)、(16) 可得

$$\alpha|t| \le \varkappa(f^{t\mu^*}) \le |t|\frac{|t| + \alpha}{1 + \alpha|t|}. \tag{17}$$

4^0。现在我们可以证明该定理。首先，我们建立与 $\varkappa(f)$ 相对应的微分（无穷小）度量 $\lambda_\varkappa$ 与根据引理 3 定义的、具有（15）式形式的主导度量之间的关系。

注意到（13）式右端的分数关于 $|c_m|$ 在 $[0, 1]$, 上递增，我们取函数

$$g_a(t) = t^m(t + a)/(1 + \overline{a}t)$$

令 $a > \alpha$ ，并由（15）定义相应的度量

$$\lambda_a(r) = j_a'(r)/(1 - j_a(r)^2) \tag{18}$$

（曲率均为 -4）。我们将这些度量与由 f^μ 的格伦斯基系数生成的度量 $\lambda_\varkappa$ 进行比较，如第一步所述。

将 $\lambda_\varkappa$ 与任意度量（18）（对于给定的 $c_m = a$，该度量是最大的）进行比较，由（12）得到严格不等式

$$\lambda_\varkappa(r) < \lambda_a(r), \quad r < 1,$$

（对任意 $a > \alpha$）。当 $a \to \alpha$ 时取极限，可得

$$\lambda_\varkappa(r) \le \lambda_\alpha(r) = \alpha + (1 - \alpha^2)r + \ldots \quad r < 1. \tag{19}$$

另一方面, 正如在 [13], 中所确立的，我们在原点 $t = 0$ 有等式

$$\lambda_\varkappa(0) = \widetilde{\lambda}_\alpha(0),$$

其中

$$\widetilde{\lambda}_\alpha(r) = \alpha/(1 - \alpha^2 r^2) = \alpha + O(r^2), \quad r \to 0,$$

是在原点处支撑 $\lambda_\varkappa$ 的共形度量，其高斯曲率为常数 -4。因此，对于较小的 r,

$$\alpha \le \lambda_\varkappa(r) \le \lambda_\alpha(r) \le \alpha + (1-\alpha^2)r + O(r^2). \tag{20}$$

现在选取原点 $t=0$ 的一个足够小的邻域 U_0，并令

$$M = \{\sup \lambda_\alpha(t) : t \in U_0\}.$$

T于是，在此邻域内，我们有 $\lambda_\alpha(t) + \lambda_\varkappa(t) \le 2M$。考虑函数

$$u = \log \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_\alpha}.$$

那么（参见 [19], [2]），当 $t \in U_0$ 时,

$$\Delta u(t) = \Delta \log \lambda_\varkappa(t) - \Delta \log \lambda_\alpha(t) \ge 4(\lambda_\varkappa^2 - \lambda_\alpha^2) \ge 8M(\lambda_\varkappa - \lambda_\alpha).$$

初等估计

$$M \log(t/s) \ge t - s \quad \text{for} \quad 0 < s \le t < M$$

（仅当 $t = s$ 时等号成立）意味着

$$M \log \frac{\lambda_\alpha(t)}{\lambda_\varkappa(t)} \ge \lambda_\alpha(t) - \lambda_\varkappa(t),$$

因此,

$$\Delta u(t) \ge 8M^2 u(t).$$

由此可知，函数 u 在 U_0 上满足不等式 (6)，其中 $K = 8M^2$.

对 u 应用引理 2，并注意到 (20) 得出

$$u(0) = \lim_{t\to 0} \log \frac{\lambda_\varkappa(t)}{\lambda_\alpha(t)} = 0,$$

由该引理可得，度量 $\lambda_\varkappa$ 和 λ_α 在 U_0 上必相等；同理，它们在整个圆盘 $\mathbb{D}$ 上也相等。

4⁰。最后，我们应用在 [9], 中证明的以下格伦斯基范数重构引理，该引理表明，此范数是沿 Teichm¨uller 极值圆盘对 $\lambda_\varkappa$ 积分所得的形式。

引理 4. 在任意 Teichm¨uller 极值圆盘 $\mathbb{D}(\mu_0) = \{t\mu_0/\|\mu_0\|_\infty : \ |t| < 1\} \subset \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$, 上，我们有等式

$$\tanh^{-1}[\varkappa(f^{r\mu_0/\|\mu_0\|_\infty})] = \int_0^r \lambda_\varkappa(t)dt. \tag{21}$$

沿着所示的极值圆盘对度量 $\lambda_\varkappa$ 和 λ_α 进行积分，由（21）和（4）中的右侧等式可得所需的等式（7），从而完成定理的证明。

4. 示例

说明定理 1 的最简单例子由映射给出

$$f_{3,t}(z) = z\Big(1 + \frac{t}{z^3}\Big)^{2/3}, \quad 0 \le |t| < 1, \tag{22}$$

其到 $\mathbb{D}$ 的极值延拓为

$$\widehat{f}_{3,t}(z) = z\Big[1 + t\Big(\frac{|z|}{z}\Big)^3\Big]^{2/3}$$

贝尔特拉米系数为 $\mu_3(z) := \mu_{\widehat{f}_{3,\,t}}(z) = t|z|/z$。在极坐标中，$\mu_3(re^{i\theta}) = te^{-i\theta}$。此映射具有三重旋转对称性

$$f(e^{2n\pi i/3}z) = e^{2n\pi i/3}f(z), \quad n = 0, 1, 2.$$

注意，$f_{3,\,t}(z) = f_t(z^{3/2})^{2/3}$，其中

$$f_t(z) = \begin{cases} z + t/z, & |z| \geq 1, \\ z + t\overline{z}, & |z| < 1. \end{cases}$$

对于此函数，我们有（见 [10]）

$$\sup_{\psi \in A_1^2, \|\psi\|_{A_1}=1} |\langle \mu_3^*, \psi\rangle_{\mathbb{D}}| = \max_{\psi_3} |\langle \mu_3^*, \psi_3\rangle_{\mathbb{D}}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tag{23}$$

其中 ψ_3 是非恒定线性函数的平方

$$\psi_3(z) = \omega_1(z)^2 := (a_0 + a_1 z)^2$$

其中 $a_0 \neq 0$、$a_1 \neq 0$ 和 $\|\psi_3\|_{A_1} = 1$。

映射 (22) 是首个明确给出的函数示例，其中 $f \in \Sigma_Q$ 具有 $\varkappa(f) < k(f)$。这一结果于1981年由 K¨uhnau 运用弗雷德霍尔姆特征值的技巧在 [16], 中独立证明，作者也以另一种方式证明了这一点（这也可由上文提到的一般结果推出）。量 (23) 给出了特征值 $\rho_{f_{3,\,t}}(\mathbb{S}^1)$ 的倒数值。

更一般地，所有函数 $f_m(z) = f_t(z^{m/2})^{2/m}$ 若具有奇数 $m = 2p - 1$，也都具有类似的性质。

References

[1] M. Abate 和 G. Patrizio，《Teichmüller 度量的等距变换》，比萨高等师范学院科学类年刊(4) 26 (1998), 437-452.[2] S. Dineen，《施瓦茨引理》，克拉伦登出版社，牛津，1989.[3] C.J. Earle、I. Kra 和 S.L. Krushkal，《全纯运动与 Teichmüller 空间》，美国数学会汇刊 944 (1994), 927-948.[4] F.P. Gardiner 和 N. Lakic，《拟共形 Teichmüller 理论》，美国数学会，普罗维登斯，RI，2000.[5] G.M. Goluzin，《复变函数几何理论》，《数学专著译丛》第26卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1969年。[6]H. Grunsky，《单叶映射亚纯函数的系数条件》，Math. Z. 45 (1939), 29-61.[7] S.L. Krushkal，《拟共形映射与黎曼曲面》，威利出版社，纽约，1979年。[8] S. L. Krushkal，《格伦斯基系数不等式、Carathéodory 度量与极值拟共形映射》，《瑞士数学评论》64 (1989), 650-660.[9]S.L. Krushkal，《Teichmüller 度量的多重次调和特征》，贝尔格莱德数学研究所出版物，新系列75(89) (2004), 119-138.[10] S.L. Krushkal，《强化的莫泽猜想、格伦斯基系数的几何与 Fredholm 特征值》，Central European J. Math. 5(3) (2007), 551-580。

[11] S.L. Krushkal, 《关于初始系数的 Zalcman 猜想证明》, 《格鲁吉亚数学杂志》17 (2010), 663-681；勘误 19 (2012), 777.[12] S.L. Krushkal, 《强化的格伦斯基不等式与 Milin 不等式》, 《当代数学》667 (2016), 159-179.[13] S.L. Krushkal, 《单叶函数的格伦斯基范数》, 《数学科学杂志》(2023年), 即将发表。[14] S.L. Krushkal 和 R. Küh-nau, 《拟共形映射——新方法与应用》, 《Teubner 数学丛书》第54卷, Teubner, 莱比锡, 1983年。[15]R. Kühnau, 《拟共形映射的畸变定理与 Grunsky 型系数条件》, 《数学新闻》48 (1971), 77-105.[16] R. Kühnau, 《拟共形延拓性、Fredholm 特征值与格伦斯基系数条件》, 《芬兰科学院数学辑》7 (1982), 383-391.[17]R. Kühnau, 《格伦斯基系数条件何时足以保证 Q-拟共形延拓性? 》, 《瑞士数学评论》61 (1986), 290-307.[18] O. Lehto, 《单叶函数与 Teichmüller 空间》, 施普林格出版社, 纽约, 1987年。[19] D. Minda, 《Ahlfors 引理的强形式》, 《落基山数学杂志》17 (1987), 457-461.[20] Chr. Pommerenke, 《单叶函数》, Vandenhoeck & Ruprecht, 哥廷根, 1975年。[21] H.L. Royden, 《Ahlfors-Schwarz引理: 等号成立的情形》, 《分析与数学杂志》46 (1986), 261-270.[22]M. Schiffer, 《弗雷德霍尔姆特征值与 Grunsky 矩阵》, 《波兰数学年刊》39 (1981), 149-164.[23] I.V. Zhuravlev, 《单叶函数与 Teichmüller 空间》, 数学研究所, 新西伯利亚, 预印本, 1979, 23页。（俄语）。

以色列拉马特甘 5290002 巴伊兰大学数学系；以及美国弗吉尼亚州夏洛茨维尔 VA22904-4137 弗吉尼亚大学数学系