基于图的多手眼机器人系统同步标定

Zishun Zhou、Liping Ma、Xilong Liu、Zhiqiang Cao，IEEE 高级会员，Junzhi Yu，IEEE 会士

摘要—精确标定是视觉引导机器人系统实现高精度操作的基础。多眼（相机）和多机械臂（机器人）系统对标定误差尤为敏感，例如微组装系统。现有的大多数方法都侧重于对整个系统中的单个单元进行标定，例如手眼之间或两个机械臂之间的位姿。这些方法可用于确定各单元之间的相对位姿，但串行增量标定策略无法避免大规模系统中的误差累积问题。本文不再聚焦于单个单元，而是将多眼多机械臂系统的标定问题建模为图，并提出一种基于最小生成树和图优化的方法。该方法可根据系统设置自动规划串行的最优标定策略，以初步获得粗略标定结果。随后，利用这些初始值引入闭环约束，进行全局优化。仿真实验展示了所提算法在不同噪声和各种手眼配置下的性能。此外，本文还在真实机器人系统上进行了实验，以进一步验证所提方法。

索引词—标定、误差校正、图论、多机器人系统、机器人视觉系统

I. 引言

手眼机器人系统应用范围广泛。

与单眼单机械臂系统相比，多眼多机械臂系统（MEMHS）能够通过协作与配合完成灵活多样的任务，是当前的研究热点。许多单个机器人难以完成的任务，多手眼机器人系统却能轻松完成 [1], ，MEMHS也已广泛应用于各个领域。例如，天津大学设计了一套多机器人镜像铣削系统，用于加工大型蒙皮零件。为确保铣削精度小于0.03 mm，两台机械臂需要同步运动，同时对金属两侧进行铣削和支撑。该系统对标定精度要求很高 [2]。中国科学院自动化研究所设计了一套用于微型光电镜头制造的微装配系统，该系统基于3台相机和6台机械手。高精度标定是实现21自由度（DoF）控制和4。9μm装配精度的系统 [3]。其他应用还包括灵巧操作 [4], 抓取 [5], 以及机器人引导的三维特征识别 [6], ，这些应用在智能制造中发挥着重要作用。然而，由于高精度标定难度大，多眼多机械臂系统无法以低成本实现高精度协作。例如，波音的新型多机器人装配系统进展受阻，导致其新型飞机延迟交付 [7]。

稿件于2022年10月收到；修订日期：xxxx年xx月；接受日期：xxxx年x月。本研究得到国家自然科学基金委员会项目（61973302 2020-01-01~2023-12-31）、国防基础科研重点项目（JCKY2020208B027）、CIE-腾讯机器人X犀牛鸟专项研究计划（编号：2022-07）以及北京市自然科学基金（2022MQ05）的资助。（通讯作者：Liping Ma）

Zishun Zhou 是一名学生实习生，在中国科学院自动化研究所（中国北京100190）接受 Xilong Liu 的指导，同时也是澳大利亚国立大学电气工程与计算机科学学院（澳大利亚堪培拉2601）的一名研究生。

Liping Ma、Xilong Liu 和 Zhiqiang Cao 任职于中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室（中国北京100190），同时也任职于中国科学院大学人工智能学院（中国北京100049）。

Junzhi Yu 任职于北京大学工学院先进制造与机器人系 BIC- ESAT 湍流与复杂系统国家重点实验室，地址为中国北京 100871。



图1 苏黎世联邦理工学院的机器人制造实验室（RFL）是一个MEMHS。它由四台工业机器人组成，每台机器人均有六个轴，悬挂于高架龙门系统上，使机器人末端执行器能够在一个面积为45 × 17 × 6米的宽敞工作区域内定位于任意所需角度。

本文中，MEMHS 指由至少三台机器人和三台相机组成的系统。固定在工作空间中的相机称为眼在手外相机，安装在机械臂上的相机称为手眼相机。MEMHS 中需要标定的参数包括机械臂的运动学参数、相机的内参，以及各单元之间的相对位姿（例如，相机-机器人、机器人-机器人、相机-相机）。机器人本身的运动学参数和相机内参标定已得到广泛研究 [8-12], ，并且对大多数应用而言已足够有效。系统各单元之间的外部位姿矩阵标定则相对困难，尤其是在对精度要求较高的任务中，这是制约 MEMHS 广泛应用的主要瓶颈。

A. 相关工作

机器人手眼标定是单机器人外参标定中的一个经典基础问题。它专注于求解机器人基座或末端法兰与传感器坐标系之间的位姿矩阵，这就是著名的$\boldsymbol{AX = XB}$ 和 $\boldsymbol{AX = YB}$问题，其中$\boldsymbol{X}$ 和$\boldsymbol{Y}$ 是未知的常量变换矩阵 [13]。Tsai 等人[14] 利用一系列矩阵几何关系和齐次矩阵的性质，计算手眼关系中的旋转和平移。然而，由于参数采用两阶段过程进行估计，第一阶段的估计误差会传播至第二阶段。Park 等人[15] 提出了一种在单阶段过程中计算$\boldsymbol{AX = XB}$ 的方法。该方法利用李群理论，同时求解手眼方程中的旋转和平移。Ernst 等人[16] 提出了一种采用最小二乘方法同时标定工具法兰和机器人世界坐标系的方法，该方法取得了更准确的结果，并且所需的标定站更少。

在以往关于多机器人标定问题的研究中，研究人员主要关注双机器人系统，也就是众所周知的$\boldsymbol{AXB = YCZ}$ 问题。其中，$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{Z}$均为未知常矩阵，分别表示基座坐标系与另一个基座坐标系、相机坐标系与末端法兰，以及另一个末端法兰与工具坐标系之间的变换。通过求解双机器人标定问题，可以将多机器人系统分解为一系列相互独立的双机器人组或手眼机器人单元，再对每组应用双机器人或手眼标定方法，从而轻松解决多机器人标定问题[17]。也就是说，逐步标定由所有单元组成的开环链。Wang 等人[1] 提出了一种结合李代数与非线性优化方法、同时标定双机器人系统参数的方法。通过求解两个$\boldsymbol{AX = XB}$ 问题获得初始值。Wu 等人[18] 也使用李代数的非线性优化方法对双手眼机器人系统进行标定。为获得良好的初始值，他们使用四元数同步计算所有未知位姿矩阵，以避免在执行全局调整之前发生误差传播。Fu 等人[19] 使用基于双四元数的解析解进行双机器人标定，并通过可解性分析证明了该方法具有抗噪鲁棒性。 Wang [17] 使用克罗内克积和迭代求解该问题，并证明其代价函数严格凸。Ma 等人[20] 提出了一种混合方法该方法结合了来自 Wang [1] 的 $\boldsymbol{AXB = YCZ}$ 求解器与概率方法，所需数据更少且不会损失精度。该方法考虑了不同传感器的噪声水平，并在优化过程中加入了信息矩阵；然而，它只关注双机器人场景，该场景仅包含一个回路，而且随着噪声水平升高，其性能可能会迅速下降。

尽管不同单元的标定顺序以及实际操作中的累积误差问题对多机器人协同操作有着至关重要的影响，但对此关注较少。许多学者研究了 MEMHS 的标定顺序，但这些方法大多仅适用于特定场景，缺乏灵活性和可扩展性。Ruan 等人 [21] 构建了一个 3D 相机多机器人系统，并为该系统设计了一种非接触式标定策略。该方法能够准确标定其协同研磨工作站，但它依赖于该系统特有的几何关系，因此难以移植到其他系统。Shen 等人 [3] 设计了一个由 3 台相机和 6 个机械手组成的微装配平台，以完成 21 自由度装配任务。该平台采用 [22]提出的单元标定方法逐步进行标定。该方法同样仅适用于其专门设计的系统。Yu 等人 [23] 提出了一种通用方法，用于标定机器人之间的外参矩阵以及机器人运动学参数。该方法使用指数积（POE）公式对机器人运动进行建模，并确定未知参数。这是一种通用的多机器人标定方法，同时还能确定运动学参数。然而，该方法未考虑传感器精度差异，且世界坐标系的选择可能影响标定精度。鉴于离线标定的复杂性，研究人员提出了一些基于位姿补偿的标定方法。Stadelmann 等人 [24] 提出了一种适用于大规模多机器人系统的末端执行器位姿校正方法。他们使用室内全球定位系统（iGPS）和惯性测量单元（IMU）跟踪末端执行器位姿，从而实现高精度标定。借助他们的 传感器融合算法，末端执行器位置误差平均降低至 0.1 mm。Maghami 等人 [25] 使用深度神经网络进行多机器人标定。在不同位置测量多个机器人的位姿，并同时记录关节角输入 。随后训练一个全连接网络进行误差补偿。

B. 贡献

本文主要关注 MEMHS 的一般标定过程，并特别着重于寻找能够实现最高传感器精度的最优标定路径，即效率与精度之间的平衡点。本文将 MEMHS 标定问题建模为一个图，并提出一种基于最小生成树和图优化的标定策略。首先，选择最优开环链进行局部标定，以获得一组初始化参数。然后，选择覆盖所有单元的闭环进行全局调整。本文的主要贡献如下：

1）提出了一种基于最小生成树和图优化的通用多目多手系统（MEMHS）标定模型，并提出了最优标定原理。

2）根据所提出的系统模型，给出了非线性标定方程的数值解，并开发了相应的算法。3）提出了一套标准的MEMHS标定流程，并在仿真和真实MEMHS上进行了全面测试。

本文的组织结构如下：第二节对标定问题进行建模。第三节介绍所提出标定方法的细节。第四节展示该标定方法的仿真结果和真实机器人的验证结果。最后，第五节对本文进行总结。

II. 问题陈述

本文致力于对由多个相机和机械臂组成的系统进行标定。在相机内参和机器人自身的运动学参数均已准确标定的前提下，给定一组机器人关节状态和相机测量结果，即可标定任意两个单元之间的位姿。

将N 个机械臂、M 个手眼相机和L 个眼在手外相机称为一个MEMHS。N 台机器人的基座之间的相对位姿保持不变；M 个手眼相机安装在机械臂本体上，且各自相对于某个关节的位姿保持不变。L 个眼在手外相机固定在N 台机器人的基座上。第i个机械臂的基座坐标系表示为$\{R_i\}$。工具坐标系表示为$\{\mathrm{H}_i\}$，第j个手眼相机的坐标系表示为$\{E_j\}$，第k个眼在手外相机的坐标系表示为$\{\mathrm{C}_k\}$，其中$i = 1,2 \dots \dots N, j = 1,2 \dots \dots M, k = 1,2, \dots \dots L$。设备之间的位姿会随着机器人的关节角变化。数学上，这可表示为 $\forall A, B \in \{R_i\}, \{E_j\}, \{H_i\}, \{C_k\}$。从{A}到{B}的变换矩阵表示为${}^{B}\boldsymbol{T}_{A}$，其中${}^{B}\boldsymbol{T}_{A} \in SE(3)$。

图 2(a) 展示了一个 MEMHS，它由三台机器人、三台手眼相机和一台眼在手外相机组成。图中的实线表示可测量的位姿矩阵，蓝线表示可通过关节角及相应的机器人运动学参数获得的矩阵；红线表示可通过视场重叠的相机获得的矩阵。虚线表示需要标定的恒定位姿矩阵。

III. 方法

将每个坐标系视为一个顶点，并将两个坐标系之间的位姿关系视为一条边，MEMHS 可建模为一个完全图，表示如下。

$$G(V, E, \Phi) \tag{1}$$

其中V 是G的顶点集， E 是G的边集，Φ 是相应边的权重。简称 MEMHS 完全图为 MCG。每条边对应一个平移矩阵，其中一些边是常矩阵，另一些边是关节角的函数，其精度与权重Φ有关。于是，标定问题可以表述为：确定一组参数，使得对于给定的系统关节角状态，所有边对应的矩阵能够需要计算。如果 MCG 总共有 n 个顶点，那么总共有 n（$n-1$）条边，但其中只有 $n-1$ 条是独立的，因为 MCG 具有一项重要性质：沿每个闭环，对应矩阵的乘积应为单位矩阵。因此，图的所有生成树在数学上是等价的，即任意给定的生成树都可以恢复系统图。不同于 SLAM（同时定位与建图）问题，标定问题需要人力。 当 n 不太大时，n（o^2）的时间复杂度对于计算机而言可能并不高，但对于人力而言可能极其庞大。因此，标定 $n-1$ 条最佳边可以平衡精度与效率。最小生成树是初步标定的最佳树。然后，根据生成树等价原理和初步标定结果，基于闭环恒等性质，选取 MCG 的一组闭环进行全局优化。

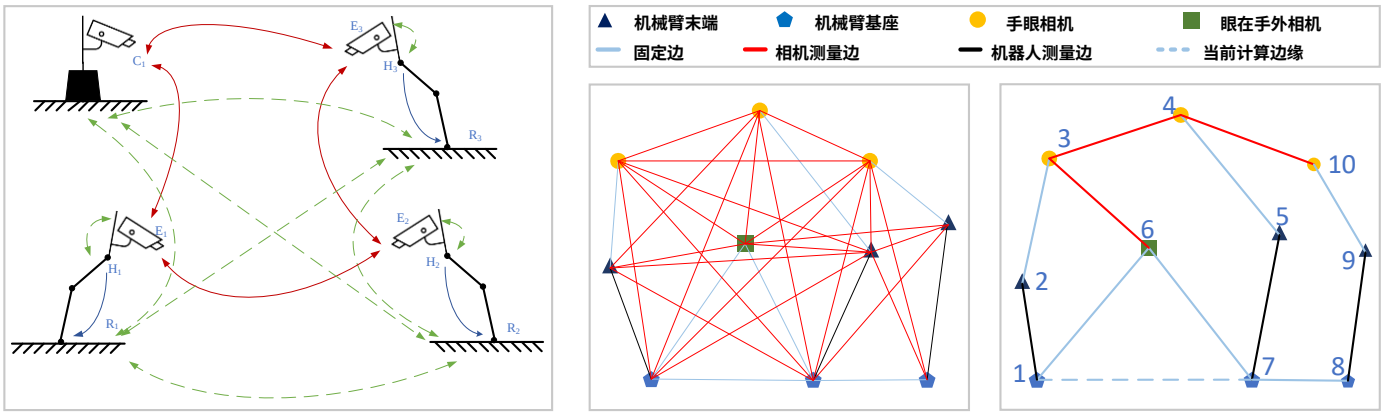
以图 2(a) 所示的 MEMHS 为例，假设已知机器人的运动学参数和相机的内参，则 MCG 如图 2(b) 所示。红色和黑色的边表示平移矩阵，可根据机器人或相机的运动学模型直接测量；蓝色的边表示与常矩阵相对应的边。

A. 边评估 测量精度

度主要取决于传感器本身的精度以及测量过程的灵敏度。前者包括相机的像素密度、机械臂的编码器精度等。后者包括标定物体与相机之间的距离等。在 MCG 中，前者与顶点有关，而后者与边有关。因此，有必要为精度不同的顶点和边设置不同的权重，以获得更好的测量结果。设顶点 i 的权重为 $\eta_i \in \boldsymbol{R}^{+}$，测量精度较高的顶点将具有更大的权重。从实际工程的角度出发，η_i 由一个包含上述影响因素的经验公式确定。对于已知协方差矩阵的情况，对相应的协方差矩阵进行 SVD分解，并取其最大特征值作为 η_i。然后将顶点权重转换为边权重。设当前测量的顶点为 i、j，边权重为 Φ_{ij}。此外，对于测量过程的灵敏度，需要直接在边上添加预设权重，但该误差在测量前难以获取，因此此处简单地用 d_{ij} 表示。d_{ij} 在大多数情况下应为零常数；只有当两个顶点之间的物理距离过大，或现有障碍物或困难影响给定边的测量时，才需要添加 d_{ij} 。最终的边权重可表示如下。

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\log\left(n_{ij}\left(\frac{1}{\eta_i}+\frac{1}{\eta_j}+d_{ij}\right)+1\right)+1} \tag{2}$$

其中，n_{ij} 表示顶点i与j之间边的测量次数。我们假设，在无偏测量中，数据测量的精度比



(a) (b) (c)

图2 (a) MEMHS示例，由三台机器人、三台手眼相机和一台眼在手外相机组成。(b) (a)中所示MEMHS对应的MCG（MEMHS完全图）。(c) (a)中所示MEMHS的最优标定回路图。

测量数量更重要，因此权重函数采用对数项来限制测量次数。对于无法通过手眼标定直接测量或计算的边（例如两个机器人基座之间的变换矩阵），其测量次数n_{ij} 为 0。为不同的边分配权重，并引入最小权重约束和生成树准则，以简化图并寻找最优标定路径。本文采用 Prim 算法 [26] 生成最小生成树，因为 Prim 算法的时间复杂度为$o(n^2)$，其中n 为顶点数，且其时间复杂度仅与顶点数有关。

B. 边缘标定

MEMHS的标定问题可以分解为一系列两个顶点之间的标定任务。关于一对单元之间的标定方法，已有充分研究。对于固定相机之间的标定，如果两台相机的视场有足够的重叠，该问题就转化为双相机标定问题。分别获取每台相机的内参 [8] [9]。然后，将标定板放置在公共视场中，并使用PnP算法 [27] [28] 测量相机与标定板之间的位姿，即可计算出两个相机单元之间的位姿关系。

相机与机器人末端之间，以及相机与机器人基座之间的标定问题，可以分别建模为眼在手上和眼在手外问题。标定方程的形式为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XB}$ [14] [15]。其中，$\boldsymbol{X}$ 表示待求解的矩阵。将标定板放置在工作区域内的固定位置或机械臂末端，即可完成标定。

C. 全局优化与迭代标定

迭代标定阶段的主要思路是构建闭环优化误差函数，以最大程度地消除误差。通过调整多个单元之间的位姿矩阵 T_i 来完成标定。如果在最小生成树中任意两个未直接连接的顶点之间添加一条边，就会形成一个环，而沿环依次相乘对应矩阵所得的矩阵应为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$。然而，由于实际误差的存在，连续相乘后得到的矩阵并非单位矩阵，导致同一点的坐标不一致。因此，可以建立误差函数。标定误差函数的形式如下。

$$e = \frac{1}{2}||\sum_{k=0}^{S_{All}} \omega_k \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{N} ({}^{i-1}A_{ijk}^{i-1}\boldsymbol{X}_{ik})\right)^{N} \boldsymbol{P}_{jk} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jk}||^2 \quad (3)$$

其中，$\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{X}_i \in SE(3)$、$\omega_k$ 是优化的权重，$\boldsymbol{P}$ 是一组测量点。累加项 i 表示环路经过的边数，$\boldsymbol{A}_i$ 表示可测矩阵，$\boldsymbol{X}_i$ 表示需要优化的矩阵；由于环路中可能存在 N 个可测且可优化的矩阵，且环路可能被测量多次，因此应对所有测量结果求和。M表示当前环路的测量次数。计算误差时需要设置权重，误差由 ω_k表示。其中，ω_k 等于环路中所有边权重倒数之和。

$$\omega_k = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\Phi_i} \quad (4)$$

最后，对全部循环的总误差进行综合考虑，该误差由累积项 k 表示。

根据误差模型，优化目标可表示如下。

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{X}_{12}, \ldots, \boldsymbol{X}_{SN}] = \arg\min_{\boldsymbol{X}} \frac{1}{2}||f(\boldsymbol{X})||^2 \quad (5)$$

D. 确定最优标定回路

在将MEMHS的标定任务处理为加权图时，计算全部循环的所有误差是多余的，且其时间复杂度过高。其次，许多顶点之间难以获得直接的标定值。因此，需要找到最优标定回路，以降低复杂度并提高标定精度。最优标定回路具有以下特征：至少包含一条需要标定的边；至少包含一条可测量的边；该回路具有最短的权重距离，且回路中每条边的权重均采用上述确定的权重。提出了一种基于Dijkstra算法的最优标定回路算法。图2(c)展示了当前对连接顶点1和7的边的位姿矩阵进行计算的情况，该边以虚线表示。

为了确定最优标定回路，在MCG上执行路径规划。处理的主要目的是删除一些顶点，从而减少计算量并搜索正确的路径。为防止无法形成回路，首先删除直接连接顶点1和7的边。其次，删除距离过大或不连通的边。如图2(c)所示，顶点2与顶点6之间的关系（分别对应机器人末端的坐标系和固定相机坐标系）在不引入激光跟踪仪等额外仪器的情况下难以直接测量，因此需要在路径规划之前将其删除。

下一步是搜索最短路径。在这一步中使用 Dijkstra算法 [29] 。然后，删除冗余的标定回路后，误差函数具有以下形式。

$$e = \frac{1}{2}||f(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{SN})||^2 \tag{6}$$

$$f(\boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{X}_{12}, \dots, \boldsymbol{X}_{SN}) = \sum_{k=0}^{S} \omega_k \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{N} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijk} \, {}^{i-1}\boldsymbol{X}_{ik} \right) {}^{N}\boldsymbol{P}_{jk} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jk} \right) \tag{7}$$

E. 误差校正模型与校正方法

基于已确定的最优标定回路，得到一个误差模型。 数值优化从初始值开始，随后通过向误差模型引入扰动来计算导数，并迭代重复这一过程；通过添加扰动并计算扰动的导数，降低了计算雅可比矩阵的复杂度。 通过计算切平面上的线性极值来确定下降方向。关于三维光束法平差问题的近期研究表明，图优化具有高度非凸的特性 [30],尽管如此，由于第一阶段生成的初始值基本准确，陷入局部极小值的可能性显著降低。

由于平移矩阵 $\boldsymbol{X}_{ki}$ 属于李群 $SE(3)$，因此可以通过其李代数进行指数映射，其中 ∧ 是反对称符号，可将 3×1 向量转换为 3×3 反对称矩阵 [31]。

$$\boldsymbol{\xi}^{\wedge} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

然后，校准 $f(\boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{X}_{12}, \dots, \boldsymbol{X}_{SN})$ 等于 $g(\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{12}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{SN})$。

$$f(\boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{X}_{12}, \dots, \boldsymbol{X}_{SN}) = g(\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{12}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{SN}) = \sum_{k=0}^{S} \omega_k \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{N} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijk} e^{\boldsymbol{\xi}_{ki}^{\wedge}} \right) {}^{N}\boldsymbol{P}_{jk} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jk} \right) \tag{9}$$

加入扰动后，当前目标是找到扰动向量 $\delta\boldsymbol{\xi}$ ，使 $\frac{1}{2}||g(\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi})||^2$ 达到最小值。

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \arg\min_{\delta\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2}||g(\boldsymbol{\xi}) + J(\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi}||^2 \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{12}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{SN}] \tag{11}$$

$$\delta\boldsymbol{\xi} = [\delta\boldsymbol{\xi}_{11}, \delta\boldsymbol{\xi}_{12}, \dots, \delta\boldsymbol{\xi}_{SN}] \tag{12}$$

$J(\boldsymbol{\xi})$ 是 $g(\boldsymbol{\xi})$ 的雅可比矩阵。然后，在误差函数中添加扰动。

$$g(\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^{S} \omega_k \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{N} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijk} e^{\delta\boldsymbol{\xi}_{ki}^{\wedge}} e^{\boldsymbol{\xi}_{ki}^{\wedge}} \right) {}^{N}\boldsymbol{P}_{jk} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jk} \right) \tag{13}$$

然后对误差函数进行一阶泰勒展开。

$$g(\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi}) \approx g(\boldsymbol{\xi}) + J(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta\boldsymbol{\xi} \tag{14}$$

然后，公式（10）可展开如下。

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \arg\min_{\delta\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2}\left(||g(\boldsymbol{\xi})||^2 + 2g(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi} + (\delta\boldsymbol{\xi})^T J(\boldsymbol{\xi})^T J(\boldsymbol{\xi})(\delta\boldsymbol{\xi}) \right) \tag{15}$$

求上述公式关于 $\delta\boldsymbol{\xi}$ 的导数，并令其等于零。

$$2J(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}) + 2J(\boldsymbol{\xi})^T J(\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{16}$$

然后，

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \left(J(\boldsymbol{\xi})^T J(\boldsymbol{\xi}) \right)^{-1} J(\boldsymbol{\xi})^T g(\boldsymbol{\xi}) \tag{17}$$

剩下的问题是求雅可比矩阵 $J(\boldsymbol{\xi})$，这是该过程的关键。$J(\boldsymbol{\xi})$可表示如下。

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \left[\frac{\partial g}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}_{11}}, \frac{\partial g}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}_{12}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}_{SN}} \right] \tag{18}$$

根据导数的定义，以求 $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}_{KI}}$ 的偏导数为例。

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}_{KI}} = \frac{g(\xi_{11},\dots,\boldsymbol{\xi}_{KI}+\delta\boldsymbol{\xi}_{KI},\dots\boldsymbol{\xi}_{SN}) - g(\xi_{11},\dots,\boldsymbol{\xi}_{KI},\dots\boldsymbol{\xi}_{SN})}{(\boldsymbol{\xi}_{KI}+\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}) - (\boldsymbol{\xi}_{KI})} \tag{19}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}\to 0} \frac{\omega_K \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{I-1} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \right) \left(e^{\delta\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} - I \right) e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \prod_{i=I+1}^{N} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \right) {}^{N}\boldsymbol{P}_{jK} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jK} \right)}{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}}$$

在$\delta\boldsymbol{\xi} \to 0$ 处进行泰勒展开，$\lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} e^{\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}} \approx \boldsymbol{I} + \delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}$。然后将方程（19）展开如下。

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}_{KI}} = \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}\to 0} \frac{\omega_K \sum_{j=0}^{M} \left(\prod_{i=1}^{I-1} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \right) \left(\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}^{\wedge} \right) e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \prod_{i=I+1}^{N} \left({}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} \right) {}^{N}\boldsymbol{P}_{jK} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jK} \right)}{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}} \tag{20}$$

令 $\prod_{i=1}^{I-1} {}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{IjK}$ $\prod_{i=I+1}^{N} {}^{i-1}\boldsymbol{A}_{ijK} e^{\boldsymbol{\xi}_{Ki}^{\wedge}} = ( )$，${}^{I}\boldsymbol{T}_{NjK}$ ${}^{0}\boldsymbol{R}_{IjK}$ ${}^{I}\boldsymbol{R}_{NjK}$ 且 ( )，其中旋转分量为， ，平移分量分别为 ${}^{0}\boldsymbol{t}_{IjK}$、 ${}^{I}\boldsymbol{t}_{NjK}$。

那么 $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}_{KI}}$ 可表示如下。

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{w_K \sum_{j=0}^{M} \left({}^{0}\boldsymbol{T}_{IjK} \delta\boldsymbol{\xi}_{KI}^{\wedge} \, {}^{I}\boldsymbol{T}_{NjK} \, {}^{N}\boldsymbol{P}_{jK} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jK} \right)}{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}\to 0} \frac{w_K \sum_{j=0}^{M} \left({}^{0}\boldsymbol{T}_{IjK} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}_{KI}^{\wedge} & \delta\boldsymbol{\rho}_{KI} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix} {}^{I}\boldsymbol{T}_{NjK} \, {}^{N}\boldsymbol{P}_{jK} - {}^{0}\boldsymbol{P}_{jK} \right)}{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}_{KI}\to 0} w_K \sum_{j=0}^{M} \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{IjK} & -{}^{0}\boldsymbol{R}_{IjK} \left({}^{I}\boldsymbol{R}_{NjK} \, {}^{N}\boldsymbol{P}_{jK} + {}^{I}\boldsymbol{t}_{NjK} \right)^{\wedge} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

得到第 l 次迭代的向量，定义为 $\delta\boldsymbol{\xi}^l$，然后可得到新的 $\boldsymbol{\xi}$。

$$\boldsymbol{\xi}^{l+1} = \boldsymbol{\xi}^l + \delta\boldsymbol{\xi}^l \tag{22}$$

获得 $\boldsymbol{\xi}^{l+1}$ 后，我们可以通过上述方法得到 $\delta\boldsymbol{\xi}^{l+1}$ ，并完成下一次迭代。通过不断迭代，最终可以求解所有待优化的顶点。该算法可总结如下。

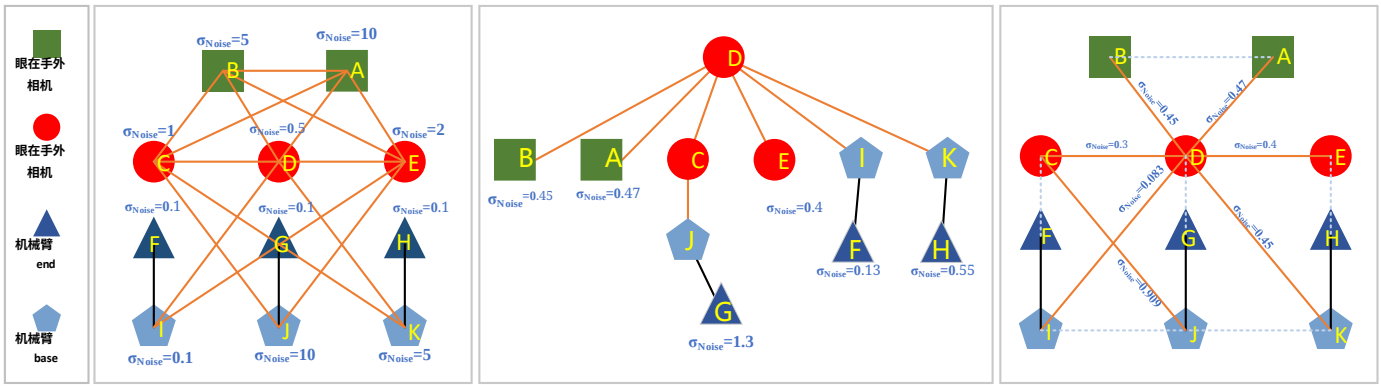


图 3 由三台机械臂和五台相机构成的模拟 MEMHS，其中包括 3 台手眼相机和 2 台眼在手外相机。(a) MEMHS 的 MCG。(b) 模拟 MEMHS 的扩展最小生成树。(c) 模拟 MEMHS 的最优标定回路。

算法 1. 计算坐标变换矩阵

输入：顶点 $\boldsymbol{p}$ 中的点 i 及其在顶点中的表示 j，即 ${}^{j}\boldsymbol{P}_{i}$

输出：顶点 i 与顶点 j之间的位姿矩阵

1. $\delta\boldsymbol{\xi}^{A} = [\delta\hat{\boldsymbol{\xi}}_1, \delta\hat{\boldsymbol{\xi}}_2, \ldots, \delta\hat{\boldsymbol{\xi}}_N]$
2. **While** $|\delta\boldsymbol{\xi}^{A}| > \varepsilon$
3. calculate $\frac{g(\hat{\xi}_1+\delta\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N+\delta\hat{\xi}_N)}{\delta\hat{\xi}_i}$ based on (21)
4. calculate $\delta\boldsymbol{\xi}^{A}$ based on (17)
5. $\hat{\boldsymbol{\xi}}_i = \hat{\boldsymbol{\xi}}_i + \delta\hat{\boldsymbol{\xi}}_i$
6. **End while**
7. ${}^{i}\mathbf{X}_{j} = e^{\hat{\xi}_i}$

IV. 实验与结果

A. 仿真

1) 最优标定回路仿真

In 经过标定。在该系统中，三台相机安装在机器人末端（眼在手上），其余两台相机固定安装在工作空间内（眼在手外）。系统中加入了具有不同噪声分布的测量值。记录最优标定回路及其标定结果以供测试。该系统的 MCG 和不同边的测量噪声如图 3(a) 所示。

我们 按照 MCG 中各顶点所示的数值，手动设置不同顶点的权重。 然后，将每个顶点的权重转换为相应边的权重，并采用最小生成树策略生成最优标定顺序。最优标定树如图 3(b) 所示，其中，点 D 是所生成的最优标定树的根顶点，图中还展示了各条路径的权重之和。该标定顺序采用深度优先算法，得到 MEMHS 最后，采用 Dijkstra算法方法得到的最优标定回路如 图 3(c) 所示，其中标出了各条边的权重。表 I. 闭环优化为在这些环路上进行。各顶点之间的真值和标定结果如表 II 所示。

表 最优 标定回路回路

$B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$
$C \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow C$
$D \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow D$
$C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow C$

2) 大规模 MEMHS 仿真

In 在随机设置在工作空间机械臂 并将25台相机随机安装在机械臂末端或放置在工作空间内的固定位置。得到上述全连接加权图。记录机器人基座和末端在100个位姿下的位姿，以及相机位姿作为真实值。然后向这些位姿添加多个均值为零的高斯噪声，作为仿真测量值。

在本仿真实验中，使用所提出的方法对上述系统进行标定；作为对比，从MCG中生成一些随机生成树和随机标定回路，以验证所提出算法的有效性。在不同噪声水平下，首先分别使用由我们的方法计算得到的生成树和随机生成树对MEMHS进行初始标定。然后， 测量并记录在闭环优化阶段中，使用由我们的方法生成的回路时每个迭代步骤的平均误差，如图4所示。作为对比，我们还对随机生成的回路执行闭环优化，并记录所有随机标定回路在每个迭代步骤的平均误差、误差最高的回路在每个迭代步骤的误差，以及MCG中所有回路在每个迭代步骤的平均误差。仿真结果如表III和图4所示。

图5展示了所提出的方法在存在较大测量误差时的鲁棒性。所提出的方法能够自动选择噪声最低的路径，且不会将误差较大的边纳入闭环优化，从而最大限度地减小测量误差较大的边所带来的影响。

表 II 所提标定方法的真实值与结果（单位：mm）

	旋转真实值	旋转标定	旋转误差（rad）	翻译接地真理	翻译标定	平移误差（毫米）
${}^{B}T_{A}$	(0,0,0)	(0.0932,0.0423,0.0312)	(0.0932,0.0423,0.0312)	(1000,0,0)	(996.177,-1.744,-2.7905)	(3.822,-1.744,-2.7905)
${}^{C}T_{F}$	(1,0,0)	(0.9981,-0.0067,-0.0738)	(0.0019,-0.0067,-0.0738)	(100,0,0)	(102.49,-2.9798,1.7161)	(2.49,-2.9798,1.7161)
${}^{D}T_{G}$	(0,1,0)	(0.006,1.0055,0.0025)	(0.006,0.0055,0.0025)	(0,100,0)	(-0.5911,100.1840,-0.1829)	(-0.5911,0.1840,-0.1829)
${}^{E}T_{H}$	(1,1,0)	(0.9975,1.0022,0.0002)	(0.0024,0.0022,0.0002)	(0,0,100)	(0.2827,0.2966,100.9590)	(0.2827,0.2966,0.9590)

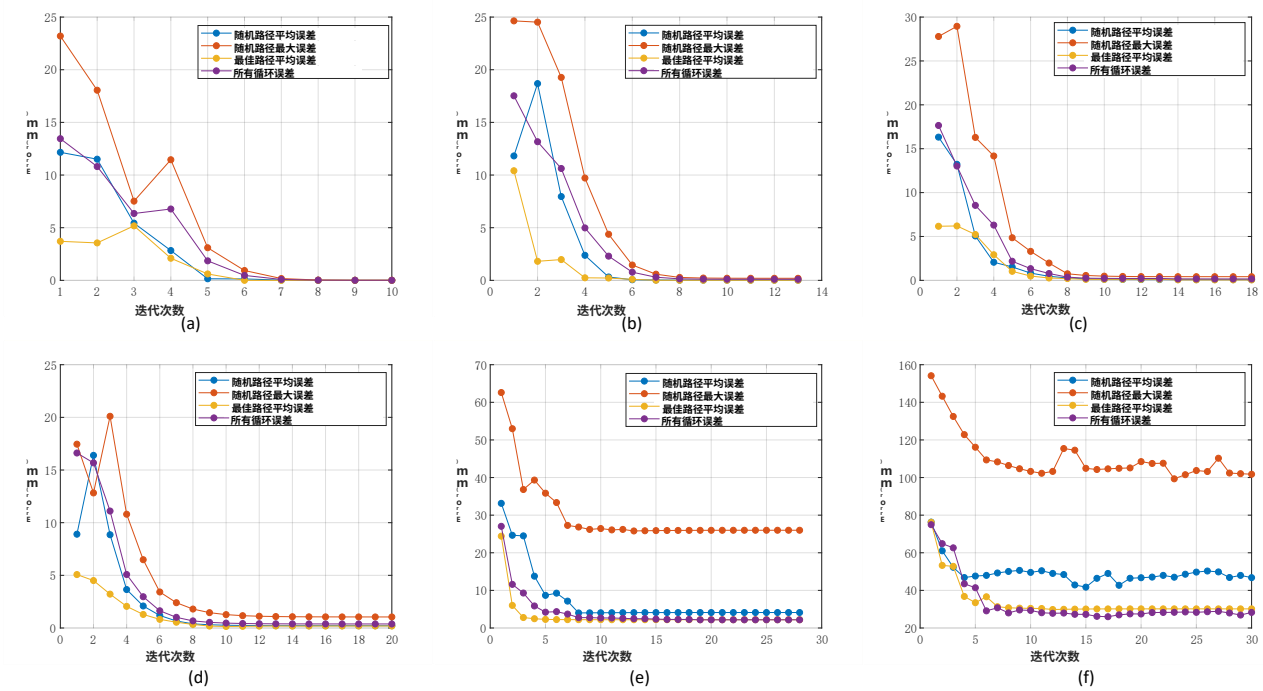


图4 不同噪声水平和迭代次数下模型的误差变化比较。(a) $\sigma_{Noise} = 0.1mm$ (b) $\sigma_{Noise} = 0.2mm$ (c) $\sigma_{Noise} = 0.5mm$ (d) $\sigma_{Noise} = 1mm$ (e) $\sigma_{Noise} = 10mm$ (f) $\sigma_{Noise} = 100mm$

表 III THE ERROR COMPARISON OF MODELS WITH DIFFERENT NOISE LEVELS噪声

水平 (mm)	VRD 路径标定误差 (Our 方法)	平均值随机 Path 标定误差	最差随机 Path 标定误差	全部循环标定误差
$\sigma_{Noise} = 0.1$	0.0019	0.0021	0.0136	0.0017
$\sigma_{Noise} = 0.2$	0.0092	0.0217	0.1948	0.0092
$\sigma_{Noise} = 0.5$	0.0516	0.0845	0.4185	0.0527
$\sigma_{Noise} = 1$	0.1895	0.2167	1.0485	0.1836
$\sigma_{Noise} = 10$	2.2018	4.1173	25.9876	2.1764
$\sigma_{Noise} = 100$	30.1567	42.5941	99.5153	28.2285

B. 机器人实验

为验证MEMHS通用标定方法的有效性，搭建了如图6所示的真实机器人实验平台。该实验平台由两台UR5机器人（6自由度，重复定位精度为±0.03 mm）、一台UR3机器人（6自由度，重复定位精度为 ±0.03 mm）和五台海康威视相机（MV-CE060-10UC）组成。三台相机分别安装在三条机械臂末端，另外两台相机则固定放置在工作空间内。这两台相机没有共同视场，其内参已使用[8]中提出的方法完成标定。首先，标定实验使用所提出的 MEMHS 标定方法进行标定，然后使用重投影误差验证标定精度。其次，作为对比实验，采用 Wu 的双机械臂标定方法 [18] 依次对两台机械臂进行标定。最后，图形演示实验可以更直观地说明所提出算法的有效性。

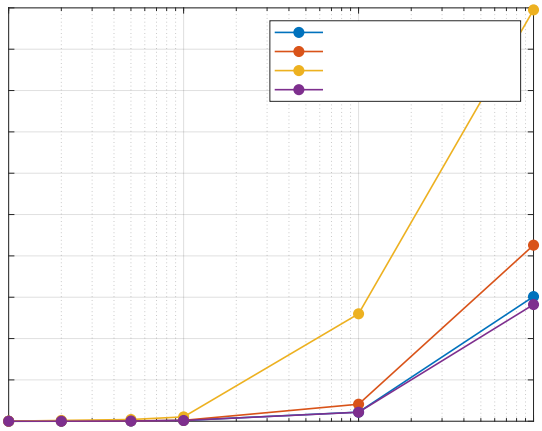


图5 测量噪声的影响。

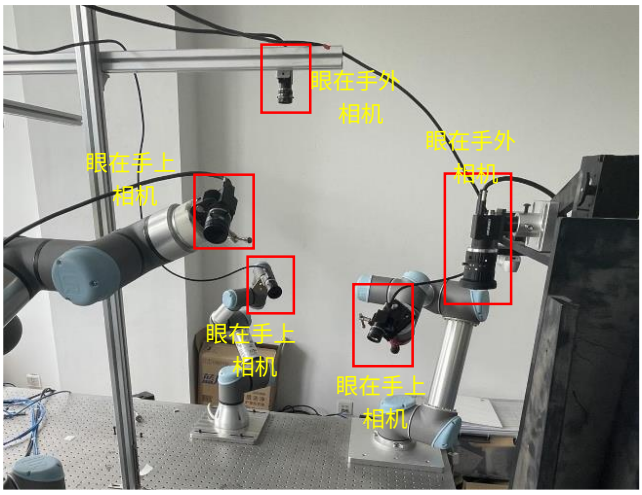


图6 五眼三手MEMHS。

1) 标定精度验证

TMEMHS模型表示为。图7所示模型表示可测边。在本次 MEMHS 标定实验中，我们主要关注与红色虚线相对应的变换矩阵。这些矩阵无法直接测量，但可以通过从附近的矩阵传递数值来获得，因此，这些标定结果能够有效检验所提出的标定方法。每个顶点的权重如图7所示。对于相机顶点，其权重根据相机的视场角、像素密度以及内参标定过程中的关键点重投影误差进行选择。对于机器人顶点，其权重则根据制造商提供的参考手册进行选择。

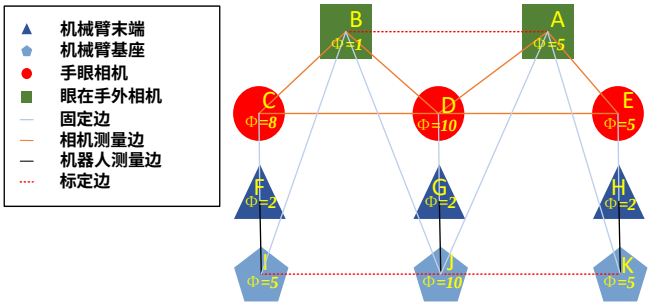


图7 MEMHS实验的MCG。

我们首先根据 MCG 获取最优标定路径。标定从 D 开始。我们为最优标定树中的每条边生成 30 个配置。记录相机测量结果和机器人关节参数，并使用手眼标定 [10] 进行初始标定。将带有 11×8 个关键点、间距为 $35mm$ 的标定板放置在工作空间中央，以获取 D-B、D-A、D-C 和 D-E 之间的边。然后，将带有 11×8 个关键点、间距为 $25mm$ 的较小标定板安装在各机器人末端，以获取 C-J、D- I 和 D-K 之间的边。最后，利用机器人的运动学模型获取 J-G、I-F 和 K-H 这几条边。由于本实验中真值未知，因此计算闭环误差以衡量精度。最优标定回路中的总体平均误差为 $1.1081mm$。

然后，在最优标定回路上进行闭环优化。经过 48 次迭代，整体闭环平均误差降至 $0.6182\ mm$，如图 8 所示。

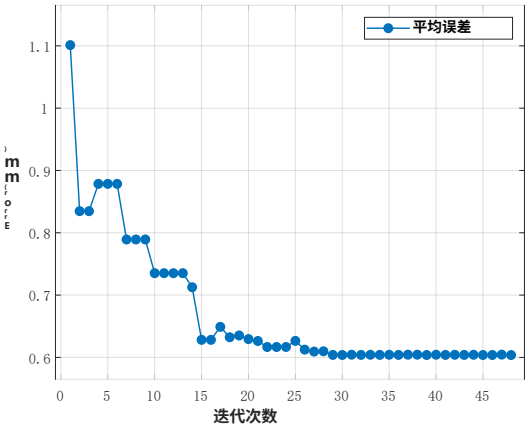


图8 实验中误差随迭代的变化

2) 与Wu方法的对比实验

T进在相同实验条件下，使用Wu方法对18号机器人场景中的两台机器人，以进一步说明我们提出的方法在多机器人场景中的有效性。将三台机器人分成两组双机器人组合，然后进行标定。详细的标定过程如下。

1. 使用Wu方法标定UR3机器人（顶点J-G-D）和一台UR5机器人（顶点K-H-E）。2. 然后也使用Wu方法标定UR3机器人（顶点J-G-D）和另一台UR5机器人（顶点I-F-C）。3. 将标定板放置在眼在手外相机（顶点A）与UR3机械臂的手眼相机（顶点D）的公共视场内，以确定顶点A与顶点D之间的位姿。4. 对顶点D和B重复步骤3。5. 将标定板放置在公共视场内，测量顶点C-E的位姿。6. 通过顶点之间的位姿转换计算其余待标定的边。

采用该方法得到的标定结果如下。与本文提出的标定方法相比，${}^{I}T_{J}$ 和${}^{J}T_{K}$ 的差值分别约为0.4787 mm和0.8852 mm。

由于无法测量该实验的真实值，我们通过验证闭环误差来比较标定结果，如表IV所示。

表IV 我们的方法与WU'S方法之间的闭环误差

闭环	Our 方法 (mm)	Wu's 方法 (mm)
$C-F-I-J-G-D$	0.6274	0.4213
$D-E-H-K-J-G$	0.6345	0.5812
$C-E-H-K-J-I-F$	0.6938	1.5923

尽管吴提出的双机器人标定方法在双机器人场景下表现良好，但我们的方法在多机器人场景下具有更高的标定精度，尤其是在非直接优化回路中。接下来的轨迹绘制实验将能够更加直观地展示标定精度。

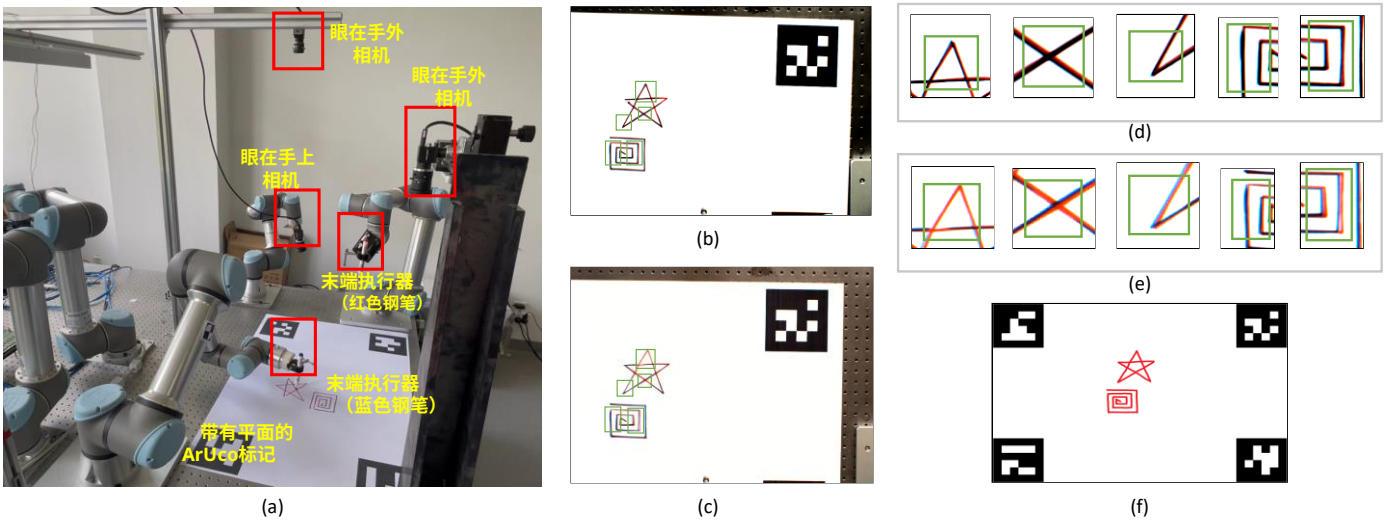


图9 (a) 绘图实验中使用的 MEMHS。(b) 使用我们的方法获得标定结果后的实际绘图轨迹。(c) 使用Wu 的方法获得标定结果后的实际绘图轨迹。(d) 使用我们的方法绘制的轨迹及其细节。(e) 使用 Wu 的方法绘制的轨迹及其细节。(f) 计算机上的期望轨迹。

3) 视觉引导绘图实验

In 本绘图实验中，我们的方法和 Wu 方法的结果来测试标定精度。如图 9(a) 所示，拆除两台机器人末端的相机，并安装标记以模拟工具。使用两台固定相机和一台机器人引导另外两台机械臂在平面上进行书写。在一台固定相机和一台机器人可覆盖的范围内放置一个印有 ArUco 标记的平面。这些相机通过 PnP [27] 算法测量标记图案，以检测平面的位姿和尺寸。在图 9(f) 所示的计算机上绘制轨迹，随后，机械臂将依次根据我们的方法和 Wu 方法得到的标定结果，在平面上绘制这些轨迹。机械臂绘制的轨迹彼此重叠，并且与图 9(b-e) 所示的预设轨迹一致。我们的方法和 Wu 方法绘制的两组轨迹具有相同的图案，但我们的方法具有更高的一致性。与 Wu 方法相比，采用我们的方法时，后绘制的黑色轨迹覆盖了先绘制的红色轨迹中更多的部分，且轨迹不一致区域更少。

V. 结论

本文提出了一种适用于 MEMHS 的通用标定方法，这是多相机机器人系统协同工作的基础。所提出的标定方法包括两个步骤。第一步，使用基于系统设置的最小生成树来确定最优标定顺序。第二步，提出一种基于最小标定环闭环误差的数值优化方法，以优化各单元之间的位姿。该标定方法无需额外的高精度传感器即可完成标定任务。仿真和机器人实验充分证明了所提方法的有效性。然而，不同系统设置以及机械臂自身运动学参数的影响仍需进一步研究。此外，还应研究不同类型的传感器（如全向相机）对标定精度的影响。所有这些问题都需要进一步研究。该方法是一种通用标定方法，可应用于不同配置的相机机器人系统，例如高精度多机器人航空发动机高温合金修复与打磨、多机器人集成电路微组装系统、多机器人协同汽车车身焊接，以及其他需要多机器人精确协作的场景。本文提出的多手眼机器人标定算法可广泛应用于上述场景。

参考文献

[1] J. Wang、L. Wu、M. Q. Meng 和 H. Ren，“面向协作多机器人的同步坐标标定”，载于 2014 年 IEEE/RSJ 国际智能机器人与系统会议，2014 年。[2] J.-L. Xiao、S.-L. Zhao、H. Guo、T. Huang 和 B. Lin，“双机器人镜像铣削协同加工方法研究”，《国际先进制造技术杂志》，第 105 卷，第 4071-4084 页，2019 年。[3] F. Shen、F. Qin、Z. Zhang、D. Xu、J. Zhang 和 W. Wu，“基于多视觉与传感器协作的薄片微器件自动位姿测量方法”，IEEE工业电子学汇刊，第 68 卷，第 488-498 页，2021 年。[4] C. Gao、Z. Li、H. Gao 和 F. Chen，“塑料袋打结的迭代交互建模”，载于机器人学习会议，2023 年。[5] B. Wen、W. Lian、K. Bekris 和 S. Schaal，“CaTGrasp：从仿真中学习杂乱场景下与任务相关的类别级抓取”，载于 2022 年国际机器人与自动化会议（ICRA），2022 年。[6] Y. Cong、D. Tian、Y. Feng、B. Fan 和 H. Yu，“面向智能制造的抗自遮挡高速三维纹理物体识别”，IEEE控制论汇刊，第 49 卷，第 3887–3897 页，2019 年 11 月。[7] “波音组装机器人遭遇困境，加剧埃弗里特生产混乱”，2016 年 9 月。 [在线]。网址：https://www.seattletimes.com/business/boeing-aerospace/boeings-s
t
ruggle-with-777-assembly-robots-adds-to-everett-production-snarl/.[访问日期：4 月 26 日2023]。[8] Z. Zhang，“一种灵活的新型相机标定技术”，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第 22 卷，第 1330-1334 页，2000 年。

[9] S. Ramalingam 和 P. Sturm，“相机标定的统一模型”，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第 39 卷，第 1309-1319 页，2017 年。[10] R. Tsai，“一种通用相机标定技术：使用现成电视摄像机和镜头实现高精度三维机器视觉计量”，IEEE机器人与自动化杂志，第 3 卷，第 323-344 页，1987 年。[11] W. Ding、X. Liu、D. Xu、D. Zhang 和 Z. Zhang，“一种用于离焦图像标定与测量的控制点稳健检测方法”，IEEE仪器与测量汇刊，第 66 卷，第 2725-2735 页，2017 年。[12] S. M. Harb 和 M. Burdekin，“识别 n 自由度机械臂误差运动的系统方法”，《国际先进制造技术杂志》，第 9 卷，第 126-133 页，1994 年。[13] Y. Cong、R. Chen、B. Ma、H. Liu、D. Hou 和 C. Yang，“基于三维视觉的机器人操作综合研究”，IEEE控制论汇刊，第 53 卷，第 1682–1698 页，2023 年 3 月。[14] R. Y. Tsai 和 R. K. Lenz，“一种全自主、高效的三维机器人手眼标定新技术”，IEEE机器人与自动化汇刊，第 5 卷，第 345-358 页，1989 年。[15] F. C. Park 和 B. J. Martin，“机器人传感器标定：在欧几里得群上求解 AX=XB”，IEEE机器人与自动化汇刊，第 10 卷，第 717-721 页，1994 年。[16] F. Ernst、L. Richter、L. Matthäus、V. Martens、R. Bruder、A. Schlaefer 和 A. Schweikard，“非正交工具/法兰与机器人/世界坐标系标定”，《国际医学机器人与计算机辅助手术杂志》，第 8 卷，第 407-420 页，2012 年。[17] G. Wang、W.-L. Li、C. Jiang、D.-H. Zhu、H. Xie、X.-J. Liu 和 H. Ding，“通过求解 AXB = YCZ 问题实现双机器人系统多坐标同步标定”，IEEE机器人学汇刊，第 37 卷，第 1172-1185 页，2021 年。[18] L. Wu、J. Wang、L. Qi、K. Wu、H. Ren 和 M. Q. H. Meng，“通过求解 AXB=YCZ 问题，实现协同操作的手眼、工具-法兰及机器人间同步标定”，IEEE机器人学汇刊，第 32 卷，第 413-428 页，2016 年。[19] Z. Fu、J. Pan、E. Spyrakos-Papastavridis、X. Chen 和 M. Li，“一种用于协作运动中双机器人坐标标定的基于双四元数的方法”，IEEE机器人与自动化快报，第 5 卷，第 4086-4093 页，2020 年。[20] Q. Ma、Z. Goh、S. Ruan 和 G. Chirikjian，“多机器人系统中 AXB = YCZ AXB=YCZ 标定问题的概率方法”，《自主机器人》，第 42 卷，2018 年。[21] C. Ruan、X. Gu、Y. Li、G. Zhang、W. Wang 和 Z. Hou，“基于双目视觉的多机器人协同磨削工作站基坐标系标定”，载于 2017年第2届机器人与自动化工程国际会议（ICRAE），2017 年。[22] F. Li、D. Xu、Y. Shi 和 Z. Zhang，“基于运动的显微相机标定及其在微管孔插入中的应用”，《光学工程》，第 53 卷，053103 页，2014 年。[23] Y. Qiao、Y. Chen、B. Chen 和 J. Xie，“一种利用不含标称运动学参数的标定模型进行多机器人系统标定的新方法”，《精密工程》，第 50 卷，第 211-221 页，2017 年。[24] L. Stadelmann、T. Sandy、A. Thoma 和 J. Buchli，“面向多样化大规模多机器人系统的末端执行器位姿校正”，IEEE机器人与自动化快报，第 4 卷，546–553 页，2019 年 4 月。[25] A. Maghami、A. Imbert、G. Côté、B. Monsarrat、L. Birglen 和 M. Khoshdarregi，“使用深度神经网络标定多机器人协同系统”，《智能与机器人系统杂志》，第 107 卷，55 页，2023 年 4 月。[26] R. C. Prim，“最短连接网络及其若干推广”，《贝尔系统技术期刊》，第 36 卷，第 1389-1401 页，1957 年。[27] J. A. Hesch 和 S. I. Roumeliotis，“用于透视点（PnP）的直接最小二乘（DLS）方法”，载于 2011年国际计算机视觉会议，2011 年。[28] A. Penate-Sanchez、J. Andrade-Cetto 和 F. Moreno-Noguer，《用于鲁棒相机位姿与焦距估计的穷举线性化》，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第 35 卷，第 2387–2400 页，2013 年。[29] E. W. Dijkstra，《关于两个与图相关问题的注记》，Numerische Mathematik，第 1 卷，第 269–271 页，1959 年。[30] U. Qayyum 和 J. Kim，《3D SLAM 问题局部极小值数量分析》，载于 2013 年 IEEE 国际机器人与仿生学会议（ROBIO），2013 年。[31] J. Solà、J. Deray 和 D. Atchuthan，《机器人状态估计的微分李理论》，arXiv 预印本 arXiv:1812.01537，2018 年。



Zishun Zhou于2020年获得中国哈尔滨工业大学工学学士学位。目前，他是澳大利亚堪培拉澳大利亚国立大学电气工程专业的研究生，并在中国北京中国科学院自动化研究所担任学生实习生，师从Xilong Liu。他的研究兴趣包括视觉测量、多视图立体视觉和三维稠密重建。



Liping Ma 于2007年获得中国长沙湖南农业大学理学学士学位，并于2015年获得中国北京北京理工大学机械工程博士学位。目前，他是精密传感与控制研究中心副教授，同时任职于中国科学院大学人工智能学院。他目前的研究兴趣包括机器人设计、机电系统设计、视觉测量及其应用。



Xilong Liu于2009年获得中国北京北京交通大学理学学士学位，并于2014年获得中国科学院自动化研究所控制理论与控制工程博士学位。目前，他是中国科学院自动化研究所精密传感与控制研究中心副教授。他目前的研究兴趣包括图像处理、模式识别和视觉测量。



Zhiqiang Cao于1996年和1999年分别获得中国济南山东工业大学学士和硕士学位。2002年，他获得中国北京中国科学院自动化研究所控制理论与控制工程博士学位。目前，他是复杂系统管理与控制国家重点实验室的教授，该实验室隶属于中国科学院自动化研究所。他的研究兴趣包括服务机器人和多机器人协同。



Junzhi Yu于1998年和2001年分别获得中国太原中国北方大学安全工程学士学位和精密仪器与机械学硕士学位，并于2003年获得中国北京中国科学院自动化研究所控制理论与控制工程博士学位。2004年至2006年，他在北京大学系统与控制中心从事博士后研究。他曾任他于2006年加入中国科学院自动化研究所，担任副教授，并于2012年成为正教授。2018年，他加入北京大学工学院，担任终身正教授。他目前的研究兴趣包括智能机器人、运动控制和智能机电系统。