arXiv:2305.02532v1 [nlin.SI] 4 May 2023

复合 WKI-SP 层级与多环孤子解

胡晓瑞，徐天乐，张俊阳，沈守峰*

[a]浙江工业大学应用数学系，中国浙江省杭州市 *310023*

摘要

本文提出了复合 WKI-SP（和达地-今野-市川方程与短脉冲方程）方程的广义层级。所提出的可积非线性方程包括 WKI 型方程、SP 型方程以及复合广义 WKI-SP 方程。本文建立了一系列拟里变换，将复合 WKI-SP 方程与 MKdV-SG（修正 Korteweg-de Vries 方程与正弦-戈登方程）联系起来。作为应用，本文求得了一个复合 WKI-SP（称为 WKI-SP$^{(1,1)}$）方程的多环孤子解。本文着重展示了双环孤子的丰富孤子行为。表格详细展示了各参数对双环孤子运动的影响。

关键词：
WKI-SP 方程、MKdV-SG 方程、拟里变换、环孤子。

1. 引言

过去十年间，我们对一类非线性可积方程的认识取得了显著进展，这类方程被称为线性微分方程组的相容性条件。实李代数（如 sl(2,$\mathbb{R}$)和 so(3,$\mathbb{R}$)）上的零曲率方程为构造孤子层级奠定了基础。其中最著名的是 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur（AKNS）层级，它包括基本的 Korteweg-de Vries（KdV）方程、修正 KdV （ MKdV ）方程、正弦 - 戈登（ SG ）方程、非线性 Schr¨odinger （ NLS ）方程等。

1979年，Wadati、Konno 和 Ichikawa（WKI） [1, 2]构造了一系列新的可积非线性演化方程，例如

$$u_t + \left[\frac{u_x}{(1+u^2)^{3/2}}\right]_{xx} = 0. \tag{1}$$

方程(1)的非线性项具有饱和效应。方程(1)描述了张力作用下弹性梁的非线性横向振荡 [3]。在过去的几十年里，许多研究人员对这一WKI方程(1)进行了大量研究。例如，Wadati等人发现了无穷多个守恒律和哈密顿形式 [1]。文献[4]利用逆散射变换法得到了单孤子解和双孤子解。Qu 和 Zhang [5]从E^3 中的曲线运动推导出了WKI模型，并给出了相应的群不变解。Zhang等人提出了达布变换 [6] ， Tu 和 Xu [7]研究了具有箱形初值的直接散射问题。

近年来，短脉冲型系统因其在物理学中的重要应用而受到广泛关注。最早的此类方程可能是短脉冲（SP）方程

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}, \tag{2}$$

*mathssf@zjut.edu.cn电子邮箱地
址：(沈守峰)

预印本已提交至 *XXX* *2023年5月5日*

该方程具有WKI型的拉克斯对。SP方程（2）由Sch¨afer和Wayne [8, 9]提出，作为（NLS方程的）替代模型，用于近似描述二氧化硅光学介质中超短强红外脉冲的演化。数值模拟表明 [9] ，SP方程可成功用于描述宽频谱脉冲。事实证明，SP方程最早出现在Rabelo的论文 [10]中，当时他正在研究伪球面。SP方程和双分量SP（实或复）方程首次在文献[11, 12]中作为负WKI层次中的特殊可积情形被提出。文献[13]给出了双分量SP系统的多孤子解和柯西问题。SP方程被证明是可积的 [15, 16]，因为它具有拉克斯对、递归算子、双哈密顿结构以及各种精确解。人们采用了不同方法来构造SP方程的解。特别地，Anton Sakovich和Sergei Sakovich [17] 通过这两个可积方程之间的变换，从SG方程的呼吸子解中找到了一个精确的无奇异孤立波解。Kuetche等人 [18] 利用Hirota双线性方法和Hodnett-Moloney方法计算了双环孤子解。Matsuno [19, 20] 得到了多环孤子、多呼吸子以及周期解。Liu等人 [21] 通过行列式构造了<N>重达布变换。Riemann-Hilbert方法 [22, 23] 被应用于SP方程，并对解的长时间行为进行了研究。Liu和Mao [24] 建立了<N>-B¨acklund变换，并求出了包括环孤子、呼吸子解及其相互作用解在内的各种解。Feng等人 [25, 26] 研究了其可积离散化，并得到了半离散系统和全离散系统。

本文着重研究如何从两个线性微分系统的相容性条件构造复合WKI-SP方程的广义层级。众所周知，WKI方程和SP方程都存在环形孤子解 [4, 27]。值得注意的是，通过拟里变换[28]，它们可以转化为具有光滑孤子解的某些孤子方程。例如，WKI弹性梁方程可转化为势mKdV方程。SP方程则可转化为可积的SG方程。因此，我们希望探寻复合MKdV-SG方程（Gu在参考文献[29, 30]中给出）与WKI-SP 方程之间的联系。作为应用，我们将计算一个WKI-SP方程的多环孤子解。

2. 复合WKI-SP类型方程

数学家、工程师和物理学家研究的许多最棘手的问题和最引人入胜的现象，本质上都是非线性的。这些现象通常可以用非线性偏微分方程建模（并且有充分理由相信这些模型是准确的）。诚然，我们还需要许多年，才能具备彻底处理这些方程所需的数学能力。近几十年来，逆散射变换（IST）已被用于求解许多具有重要物理意义的方程。由于该方法本身与傅里叶变换相似，这一理论可视为傅里叶分析向非线性问题的自然延伸。伴随IST的发展，还形成了一种系统方法，使人们能够识别出某些重要类别的演化方程，并可用逆散射方法求解。这些演化方程表示为相容性条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad [U, V] = UV - VU \tag{3}$$

对于线性微分方程组

$$\Phi_x = U(x, t; \lambda)\Phi, \qquad \Phi_t = V(x, t; \lambda)\Phi, \tag{4}$$

其中U、V 和 Φ 是复$N \times N$ 矩阵。矩阵U 和V 通常是参数λ的有理函数。

2.1. AKNS型和WKI型Lax对

为了提高 文章的可读性，我们首先回顾已知AKNS层次和WKI层次的类似结果hy.

1973年，Ablowitz、Kaup、Newell 和 Segur（AKNS）提出了一大类非线性演化方程 [31], 其中U 和V 表示

$$U=\begin{pmatrix} -i\lambda & q(x,t) \\ r(x,t) & i\lambda \end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix} A(x,t;\lambda) & B(x,t;\lambda) \\ C(x,t;\lambda) & -A(x,t;\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

相应的相容性条件 (3) 得出流动方程

$$A_x = qc - rB, \tag{6}$$
$$q_t - B_x - 2i\lambda B - 2qA = 0, \tag{7}$$
$$r_t - C_x + 2i\lambda C + 2rA = 0. \tag{8}$$

例如，AKNS组

$$A=\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda^N, \quad B=\sum_{j=0}^{N} b_j\lambda^N, \quad C=\sum_{j=0}^{N} c_j\lambda^N. \tag{9}$$

为作说明，取$N = 3$。通过求解方程(6)，AKNS发现

$$A = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (\frac{1}{2}a_3qr + a_1)\lambda + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{i}{4}a_3(qr_x - q_xr) + a_0, \tag{10}$$
$$B = ia_3q\lambda^2 + (ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x)\lambda + (ia_1q + \frac{i}{2}a_3q^2r - \frac{1}{2}a_2q_x - \frac{i}{4}a_3q_{xx}), \tag{11}$$
$$C = ia_3r\lambda^2 + (ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x)\lambda + (ia_1r + \frac{i}{2}a_3qr^2 + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{i}{4}a_3r_{xx}) \tag{12}$$

以及演化方程

$$q_t + \frac{i}{4}a_3(r_{xxx} - 6qrq_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) - ia_1q_x - 2a_0q = 0, \tag{13}$$
$$r_t + \frac{i}{4}a_3(r_{xxx} - 6qrr_x) - \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2qr^2) - ia_1r_x + 2a_0r = 0. \tag{14}$$

情形 ***I***。 作为一种特殊情形，令$r = -q$ 和

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -4i. \tag{15}$$

于是AKNS得到了修正的mKdV方程

$$q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0. \tag{16}$$

情形 ***II***。同样地，取

$$A=\frac{a(x,t)}{\lambda}, \quad B=\frac{b(x,t)}{\lambda}, C=\frac{c(x,t)}{\lambda}, \tag{17}$$

AKNS 发现了

$$q_{xt} = -4iaq, \quad r_{xt} = -4iar, \quad a_x = \frac{i}{2}(qr)_t. \tag{18}$$

作为一个特殊但重要的情形，我们列出以下 SG方程

$$u_{xt} = \sin u \tag{19}$$

with

$$a = \frac{i}{4}\cos u, \quad b = c = \frac{i}{4}\sin u, \quad r = -q = \frac{1}{2}u_x. \tag{20}$$

1979年，Wadati、Konno 和 Ichikawa [1, 2] 提出了对逆散射形式（尤其是U）的推广，并发现了一系列新的可积非线性演化方程。事实上，他们考虑了

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}. \tag{21}$$

相应的相容性条件 (3) 导出了流动方程

$$A_x = \lambda(qC - rB), \tag{22}$$
$$\lambda q_t - B_x - 2i\lambda B - 2\lambda qA = 0, \tag{23}$$
$$\lambda r_t - C_x + 2i\lambda C + 2\lambda rA = 0. \tag{24}$$

情形 ***III.*** 作为一个特例，通过选择

$$A = -\frac{4i}{\sqrt{1-rq}}\lambda^3 + \frac{rq_x - qr_x}{(1-rq)^{3/2}}\lambda^2, \tag{25}$$
$$B = \frac{4q}{\sqrt{1-rq}}\lambda^3 + \frac{2iq_x}{(1-rq)^{3/2}}\lambda^2 - \left(\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_x\lambda, \tag{26}$$
$$C = \frac{4r}{\sqrt{1-rq}}\lambda^3 - \frac{2ir_x}{(1-rq)^{3/2}}\lambda^2 - \left(\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_x\lambda, \tag{27}$$

他们得到了

$$q_t + \left(\frac{q_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_{xx} = 0, \tag{28}$$
$$r_t + \left(\frac{r_x}{(1-rq)^{3/2}}\right)_{xx} = 0. \tag{29}$$

当$r = -q$时，上述方程化简为典型的 WKI方程 (1)。

情形 ***IV.*** 此外，作为另一个特例，通过选择$r = q = iu_x$ 和

$$A = \frac{i\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{4i\lambda}, \quad B = \frac{i\lambda}{2}u^2u_x - \frac{1}{2}u, \quad C = \frac{i\lambda}{2}u^2u_x + \frac{1}{2}u, \tag{30}$$

可以得到已知的 SP方程 (2)。Sakovich A 和 Sakovich S 首次于2005年发现了方程 (2) 的这一 Lax 对。

*2.2. WKI-SP*型可积方程

本文着重研究一系列 WKI-SP 型复合方程，这些方程将基于线性系统 (4) 推导得到。为方便起见，我们将U 改写为

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda p(x,t) \\ \lambda p(x,t) & -\lambda \end{pmatrix}. \tag{31}$$

式(22)–(24)变为

$$A_x = \lambda p(C - B), \tag{32}$$
$$\lambda p_t - B_x + 2\lambda B - 2\lambda pA = 0, \tag{33}$$
$$\lambda p_t - C_x - 2\lambda C + 2\lambda pA = 0. \tag{34}$$

因此，我们得到

$$C - B = \frac{A_x}{\lambda p}, \tag{35}$$
$$C + B = -\frac{(C - B)_x}{2\lambda} + 2pA, \tag{36}$$
$$p_t = \frac{(C + B)_x}{2\lambda} + (C - B). \tag{37}$$

不同于之前的参考文献，我们如下选取A：

$$A = \sum_{j=0}^{n+m} a_j \lambda^{2n-2j+1}, \qquad (n \geq 0, m \geq 0). \tag{38}$$

将(35)和(36)代入(37)，并将其展开为关于 λ的幂级数，可得

$$p_t = -\frac{1}{4}\left(\frac{a_{n-1,x}}{p}\right)_{xx} + (pa_n)_x + \frac{a_{nx}}{p} \tag{39}$$

以及以下两组递推公式

$$(pa_0)_x + \frac{a_{0x}}{p} = 0, \tag{40}$$
$$(pa_j)_x + \frac{a_{j,x}}{p} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_{j-1,x}}{p}\right)_{xx}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2, n-1), \tag{41}$$

and

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{a_{n+m,x}}{p}\right)_{xx} = 0, \tag{42}$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{a_{j,x}}{p}\right)_{xx} = (pa_{j+1})_x + \frac{a_{j+1,x}}{p}, \quad (j = n+m-1, \ldots, n+1, n). \tag{43}$$

可见，$\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$和$\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}, a_{n+m}\}$分别由式(40)–(41)和式(42)–(43)确定。为方便起见，对于具体的n 和m，我们将(39)中定义的方程记为WKI-SP$^{(n,m)}$ 方程。

此外，通过求解式(40)–(41)，可得

$$a_0 = \frac{a_0^0(t)}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{44}$$
$$a_j = \frac{1}{4\sqrt{1+p^2}}\partial^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{a_{j-1,x}}{p}\right)_{xx}\right), \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{45}$$

这意味着

$$a_1 = -\frac{a_0^0(t)\left[(p^3+p)p_{xx} - \frac{1}{2}(6p^2+1)p_x^2\right]}{4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}, \tag{46}$$

$$a_2 = -\frac{a_0^0(t)}{32(1+p^2)^{\frac{13}{2}}}\Big[2p(1+p^2)^3 p_{xxxx} - 2(1+p^2)^2(15p^2+1)p_x p_{xxx} - (1+p^2)^2(20p^2-1)p_{xx}^2$$
$$+ 21p(1+p^2)(10p^2-1)p_x^2 p_{xx} - \frac{21}{4}(40p^4-16p^2-1)p_x^4\Big],$$
$$\vdots$$

通过求解方程 (42)–(43)，我们得到

$$a_{n+m} = a_{n+m}^0(t), \tag{47}$$
$$a_j = 4\partial^{-1}\Big(p\partial^{-2}\Big(\frac{a_{j+1,x}}{p}\Big)\Big) + 4\partial^{-1}(p\partial^{-1}(pa_{j+1})), \tag{48}$$
$$(j = n+m-1, n+m-2, \ldots, n),$$

这意味着

$$a_{n+m} = a^{0}_{n+m}(t), \tag{49}$$
$$a_{n+m-1} = 2a^{0}_{n+m}(t)(\partial^{-1}p)^2, \tag{50}$$
$$a_{n+m-2} = a_{n+m}^0(t)\Big[\frac{2}{3}(\partial^{-1}p)^4 + 16(\partial^{-1}p)(\partial^{-3}p) - 8(\partial^{-2}p)^2\Big], \tag{51}$$
$$\begin{aligned} a_{n+m-3} = a_{n+m}^0(t)\Big\{&\frac{4}{45}(\partial^{-1}p)^6 + \frac{32}{3}\Big[(\partial^{-1}p)^3(\partial^{-3}p) + (\partial^{-1}p)\Big(\partial^{-2}(\partial^{-1}p)^3\Big) - (\partial^{-2}p)\Big(\partial^{-1}(\partial^{-1}p)^3\Big) \\ &- \frac{3}{2}\partial^{-1}\Big(p(\partial^{-2}p)^2\Big)\Big] + 64\Big[(\partial^{-1}p)(\partial^{-5}p) - (\partial^{-2}p)(\partial^{-4}p) + \frac{1}{2}(\partial^{-3}p)^2\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{52}$$
$$\vdots$$

为了清晰地表示公式，我们有时用 ∂^{-1} 代替 $\int x dx$ 。

2.2.1. 当 $n = 0$若 $n = 0$时，
(38) 变为

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^{-2j+1} = a_0\lambda + a_1\lambda^{-1} + a_2\lambda^{-3} + \cdots + a_m\lambda^{-(2m-1)}. \tag{53}$$

于是我们得到广义的SP方程层级

$$p_t = (pa_0)_x + \frac{a_{0x}}{p}. \tag{54}$$

这里a_0 由$n = 0$时的递推公式（47）和（48）确定。现在我们给出SP方程层级的一些特殊情形。

情形***1.*** 对于$m = 1$和$p = u_x$，有

$$a_1 = a_1^0(t), \quad a_0 = 2a_1^0(t)u^2, \tag{55}$$

这恰好导出了短脉冲方程

$$u_{xt} = 4a_1^0(t)\Big(\frac{1}{6}(u^3)_{xx} + u\Big). \tag{56}$$

按照上述约定，我们将方程（56）标记为WKI-SP$^{(0,1)}$ 方程。

情形 ***2***。 对于 $m = 2$和 $p = u_{xxx}$，我们有

$$a_2 = a_2^0(t), \quad a_1 = 2a_2^0(t)u_{xx}^2, \quad a_0 = \frac{2}{3}a_2^0(t)u_{xx}^4 + 16a_2^0(t)uu_{xx} - 8a_2^0(t)u_x^2, \tag{57}$$

这将得到一个高阶短脉冲（即 WKI-SP$^{(0,2)}$）方程

$$u_{xxxt} = \frac{2}{15}a_2^0(t)(u_{xx}^5)_{xx} + a_2^0(t)[u_{xxx}(16uu_{xx} - 8u_x^2)]_x + \frac{8}{3}a_2^0(t)u_{xx}^3 + 16a_2^0(t)u. \tag{58}$$

这个方程只是参考文献[32]中所给方程的局部形式。

情形 ***3.*** 当$m = 3$且$p = u_{xxxxx}$时，我们有

$$a_3 = a_3^0(t), \quad a_2 = 2a_3^0(t)u_{xxxx}^2, \quad a_1 = \frac{2}{3}a_3^0(t)u_{xxxx}^4 + 16a_3^0(t)u_{xx}u_{xxxx} - 8a_3^0(t)u_{xxx}^2, \tag{59}$$

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{4}{45}a_3^0(t)u_{xxxx}^6 + 32a_3^0(t)\Big[\frac{1}{3}u_{xx}u_{xxxx}^3 - \frac{1}{2}u_{xxx}^2u_{xxxx}^2 + 2uu_{xxxx} - 2u_xu_{xxx} + u_{xx}^2 + u_{xxxx}\partial^{-1}(u_{xxxx}^2u_{xxx}) \\ &+ \frac{32}{3}u_{xxxx}\partial^{-2}u_{xxxx}^3\Big], \end{aligned} \tag{60}$$

由此得到 WKI-SP$^{(0,3)}$ 方程

$$\begin{aligned} u_{xxxxxt} =& a_3^0(t)\Big\{u_{xxxxxx}\Big[\frac{4}{45}u_{xxxx}^6 + 32\Big(\frac{1}{3}u_{xx}u_{xxxx}^3 - \frac{1}{2}u_{xxx}^2u_{xxxx}^2 + u_{xxxx}\partial^{-1}(u_{xxxx}^2u_{xxx}) + \frac{32}{3}u_{xxxx}\partial^{-2}(u_{xxxx}^3) \\ &+ 64\Big(uu_{xxxx} - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2\Big)\Big)\Big] + (u_{xxxxx} + u_{xxxxx}^{-1})\Big[\frac{8}{15}u_{xxxx}^5u_{xxxxx} + 32u_{xxxxx} \\ &\Big(u_{xx}u_{xxxx}^2 - u_{xxx}^2u_{xxxx} + \partial^{-1}(u_{xxxx}^2u_{xxx}) + \frac{32}{3}u_{xxxxx}\partial^{-2}(u_{xxxx}^3)\Big) + 64uu_{xxxxx}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{61}$$

2.2.2. $m = 0$时的 *WKI*层级

若$m = 0$，则可将 (38) 改写为

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^{2n-2j+1} = a_0\lambda^{2n+1} + a_1\lambda^{2n-1} + a_2\lambda^{-3} + \cdots + a_n\lambda. \tag{62}$$

于是得到广义WKI方程层级

$$p_t = -\frac{1}{4}\Big(\frac{a_{n-1,x}}{p}\Big)_{xx} + a_n^0(t)p_x, \tag{63}$$

利用递推公式（44）和（45）。WKI层次中的一些特殊方程如下所示。情形 ***4.*** 对于$n = 1$和$p = u_x$，方程（63）结合（46）恰好就是 WKI 方程

$$u_{xt} = \frac{a_0^0(t)}{4}\left[\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{xx} + a_1^0(t)u_{xx}. \tag{64}$$

情形 ***5.*** 当$n = 2$且$p = u_x$时，式（63）与（47）构成高阶 WKI（即 WKI-SP$^{(2,0)}$）方程

$$\begin{aligned} u_{xt} =& \frac{a_0^0(t)}{16(1+u_x^2)^{\frac{13}{2}}}\Big[u_{xxxxxx}\left(1+u_x^2\right)^4 - 20u_xu_{xx}u_{xxxxx}\left(1+u_x^2\right)^3 - 35u_{xxxx}\Big(u_{xxx}\left(u_x^3+u_x\right) - \frac{39}{7}u_{xx}^2 \\ &(u_x^2 - \frac{1}{6})\Big)\left(1+u_x^2\right)^2 + 270u_{xx}\Big(\left(1+u_x^2\right)^2(u_x^2 - \frac{1}{6})u_{xxx}^2 - \frac{77}{18}u_xu_{xxx}u_{xx}^2(u_x^2 - \frac{1}{2})\left(1+u_x^2\right) \\ &+ \frac{28}{9}u_{xx}^4(u_x^4 - u_x^2 + \frac{1}{16})\Big)\Big] + \frac{1}{4}a_1^0(t)\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_{xxx} + a_3^0(t)u_{xx}. \end{aligned} \tag{65}$$

2.2.3. $n \neq 0, m \neq 0$ 的复合 *WKI-SP* 层级

对于$n \neq 0$ 和$m \neq 0$，我们得到广义复合 WKI-SP$^{(n,m)}$ 方程（39）。这里给出三个例子。

情形 ***6***。 当$n = 1$、$m = 1$ 和$p = u_x$时，方程 (39) 给出 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程。

$$u_{xt} = \frac{a_0^0(t)}{4}\left[\frac{u_{xx}}{\left(1+u_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{xx} + a_1^0(t)u_{xx} + 4a_2^0(t)\left(\frac{1}{6}(u^3)_{xx} + u\right). \tag{66}$$

情形 ***7***。 当 $n = 1$、$m = 2$ 且 $p = u_{xxx}$ 时，我们得到以下 WKI-SP$^{(1,2)}$ 方程。

$$u_{xxxt} = \frac{a_0^0(t)}{4}\left[\frac{u_{xxxx}}{(1+u_{xxx}^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{xx} + a_2^0(t)\left(\frac{2}{15}(u_{xx}^5)_{xx} + [u_{xxx}(16uu_{xx} - 8u_x^2)]_x + \frac{8}{3}u_{xx}^3 + 16u\right). \tag{67}$$

情形 ***8***。 对于 $n = 2$、$m = 1$ 和 $p = u_x$，我们得到以下 WKI-SP$^{(2,1)}$ 方程。

$$\begin{aligned} u_{xt} = {} & \frac{a_0^0(t)}{16\left(1+u_x^2\right)^{\frac{13}{2}}}\Big[u_{xxxxxx}\left(1+u_x^2\right)^4 - 20u_xu_{xx}u_{xxxxx}\left(1+u_x^2\right)^3 - 35u_{xxxx}\Big(u_{xxx}\left(u_x^3+u_x\right) - \frac{39}{7}u_{xx}^2 \\ & (u_x^2 - \frac{1}{6})\Big)\left(1+u_x^2\right)^2 + 270u_{xx}\Big(\left(1+u_x^2\right)^2(u_x^2 - \frac{1}{6})u_{xxx}^2 - \frac{77}{18}u_xu_{xxx}u_{xx}^2\left(u_x^2 - \frac{1}{2}\right)(1+u_x^2) \\ & + \frac{28}{9}u_{xx}^4(u_x^4 - u_x^2 + \frac{1}{16})\Big)\Big] + \frac{1}{4}a_1^0(t)\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_{xxx} + 4a_3^0(t)\left(u + \frac{1}{6}\left(u^3\right)_{xx}\right). \end{aligned} \tag{68}$$

3. MKdV-SG 与 WKI-SP 方程之间的拟里变换

在参考文献[29, 30], 中，Gu 得到了 MKdV-SG 型的复合方程。

$$q_t - \frac{1}{4}\left[4a_nq + \left(\frac{a_{nx}}{q}\right)_x\right]_x + \frac{a_{n+1,x}}{q} = 0 \tag{69}$$

以及以下两组递推公式

$$a_{0x} = 0, \tag{70}$$

$$a_{hx} = \frac{1}{4}q\left[4a_{h-1}q + \left(\frac{a_{h-1,x}}{q}\right)_x\right]_x, h = 1, 2, \ldots, n, \tag{71}$$

and

$$\left[4a_{l+m}q + \left(\frac{a_{l+m,x}}{q}\right)_x\right]_x = 0, \tag{72}$$

$$\left[4a_{h-1}q + \left(\frac{a_{h-1,x}}{q}\right)_x\right]_x = 4\frac{a_{h,x}}{q}, h = n+m, \ldots, n+2. \tag{73}$$

在本节中，我们将构造上述 MKdV-SG 型方程中的若干方程与 WKI-SP$^{(n,m)}$ 方程之间的拟古变换。为清楚起见，对于特定的n 和m，我们将式（69）中的具体方程记为 MKdV-SG$^{(n,m)}$ 方程。

3.1. MKdV-SG$^{(1,1)}$ 与 *WKI-SP*$^{(1,1)}$ 方程之间的拟里变换取$n = 1$, $m = 1$和$q = -\frac{\theta_s}{2}$代入式（69），作者给出了 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程

$$\theta_{ts} - \frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{3}{2}\theta_s^2\theta_{ss} + \theta_{ssss}\right) - \alpha_1(t)\theta_{ss} = \alpha_2(t)\sin\theta, \tag{74}$$

它与非线性一维原子晶格的运动有关。

对s 积分式 (74)，得到

$$\theta_t - \frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{1}{2}\theta_s^3 + \theta_{sss}\right) - \alpha_1(t)\theta_s = \alpha_2(t)\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1. \tag{75}$$

方程 (75) 的一个守恒律为

$$(\cos\theta)_t + \left[\frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\theta_{ss}\sin\theta - \frac{1}{2}\theta_s^2\cos\theta\right) - \alpha_1(t)\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha_2(t)\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2\right]_s = 0. \tag{76}$$

考虑动图变换

$$x(s,t) = \int^s \cos\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1 + x_0, \qquad t'(s,t) = t, \tag{77}$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \left[\frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{1}{2}\theta_s^2\cos\theta - \theta_{ss}\sin\theta\right) + \alpha_1(t)\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha_2(t)\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{78}$$

将（78）式代入（76）式，我们得到

$$(\tan\theta)_{t'} - \frac{1}{4}\alpha_0(t)(\sin\theta)_{xxx} - \frac{\alpha_2(t)}{2}\left(\frac{(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1)^2}{\cos\theta}\right)_x\frac{1}{\sin\theta} = 0, \tag{79}$$

with

$$\theta_s = (\cos\theta)\theta_x = (\sin\theta)_x, \quad \theta_{ss} = (\cos\theta)(\theta_s)_x = (\cos\theta)(\sin\theta)_{xx}. \tag{80}$$

引入一个新的因变量

$$u(s,t) = \int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1, \tag{81}$$

这给出

$$u_s = \sin\theta. \tag{82}$$

将（78）代入（81），得到

$$u_s = (\cos\theta)u_x. \tag{83}$$

将（82）与（83）结合可得

$$\tan\theta = u_x, \tag{84}$$

由此可得

$$\sin\theta = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}. \tag{85}$$

将 (84) 和 (85) 代入 (79) 得到

$$u_{xt'} - \frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_{xxx} - \alpha_2(t)\left(u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}\right) = 0, \tag{86}$$

这正是由式（66）给出的 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程，其中 $a_1^0(t) = 0$。

3.2. MKdV-SG$^{(2,1)}$ *与 WKI-SP*$^{(2,1)}$ 方程之间的拟里变换对于 $n = 2$, $m = 1$,
MKdV-SG$^{(2,1)}$ 方程表示为

$$q_t - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a_{2,s}}{q}\right)_s + 4a_2 q\right]_s + \frac{a_{3,s}}{q} = 0. \tag{87}$$

通过求解 (71)，可得

$$a_0 = \alpha_0(t), \tag{88}$$
$$a_1 = \frac{1}{2}\alpha_0(t)q^2 + \alpha_1(t), \tag{89}$$
$$a_2 = \alpha_0(t)\left(\frac{1}{4}qq_{ss} - \frac{1}{8}q_s^2 + \frac{3}{8}q^4\right) + \frac{1}{2}\alpha_1(t)q^2 + \alpha_2(t). \tag{90}$$

令 $q = -\frac{\theta_s}{2}$，并为（73）中的a_3 选择以下特殊解

$$a_3 = \frac{1}{4}\alpha_3(t)\cos\theta. \tag{91}$$

MKdV-SG$^{(2,1)}$ 方程 (87) 表示为

$$\theta_{st} + \left[\frac{1}{128}\alpha_0(t)\left(-8\theta_{ssssss} - 20\theta_{ss}^3 - 80\theta_s\theta_{ss}\theta_{sss} - 20\theta_s^2\theta_{ssss} - 15\theta_s^4\theta_{ss}\right) + \alpha_1(t)(-\frac{1}{4}\theta_{ssss} - \frac{3}{8}\theta_s^2\theta_{ss}) - \alpha_2(t)\theta_{ss}\right] - \alpha_3(t)\sin\theta = 0. \tag{92}$$

对式（92）关于s积分可得

$$\theta_t - \left[\frac{1}{128}\alpha_0(t)\left(8\theta_{sssss} + 20\theta_s\theta_{ss}^2 + 20\theta_s^2\theta_{sss} + 3\theta_s^5\right) - \frac{1}{8}\alpha_1(t)\left(2\theta_{sss} + \theta_s^3\right) - \alpha_2(t)\theta_s\right] = \alpha_3(t)\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1. \tag{93}$$

将式（93）的两边乘以 –sin θ，可得一个守恒律。

$$\begin{aligned}(\cos\theta)_t + \Big[&\frac{1}{128}\alpha_0(t)\left(12\theta_s^2\theta_{ss}\sin\theta + 8\theta_{ssss}\sin\theta + 4\theta_{ss}^2\cos\theta - 3\theta_s^4\cos\theta - 8\theta_s\theta_{sss}\cos\theta\right)\\ &+ \frac{1}{8}\alpha_1(t)\left(2\theta_{ss}\sin\theta - \theta_s^2\cos\theta\right) - \alpha_2(t)\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha_3(t)\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2\Big]_s = 0.\end{aligned} \tag{94}$$

考虑相同的拟里变换（77）。它导致

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}, \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} = \Big[&-\frac{1}{128}\alpha_0(t)\left(12\theta_s^2\theta_{ss}\sin\theta + 8\theta_{ssss}\sin\theta + 4\theta_{ss}^2\cos\theta - 3\theta_s^4\cos\theta - 8\theta_s\theta_{sss}\cos\theta\right)\\ &- \frac{1}{8}\alpha_1(t)\left(2\theta_{ss}\sin\theta - \theta_s^2\cos\theta\right) + \alpha_2(t)\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha_3(t)\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2\Big]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}.\end{aligned} \tag{96}$$

我们有

$$\theta_s = (\cos\theta)\theta_x = (\sin\theta)_x, \quad \theta_{ss} = \cos\theta(\theta_s)_x = \cos\theta(\sin\theta)_{xx}, \tag{97}$$
$$\theta_{sss} = \cos^2\theta\sin\theta_{xxx} + \cos\theta(\cos\theta)_x(\sin\theta)_{xx}, \tag{98}$$
$$\begin{aligned}\theta_{ssss} = {}&2\cos^2\theta(\cos\theta)_x(\sin\theta)_{xxx} + \cos^3\theta(\sin\theta)_{xxxx} + \cos\theta(\cos\theta)_x^2(\sin\theta)_{xx}\\ &+ \cos^2\theta(\cos\theta)_{xx}(\sin\theta)_{xx} + \cos^2\theta(\cos\theta)_x(\sin\theta)_{xxx}.\end{aligned} \tag{99}$$

将（95）和（96）代入方程（94），得到

$$(\tan\theta)_{t'} + \frac{\alpha_0(t)}{128}\Big[24(\sin\theta)_x(\sin\theta)_{xx}^2 + 12(\sin\theta)_x^2(\sin\theta)_{xxx} + 16(\sin\theta)_{xxx}(\cos\theta)_x^2 + 16(\sin\theta)_{xxx}\cos\theta(\cos\theta)_{xx} + 32(\sin\theta)_{xxxx}\cos\theta(\cos\theta)_x + 8(\sin\theta)_{xxxxx}\cos^2\theta + 16(\sin\theta)_{xx}(\cos\theta)_x(\cos\theta)_{xx} + 8(\sin\theta)_{xxx}(\cos\theta)_x^2 + 8(\sin\theta)_{xx}(\cos\theta)_x(\cos\theta)_{xx} + 8(\sin\theta)_{xx}\cos\theta(\cos\theta)_{xxx} + 8(\sin\theta)_{xxx}\cos\theta(\cos\theta)_{xx} + 8(\sin\theta)_{xxx}(\cos\theta)_x^2 + 8(\sin\theta)_{xxx}(\cos\theta)_x^2 + 8(\sin\theta)_{xxx}\cos\theta(\cos\theta)_{xx} + 8(\sin\theta)_{xxxx}\cos\theta(\cos\theta)_x\Big] - \frac{1}{4}\alpha_1(t)(\sin\theta)_{xxx} - \frac{\alpha_3(t)}{2}\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2}{\cos\theta}\right]_x = 0. \tag{100}$$

引入新的因变量 $v(s,t) = \int_s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1$（注意 $\tan\theta = v_x$, $\sin\theta = v\sqrt{1+v_x^2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+v_x^2}}$）。则方程 (100) 变换为

$$\begin{aligned} v_{xt'} - \frac{\alpha_0(t)}{16(1+v_x^2)^{\frac{13}{2}}}\Big[&v_{xxxxxx}\left(1+v_x^2\right)^4 - 20v_xv_{xx}v_{xxxxx}\left(1+v_x^2\right)^3 - 35v_{xxxx}\Big(v_{xxx}\left(v_x^3+v_x\right) - \frac{39}{7}v_{xx}^2 \\ &(v_x^2-\frac{1}{6})\Big)\left(1+v_x^2\right)^2 + 270v_{xx}\Big(\left(1+v_x^2\right)^2(v_x^2-\frac{1}{6})v_{xxx}^2 - \frac{77}{18}v_xv_{xxx}v_{xx}^2(v_x^2-\frac{1}{2})\left(1+v_x^2\right) \\ &+ \frac{28}{9}v_{xx}^4\left(v_x^4 - v_x^2 + \frac{1}{16}\right)\Big)\Big] - \frac{1}{4}\alpha_1(t)\left(\frac{v_x}{\sqrt{1+v_x^2}}\right)_{xxx} - \alpha_3(t)\left(v + \frac{1}{6}\left(v^3\right)_{xx}\right) = 0, \end{aligned} \tag{101}$$

这正是 WKI-SP$^{(2,1)}$ 方程 (68)。

3.3. MKdV-SG$^{(1,2)}$ 与 WKI-SP$^{(1,2)}$ 方程之间的拟里变换

对于 $n = 1, m = 2$，MKdV-SG$^{(1,2)}$ 方程表示为

$$q_t - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a_{1,s}}{q}\right)_s + 4a_1q\right]_s + \frac{a_{2s}}{q} = 0. \tag{102}$$

通过求解含 $q = -\frac{\theta_s}{2}$ 的递推公式 (71) 和 (73)，可得

$$a_0 = \alpha_0(t), \quad a_1 = \frac{1}{2}\alpha_0(t)q^2 + \alpha_1(t), \quad a_3 = \frac{1}{4}\alpha_3(t)\cos\theta, \tag{103}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{a_{2s}}{q} = {}& C_1\sin\theta + C_2\cos\theta + 2\sin\theta\int^s \sin\theta(s,t)\left(\int^{s_1}\sin\theta(s_2,t)\mathrm{d}s_2\right)\mathrm{d}s_1 \\ &+ 2\cos\theta\int^s \cos\theta(s_1,t)\left(\int^{s_1}\sin\theta(s_2,t)\mathrm{d}s_2\right)\mathrm{d}s_1, \end{aligned} \tag{104}$$

其中 $q = -\frac{\theta_s}{2}$。

然后，MKdV-SG$^{(1,2)}$ 方程（87）改写为

$$\begin{aligned} \theta_t = {}& \frac{1}{4}\alpha_0(t)\theta_{sss} + \frac{1}{8}\alpha_0(t)\theta_s^3 + \alpha_1(t)\theta_s + 2C_1\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1 \\ &+ 2C_2\int^s \cos\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1 + \frac{2}{3}\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^3 \\ &+ 4\int^s \cos\theta(s_1,t)\left[\int^{s_1}\sin\theta(s_2,t)\left(\int^{s_2}\sin\theta(s_3,t)\mathrm{d}s_3\right)\mathrm{d}s_2\right]\mathrm{d}s_1. \end{aligned} \tag{105}$$

方程（105）对应的守恒律是

$$(\cos\theta)_t = \left[-\frac{1}{8}\alpha_0(t)\left(2\theta_{ss} - \theta_s^2\cos\theta\right) + \alpha_1(t)\cos\theta - C_1\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right) - \int^s A\mathrm{d}s_1\right]_s \tag{106}$$

with

$$A = 2C_2\sin\theta\int^s \cos\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1 + 4\sin\theta\int^s \cos\theta(s_1,t)\left[\int^{s_1}\cos\theta(s_2,t)\left(\int^{s_2}\cos\theta(s_3,t)\mathrm{d}s_3\right)\mathrm{d}s_2\right]\mathrm{d}s_1. \tag{107}$$

同样的动图变换（77）将（106）导出为

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}, \tag{108}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left[-\frac{1}{8}\alpha_0(t)(2\theta_{ss}\sin\theta - \theta_s^2\cos\theta) + \alpha_1(t)\cos\theta - C_1\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right) - \frac{1}{6}\left(\int^s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^4 - \int^s A\mathrm{d}s\right]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{109}$$

将（108）和（109）代入方程（106），可得

$$(\tan(\theta))_{t'} - \frac{1}{4}(\sin\theta)_{xxx} - \left[\frac{C_1\left(\int_s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\int_s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1\right)^4 - \int_s A\mathrm{d}s_1}{\cos\theta}\right]_x \frac{1}{\sin\theta} = 0. \tag{110}$$

引入一个新的因变量 $v(s,t) = \int_s \sin\theta(s_1,t)\mathrm{d}s_1$（注意 $\tan\theta = v_x$、$\sin\theta = v\sqrt{1+v_x^2}$、$\cos\theta = \sqrt{1+v_x^2}$）。然后，方程 (110) 转化为

$$v_{xt'} = \frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{v_x}{\sqrt{1+v_x^2}}\right)_{xxx} + C_1v^2v_{xx} + 2C_2xv_{xx} + 2C_2v_{xx}\int^x v\mathrm{d}x' + 4v_{xx}\int^x v_x'\left[\left(\int^{x'} v\mathrm{d}x'''\right)\mathrm{d}x''\right]\mathrm{d}x' + 2C_1v(1+v_x^2) + \frac{2}{3}v^3(1+v_x^2) + \frac{1}{6}v^4v_{xx} + 2C_2x(1+v_x^2) + 4(1+v_x^2)\int^x\left(\int^{x'} v\mathrm{d}x''\right)\mathrm{d}x'. \tag{111}$$

我们设$v = u_{xx}$，其中$C_1 = C_2 = 0$，并得到

$$u_{xxxt'} = \frac{1}{4}\alpha_0(t)\left(\frac{u_{xxx}}{\sqrt{1+u_{xxx}^2}}\right)_{xxx} + \frac{1}{30}(u_{xx}^5)_{xx} + \left[(4uu_{xx} - 2u_x^2)u_{xxx}\right]_x + \frac{2}{3}u_{xx}^3 + 4u. \tag{112}$$

现在，方程(112)就是 WKI-SP$^{(1,2)}$ 方程。

注1： 我们认为，由（77）和（81）定义的拟里变换不仅适用于上述三对方程，也适用于整个 MKdV-SG 和 WKI-SP 层级。

4. 环孤子解的WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程

为简便起见，我们将 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程和 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程改写为

$$\theta_{ts} + \alpha\left[\frac{3}{2}\theta_s^2\theta_{ss} + \theta_{ssss}\right] = \beta\sin(\theta) \tag{113}$$

and

$$u_{xt}+\alpha\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_{xxx}=\beta\left(u+\frac{1}{6}(u^3)_{xx}\right) \tag{114}$$

其中 α 和 β为任意实常数。

在文献中 .[33, 34], 作者给出了以下 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程的N孤子解（113 ）:

$$\theta=2i\ln\frac{f^*}{f} \tag{115}$$

with

$$f=f_N=\sum_{\mu=0,1}\exp\left[\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\xi_j+\frac{\pi}{2}i)+\sum_{1\le j<l\le N}\mu_j\mu_l A_{jl}\right], \tag{116}$$

$$\xi_j=k_j s+\omega_j t+\xi_{j0},\qquad \omega_j=\frac{\beta}{k_j}-\alpha k_j^3,\qquad \mathrm{e}^{A_{jl}}=\frac{(k_j-k_l)^2}{(k_j+k_l)^2},\qquad k_i\neq\pm k_j. \tag{117}$$

其中，对 $\mu\equiv\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N\}$的求和应遍历 $\mu_j=0,1, j=1,2,\ldots,N$的所有排列。这里，$f^*$是$f$的共轭。

由于动图变换（77）和（81），WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的环形孤子解可表示为参数形式，即

$$u=\frac{1}{\beta}[\theta_t+\alpha(\frac{1}{2}\theta_s^3+\theta_{sss})],\quad (\theta=2i\ln\frac{\bar f}{f}), \tag{118}$$

$$x=s-\frac{2}{\beta}\left[(\ln f\bar f)_t+\alpha(\ln f\bar f)_{sss}+6\alpha\int^s\left((\ln f)_{ss}^2+(\ln\bar f)_{ss}^2\right)\mathrm{d}s\right]+x_0, \tag{119}$$

其中，f 满足式（116）。

4.1. 单环孤子解

当$N=1$时，我们有

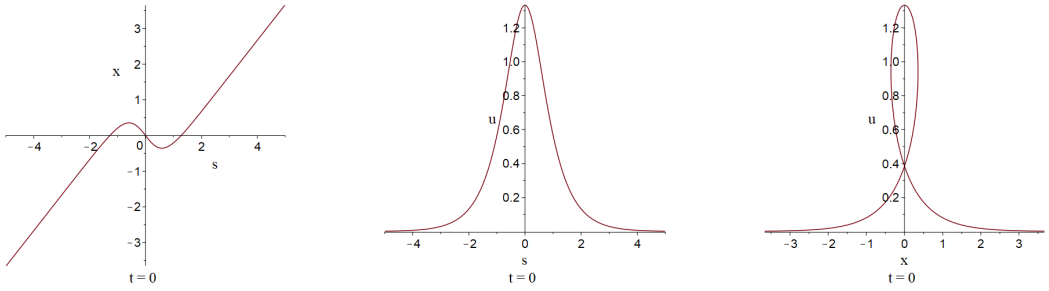
$$f=1+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\xi_1},\quad \xi_1=k_1 s+\left(\frac{\beta}{k_1}-\alpha k_1^3\right)t+\xi_{10}. \tag{120}$$

将（120）代入（118）和（119）可得

$$u(s,t)=\frac{2}{k_1}\mathrm{sech}\xi_1, \tag{121}$$

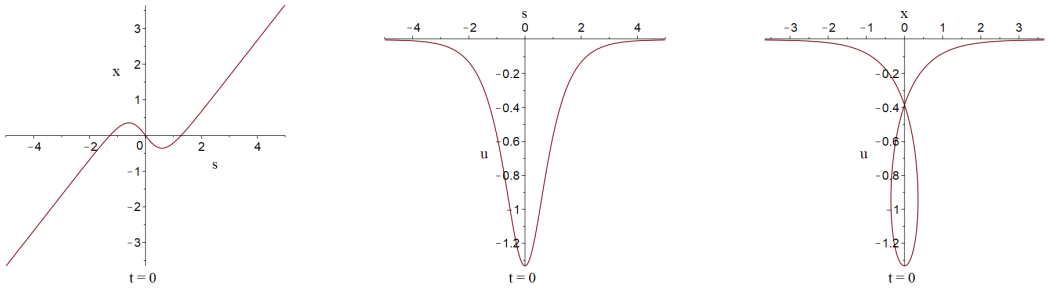
$$x(s,t)=s-\frac{2}{k_1}\tanh\xi_1+d+\frac{2}{k_1}, \tag{122}$$

这是众所周知的单孤子解，如图 1 和图 2 所示。正、负 k_1 分别对应环孤子和反环孤子。为方便起见，大多数时候我们将二者统称为环孤子。



(a) (b) (c)

图1：a、b和c 分别为 x 关于 s 的曲线、u 关于 s 的曲线，以及 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的单环孤子解，其参数为 $\alpha = 2, \beta = 2$、$k_1 = 1.5$、$\xi_{10} = 0$ 和 $d_1 = -\frac{4}{3}$。



(a) (b) (c)

图2：a、b和c 分别为 x 关于 s 的曲线、u 关于 s 的曲线，以及 WKI-SP 方程的单反环孤子解，其参数 $\alpha = 2, \beta = 2$，$k_1 = -1.5$，$\xi_{10} = 0$ 和 $d_1 = -\frac{4}{3}$ 分别。

为了阐明环在 (x,t) 坐标系中的运动，我们将 (122) 改写为以下形式

$$x - c_1 t + x_{10} = \frac{\xi_1}{k_1} - \frac{2}{k_1}\tanh\xi_1 + d + \frac{2}{k_1}, \tag{123}$$

其中$c_1 = \alpha k_1^2 - \frac{\beta}{k_1^2}$ 和$x_{10} = \frac{\xi_{10}}{k_1}$。

这里，c_1 表示环孤子的速度。对于给定的非零 α 和 β，可以看出，环孤子既可以向左（即负x方向）传播，也可以向右（即正x方向）传播。这与SP方程和WKI方程不同。SP方程和WKI方程的孤子只能沿x轴的一个方向运动。由式（121）可知，环孤子的振幅（定义为A_1）为 $^2 k_1$。于是有

$$c_1 = \frac{4\alpha}{A_1^2} - \frac{\beta A_1^2}{4}. \tag{124}$$

有趣的是，上述表达式表明，WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的环孤子具有丰富的孤子行为。一方面，大环可以比小环运动得更快。另一方面，小环也可以比大环运动得更快，这与典型的孤子运动不同。

4.2. 两个环孤子的相互作用

对于双环孤子解，由（116）可得

$$f = 1 + \mathrm{i}e^{\xi_1} + \mathrm{i}e^{\xi_2} - \gamma e^{\xi_1+\xi_2} \tag{125}$$

with

$$\gamma = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \tag{126}$$

由（118）和（119），解的参数表示为

$$u(s,t) = \frac{2\sqrt{\gamma}}{k_1 k_2} \frac{(k_1 + k_2)\cosh\Psi_1 \cosh\Psi_2 + (k_1 - k_2)\sinh\Psi_1 \sinh\Psi_2}{\cosh^2\Psi_1 + \gamma \sinh^2\Psi_2}, \tag{127}$$

$$x(s,t) = s + \frac{1}{k_1 k_2} \frac{(k_1 - k_2)\sinh 2\Psi_1 - \gamma(k_1 + k_2)\sinh 2\Psi_2}{\cosh^2\Psi_1 + \gamma \sinh^2\Psi_2} + \frac{2(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} + d, \tag{128}$$

其中我们设

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) + \frac{1}{2}\ln\gamma \tag{129}$$

以简化表达。

双环孤子具有丰富的孤子行为。两个环可以沿x轴同向运动，也可以沿相反方向彼此靠近。可能是快速的小环追赶缓慢的大环，也可能是快速的大环追赶缓慢的小环。为了弄清每个参数的作用，我们将振幅和速度改写如下

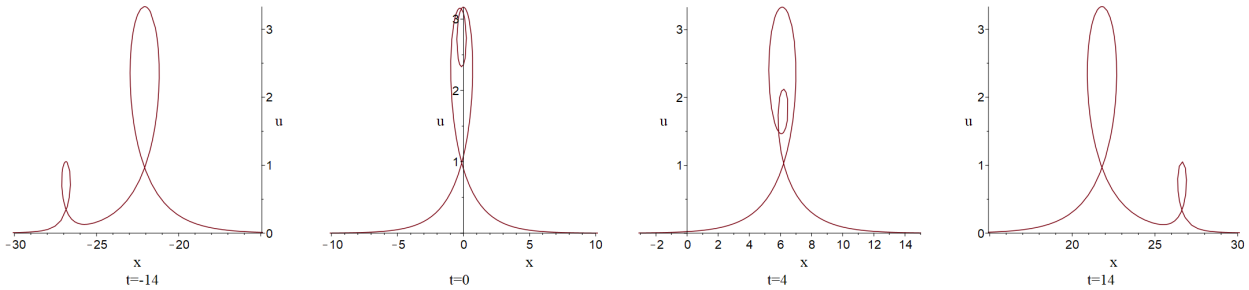
$$A_i = \frac{2}{k_i}, \quad c_i = \alpha k_i^2 - \frac{\beta}{k_i^2}, \quad (i = 1, 2). \tag{130}$$

列出一张表，以直观展示追逐或相遇运动。由于 $|k_1| \neq |k_2|$，不失一般性，我们假设 $|k_1| > |k_2|$。在下表中，v_{low} 表示小环孤子的速度，而v^{high} 表示大环孤子的速度。

表1：各参数在双环孤子的运动中所起的作用

		一个环追赶另一个环				两个环相遇 其他
		两者都移动到正的 x轴	两者均向负 x轴	$v_{low} > v^{high}$	$v_{low} < v^{high}$	
$\alpha\beta > 0$	$\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} < \lvert k_2\rvert < \lvert k_1\rvert$	✓ $(\alpha > 0, \beta > 0)$	✓ $(\alpha < 0, \beta < 0)$	✓		
	$\lvert k_2\rvert < \lvert k_1\rvert < \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}$	✓ $(\alpha < 0, \beta < 0)$	✓ $(\alpha > 0, \beta > 0)$		✓	
	$\lvert k_2\rvert < \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} < \lvert k_1\rvert$					✓
$\alpha\beta < 0$	$\frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\lvert\alpha\rvert\lvert k_1\rvert} < \lvert k_2\rvert < \lvert k_1\rvert$	✓ $(\alpha > 0, \beta < 0)$	✓ $(\alpha < 0, \beta > 0)$	✓		
	$\lvert k_2\rvert < min\{\lvert k_1\rvert, \frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\lvert\alpha\rvert\lvert k_1\rvert}\}$	✓ $(\alpha > 0, \beta < 0)$	✓ $(\alpha < 0, \beta > 0)$		✓	

我们绘制了一些不同的图，以展示不同的孤子运动。在图3和图4中，两个环孤子都向右移动。两者都是一个较小但速度较快的环孤子追赶一个较大且速度较慢的环孤子。图3展示了两个振幅不同的环孤子，其中可以观察到一个较小且速度较快的环孤子绕着一个较大且速度较慢的环孤子运动。图4展示了两个振幅相近的环孤子（$k_1 \approx k_2$），其中两个环并未重叠，在非线性相互作用过程中，它们似乎只是交换了振幅。



(a) (b) (c) (d)

图3：具有 $\alpha = 0.5$、$\beta = -0.5$、$k_1 = 2$、$k_2 = 0.6$、$\xi_{10} = -1.5$、$\xi_{20} = 0$ 和 $x_0 = -5.5$ 的两个环孤子追赶过程中的相互作用过程。

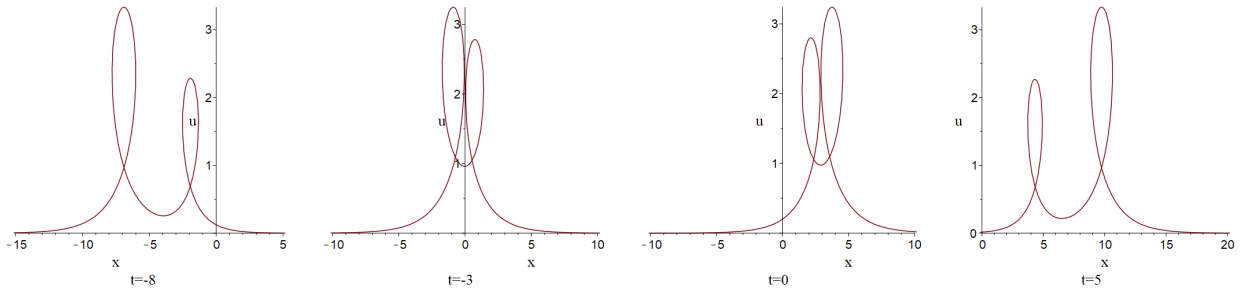


图4：两个环孤子的相互作用 随着 $\alpha = -0.5$、$\beta = -0.5$、$k_1 = 0.9$、$k_2 = 0.6$、$\xi_{10} = 1$、$\xi_{20} = 0$ 和 $x_0 = -5$，两个环孤子的追赶过程。

图 5 展示了两个环孤子向左移动。这里，一个较小、速度较慢的环孤子追上了一个较大、速度较快的环孤子。

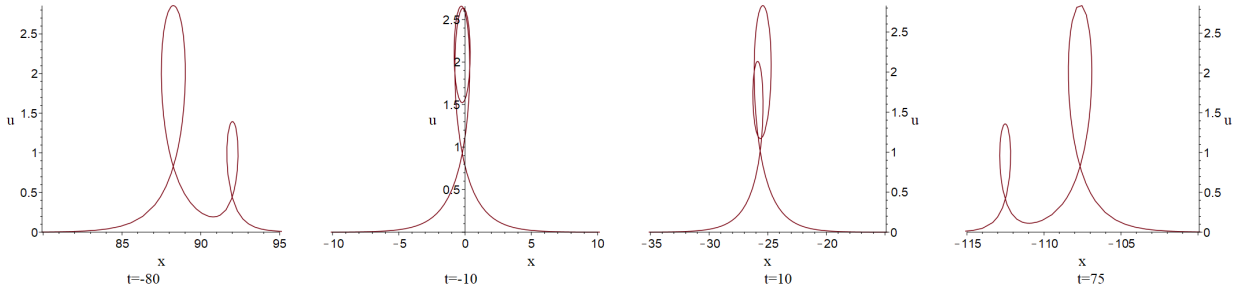


图5：相互作用的　碰撞过程 for the 碰撞 of two 环孤子 with $\alpha = -0.5, \beta = 0.5, k_1 = 1.5, k_2 = 0.7, \xi_{10} = 0, \xi_{20} = 0$ 和 $x_0 = -18$.　5.

图 6 展示了一个环孤子和一个反环孤子沿相反方向相互运动的过程。反环孤子向右运动，而环孤子向左运动。随着时间推移，两个孤子逐渐合并，随后彼此分离，并保留各自原始的波形。

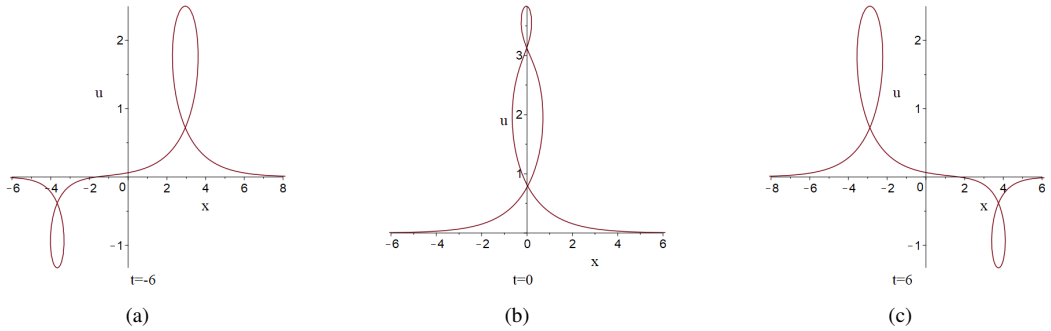


图6：一个环孤子和一个反环孤子的碰撞相互作用过程，参数为 $\alpha = 0.5$、$\beta = 0.5$、$k_1 = -1.5$、$k_2 = 0.8$、$\xi_{10} = -3.4$、$\xi_{20} = 0$　$_0 = 0\ 3$　和 $x_\circ$.

4.3. 三个环孤子的相互作用

对于三环孤子情形，公式 (116) 化简为

$$f = 1 + \mathrm{i}e^{\xi_1} + \mathrm{i}e^{\xi_2} + \mathrm{i}e^{\xi_3} - \gamma_{12}e^{\xi_1+\xi_2} - \gamma_{13}e^{\xi_1+\xi_3} - \gamma_{23}e^{\xi_2+\xi_3} - \mathrm{i}\gamma_{123}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3} \tag{131}$$

with

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2, \quad \gamma_{123} = \gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23}. \tag{132}$$

根据 (118) 和 (119)，参数形式的三环孤子如下

$$u(s,t) = \frac{2\Xi_1}{\Xi}, \tag{133}$$

$$x(s,t) = s + \frac{2\Xi_2}{\Xi} + \frac{2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)}{k_1k_2k_3} + d. \tag{134}$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi = k_1k_2k_3[&2(\gamma_{12}\sinh^2\Psi_3 + \gamma_{13}\sinh^2\Psi_2 + \gamma_{23}\sinh^2\Psi_1) + 2(1-\gamma_{13})\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{23}}\cosh(\Psi_1+\Psi_3)\\ &+ 2(1-\gamma_{23})\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{13}}\cosh(\Psi_2+\Psi_3) + 2(1-\gamma_{12})\sqrt{\gamma_{13}\gamma_{23}}\cosh(\Psi_1+\Psi_2)\\ &+ \gamma_{123}\cosh(2(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)) + (\gamma_{12}+\gamma_{13}+\gamma_{23})]\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}\Xi_1 = &\sum_{1\leqslant m<n\leqslant 3}\gamma_{m,n}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_ik_j - 2k_mk_n\Big) - \gamma_{123}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_ik_j\\ &+ 2k_1k_2\sqrt{\gamma_{13}\gamma_{23}}\Big[\gamma_{12}\cosh(\Psi_1+\Psi_2+2\Psi_3) + \cosh(\Psi_1-\Psi_2)\Big]\\ &+ 2k_1k_3\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{23}}\Big[\gamma_{13}\cosh(\Psi_1+2\Psi_2+\Psi_3) + \cosh(\Psi_1-\Psi_3)\Big]\\ &+ 2k_2k_3\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{13}}\Big[\gamma_{23}\cosh(2\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3) + \cosh(\Psi_2-\Psi_3)\Big]\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}\Xi_2 =&\gamma_{123}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)\sinh(2(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)) + \gamma_{12}(-k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)\sinh(2\Psi_3)\\ &+ \gamma_{13}(k_1k_2 - k_1k_3 + k_2k_3)\sinh(2\Psi_2) + \gamma_{23}(k_1k_2 + k_1k_3 - k_2k_3)\sinh(2\Psi_1)\\ &+ k_2k_3(\gamma_{23}-1)\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{13}}\sinh(\Psi_2+\Psi_3) + k_1k_3(\gamma_{13}-1)\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{23}}\sinh(\Psi_1+\Psi_3)\\ &+ k_1k_2(\gamma_{12}-1)\sqrt{\gamma_{13}\gamma_{23}}\sinh(\Psi_1+\Psi_2)\end{aligned} \tag{137}$$

with

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}(-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \frac{1}{2}\ln(\gamma_{23}), \tag{138}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) + \frac{1}{2}\ln(\gamma_{13}), \tag{139}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3) + \frac{1}{2}\ln(\gamma_{12}). \tag{140}$$

下面绘制了此类解的两个示例（见图7和图8）。图7描述了三个速度不同、沿正方向传播的环孤子，展示了丰富的追赶现象。图8描述了两个环孤子与一个反环孤子之间的碰撞。

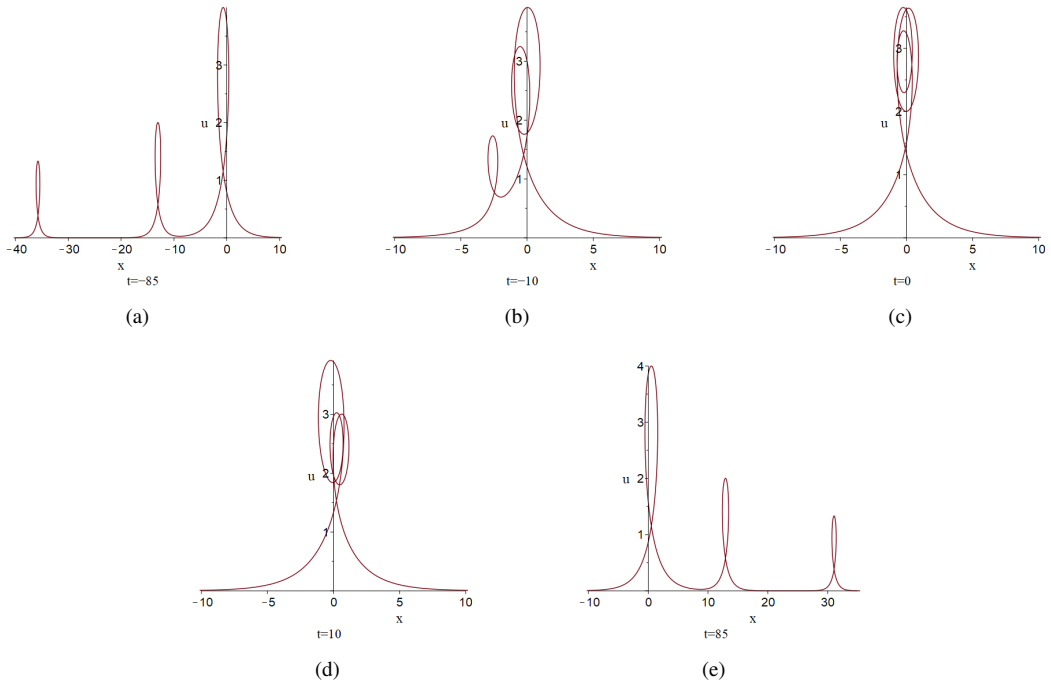


图7：三个环孤子之间的相互作用过程，其中 $\alpha = 0.2, \beta = 0.01, k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 1.5, \xi_{10} = 0, \xi_{20} = -0.9, \xi_{30} = 0.3,$ 以及 $d = -11$。

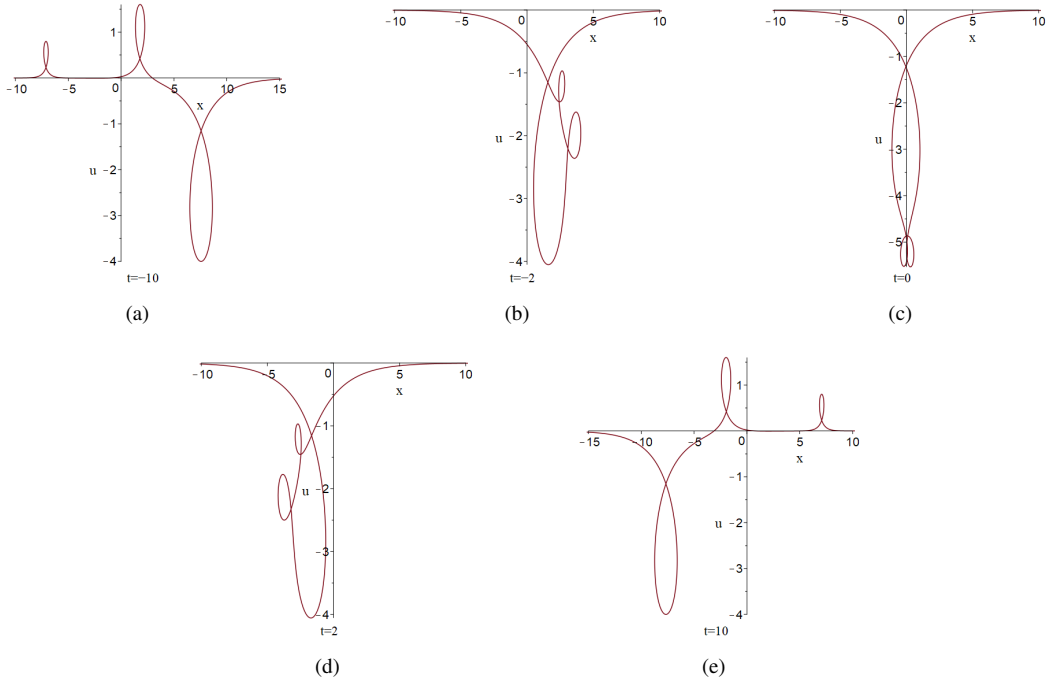


图8：$\xi_{20} = -5$ 9 ξ_{30} 两个环与一个反环孤子之间的相互作用过程，其中 $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, k_1 = 1.2, k_2 = 2.5, k_3 = -0.5, \xi_{10} = -2.$., 一个 nd$d = -1.1.$

注 **2.** 由于本节获得了多环孤子解，因此可以直接构造相应的多呼吸子解和孤子分子。在对参数施加一定条件的情况下，可以证明呼吸子解能够产生 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的无奇异振荡脉冲解，我们也将其称为呼吸子解。事实上，通过适当选择参数，可以由 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程 (115)-(117) 的M呼吸子解构造出 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的M呼吸子解，其中$N = 2M$。因此，我们将参数指定为

$$k_{2j-1} = k_{2j}^*, \quad \xi_{2j-1,0} = \xi_{2j,0}^* \tag{141}$$

以满足

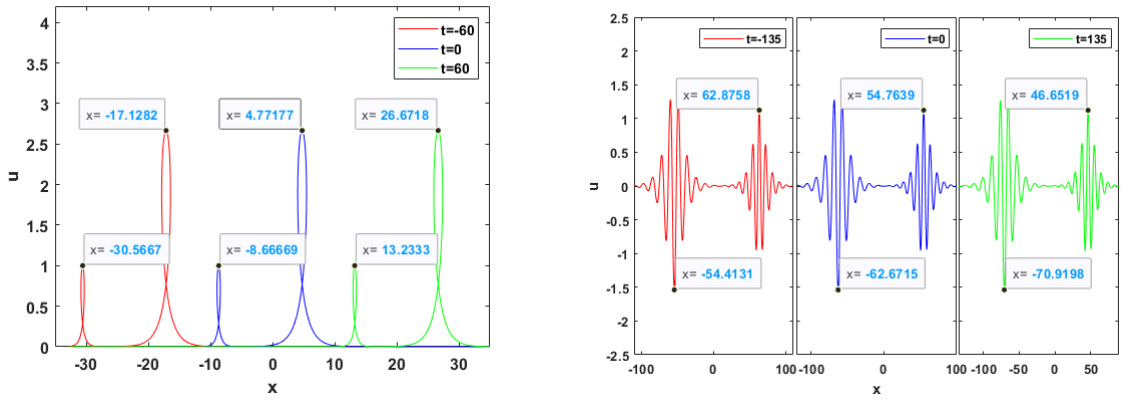
$$\xi_{2j-1} = \xi_{2j}^*. \tag{142}$$

The pa 参数解 (118) 和 (119) 与 (141) 和 (142) 描述了M 个呼吸子的多次碰撞。 .

孤子分子 [35–38] 可以通过一些可能的机制在理论上和实验上形成。在这里，我们可以通过引入速度共振条件[39]来获得 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的环孤子分子。

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{\alpha k_i^3 - \frac{\beta}{k_i}}{\alpha k_j^3 - \frac{\beta}{k_j}}. \tag{143}$$

两个环孤子束缚在一起，形成一个环孤子分子，如图9(a)所示。可以看出，随着时间推移，两个环之间的距离不会改变。此外，还可以利用速度共振机制直接构造呼吸子分子。两个呼吸子构成一个呼吸子分子，如图9(b)所示。值得一提的是，这类环型孤子分子和无奇异振荡脉冲型呼吸子分子此前尚未见理论报道。



(a) (b)

图9：（a）一个环型孤子分子；（b）一个呼吸子分子

5. 结论

本文借助两组相容线性谱方程，构造了广义复合WKI-SP$^{(n,m)}$ 方程。通过求解两组递归方程，我们得到了三个 SP 型方程（分别称为 WKI-SP$^{(0,1)}$、WKI-SP$^{(0,2)}$ 和 WKI-SP$^{(0,3)}$）、两个 WKI 型方程（分别称为 WKI-SP$^{(1,0)}$ 和 WKI-SP$^{(2,0)}$）以及三个复合 WKI-SP 方程（分别称为 WKI-SP$^{(1,1)}$、WKI-SP$^{(1,2)}$ 和 WKI-SP$^{(2,1)}$）。经典WKI方程 (1) 就是 WKI-SP$^{(1,0)}$ 方程，而短脉冲方程 (2) 则是 WKI-SP$^{(0,1)}$ 方程。WKI-SP$^{(0,2)}$和 WKI-SP$^{(0,3)}$ 方程是高阶短脉冲方程。

众所周知，短脉冲方程 (2) 与 SG方程之间存在一种新颖的拟里变换。此外，WKI方程 (1) 与（势）MKdV方程之间也存在拟里变换。本文借助一条守恒律，找到了一种拟里变换，成功地将复合WKI-SP$^{(1,1)}$方程变换为复合 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程。同时，同一拟里变换也可以将复合WKI-SP$^{(1,2)}$ 方程和 WKI-SP$^{(2,1)}$ 方程分别变换为 MKdV-SG$^{(1,2)}$ 方程和 MKdV-SG$^{(2,1)}$ 方程。

我们构造了 WKI-SP$^{(1,1)}$ 方程的多环孤子解，并将其作为应用。环孤子（反环孤子）解源自 MKdV-SG$^{(1,1)}$ 方程的 kink（antikink）解。设m 和$N-m$ 分别为正、负k_j的数量。那么，相应的孤子解将包含m 个环孤子和$N-m$ 个反环孤子。为方便起见，这里也将反环称为环。文中展示了单环、双环和三环孤子的参数形式解析解。我们尤其着重描述了双环孤子，它表现出丰富的孤子行为。一方面，两个环孤子可以沿x轴同向或反向运动。值得一提的是，速度较快的小环可能会追赶速度较慢的大环。当然，我们也得到了典型的孤子行为：大环的运动速度比小环更快。另一方面，根据所涉及特征值的比值不同，碰撞过程分为两种情况。第一种情况是振幅不同的两个环孤子彼此追赶，小环会绕着大环运动。可以看出，小环孤子的相移主要源于其绕大环运动时造成的延迟。第二种情况是振幅相近的两个环孤子发生碰撞；与快速环相比，慢速环会向前推出，并产生显著的相移。也就是说，慢速环孤子会穿过快速环孤子。

同样值得注意的是，本文给出的 WKI-SP$^{(n,m)}$ 层级中的所有模型都可以具有时变系数。因此，它们的色散关系将具有随时间变化的速度，孤子也将随之加速。这些变系数方程可能适用于超短光脉冲加速的应用场景。本文所述的方法和结果可推广至复WKI-SP层级、非局域WKI-SP层级、半离散和离散WKI-SP层级、多分量WKI-SP层级（以及相应的复、非局域、半离散和离散形式）。这些问题将在我们近期的工作中进一步研究。复合WKI-SP方程的达布变换、B¨acklund变换和黎曼-希尔伯特问题也在我们的近期研究计划之中。

致谢

本工作得到中国国家自然科学基金（批准号：11771395和11871336）以及中国浙江省自然科学基金（批准号：LY18A010034）的资助。

参考文献

参考文献

[1] Wadati M, Konno K, Ichikawa Y H. 新的可积非线性演化方程. J. Phys. Soc. Jpn. 1979年, 47(5): 1698-1700. [2] Wadati M, Konno K, Ichikawa Y H. 逆散射方法的推广. J. Phys. Soc. Jpn. 1979年, 46(6): 1965-1966. [3] Ichikawa Y H, Konno K, Wadati M. 受张力弹性梁的非线性横向振荡. J. Phys. Soc. Jpn. 1981, 50(5): 1799-1802. [4] Konno K, Jeffrey A. 环孤子；1984. [5] Qu C, Zhang D. II型WKI模型源于三维欧氏空间中的曲线运动. J. Phys. Soc. Jpn. 2005年, 74(11): 2941-2944.enddocument [6] Zhang Y, Qiu D, Cheng Y, 等. 和达地-今野-市川系统的达布变换. Theor. Math. Phys. 2017, 191(2): 710-724.[7] Tu Y, Xu J. 关于箱形初值下和达地-今野-市川方程的直接散射问题. Math. Meth. Appl. Sci. 2021, 44 13 10899 10904 ( ): - . [8] Sch¨afer T, Wayne C E. 立方非线性介质中超短光脉冲的传播. Physica D. 2004, 196(1-2): 90-105. [9] Chung Y, Jones C, Sch¨afer T, Wayne C E. 线性和非线性介质中的超短脉冲. Nonlinearity. 2005, 18(3): 1351. [10] Rabelo ML. 关于描述伪球面方程. Stud. Appl. Math. 1989, 81(3): 221-248. [11] Z.J. Qiao, 有限维可积系统与非线性演化方程, 中国国家高等教育出版社, 北京, 2002. [12] Z.J. Qiao, C.W. Cao, W. Strampp, 非线性演化方程的类别、代数结构与r矩阵, J. Math. Phys. 44 (2003) 701-722.

[13] Q.L. Zha, Q.Y. Hu, Z.J. Qiao, 双分量短脉冲系统的多孤子解与柯西问题, Nonlinearity, 30 (2017) 3773-3798. [14] Beals R, Rabelo M, Tenenblat K. B¨acklund 变换及若干伪球面方程的逆散射解. Stud. Appl. Math. 1989, 81(2): 125-151. [15] Sakovich A, Sakovich S. 短脉冲方程是可积的. J. Phys. Soc. Jpn. 2005年, 74(1): 239-241. [16] Brunelli JC. 短脉冲方程的双哈密顿结构. Phys. Lett. A. 2006, 353(6): 475-478. [17] Sakovich A, Sakovich S. 短脉冲方程的孤立波解. J. Phys. A. 2006, 39(22): L361. [18] Kuetche VK, Bouetou T B, Kofane T C. 使用广田方法和Hodnett-Moloney方法研究Schafer-Wayne短脉冲方程的双环孤子解. J. Phys. Soc. Jpn. 2007, 76(2): 024004. [19] Matsuno Y. 短脉冲模型方程的多环孤子解和多呼吸子解. J. Phys. Soc. Jpn. 2007, 76(8): 084003. [20] Matsuno Y. 短脉冲模型方程的周期解. J. Math. Phys. 2008, 49(7): 073508. [21] Liu S, Wang L, Liu W, Qiu D, He J S. 短脉冲方程N重达布变换的行列式表示. J. Nonlinear Math. Phys. 2017, 24(2): 183-194. [22] de Monvel A B, Shepelsky D, Zielinski L. 用黎曼-希尔伯特方法研究短脉冲方程. Lett. Math. Phys. 2017, 107: 1345-1373. [23] Xu J. 短脉冲方程的长时间渐近行为. J. Diff. Equ. 2018, 265(8): 3494-3532. [24] Mao H, Liu Q P. 短脉冲方程：B¨acklund 变换及其应用. Stud. Appl. Math. 2020, 145(4): 791-811. [25] Feng B F, Maruno K, Ohta Y. 短脉冲方程的可积离散化. J. Phys. A Math. Theor. 2010, 43(8): 085203. [26] Feng B F, Maruno K, Ohta Y. 短脉冲型方程及其Lax对的自适应移动网格格式. Pac. J. Math. Ind. 2014, 6 1 1 14( ): - . [27] Konno K, Jeffrey A. 双环孤子解的一些显著性质. J. Phys. Soc. Jpn. 1983, 52(1): 1-3. [28] Feng B F, Inoguchi J, Kajiwara K, 等. 离散平面曲线运动产生的离散可积系统与拟里变换. J. Phys. A Math. Theor. 2011, 44(39): 395201. [29] Gu C H and Hu H S. 广义KdV方程层级的巴克隆变换统一显式形式. Lett. Math. Phys. 1986, 11: 325-335. ¨Gu C H. 关于广义复合MKdV-SG方程层级的巴克隆变换. Lett. Math. Phys. 1986, 12(1): 31-41.[31] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C and Segur H, 具有物理意义的非线性演化方程. Phys. Rev. Lett. 1973年, 31(2): 125.[32] Brunelli J C, 短脉冲层级. J. Math. Phys. 2005年, 46: 123507. [33] Chen D Y, Zhang D J, Deng S F. mKdV-正弦Gordon方程的新型多孤子解. J. Phys. Soc. Jpn. 2002, 71(2): 658-659.[34] Zhang D J, Deng S F, Chen D Y. mKdV-正弦Gordon方程的多孤子解. 2004, Acata Math.SCi.24A(3):257-264.（中文）[35] 2001 410 268 Strogatz S Nature (London) [36] Stratmann M, Pagel T and Mitschke F 2005 Phys. Rev. Lett. 95 143902[37] Herink G, Kurtz F, Jalali B, Solli D R and Ropers C 2017 Science 356 50[38] 2017 358 94 Wright L G, Christodoulides D N and Wise F W Science [39] Lou, S.Y.通过速度共振研究三种五阶系统中的孤子分子与非对称孤子. J. Phys.Commun. 4, 041002 (2020)