α_i-度量图：半径、直径与所有离心率 ⋆

Feodor F. Dragan[1] 和 Guillaume Ducoffe[2]

[1] 肯特州立大学计算机科学系，美国肯特 dragan@cs.kent.edu[2] 国家信息学研究与发展研究所和布加勒斯特大学，罗马尼亚布加勒斯特。guillaume.ducoffe@ici.ro

arXiv:2305.02545v1 [cs.DS] 4 May 2023

摘要。我们仅利用弦图和距离遗传图共有的一种度量性质，将这些图上的已知结果推广到范围大得多的图类。具体而言，如果一个图对任意顶点 u, w, v 和 x 都满足以下 α_i 度量性质，则称其为 α_i-度量（$i \in \mathcal{N}$）：若一条连接 u 和 w 的最短路径与一条连接 x 和 v 的最短路径共享一条端边 vw，则 $d(u,x) \geq d(u,v) + d(v,x) - i$。粗略地说，沿着一条公共端边拼接任意两条最短路径，所得路径未必仍是最短路径，但会是一条“近似最短”路径，其缺陷至多为 i。已知 α_0-度量图恰好是托勒密图，而弦图和距离遗传图分别是 $i = 1$ 和 $i = 2$-度量图。我们证明，对于 α_i-度量图，可以在线性总时间内计算半径、直径以及所有顶点离心率的加性 $O(i)$ 近似值。我们最强的结果针对α_1-度量图：我们证明可以在次二次时间内计算一个中心顶点；对于所谓的（α_1, Δ）-度量图（它是弦图以及内部顶点度至少为 7 的平面三角剖分的超类），甚至可以在线性时间内完成。后者回答了 Dragan 在 2020 年提出的一个问题（Dragan, *IPL*, 2020）。我们的算法源于关于α_i-度量图的中心和度量区间的新结果。特别地，我们证明中心的直径至多为 $3i + 2$（若 $i = 1$，则至多为 3）。后者部分回答了一个问题（Yushmanov & Chepoi, *MathematicalProblems in Cybernetics*, 1991）。

Keywords: 度量图类；弦图； α_i-度量；半径；直径；顶点离心率；离心率 - 中心性 城市近似树；近似算法。

1 引言

欧几里得空间具有如下优良性质：如果连接 u 和 w 的测地线包含 v，且连接 v 和 x 的测地线包含 w，那么它们的并必定是连接u 和 x的测地线。1991年，Chepoi 和 Yushmanov 引入了 α_i-度量性质（$i \in \mathcal{N}$），以量化图在多大程度上接近满足上述要求 [53]（关于 α_1-度量性质的更早用法，另见 [14,15]）。本文中出现的所有图 $G = (V, E)$ 均为连通、有限、无权、无向、无自环且无重边的图。连接两个顶点 u 和 v 的路径长度是该路径中边的数量。距离 $d_G(u, v)$ 是图 G中连接 u 和 v 的最短路径长度。顶点 u 和 v 之间的区间 $I_G(u, v)$ 由所有位于最短 (u, v) 路径上的顶点构成，也就是说，它由（度量意义上）位于 u 和 v之间的所有顶点构成：$I_G(u, v) = \{x \in V : d_G(u, x) + d_G(x, v) = d_G(u, v)\}$.。再令 $I^o_G(u, v) = I_G(u, v) \setminus \{u, v\}$。若不会引起混淆，我们将省略下标 G。

α_i-度量性质：如果 $v \in I(u, w)$ 和 $w \in I(v, x)$ 相邻，那么$d(u, x) \geq d(u, v) + d(v, x) - i = d(u, v) + 1 + d(w, x) - i$.

大致而言，沿着一条共同的端边拼接任意两条最短路径，未必会得到一条最短路径（这与欧几里得空间中的情况不同），但会得到一条“近似最短”路径，其平特一肖

⋆本研究获得罗马尼亚研究、创新与数字化部、CCCDI - UEFISCDI 资助，项目编号为 PN-III-P2-2.1-PED-2021-2142，属于 PNCDI III 计划。

缺陷至多为 i。如果一个图满足 α_i-度量性质，则称其为 α_i-度量图。α_i-度量图已在 [14,15,53] 中得到研究。特别地，已知 α_0-度量图恰好是距离遗传弦图，也称为托勒密图 [45]。此外，α_1-度量图包含所有弦图 [14] 以及所有内部顶点的度至少为 7 [31] 的平面三角剖分。α_2-度量图包含所有距离遗传图 [53]，甚至更强地，包含所有 HHD-自由图 [18]。显然，对于某个 i，每个图都是一个 α_i-度量图。Chepoi 和 Yushmanov 在 [53] 中还给出了所有 α_1-度量图的刻画：它们恰好是所有圆盘均为凸集，且禁止将图 W_6^{++}（见图 1）作为等距子图的图（参见 [53] 或定理 5）。这一优美的刻画在 [4] 中得到了广泛应用，以刻画具有 $\delta \leq 1/2$ 的 δ-双曲图。

顶点 v 在图 G 中的离心率 $e_G(v)$ 定义为 $\max_{u\in V} d_G(u,v)$，即它到最远顶点的距离。图的直径是所有顶点离心率的最大值：$diam(G) = \max_{u\in V} e_G(u) = \max_{u,v\in V} d_G(u,v)$。图的半径是所有顶点离心率的最小值：$rad(G) = \min_{u\in V} e_G(u)$。图 G 的中心 $C(G)$ 是其离心率最小的顶点集合，即 $C(G) = \{u \in V: e_G(u) = rad(G)\}$。$C(G)$中的每个顶点都称为中心顶点。本文研究 αi-度量图中的半径、直径和所有离心率的计算问题。理解图的离心率函数，并能够高效地计算或估计直径、半径和所有顶点离心率，具有重要意义。例如，在分析社交网络（如引文网络或推荐网络）、生物系统（如蛋白质相互作用网络）、计算机网络（如互联网或点对点网络）、交通网络（如公共交通或道路网络）等时，顶点的离心率用于衡量其在网络中的重要性：v [46] 的离心率中心性指数定义为$\frac{1}{e\ v}$( )。此外，寻找中心顶点的问题是运筹学和选址科学中最著名的设施选址问题之一。在 [53], 中，确立了 α_i-度量图 G 的直径与半径之间如下优美的关系：$diam(G) \geq 2rad(G) - i - 1$。回顾一下，对于任意图 G，均有 $diam(G) \leq 2rad(G)$。[53] 的作者还提出了一个问题[1]：α_i-度量图中心的直径能否由 i的线性函数所界定？已知弦图或距离遗传图的中心直径至多为 3 [15,53]。

关于计算或估算半径、直径或所有离心率的相关工作。朴素算法对每个顶点各运行一次广度优先搜索来计算其离心率，然后（为了计算半径、直径和一个中心顶点）选取最小和最大的离心率，以及一个离心率最小的顶点；在一个有 n 个顶点、m 条边的图上，其运行时间为 $O(nm)$。有趣的是，对于一般图以及某些受限图族，这种朴素算法在条件意义下是最优的 [1,6,20,49]，因为在合理的复杂性假设下，无法在真正的次二次时间内（即在 $O(n^a m^b)$ 时间内，其中 a、b 为某些正数，且满足 $a + b < 2$）计算这些图的直径或半径。对于分裂图（弦图的一个子类），计算直径已大致等价于 Disjoint Sets，又称单色 Orthogonal Vector 问题 [17]。在强指数时间假设（SETH）下，我们无法在真正的次二次时间内求解 Disjoint Sets，因此也无法在真正的次二次时间内计算分裂图的直径 [6]。

为了打破这一二次障碍（即输入大小为 $n+m$），人们长期以来一直致力于提出更高效的算法，以计算直径和/或半径，

[1] 据 [53] 推测，对于每个 α_i-度量图 G，都有 $diam(C(G)) \leq i + 2$。

甚至更进一步，计算所有顶点的离心率。对于某些特殊图类，可以利用其几何表示、类树表示和/或某些禁用模式（例如，排除某个图 minor [40], 或一族诱导子图），从而实现这一目标。例如，针对距离遗传图 [12,23,28,32], 、外平面图 [42],、平面图 [9,43],、树宽有界的图 [1,8,40] ，以及更一般的团宽有界的图 [12,37]，已有更快的全顶点离心率计算算法。对于区间图，也已有能够在线性时间内计算所有顶点离心率的算法 [33,47]。近期的一些研究进一步探讨了区间图的哪些性质本身就能够带来更快的直径和全顶点离心率计算算法。针对 AT-无图 [35], 、有向路径图 [10], 、强弦图 [21], 、对偶弦图 [7,22], 、Helly 图以及 Helly 数有界的图 [27,38,39]，研究人员已经找到了高效的相关算法。另请参见 [36]。弦图是区间图的另一种著名推广。尽管分裂图的直径几乎不可能在次二次时间内计算出来，但对于弦图，存在一种优雅的线性时间算法，可以计算其半径和一个中心顶点 [16]。然而，在本研究之前，关于如何将这一出色结果推广到更大的图类，人们知之甚少（一个值得注意的例外是文献 [18] 中的研究）。本文部分探讨了这一引人入胜的问题。

由于即使针对简单的图族（对于直径，甚至包括分裂图），也不可能在次二次时间内精确计算直径或半径（除非 SETH 不成立），因此大量研究也致力于近似算法。已知 [13] ，任意具有 n 个顶点和 m 条边的图，其直径都可以在 $\tilde{O}(m^{3/2})$ 时间内以 $3/2$ 的乘法近似因子进行近似。此外，除非 SETH 不成立，否则不存在运行时间为 $O(n^{2-\epsilon})$ 的算法能够在稀疏图中达到优于 $3/2$ 的近似因子 [49] ，也不存在运行时间为 $O(m^{3/2-\epsilon})$ 的算法能够达到优于 $5/3$ [3]的近似因子。任意图中所有顶点的离心率都可以在 $\tilde{O}(m^{3/2})$ 时间内以 $5/3$ 的因子进行近似 [13] ；并且在 SETH 成立的前提下，不存在运行时间为 $O(n^{2-\epsilon})$ 的算法能够在稀疏图中实现优于 $5/3$ 的近似 [1] ，也不存在运行时间为 $O(m^{3/2-\epsilon})$ 的算法能够达到优于$9/5$ [3]的近似因子。 [3] 的作者还证明，不存在能够以优于 2 的近似因子在线性时间内近似离心率的算法，并给出了一种算法，可在 $O(m/\epsilon)$ 时间内以 $2+\epsilon$ 的因子近似离心率~，适用于任意 $0 < \epsilon < 1$。对于平面图，存在一种近似方案，其运行时间近线性 [51]。 [13] 的作者还探讨了一个更具挑战性的问题：如何对图的直径 $diam(G)$ 实现加性 c-近似 G，也就是说，求出一个估计值 D，使得 $diam(G) - c \leq D \leq diam(G)$。一种简单的 $\tilde{O}(mn^{1-\epsilon})$ 时间算法可实现加性 n^{ϵ}-近似；并且对于任意 $\epsilon > 0$，若存在一种计算直径的加性 n^{ϵ}-近似算法，且其运行时间为 $O(n^{2-\epsilon'})$，适用于任意 $\epsilon' > 2\epsilon$ ，则 SETH 将不成立。

对于具有有界（度量）参数的图，包括弦图、HHD-自由图、 k-弦图，以及更一般的所有δ-双曲图，可以实现好得多的加性近似（见 [10,11,16,19,20,24,25,28,29,30,33]）。例如，从任意顶点出发距离最远的顶点，其离心率对于 [16] 弦图至少为 $diam(G) - 2$ ，而对于 k-弦图至少为 $diam(G) - \lfloor k/2 \rfloor$ [11]。因此，可以在线性时间内通过一次广度优先搜索，以很小的加性误差近似这些图的直径。事实上，对于弦图 [33] 以及 HHD-自由图 [24]，LexBFS 访问的最后一个顶点的离心率至少为 $diam(G) - 1$ 。因此，尽管存在用于计算弦图精确直径的次二次算法将推翻 SETH，但通过 LexBFS 可以在线性时间内找到一个离心率至少为 $diam(G) - 1$的顶点。随后，这些结果被推广到所有 δ-双曲图 [19,20,29,30]。注意，弦图和距离遗传图都是 1-双曲的，而 k-弦图是 $\lfloor k/2 \rfloor$/2-双曲的 [52]。Gromov [44] 通过以下方式定义 δ-双曲图：

一个简单的四点条件：对于任意四个顶点 u、v、w、x，三个距离和 $d(u,v)+d(w,x)$、$d(u,w)+d(v,x)$ 以及 $d(u,x)+d(v,w)$ 中最大的两个之差至多为 $2\delta \geq 0$。由于经验上已证实许多现实世界网络中存在较小的双曲性，此类图近年来受到越来越多的关注。对于每个 δ-双曲图，从任意顶点出发距离最远的顶点，其离心率至少为 $diam(G) - 2\delta$ [19]。此外，对于任意 m-边 δ-双曲图 G，可以在 $O(\delta m)$时间内找到一个离心率至多为 $rad(G) + 2\delta$ 的顶点，并在 $O(m)$时间内找到一个离心率至多为 $rad(G) + 3\delta$ 的顶点 [19,20,29,30]。 [29]提出了针对所有离心率的三种近似方案：一个近似离心率函数 $\hat{e}$，可在 $O(\delta m)$时间内构造，并满足对于所有 $v \in V$， $e(v) - 2\delta \leq \hat{e}(v) \leq e(v)$；以及两棵生成树 T，其中一棵可在 $O(\delta m)$时间内构造，另一棵可在 $O(m)$时间内构造，并分别满足对于所有 $v \in V$，$e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 4\delta + 1$ 和 $e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 6\delta$。我们的第 2 节和第3节结果（以及 [53]中的一些结果）表明， α_i-度量图的表现类似于 δ-双曲图。在一篇即将发表的论文中， [26], 我们确实证明了 α_i-度量图的双曲性 δ 与 i呈线性关系。然而，我们定理 1–4 中的常数优于将 [26] 的双曲性结果与 [19,20,29] 关于 δ-双曲图的半径、直径和所有离心率的算法结果结合后所得的常数。在 [26],中，我们还引入了 α_i-度量的一种自然推广，称为(λ, μ)-弓度量：也就是说，如果两条最短路径 $P(u,w)$和 $P(v,x)$共享一个长度大于 λ 的公共最短子路径 $P(v,w)$（即，它们的重叠长度超过 λ），那么 u 与 x 之间的距离至少为 $d(u,v) + d(v,w) + d(w,x) - \mu$。 δ- 双曲图是 $(\delta, 2\delta)$- 弓度量图，而 α_i- 度量图是 $(0, i)$- 弓度量图。

(α_1, Δ)-度量图是 α_1-度量图和弱桥图的一个重要子类，其中包含所有弦图，以及所有内部顶点的度至少为 7 的平面三角剖分。在 [31], 中，研究表明，每个 (α_1, Δ)-度量图都存在一棵偏心率 2-近似生成树，即一棵生成树 T，满足对于每个顶点 v，均有 $e_T(v) - e_G(v) \leq 2$。因此，对于弦图，可以在线性时间内计算所有离心率的加性 2-近似 [25]。在 [31]中，为一般 α_1-度量图寻找类似结果被列为一个未解决问题。

我们的贡献。我们证明了关于 α_i-度量图中的度量区间、离心率函数和中心的若干新结果，并探讨了它们在算法上的应用，从而回答了文献中的开放问题 [25,31,53]。为列出我们的贡献，我们需要先引入一些额外的记号和术语。

第 2 节致力于一般的 α_i-度量图（$i \geq 0$）。集合 $S_k(u,v) = \{x \in I(u,v) : d(u,x) = k\}$ 称为区间 $I(u,v)$ 的一个切片，其中 $0 \leq k \leq d(u,v)$。若对所有 $x, y \in S_k(u,v)$， $0 < k < d(u,v)$，区间 $I(u,v)$ 都满足 $d(x,y) \leq \lambda$，则称其为 λ-薄。使得 G 的所有区间均为 λ-薄的最小整数 λ，称为 G 的区间薄度。我们首先证明，在α_i-度量图 G 中，区间是（$i+1$）-薄的。

半径为 r 、中心为 v 的圆盘定义为 $\{u \in V : d(u,v) \leq r\}$，记作$D(v,r)$。有时， $D(v,r)$ 称为 v 的 r-邻域。特别地， $N[v] = D(v,1)$ 和$N(v) = N[v] \setminus \{v\}$ 分别表示顶点 v 的闭邻域和开邻域。更一般地，对于任意顶点子集 S 和顶点 u，我们定义 $d(u,S) = \min_{v \in S} d(u,v)$ $D(S,r) = \bigcup_{v \in S} D(v,r)$ $N[S] = D(S,1)$，并定义 $N(S) = N[S] \setminus S$。若图 $G = (V,E)$ 的顶点集 $S \subseteq V$ 满足：对于任意两个满足 $d(x,y) \geq k \geq 0$ 的顶点 x、$y \in S$，整个区间 $I(x,y)$ 都属于 S，则称该集合为 d^k-凸。对于 $k \leq 2$，此定义与图 [5,14,50] 中凸集的通常定义一致：若对于任意 x、$y \in S$，区间 $I(x,y)$ 也属于 S，则称 S 为凸集。显然，

两个 d^k-凸集的交集也是 d^k-凸的。我们证明，在 α_i-度量图 G 中，圆盘（因此，中心 $C(G)$）是 d^{2i-1}-凸的。第2.1节的主要结果指出， G 的中心 $C(G)$ 的直径至多为 $3i+2$，从而回答了 [53] 中提出的问题。

令 $F_G(v)$ 为 G 中距离 v 最远的所有顶点的集合。若一对顶点 x, y 满足 $e_G(x) = e_G(y) = d_G(x, y)$，即 $x \in F_G(y)$ $y \in F_G(x)$，则称它们为一对互相远离的顶点。在第2.2节中，我们证明，距离任意顶点 z 最远的顶点 x 的离心率至少为 $diam(G) - 3i - 2$。此外， x 与 $y \in F(x)$ 之间任意一条最短路径的中间顶点 c 的离心率至多为 $rad(G) + 4i + (i+1)/2 + 2$；而任意一对互相远离的顶点之间任意一条最短路径的中间顶点 c^* 的离心率至多为 $rad(G) + 2i + 1$。另外， G 的所有中心顶点与 c 和 c^* 的距离都很小，即 $C(G) \subseteq D(c^*, 4i+3)$，且 $C(G) \subseteq D(c, 4i + (i+1)/2 + 2)$。因此，对于一张有 m 条边的 α_i-度量图 G ，可以在 $O(m)$ 时间内计算出其半径和直径的加性 $O(i)$-近似值。在第2.3节中，我们给出三种用于求所有离心率近似值的算法：一种基于任意顶点到两个互相远离的顶点的距离，在 $O(im)$ 时间内计算离心率近似值 $\hat{e}(v)$，且对所有 $v \in V$ 均满足 $e(v) - 3i - 2 \leq \hat{e}(v) \leq e(v)$；另外还有两棵生成树 T，一棵可在 $O(im)$ 时间内构造，另一棵可在 $O(m)$ 时间内构造，且它们分别满足 $e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 4i + 3$ 和 $e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 7i + 5$。因此，对于一张有 m 条边的 α_i-度量图 G ，可以在 $O(m)$ 时间内计算出所有顶点离心率的加性 $O(i)$-近似值。

第3节致力于研究 α_1-度量图。如果对于 G 的每个非中心顶点 v ，都存在一个邻点 $u \in N(v)$，使得 $e(u) < e(v)$，则称图 G 的离心率函数 $e(v)$ 是单峰的（也就是说，离心率函数的每个局部最小值都是全局最小值）。我们在第3.1节证明， α_1-度量图上的离心率函数几乎是单峰的：唯一违反单峰性（也就是说，没有离心率更小的邻点）的非中心顶点，其离心率必须等于 $rad(G) + 1$ ，且与 $C(G)$ 的距离必须为 2。换言之， α_1-度量图 G 上的离心率函数的每个局部最小值，要么是全局最小值，要么距离某个全局最小值为 2。此前已在弦图 [31], 、距离遗传图 [28] 以及所有 (α_1, Δ)-度量图 [31] 中观察到离心率函数的这种行为（还需注意，Helly 图中的离心率函数是单峰的 [21]）。事实证明，这种几乎单峰的性质对于通过梯度下降的方式寻找离心率至多为 $rad(G)+1$ 的顶点非常有用。在第3.2节中，利用 α_1-度量图 G 的中心 $C(G)$ 的凸性，我们证明 $C(G)$ 的直径至多为 3。这推广了弦图 [15] 和 (α_1, Δ)-度量图 [31] 的已知结果。在第3.3节中，我们提出一种局部搜索算法，可在次二次时间内为任意 α_1-度量图找到一个中心顶点。对于 (α_1, Δ)-度量图，该算法甚至能达到线性运行时间，从而回答了 [31] 中的一个开放问题。在第3.4节中，我们展示如何高效近似计算 α_1-度量图中的所有顶点离心率。

2 任意 $i \geq 0$ 下 α_i-度量图的一般情形

首先给出一个辅助引理。

引理 1. 设 G 是一个 α_i-度量图，且 u、v、x、y 是顶点，使得 $x \in I(u, v)$，$d(u, x) = d(u, y)$，并且 $d(v, y) \leq d(v, x) + k$。那么， $d(x, y) \leq k + i + 2$。

证明。设定 $\nu = i + k + 2$，并反设 $d(x, y) > \nu$。不失一般性， k 是能够找到反例的最小值。我们还可以

不失一般性地，假设 $d(u,x)$ 取最小值。令 $x' \in N(x) \cap I(x,u)$，并令 $y' \in N(y) \cap I(y,u)$。注意到 $d(u, x') = d(u,y')$，$x' \in I(u,v)$ 且 $d(v,y') \leq d(v,y) + 1 \leq d(x,v) + 1 + k = d(x',v) + k$。因此，根据 $d(u,x)$ 的极小性，我们有 $d(x',y') \leq \nu$（否则，我们可以用 x', y' 替换 x, y）。现在，需要考虑两种情况：

– 情形 $d(y',x') < d(y',x)$。我们还有 $d(v,x) < d(v,x')$。由于 G 是一个 α_i-度量图，这意味着 $d(v,y') \geq d(v,x) + 1 + d(x',y') - i$。于是，$d(x',y') \leq i - 1 + d(v,y') - d(v,x) = i + d(v,y') - d(v,x') \leq i + k$。然而，$\nu \leq d(x,y) - 1 \leq d(x',y') + 1 \leq i + k + 1 = \nu - 1$。– 情形 $d(y',x') \geq d(y',x)$。于是，$d(x,y) \leq 1 + d(x,y') \leq 1 + d(x',y') \leq \nu + 1$。这意味着$d(x,y) = \nu + 1$, $d(x,y') = d(x',y') = \nu$，且 $y' \in I(x,y) \cap N(y)$。特别地，$d(x,y') < d(x,y)$。此外，我们断言 $d(v,y) < d(v,y')$。事实上，为了导出矛盾，假设 $d(v,y') \leq d(v,y)$。在这种情况下，$d(v,y') \leq d(u,y') + d(v,y') - d(u,y') \leq d(u,y) - 1 + d(v,y) - d(u,y') \leq d(u,x) - 1 + d(v,x) + k - d(u,x') = d(u,v) - d(u,x') + k - 1 = d(v,x') + k - 1$。由 k 的极小性可得 $d(x',y') \leq i + (k-1) + 2 = i + k + 1 < \nu$，从而产生矛盾。因此，正如所断言的，$d(v,y) < d(v,y')$。由于 G 是一个 α_i-度量图，这意味着 $d(x,v) \geq d(x,y') + 1 + d(y,v) - i = d(x,y) + d(y,v) - i$。但接着，$\nu = d(x,y) - 1 \leq d(x,v) - d(y,v) + i - 1 \leq i - 1$。

在这两种情况下，我们都推导出了一个矛盾。 □

引理 1 有助于证明在 α_i-度量图中，区间相当狭窄。

Le引理 2. 如果 G 是一个 α_i-度量图，那么其区间薄度至多为 $i + 1$。 .

证明。设 $u, v, x, y \in V$ 满足 $x, y \in I(u,v)$，且 $d(u,x) = d(u,y)$。为导出矛盾，假设 $d(x,y) > i + 1$。由引理 1（应用于 $k = 0$），我们有 $d(x,y) = i + 2$。进一步，不失一般性地假设 $d(u,x)$ 取最小值。特别地，令 $x' \in N(x) \cap I(u,x)$ $y' \in N(y) \cap I(u,y)$。由 $d(u,x)$ 的极小性可知，我们有 $d(x',y') \leq i+1$。我们断言 $d(x',y) \geq i + 2$。事实上，若不然，则 $d(x',y) < d(x,y)$，因此，由于我们还有 $d(v,x) < d(v,x')$，便可得到 $d(y,v) \geq d(y,x) + d(x,v) - i = d(x,v) + 2 > d(x,v) = d(y,v)$，从而导出矛盾。这就证明了所断言的 $d(x',y) \geq i + 2$。由此可得 $d(x',y') \geq i + 1$，进而得到 $d(x',y') = i + 1$。然而，在这种情况下，$d(x',y') < d(x',y)$，且 $d(v,y) < d(v,y')$。因此，$d(v,x') \geq d(v,y') + d(x',y') - i = d(v,y') + 1 > d(v,y') = d(v,x')$，由此产生矛盾。□

2.1 α_i-度量图的中心

在本小节中，我们证明 α_i-度量图的中心的直径至多为 $3i+2$，从而回答了 [53] 中提出的问题：α_i-度量图的中心的直径是否可以由 i 的线性函数所界定。在 [53], 中，已证明 α_i-度量图的直径与半径之间存在如下关系：$2rad(G) \geq diam(G) \geq 2rad(G) - i - 1$。

首先，我们证明 α_i-度量图的所有圆盘（因此也包括中心 $C(G)$）都是 d^{2i-1}-凸的。

引理3. 每个远点集度量图 G is d^{2i-1} 凸。特别地，远点集度量图 $G$is d^{2i-1} 的中心 $C(G)$ 是凸的。

证明. 由于 $C(G) = \bigcap\{D(v, rad(G)) : v \in V\}$，只需证明任意圆盘的凸性。设 $v, x, y \in V$ 满足 $x, y \in D(v, r)$，其中某个 $r \geq 0$ 满足条件，但 $I(x, y) \not\subseteq D(v, r)$。取 $a_x \in I(x, y) \setminus D(v, r)$，使得 $d(x, a_x)$ 最大，并任取 $b_x \in N(a_x) \cap I(a_x, y)$。注意，由 $d(x, a_x)$ 的极大性可知 $b_x \in D(x, r)$。特别地，$d(v, b_x) < d(v, a_x)$。我们还有 $d(x, a_x) < d(x, b_x)$，因为 $a_x, b_x \in I(x, y)$。由于 G 是一个远点集度量图，$r \geq d(v, x) \geq d(v, a_x) + d(a_x, x) - i = r + 1 + d(a_x, x) - i$。因此，$d(a_x, x) \leq i - 1$。现在，取 $a_y \in I(x, y) \setminus D(v, r)$，使得 $d(y, a_y)$ 最大。我们像之前一样证明 $d(a_y, y) \leq i - 1$。此外，由 $d(a_y, y)$ 的极大性可知 $d(a_y, y) \geq d(a_x, y)$。因此，$d(x, y) = d(x, a_x) + d(a_x, y) \leq d(x, a_x) + d(a_y, y) \leq 2i - 2$。□

下述辅助引理对于推导本节的许多结果至关重要。

引理 4. 设 G 是一个 α_i-度量图。对于任意 x、y、$v \in V$ 以及任意整数 $k \in \{0, \ldots, d(x, y)\}$，存在一个顶点 $c \in S_k(x, y)$，使得 $d(v, c) \leq \max\{d(v, x)\ d(v, y)\} - \min\{d(x, c)\ d(y, c)\} + i$ 且 $d(v, c) \leq \max\{d(v, x)\ d(v, y)\} + i/2.$。对于任意顶点 $z \in I(x, y)$，有 $d(z, v) \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} - \min\{d(x, z)\ d(y, z)\} + 2i + 1$ 且 $d(z, v) \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} + 3i/2 + 1$。此外，$e(z) \leq \max\{e(x)\ e(y)\} - \min\{d(x, z)\ d(y, z)\} + 2i + 1$ 且 $e(z) \leq \max\{e(x)\ e(y)\} + 3i/2 + 1$ 当 $v \in F(z)$ 时。

证明。令 $z \in S_k(x, y)$，其中 $k \in \{0, \ldots, d(x, y)\}$，并令 c 为距离 v 最近的 $S_k(x, y)$ 中的一个顶点。根据引理 2，$d(c, z) \leq i + 1$。

考虑从 c 到 v 的最短路径上的 c 的一个邻点 c'。我们有 $d(x, c) < d(x, c')$ 或 $d(y, c) < d(y, c')$，因为否则，当 $d(x, c) \geq d(x, c')$ 且 $d(y, c) \geq d(y, c')$ 时，c' 必属于 $S_k(x, y)$，这将与 c 的选取矛盾。不妨设 $d(x, c) < d(x, c')$。于是 $c \in I(x, c')$，我们可以对 x、c、c'、v 应用 α_i-度量性质，得到 $d(x, v) \geq d(x, c) + d(c, v) - i$，即 $d(c, v) \leq d(x, v) - d(x, c) + i \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} - \min\{d(x, c)\ d(y, c)\} + i$。再将三角不等式 $d(c, v) \leq d(v, x) + d(x, c)$ 加到 $d(c, v) \leq d(x, v) - d(x, c) + i$ 上，得到 $d(c, v) \leq d(x, v) + i/2 \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} + i/2$。

对于任意 $z \in S_k(x, y)$），由于 $d(z, c) \leq i + 1$，$d(x, c) = d(x, z)$，$d(y, c) = d(y, z)$，我们得到 $d(z, v) \leq d(z, c) + d(c, v) \leq i + 1 + d(x, v) - d(x, c) + i \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} - \min\{d(x, z)\ d(y, z)\} + 2i + 1$，以及 $d(z, v) \leq d(z, c) + d(c, v) \leq i + 1 + d(x, v) + i/2 \leq \max\{d(x, v)\ d(y, v)\} + i + i/2 + 1$。将这两个不等式应用于 v 距离 z 最远的情形，我们得到 $e(z) = d(z, v) \leq \max\{e(x)\ e(y)\} - \min\{d(x, z)\ d(y, z)\} + 2i + 1$，以及 $e(z) \leq \max\{e(x)\ e(y)\} + i + i/2 + 1$。□

引理 4 有一个直接推论。

推论 1. 设 G 是一个 α_i-度量图。任意顶点 x、$y \in V$ 和 $c \in I$（x、y）满足 e（c）$\leq \max\{e$（x）e（y）$\} + 3i/2 + 1$。然而，若 d（x、y）$\geq 4i + 2$，则任意满足 d（x、c'）$\geq 2i + 1$ 且 d（y、c'）$\geq 2i + 1$ 的顶点 $c' \in I$（x、y）均满足 e（c'）$\leq \max\{e$（x）e（y）$\}$。此外，若 d（x、y）$> 4i + 3$，则任意满足 d（x、c'）$> 2i + 1$ 且 d（y、c'）$> 2i + 1$ 的顶点 $c' \in I$（x、y）均满足 e（c'）$< \max\{e$（x）e（y）$\}$。

证明。根据引理 4，$e(c) \leq \max\{e(x)\ e(y)\} + 3i/2 + 1$。假设 $d(x, y) \geq 4i + 2$，并考虑任意满足 $d(x, c') \geq 2i + 1$ 且 $d(c', y) \geq 2i + 1$ 的顶点 $c' \in I(x, y)$。根据引理 4，$e(c') \leq \max\{e(x)\ e(y)\} - \min\{d(x, c')\ d(y, c')\} + 2i + 1$。因此，$e(c') \leq \max\{e(x)\ e(y)\}$。

现在假设 $d(x, y) > 4i + 3$，即 $d(x, y) \geq 4i + 4$。考虑任意满足 $d(x, c') > 2i + 1$ 且 $d(c', y) > 2i + 1$ 的顶点 $c' \in I(x, y)$。根据引理 4，$e(c') \leq \max\{e(x)\ e(y)\} - \min\{d(x, c')\ d(y, c')\} + 2i + 1$。因此，$e(c') < \max\{e(x)\ e(y)\}$。□

利用推论 1 可以轻易证明，$C(G)$ 的直径（其中 α_i-度量图 G）至多为 $4i + 3$。下面我们将证明这个界还可以进一步改进。

定理 1. 如果 G 是一个 α_i-度量图，那么 $diam(C(G)) \leq 3i+2$。

证明。下文记 $r = rad(G)$。反设 $diam(C(G)) > 3i+2$。由于 $C(G)$ 是 d^{2i-1}-凸的， $C(G)$ 的每条直径路径都必须完全位于 $C(G)$ 中。特别地，存在 $x, y \in C(G)$，使得 $d(x,y) = 3i+3$，且 $I(x,y) \subseteq C(G)$。此外，对于任意满足 $\max\{d(u,x)\ d(u,y)\} < r$ 的 $u \in V$，我们得到 $I(x,y) \subseteq D(u, r-1)$，因为后一个圆盘也是 d^{2i-1}-凸的。因此，对于每个 $z \in I(x,y)$，必有 $F(z) \subseteq F\ x \cup F(y)$。

设 ab 是最短 xy-路径上的一条边，使得 $d(a,x) < d(b,x)$。假设 $F(b) \not\subseteq F(a)$。令 $v \in F(b) \setminus F(a)$ 为任意值。由于 G 是一个 α_i-度量图， $d(v,y) \geq d(v,b) + d(b,y) - i = r + (d(b,y) - i)$。因此， $d(b,y) \leq i$。同理，如果 $F(a) \not\subseteq F(b)$，那么 $d(a,x) \leq i$。通过归纳法，我们得到，对于每个满足 $d(y,z) \geq i+1$ ($d(x,z) \geq i+1$（分别）的 $z \in I(x,y)$，都有 $F(z) \subseteq F(x)$（分别有 $F(z) \subseteq F(y)$）。特别地，对于每个满足 $i+1 \leq t \leq d(x,y) - i - 1$ 的 t，对于每个 $z \in S_t(x,y)$，必有 $F(z) \subseteq F(x) \cap F(y)$。

请注意，上述性质不仅对满足 $d(x,y) = 3i+3$ 的 $x, y \in C(G)$ 成立，而且对满足 $d(x,y) \geq 2i-1$ 的任意 $x', y' \in C(G)$ 也成立，因为仍然可以使用 d^{2i-1}-凸性论证。

令 $c \in I(x,y)$ 满足 $F(c) \subseteq F(x) \cap F(y)$，且 $k := |F(c)|$ 取最小值。我们断言 $k < |F(x) \cap F(y)|$。事实上，任取 $v \in F(x) \cap F(y)$。根据引理 4，存在某个顶点 $c_v \in S_{i+1}(x,y)$ 满足 $d(c_v, v) \leq r-1$。于是， $F(c_v) \subseteq (F(x) \cap F(y)) \setminus \{v\}$，并且由 c 的极小性， $k \leq |F(c_v)| \leq |F(x) \cap F(y)| - 1$。接着，令 $y_c \in I(x,y)$ 满足 $F(y_c) \cap F(x) \cap F(y) \subseteq F(c)$，且 $d(x, y_c)$ 取最大值（这样的顶点必然存在，因为 $c \in I(x,y)$ 满足该条件）。我们有 $y_c \neq y$，因为 $F(x) \cap F(y) \not\subseteq F(c)$。因此，由 $d(x, y_c)$ 的极大性可知，存在某个 $v \in (F(x) \cap F(y)) \setminus F(c)$，使得 $d(v, y_c) = r-1$。由于 G 是一个 α_i-度量图， $d(v,y) \geq d(v, y_c) + d(y_c, y) - i = r + (d(y_c, y) - i - 1)$。因此， $d(y_c, y) \leq i+1$。

那么，对于每个 $z \in S_{i+1}(x, y_c)$，由于我们有 $d(z, y_c) = d(x,y) - i - 1 - d(y_c, y) \geq d(x,y) - 2i - 2 = i+1$，可得 $F(z) \subseteq F(x) \cap F(y) \cap F(y_c) \subseteq F(c)$。由 k 的极小性， $F(z) = F(c)$。然而，任取 $v \in F(c)$。根据引理 4，存在某个 $c' \in S_{i+1}(x, y_c)$，使得 $d(c', v) \leq r-1$，从而与 $F(c') = F(c)$ 矛盾。□

2.2 αi-度量图的半径和直径近似

本小节将证明，对于一个 α_i-度量图 G，可以在（几乎）线性时间内找到一个离心率至多为 $rad(G) + O(i)$ 的顶点，以及一个离心率至少为 $diam(G) - O(i)$ 的顶点。

首先，我们证明，任意两个互相远离的顶点之间任意一条最短路径的中间顶点，其离心率至多为 $rad(G) + 2i + 1$。此外，任意两个互相远离的顶点之间的距离至少为 $diam(G) - 3i - 2$。

引理 5. 设 G 是一个 α_i-度量图， x、 y 是 G 中一对互相远离的顶点，且 z 是连接 x 和 y 的任意最短路径上的一个中间顶点。那么， $e(z) \leq rad(G) + 2i + 1$。此外，在 $S_{\lfloor d(x,y)/2 \rfloor}(x,y)$ 中存在一个顶点 c，使得 $e(c) \leq rad(G) + i$。

证明。令 $r = rad(G)$ 和 $k = \lfloor d(x,y)/2 \rfloor$。我们需要证明，对于每个顶点 $z \in S_k(x,y)$, $e(z) \leq r + 2i + 1$ 成立。只需证明，对于一个特别选取的顶点 $c \in S_k(x,y)$，有 $e(c) \leq r + i$。然后，由于对于任意两个顶点 $u, v \in S_k(x,y)$， $d(u,v) \leq i+1$（见引理 2），我们将得到 $e(z) \leq d(z,c) + e(c) \leq r + 2i + 1$.

在 $S_k(x,y)$ 个顶点中，考虑具有最小离心率的顶点，并在所有这些顶点中选取其 $|F(c)|$ 尽可能小的那个。设 $v \in F(c)$ 是距离 c 最远的顶点，并且

考虑从 c 到 v 的一条最短路径上的 c 的一个邻点 t。由于 x、y 是一对互相远离的顶点，因此我们有 $d(x,y) \geq d(x,v)$ 和 $d(x,y) \geq d(y,v)$。我们还知道 $d(c,x) \leq d(c,y) \leq r$，因为 $d(x,y) \leq 2r$。

如果 $d(x,c) < d(x,t)$，则 $c \in I(x,t)$。将远点集度量性质应用于 x,c,t,v，可得 $d(x,y) \geq d(x,v) \geq d(x,c) + d(c,v) - i$。也就是说，$d(c,y) \geq d(c,v) - i$，因此 $e(c) = d(c,v) \leq d(c,y) + i \leq r + i$。类似地，若 $d(y,c) < d(y,t)$，则必须有 $e(c) = d(c,v) \leq d(c,x) + i \leq r + i$。因此，在下文中，我们可以假设 $d(x,c) \geq d(x,t)$ 且 $d(y,c) \geq d(y,t)$，即必须有 $t \in S_k(x,y)$。

如果 $e(t) = e(c)+1$，那么对于每个 $s \in F(t)$，我们有 $c \in I(t,s)$ 和 $d(c,s) = d(c,v)$。如果 $e(t) = e(c)$，那么根据 c 的选取，必定存在一个顶点 $s \in F(t) \setminus F(c)$（因为 $v \in F(c) \setminus F(t)$），并且我们有$c \in I(t,s)$ 和 $d(c,s) = d(c,v) - 1$。在这两种情况下，将远点集-度量性质应用于 $c \in I(t,s)$ 和 $t \in I(c,v)$，可得 $d(s,v) \geq d(s,c) + d(v,c) - i \geq 2d(c,v) - 1 - i = 2e(c) - 1 - i$。

现在，由于 $d(s,v) \leq diam(G) \leq 2r$，若 $e(c) \geq r + i + 1$，则得到 $2r \geq d(s,v) \geq 2e(c) - 1 - i \geq 2r + 2i + 2 - i - 1 = 2r + i + 1 > 2r$，这是不可能的。

This 这证明了 $e(c) \leq r + i$，因此对于每个 $z \in S_k(x,y)$，都有 $e(z) \leq r + 2i + 1$。 □

引理 6. 设 G 是一个 α_i-度量图，x 和 y 是 G 中一对互相远离的顶点。那么，$d(x,y) \geq 2rad(G) - 4i - 3$，且 $d(x,y) \geq diam(G) - 3i - 2$。此外，$x$ 与 y 之间任意一条最短路径上的中间顶点 z 都满足 $e(z) \leq \lceil d(x,y)/2 \rceil + 2i + 1$。

证明。设 z 是连接 x 和 y 的任意最短路径上的中间顶点，并设 v 是距离 z 最远的顶点。由引理 4，$d(z,v) \leq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} - \min\{d(x,z)\ d(y,z)\} + 2i + 1$。由于 x、y 是两个互相远离的顶点，$d(x,y) \geq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\}$。因此，$e(z) = d(z,v) \leq d(x,y) - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + 2i + 1 = \lceil d(x,y)/2 \rceil + 2i + 1$。也就是说，$d(x,y) \geq 2e(z) - 4i - 3 \geq 2rad(G) - 4i - 3$。

为了证明 $d(x,y) \geq diam(G) - 3i - 2$，考虑一对直径顶点 u、v，即满足 $d(u,v) = diam(G)$，并令 $k = \lfloor d(x,y)/2 \rfloor$。由引理 4，存在顶点 v'、$u' \in S_k(x,y)$，使得 $d(v',v) \leq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} - \min\{d(x,v')\ d(y,v')\} + i$，且 $d(u',u) \leq \max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - \min\{d(x,u')\ d(y,u')\} + i$。根据三角不等式和引理 2，$diam(G) = d(u,v) \leq d(u,u') + d(u',v') + d(v',v) \leq (\max\{d(x,v)\ d(y,v)\} - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + i) + (i+1) + (\max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + i) = \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + \max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - d(x,y) + 3i + 2.$。由于 x、y 是互相远离的顶点，$d(x,y) \geq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\}$，且 $d(x,y) \geq \max\{d(x,u)\ d(y,u)\}$。因此，$diam(G) \leq d(x,y) + d(x,y) - d(x,y) + 3i + 2 = d(x,y) + 3i + 2$。也就是说，$d(x,y) \geq diam(G) - 3i - 2$。□

对于图 G 的每个顶点 $v \in V \setminus C(G)$，我们可以定义一个参数

$$loc(v) = \min\{d(v,x) : x \in V, e(x) < e(v)\}$$

并称其为 v 的局部性。它表示距离 v 多远处存在一个离心率小于 v 的顶点。在 α_i-度量图中，每个顶点的局部性至多为 $i+1$。

引理 7. 设 G 是一个 α_i-度量图。那么，对于 $V \setminus C(G)$ 中的每个顶点 v，$loc(v) \leq i + 1$.

证明。设 x 是距离 $e(x) = e(v) - 1$ 最近的一个顶点。考虑从 x 到 v的任意最短路径上与 x 相邻的邻点 z。必有 $e(z) = e(x) + 1 = e(v)$。考虑一个顶点$u \in F(z)$。我们有 $u \in F(x)$ 和 $x \in I(z,u)$，$z \in I(x,v)$。根据 α_i-度量性质，$d(v,u) \geq d(v,x) + d(x,u) - i = d(v,x) - i + e(x)$。由于 $e(v) \geq d(v,u)$，我们得到 $e(v) \geq d(v,x) - i + e(x) = d(v,x) - i + e(v) - 1$，即 $d(v,x) \leq i + 1$。□

在 α_i-度量图中，顶点 v 的离心率与 G 的半径之差显示了顶点 v 距离 G 的中心 C（G）有多远。

引理 8. 设 G 是一个 α_i-度量图， k 是一个正整数。那么，对于 G 的每个顶点 v，若 $e(v) \leq rad(G) + k$，则 $d(v, C(G)) \leq k + i$。

证明。令 x 为 $C(G)$ 中距离 v 最近的一个顶点。考虑从 x 到 v 的一条任意最短路径上 x 的一个邻点 z。必然有， $e(z) = e(x) + 1 = rad(G) + 1$。考虑一个顶点 $u \in F(z)$。我们有 $d(u, x) = rad(G)$ 且 $x \in I(z, u)$， $z \in I(x, v)$。根据 α_i-度量性质， $d(v, u) \geq d(v, x) + d(x, u) - i = d(v, x) - i + rad(G)$。由于 $e(v) \geq d(v, u)$ 且 $e(v) \leq rad(G) + k$，我们得到$rad(G) + k \geq e(v) \geq d(v, x) - i + rad(G)$，即 $d(v, x) \leq i + k$。□

由引理 8 可立即推出：

推论 2. 设 G 是一个 α_i-度量图。那么，对于 G 的每个顶点 v，

$$d(v, C(G)) + rad(G) \geq e(v) \geq d(v, C(G)) + rad(G) - i.$$

证明. 根据三角不等式，对于任意图 G 和任意顶点 v，不等式 $e(v) \leq d(v, C(G)) + rad(G)$ 成立。若 G 是一个 α_i-度量图，则由引理 8 可得， $d(v, C(G)) \leq e(v) - rad(G) + i$。

□

因此，在 α_i-度量图中，若要将顶点 v 的离心率近似到加性单边误差 i 以内，只需知道 $rad(G)$ 和距离 $d(v, C(G))$。

现在，我们不再考虑一对互相远离的顶点，而是考虑距任意顶点最远的顶点 v。结果表明，它的离心率也足够接近 $diam(G)$。此外，在该顶点 v 与距 v 最远的顶点 u 之间任意一条最短路径上的中间顶点，其离心率至多为 $rad(G) + O(i)$。

引理 9. 设 G 是一个 α_i-度量图， v 是任意顶点。那么，对于每个 $u \in F(v)$， $e(u) \geq 2rad(G) - 2i - diam(C(G)) \geq 2rad(G) - 5i - 2 \geq diam(G) - 5i - 2$。

证明. 根据推论 2， $e(v) \geq d(v, C(G)) + rad(G) - i$，且 $e(u) \geq d(u, C(G)) + rad(G) - i$。设 v'、 $u' \in C(G)$ 是 $C(G)$ 中分别距 v 和 u 最近的顶点。根据三角不等式， $e(v) = d(v, u) \leq d(v, v') + d(v', u') + d(u', u)$。将关于 $e(v)$ 的两个不等式合并，得到 $d(v, C(G)) + rad(G) - i \leq e(v) \leq d(v, C(G)) + d(v', u') + d(u, C(G))$，即 $d(u, C(G)) \geq rad(G) - i - d(v', u') \geq rad(G) - i - diam(C(G))$。考虑到不等式 $e(u) \geq d(u, C(G)) + rad(G) - i$ 以及定理 1，可得 $e(u) \geq 2rad(G) - 2i - diam(C(G)) \geq 2rad(G) - 5i - 2 \geq diam(G) - 5i - 2$。□

如果证明中不涉及中心 $C(G)$ 的直径，而是依赖区间薄度，那么可以改进引理 9 中的后一条不等式。对于距离任意顶点最远的顶点的离心率，我们可以得到与互相远离的顶点相同的界（见引理 6）。

引理 10. 设 G 是一个 α_i-度量图， u 是一个任意顶点。那么，对于每个 $v \in F(u)$， $e(v) \geq diam(G) - 3i - 2$。

证明。设 x, y 是 G 中的一对直径顶点，即 $d(x, y) = diam(G)$。我们将证明 $\max\{d(v, x)\ d(v, y)\} \geq diam(G) - 3i - 2$，由此得到 $e(v) \geq \max\{d(v, x)\ d(v, y)\} \geq diam(G) - 3i - 2$。

反设 $\max\{d(v,x)\ d(v,y)\} \le diam(G) - 3(i+1)$。设 $k = \lfloor (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rfloor$，并设 x', y' 是 $S_k(v, u)$ 中分别离 x 和 y 最近的顶点。注意，由于 $d(u,v) = e(u) \ge rad(G)$ 且 $k = \lfloor (diam(G) - 3(i+1))/2 \rfloor \le \lfloor (2rad(G) - 3(i+1))/2 \rfloor < rad(G)$，$k$ 小于 $d(v,u)$，因此顶点 x', y' 存在。由引理 2，$d(x', y') \le i + 1$。

令 $d(v,y) \le diam(G) - 3(i+1)$，并考虑从$y'$到 y的一条最短路径上，y' 的一个邻点 y''。由于 $y'' \notin S_k(v,u)$，$d(v,y'') > d(v,y')$ 或 $d(u,y'') > d(u,y')$。在前一种情形下，由α_i-度量性质应用于 v, y', y'', y，可得 $d(v,y) \ge d(v,y') + d(y',y) - i$，即 $d(y',y) \le d(v,y) - d(v,y') + i \le d(x,y) - 3(i+1) - \lfloor (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rfloor + i = \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i$. 在后一种情形下（即当 $d(u,y'') > d(u,y')$ 时），由 α_i-度量性质应用于 u, y', y'', y，可得$d(u,y) \ge d(u,y') + d(y',y) - i$，即 $d(y',y) \le d(u,y) - d(u,y') + i$。我们知道 $d(u,v) \ge d(u,y)$（因为 $v \in F(u)$），且 $d(u,v) - d(u,y') = d(v,y')$。因此，$d(y',y) \le d(v,y') + i = k + i \le \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i$. 因此，无论哪种情形，$d(y',y) \le \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i$.

由对称性，同样有 $d(v,x) \le diam(G) - 3(i+1)$，这意味着 $d(x',x) \le \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i$.但根据三角不等式，$d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \le \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i + i + 1 + \lceil (d(x,y) - 3(i+1))/2 \rceil + i \le d(x,y) - 1$。由此得到的矛盾表明，必须有 $\max\{d(v,x)\ d(v,y)\} \ge diam(G) - 3i - 2$。□

引理 11. 设 G 是一个 α_i-度量图，$z \in V$, $x \in F(z)$，且 $y \in F(x)$。任意顶点 $c \in S_{\lfloor d(x,y)/2 \rfloor}(x, y)$ 满足 $e(c) \le rad(G) + 4i + (i+1)/2 + 2$ 且 $e(c) \le \lceil d(x,y)/2 \rceil + 5i + 3$。

证明。令 $v \in F(c)$ 为距 c 最远的顶点。由于 $y \in F(x)$，$d(x,v) \le d(x,y)$。若还满足 $d(y,v) \le d(x,y)$，则由引理 4，$e(c) = d(c,v) \le \max\{d(v,x)\ d(v,y)\} - \min\{d(x,c)\ d(y,c)\} + 2i + 1 \le d(x,y) - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + 2i + 1 = \lceil d(x,y)/2 \rceil + 2i + 1 \le rad(G) + 2i + 1$。

现在令 $d(y,v) > d(x,y) \ge d(x,v)$。同样，由引理 4，$e(c) = d(c,v) \le d(y,v) - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + 2i + 1$。由引理 9，$d(x,y) = e(x) \ge 2rad(G) - 5i - 2 \ge d(y,v) - 5i - 2$。因此，$e(c) \le d(y,v) - \lfloor (2rad(G) - 5i - 2)/2 \rfloor + 2i + 1 \le 2rad(G) - rad(G) + 4i + (i+1)/2 + 2 = rad(G) + 4i + (i+1)/2 + 2$。此外，由引理 10，$d(x,y) = e(x) \ge diam(G) - 3i - 2 \ge d(y,v) - 3i - 2$。因此，$e(c) \le d(y,v) - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + 2i + 1 \le d(x,y) + 3i + 2 - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + 2i + 1 = \lceil d(x,y)/2 \rceil + 5i + 3$。□

接下来我们将证明：如果 x 是距某个顶点最远的顶点，并且 y 是距 x 最远的顶点，那么所有中心顶点都靠近顶点 x 与 y 之间某条最短路径的中间顶点 c。具体而言，$D(c,\ 4i + (i+1)/2 + 2) \supseteq C(G)$ 成立。

引理 12. 设 G 是一个 α_i-度量图，且 $z \in V$、$x \in F(z)$ 和 $y \in F(x)$。此外，设 c 是连接 x 与 y 的任意最短路径的中间顶点。那么，$C(G) \subseteq D(c,\ 4i + (i+1)/2 + 2)$。

证明。考虑任意顶点 $u \in C(G)$。根据引理 4，$d(c,\ u) \le \max\{d(x,\ u)\ d(y,\ u)\} - \min\{d(x,\ c)\ d(y,\ c)\} + 2i + 1$。由于 $e(u) = rad(G)$，$\max\{d(x,\ u)\ d(y,\ u)\} \le rad(G)$ 成立。由于 c 是 x 与 y 之间某条最短路径的中间顶点，$\min\{d(x,\ c)\ d(y,\ c)\} = \lfloor d(x,\ y)/2 \rfloor$。由于 $x \in F(z)$，根据引理 9，$d(x,\ y) = e(x) \ge 2rad(G) - 5i - 2$。因此，$d(c,\ u) \le rad(G) - \lfloor (2rad(G) - 5i - 2)/2 \rfloor + 2i + 1 \le 4i + (i+1)/2 + 2$。□

对于两个互相远离的顶点之间最短路径上的中间顶点，可以得到一个更强的结果。

引理 13. 设 G 是一个 α_i-度量图， x 和 y 是 G 中一对互相远离的顶点。再设 c 是连接 x 和 y 的任意最短路径的中间顶点。那么， $C(G) \subseteq D(c, 4i+3)$。

证明。该证明与引理 12 的证明类似。然而，由于 x、y 彼此距离较远，根据引理 6， $d(x, y) \geq 2rad(G) - 4i - 3$。因此，对于任意 $u \in C(G)$， $d(c, u) \leq rad(G) - \lfloor (2rad(G) - 4i - 3)/2 \rfloor + 2i + 1 \leq 4i + 3$。□

本小节的结果具有若干算法含义。对于一个有 m 条边的任意连通图 G 以及给定顶点 $z \in V$，可以通过从 z 开始的广度优先搜索 $BFS(z)$，在线性（$O(m)$）时间内找到距 z 最远的顶点 $x \in F(z)$。一个 α_i-度量图中一对互相远离的顶点可以按如下方式在总计 $O(im)$ 时间内计算得到。根据引理 10，如果 x 是距任意顶点 z 最远的顶点，且 y 是距 x 最远的顶点，那么 $d(x, y) \geq diam(G) - 3i - 2$。因此，使用至多 $O(i)$ 次广度优先搜索，可以生成一个顶点序列 $x := v_1, y := v_2, v_3, \ldots v_k$，其中 $k \leq 3i + 4$，使得每个 v_i 都是距 v_{i-1} 最远的顶点（其中 $v_0 = z$），并且 v_k、v_{k-1} 是互相远离的顶点（初始值 $d(x, y) \geq diam(G) - 3i - 2$ 至多可改进 $3i + 2$ 次）。

我们在以下定理中总结本节的算法结果。

定理 2. 存在一个线性时间（$O(m)$）算法，可找出一个 m-边α_i-度量图 G 中的顶点 v 和 c，使得 $e(v) \geq diam(G) - 3i - 2$， $e(c) \leq rad(G) + 4i + (i+1)/2 + 2$ 且$C(G) \subseteq D(c, 4i + (i+1)/2 + 2)$。此外，存在一个近线性时间（$O(im)$）算法，可找出 G 中的一个顶点 c，使得 $e(c) \leq rad(G) + 2i + 1$ 且 $C(G) \subseteq D(c, 4i + 3)$。

推论 3. 对于含有 m 条边的 α_i-度量图 G，可在 $O(m)$时间内计算其半径和直径的加性 $O(i)$-近似值。

2.3 近似所有 α_i-度量图中的离心率

在本小节中，我们将证明，对于一个 α_i-度量图 G，可以在（几乎）线性总时间内，以至多为 $O(i)$ 的加性单侧误差近似所有顶点的离心率。

有趣的是，从任意顶点 v 到两个互相远离的顶点的距离，可以很好地估计该顶点的离心率 v。

引理14. 设 G 是一个 α_i-度量图，且 x、y 是 G中的一对互相远离的顶点。任意顶点 $v \in V$都满足 $\max\{d(x,v)\ d(y,v)\} \leq e(v) \leq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + 3i + 2$。

证明. 根据离心率的定义，不等式 $e(v) \geq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\}$ 对任意三个顶点都成立。为证明对于任意 $v \in V$， $e(v)$ 的上界，考虑一个最远顶点 $u \in F(v)$，并令 $k = \lfloor d(x,y)/2 \rfloor$。注意，由于 x和 y互相远离， $d(x,y) \geq \max\{d(x,u)\ d(y,u)\}$。根据引理 4，存在顶点 v'、$u' \in S_k(x,y)$，使得 $d(v',v) \leq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} - \min\{d(x,v')\ d(y,v')\} + i$，以及 $d(u',u) \leq \max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - \min\{d(x,u')\ d(y,u')\} + i$。根据三角不等式和引理 2， $e(v) = d(u,v) \leq d(u,u') + d(u',v') + d(v',v) \leq (\max\{d(x,v)\ d(y,v)\} - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + i) + (i+1) + (\max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - \lfloor d(x,y)/2 \rfloor + i) = \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + \max\{d(x,u)\ d(y,u)\} - d(x,y) + 3i + 2 \leq \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + d(x,y) - d(x,y) + 3i + 2 = \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + 3i + 2.$ □

根据引理14，我们得到所有顶点离心率的以下左侧加性近似。设 x, y 是 G 中一对互相远离的顶点。对于每个顶点 $v \in V$，令 $\hat{e}(v) := \max\{d(x,v)\ d(y,v)\}$。

定理 3. 设 G 是一个具有 m 条边的 α_i-度量图。存在一种算法，可在总计几乎线性（$O(im)$）时间内，为每个顶点 $v \in V$ 输出其离心率$e(v)$ 的一个估计值 $\hat{e}(v)$，使得 $e(v) - 3i - 2 \leq \hat{e}(v) \leq e(v)$。

如果预先知道图 G 使得 G 是 α_i-度量图时的最小整数 i，那么我们可以通过令 $\hat{e}(v) := \max\{d(x,v)\ d(y,v)\} + 3i + 2$，将 $\hat{e}$ 转换为右侧加性 $(3i+2)$-近似。不幸的是，对于给定的图，要找到使 G 成为 α_i-度量图的最小 i 并非易事。我们注意到，即使只是检查一个图是否为 α_1-度量图，其难度也至少不亚于检查该图是否含有一个与 C_4 同构的诱导子图。具体而言，取任意图 G，并向其中添加一个全邻接顶点。将所得图记为 G'。那么，G' 是 α_1-度量图，当且仅当 G 是 C_4-自由的。

接下来，我们将介绍两种针对所有顶点的右侧加性离心率近似方案，它们基于文献 [48] 中提出并在 [20,25,29,31,34] 中研究的离心率近似生成树概念。对于 m-边 α_i-度量图，我们得到了一个运行时间为 $O(m)$、右侧加性 $(9i+5)$ 的近似算法，以及一个运行时间为 $O(im)$、右侧加性 $(4i+2)$ 的近似算法。

图 G 的生成树 T 称为离心率 k-近似生成树，如果对于 G $e_T(v)$ 的每个顶点 v，都有 $\leq e_G(v) + k$ 成立 [48]。所有 $(\alpha_1, \triangle)$-度量图（包括弦图和 7-突触复形的底层图）都存在离心率 2-近似生成树 [31]。弦图的离心率 2-近似生成树可在线性时间内计算 [25]。对于任意具有 n 个顶点、m 条边的图 G [34]，可以在 $O(nm)$ 时间内找到具有最小 k 的离心率 k-近似生成树。已知 [20,29]，如果 G 是一个 δ-双曲图，那么 G 存在一个可在 $O(\delta m)$ 时间内构造的离心率 $(4\delta+1)$-近似生成树，以及一个可在 $O(m)$ 时间内构造的离心率 (6δ)-近似生成树。

引理 15。设 G 是一张有 m 条边的 α_i-度量图。如果 c 是 G 中一对互相远离的顶点 x、y 之间任意一条最短路径的中间顶点，且 T 是 G 的一棵 $BFS(c)$-树，那么对于 G 的每个顶点 v，$e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 4i + 3.$。也就是说，$G$ 存在一棵离心率 $(4i+3)$- 近似生成树，可在 $O(im)$ 时间内构造。

证明。设 v 在 G 中（分别在 T 中）的离心率为 $e_G(v)$（$e_T(v)$）。T 中任意顶点 v 的离心率只能比其在 G 中的离心率更大。因此，$e_G(v) \leq e_T(v)$。根据三角不等式，以及顶点 c 到所有顶点的图距离在 T 中均保持不变这一事实，$e_T(v) \leq d_T(v,c) + e_T(c) = d_G(v,c) + e_G(c)$。我们知道，$e_G(v) \geq \max\{d_G(y,v)\ d_G(x,v)\}$。根据引理 4，还有 $d_G(v,c) - \max\{d_G(y,v)\ d_G(x,v)\} \leq 2i+1 - \min\{d_G(y,c)\ d_G(x,c)\}$ 成立。由于 c 是 x 与 y 之间一条最短路径的中间顶点，因此必有 $\min\{d_G(y,c)\ d_G(x,c)\} = \lfloor d_G(x,y)/2 \rfloor$，且根据引理 6，$e_G(c) \leq \lceil d_G(x,y)/2 \rceil + 2i + 1$。综合以上结果，得到 $e_T(v) - e_G(v) \leq d_G(v,c) + e_G(c) - e_G(v) \leq d_G(v,c) - \max\{d_G(y,v)\ d_G(x,v)\} + e_G(c) \leq 2i + 1 - \min\{d_G(y,c)\ d_G(x,c)\} + e_G(c) \leq 2i + 1 - \lfloor d_G(x,y)/2 \rfloor + e_G(c) \leq 2i + 1 - \lfloor d_G(x,y)/2 \rfloor + \lceil d_G(x,y)/2 \rceil + 2i + 1 \leq 4i + 3.$ □

引理 16. 设 G 是具有 m 条边的 α_i-度量图，并设 $z \in V$、$x \in F(z)$ 和 $y \in F(x)$。若 c 是 x 与 y 之间任意一条最短路径的中间顶点，且 T 是 G 的一个 $BFS(c)$ 树，那么，对于 G 的每个顶点 v，$e_G(v) \leq e_T(v) \leq e_G(v) + 7i + 5.$。也就是说，$G$ 存在一个离心率 $(7i+5)$ 近似生成树，可在 $O(m)$ 时间内构造。

证明。该证明沿用引理 15 的证明，只需作一处调整：将应用引理 6 得出 $e_G(c) \leq \lceil d_G(x,y)/2 \rceil + 2i + 1$ 的步骤，替换为应用引理 11 得出 $e_G(c) \leq$

$\lceil d_G(x,y)/2\rceil + 5i + 3$。因此，$e_T(v) - e_G(v) \leq 2i + 1 - \lfloor d_G(x,y)/2\rfloor + \lceil d_G(x,y)/2\rceil + 5i + 3 \leq 7i + 5$。□

注意，任意树 $T = (V, U)$ 中所有顶点的离心率均可在总计 $O(|V|)$ 时间内计算得出。如今，以下关于树的事实已成为民间已知结论：(1) 任意树 T 的中心 $C(T)$ 由一个顶点或两个相邻顶点组成；(2) 任意树 T 的中心 $C(T)$ 和半径 $rad(T)$ 均可在线性时间内求得；(3) 对于每个顶点 $v \in V$，$e_T(v) = d_T(v, C(T)) + rad(T)$。因此，利用 $BFS(C(T))$ 在 T 上，可以在总计 $O(|V|)$ 时间内计算所有 $v \in V$ 的 $d_T(v, C(T))$。现在，将 $rad(T)$ 加到 $d_T(v, C(T))$ 中，即可得到所有 $v \in V$ 的 $e_T(v)$。因此，根据引理 15 和引理 16，我们得到以下关于 α_i-度量图中顶点离心率的加性近似。

定理4。设 G 是一个具有 m 条边的 α_i-度量图。存在一种算法，可在总计线性（$O(m)$)时间内，为每个顶点 $v \in V$ 输出其离心率 $e(v)$的估计值$\hat{}e(v)$，使得 $e(v) \leq \hat{}e(v) \leq e(v) + 7i + 5$. 此外，存在一种算法，可在总计近线性（$O(im)$)时间内，为每个顶点 $v \in V$ 输出其离心率 $e(v)$的估计值$\hat{}e(v)$，使得$e(v) \leq \hat{}e(v) \leq e(v) + 4i + 3$.

推论4. 一个含有 m 条边的 α_i-度量图G 中所有顶点离心率的加性 $O(i)$近似值，可以在 $O(m)$时间内计算得出。

3 个具有 α_1-度量的图

现在我们聚焦于 α_1-度量图，它包含所有弦图以及所有内部顶点度至少为 7 的平面三角剖分（参见例如 [14,15,31,53]）。对于这类图，我们可以得到精确得多的界。已知对于 α_1-度量图，直径与半径之间满足以下关系：$2rad(G) \geq diam(G) \geq 2rad(G) - 2$ [53]。

首先，我们回顾一些已知结果，并给出一个辅助引理。

引理17（[4]）。设 G 是一个 α_1-度量图。设 x、y、v、u 是 G 的顶点，满足 $v \in I(x,y)$、$x \in I(v,u)$，且 x 与 v 相邻。当且仅当存在 x 在 $I(x,u)$ 中的一个邻点 x'，以及 v 在 $I(v,y)$ 中的一个邻点 v'，使得 $d(x',v') = 2$，才有 $d(u,y) = d(u,x) + d(v,y)$ 成立；特别地，x' 和 v' 位于 G 中一条连接 u 与 y 的共同最短路径上。

定理 5（[53]）。当且仅当 G 的所有圆盘 $D(v,k)$ $(v \in V, k \geq 1)$ 都是凸的，且 G 不包含图 1 中的图 W_6^{++} 作为等距子图时，G 才是一个 α_1-度量图。

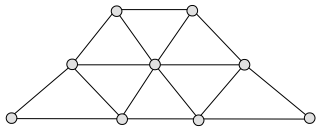


图 1. 禁止的等距子图 W_6^{++}。

引理 18（[50]）。图 G 的所有圆盘 $D(v,k)$ $(v \in V, k \geq 1)$ 都是凸的，当且仅当对于任意顶点 x, y, $z \in V$，以及 $v \in I(x,y)$，$d(v,z) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\}$。

令 z 来自 $F(v)$，得到：

推论 5. 若图 G 的所有圆盘 $D(v,k)$ $(v \in V, k \geq 1)$ 都是凸的，那么对于每个顶点$x, y \in V$和 $v \in I(x,y)$，$e(v) \leq \max\{e(x)\ e(y)\}$。

引理19 ([31])。设 G 是一个 α_1-度量图，且 x 是满足 $e(x) \geq rad(G) + 1$ 的任意顶点。那么，对于每个顶点 $z \in F(x)$ 以及 $I(x,z)$ 中 x 的每个邻点 v， $e(v) \leq e(x)$ 成立。

我们还需要以下辅助引理。

引理 20。设 G 是一个 α_1-度量图。那么，对于每条最短路径 $P = (x_1, \ldots, x_l)$，其中$l \leq 4$，以及 G 中满足对所有 $i \in \{1, \ldots, l\}$ 均有 $d(u, x_i) = k \geq 2$ 的顶点 u，存在一个顶点 u'，它到每个 $x_i (i \in \{1, \ldots, l\})$ 的距离为 2，且到 u 的距离为 $k-2$。

证明。我们对 l 使用归纳法进行证明。如果 $l = 1$，则该陈述显然成立。现在假设存在一个顶点 u'，它与每个 x_i（$i \in \{1, \ldots, l-1\}$）的距离为 2，并且与 u 的距离为 $k-2$。假设 $d(u', x_l)$ 大于 2，即 $d(u', x_l) = 3$。考虑 u' 和 x_{l-1} 的一个公共邻点 a。我们有 $x_{l-1} \in I(x_l, a)$ 以及 $a \in I(u, x_{l-1})$。于是，根据 α_1-度量性质，$k = d(x_l, u) \geq 1 + k - 1 = k$，因此，根据引理17，必定存在顶点 b 和 c，使得 bx_l、cb、$ca \in E$ 以及 $d(c, u) = k-2$。由于 $d(c, u) = du'(u) = k-2$，且 $d(u, a) = k-1$，根据圆盘 $D(u, k-2)$ 的凸性，顶点 u' 和 c 必须相邻。如果 c 与 x_1 的距离为 2，那么根据圆盘 $D(c, 2)$ 的凸性，每个顶点 x_i $(1 \leq i \leq l)$ 与 c 的距离均为 2，结论得证。如果 c 与 x_1 的距离为 3，那么由 $u' \in I(c, x_1)$ 和 $c \in I(u', x_l)$，根据 α_1-度量性质，我们得到 $d(x_1, x_l) \geq 2 + 2 = 4$，这不可能，因为 $d(x_1, x_l) \leq 3$。□

推论 6。设 G 是一个 α_1-度量图。那么，对于每条边 $xy \in E$ 和一个满足 $d(u,x) = d(u,y) = k$ 的顶点 $u \in V$，要么存在一个与 x 和 y 距离为 $k-1$ 的公共邻点 $u'u$，要么存在一个顶点 u'，它与 x 和 y 的距离为 2，且与 u 的距离为 $k-2$，使得对于每个满足 $x(u') \cap N($ $z \in N)$ 和 $y(u') \cap N($ $w \in N)$ 的情形，序列 (x, z, u', w, y) 在 G 中构成一个诱导 C_5。

证明。我们不妨假设 $k \geq 2$。根据引理 20，存在一个顶点 u'，它与 x 和 y 的距离为 2，且与 u 的距离为 $k-2$。考虑一个与 x 和 u' 相邻的公共邻点 z，以及一个与 y 和 u' 相邻的公共邻点 w。如果 zy, $wx \notin E$，那么根据距离要求，(x, z, w, y) 要么诱导出一个 C_4（这是不可能的），要么 (x, z, u', w, y) 诱导出一个 C_5。□

3.1 α_1-度量图上的离心率函数几乎是单峰的

本节的目标是证明以下定理。

定理 6. 设 G 是一个 α_1-度量图，且 v 是 G 的任意顶点。I f

(i) $e(v) > rad(G) + 1$ 或 (ii) $e(v) = rad(G)$
$+ 1$ 且 $diam(G) < 2rad(G) - 1$,
那么必定存在 v 的一个邻点 w，使得 $e(w) < e($v6)。
如果 $e(v) = rad(G) + k$ 对于某个整数 $k > 0$成立，那么 $d(v, C(G)) \leq k + 1$。

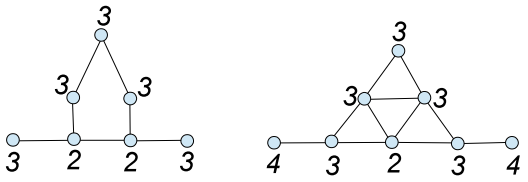


图 2. 定理 6 结果的紧确性。(a) 一个 α_1-度量图 G，其中 $diam(G) = 2rad(G) - 1$，且有一个局部性为 2 的顶点（最上方）。(b) 一个弦图（因此也是一个 α_1-度量图）G，其中 $diam(G) = 2rad(G)$，且有一个局部性为 2 的顶点（最上方）。每个顶点旁的数字表示其离心率。

定理 6 表明，若在一个 α_1-度量图中存在一个具有 $loc(v) > 1$ 的顶点 v G，那么 $diam(G) \geq 2rad(G) - 1$，$e(v) = rad(G) + 1$，并且 $d(v, C(G)) = 2$。也就是说，只有在 $diam(G) \in \{2rad(G) - 1$ 的情况下，$2rad(G)\}$，离心率函数才可能不是单峰的；然而，离心率函数的所有局部极小值都集中在 G 的中心 $C(G)$ 周围（它们与 $C(G)$ 的距离为 2）。图 2 所示的两个 α_1-度量图表明这一结果是紧的。

我们将把定理 6 的证明拆分为一系列本身也具有独立价值的引理。根据引理 7、引理 8 和推论 2，我们已经知道，α_1-度量图的每个顶点 v 的局部性至多为 2；若其离心率 $e(v)$ 至多为 $rad(G) + k$，则它到 $C(G)$ 的距离至多为 $k + 1$；并且满足 $d(v, C(G)) + rad(G) \geq e(v) \geq d(v, C(G)) + rad(G) - 1.$。在接下来的引理中，我们将大量运用引理 17 和定理 5 中陈述的 α_1-度量图的两个特定性质。

引理 21. 设 G 是一个 α_1-度量图，且 v 是 G 的一个顶点，并满足 $loc(v) = 2$。那么，$e(v) \leq rad(G) + 2$。此外，如果 $e(v) = rad(G) + 2$，那么 $diam(G) = 2rad(G)$。

证明。令 $k := e(v)$，并设 x 是满足 $d(x, v) = 2$ 且 $e(x) = k - 1$ 的一个顶点，使得 $|F(x)|$ 尽可能小。考虑 x 和 v 的一个公共邻点 z，以及一个顶点 $u \in F(z)$。必然有，$e(z) = e(v) = e(x) + 1$，且 $u \in F(x)$。我们有 $x \in I(z, u)$ 和 $z \in I(x, v)$。根据 α_1-度量性质，$d(v, u) \geq d(v, z) + d(x, u) = d(u, x) + 1 = e(z) = k$。由于 $e(v) \geq d(v, u) \geq e(z) = e(v)$，即 $k = d(v, u)$，由引理17，必然存在顶点 w 和 t，使得 wv、wt、$tx \in E$ 以及 $d(t, u) = d(u, x) - 1 = k - 2$。

如果 $e(t) = e(x) + 1$，那么对于每个 $s \in F(t)$，都有 $x \in I(t, s)$ 和 $d(x, s) = k - 1$。如果 $e(t) = e(x)$，那么根据 x 的选取，必定存在一个顶点 $s \in F(t) \setminus F(x)$（因为 $u \in F(x) \setminus F(t)$），且有 $x \in I(t, s)$ 和 $d(x, s) = k - 2$。在这两种情况下，将 α_1-度量性质应用于 $x \in I(t, s)$ 和 $t \in I(x, u)$，可得 $d(s, u) \geq d(s, x) + d(u, t) \geq k - 2 + k - 2 = 2k - 4$。

由于 $d(s, u) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$，我们有 $k \leq rad(G) + 2$，并且如果 $k = rad(G) + 2$，那么$d(s, u) = diam(G) = 2rad(G)$。□

引理 22. 设 G 是一个 α_1-度量图，且 v 是 G 中满足 $e(v) = rad(G) + 2$ 的顶点。那么，$loc(v) = 1$。

证明。反设 $loc(v) = 2$。于是，由引理 8，$d(v, C(G)) \leq 3$。然而，由于 $e(v) = rad(G) + 2$，v 不可能包含一个与 $C(G)$ 距离不超过 2 的顶点；否则，这将意味着从 v 到 $C(G)$ 的最短路径上的一个邻点，其离心率至多为 $rad(G) + 1$，这与 $loc(v) = 2$ 矛盾。因此，$d(v, C(G)) = 3$。

令 x 为 $C(G)$ 中距离 v 最近的顶点，并令 $P=(x,z,y,v)$ 为 x 与 v 之间的一条最短路径，且选择该路径时，使得 v 在 P 中的邻点 y 的 $|F(y)|$ 尽可能小。必有 $e(x)=rad(G)=e(z)-1$，且 $e(z)+1=e(y)=e(v)=rad(G)+2$。考虑一个顶点 $u\in F(y)$。由于 $d(u,y)=rad(G)+2$，且 $d(u,x)\le rad(G)$，而 $d(u,z)\le rad(G)+1$，因此我们有$d(u,x)=rad(G)=d(u,z)-1=d(u,y)-2$，即 $x\in I(u,z)$。对$x\in I(u,z)$ 和 $z\in I(x,v)$ 应用 α_1-度量性质，得到 $d(v,u)\ge d(v,z)+d(x,u)=rad(G)+2$。由引理17，存在顶点 f,w,t，使得 $fv,fz,fw,wt,tx\in E$，且 $d(t,u)=rad(G)-1$。注意，由于 $d(u,y)=rad(G)+2$，且 $d(u,f)=rad(G)+1$，因此 $f\neq y$。为避免出现诱导的 C_4，顶点 f和 y必须相邻。由于 $loc(v)=2$，我们也有 $e(f)\ge e(v)$。

现在，我们有 $f\in S_2(x,v)$ 和 $u\in F(y)\setminus F(f)$。根据 y 的选择，必定存在一个顶点s属于 $F(f)$，但不属于 $F(y)$。因此，$y\in I(f,s)$。又由于 $f\in I(y,u)$，根据 α_1-度量性质，$d(u,s)\ge d(f,u)+d(s,y)\ge rad(G)+1+rad(G)+1=2rad(G)+2>diam(G)$，这不可能。因此，$loc(v)=1$ 必定成立。□

引理 23. 设 G 是一个 α_1-度量图。设 v,c,b,f,a,u,s 是 G 的顶点，并满足 v,c,b,f,a 构成一个诱导的 C_5, $p=d(u,f)=d(v,u)-2=d(c,u)-2$，且 $q=d(s,b)=d(v,s)-2=d(a,s)-2$（见图3）。那么，要么 $d(u,s)=p+q+1$，要么存在一个顶点 h，它与 $C_5=(v,c,b,f,a)$ 的所有顶点都相邻。

证明。根据距离条件，$f\in I(b,u)$ 和 $b\in I(f,s)$ 成立。因此，根据 α_1-度量性质，我们有 $d(u,s)\ge p+q$。下文假设 $d(u,s)=p+q$。那么，根据引理 17，必定存在顶点 x,y,z，使得 $xf,xz,yb,yz\in E$，并且 $d(x,u)=p-1$，以及 $d(y,s)=q-1$。示意图见图3。

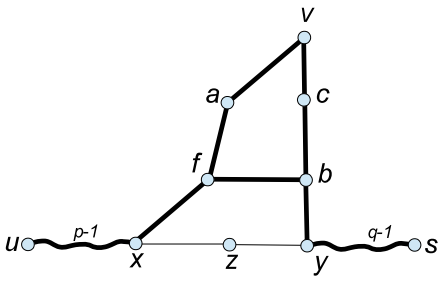


图3. 引理 23 证明的示意图。

由于 $d(v,x)=d(v,y)=3$ 且 $z\in I(x,y)$，根据圆盘 $D(v,3)$ 的凸性，我们得到 $d(v,z)\le 3$。顶点z不能与 v,c,a 相邻，因为 $d(v,y)=d(a,y)=3=d(v,x)=d(c,x)$。因此，$2\le d(v,z)\le 3$。

首先考虑 $d(v,z)=2$ 的情形。取 v 和 z 的一个公共邻点 h。由于 $d(v,x)=d(v,y)=3$，且 $d(v,f)=d(v,b)=d(v,z)=2$，由圆盘 $D(v,2)$ 的凸性可得 $zf,zb\in E$。圆盘 $D(y,2)$ 和 $D(x,2)$ 的凸性意味着 $hc,ha\in E$（注意，v 到 y 和 x 的距离均为 3，顶点 a,h 到 x 的距离为 2，顶点 h,c 到 y 的距离为 2）。为了避免出现禁用的诱导 C_4，h 还必须与 f 和 b 相邻。因此，h 与 $C_5=(v,c,b,f,a)$ 的所有顶点都相邻。

现在考虑 $d(v,z)=3$ 的情形。考虑一条连接 v 和 z 的路径 (v,h,g,z)。如果 z 与 f 相邻，那么它就与 b 相邻（否则会出现一个导出 C_4），反之亦然。但如果 $fz,zb\in E$，根据 $D(z,2)$ 的凸性，a 和 c 必须相邻，这与 $C_5=(v,c,b,f,a)$ 是一个导出圈相矛盾。因此，$zf,zb\notin E$，从而 (x,z,y,b,f) 构成一个导出 C_5，且 $g\neq f,b$。

顶点 c 和 z 之间的距离不可能为 2，因为否则圆盘 $D(c,2)$ 的凸性以及 $d(c,x)=3$ 将推出 $zf\in E$，这是不可能的。因此，$d(z,c)=3$，尤其是 $gc\notin E$ 和 $h\neq c$。类似地，$d(a,z)=3$ 成立，尤其是 $ga\notin E$ 和 $h\neq a$。

我们声称 $d(h,x)=d(h,y)=2$。如果 $d(h,y)=3$，那么再结合 $d(c,z)=3$，我们得到 $z\in I(h,y)$,$y\in I(z,c)$。根据 α_1-度量性质，我们得到 $d(h,c)\geq d(h,z)+d(c,y)=4$，这与 $d(h,c)\leq 2$ 矛盾。类似地，$d(h,x)=2$ 必须成立。

现在，圆盘 $D(y,2)$ 和 $D(x,2)$ 的凸性首先给出 $hc,ha\in E$（因为 $d(y,h)=d(y,c)=2=d(y,v)-1$ 和 $d(x,h)=d(x,a)=2=d(x,v)-1$），然后给出 $hf,hb\in E$（因为 $d(y,h)=d(y,f)=2=d(y,a)-1$ 和 $d(x,h)=d(x,b)=2=d(x,c)-1$）。因此，h 与$C_5=(v,c,b,f,a)$的所有顶点都相邻。□

引理 24. 如果一个 α_1-度量图 G 有一个顶点 v 满足 $loc(v)>1$ 且 $e(v)=rad(G)+1$，那么$diam(G)\geq 2rad(G)-1$。

证明。设 $r:=rad(G)$。反设 $diam(G)\leq 2r-2$不成立。令 v 为一个满足 $loc(v)>1$ 且 $e(v)=r+1$ 的任意顶点。取一个顶点 $s\in F(v)$ 和一个顶点 $c\in S_1(v,s)$，使得 $|F(c)|$ 尽可能小。由于 $loc(v)>1$，故 $e(c)\geq e(v)$。再令 u 为来自 $F(c)$的任意顶点。

我们断言，$e(c)=d(u,c)=d(u,v)=e(v)$。如果 $d(u,c)>d(u,v)$，那么将 α_1-度量性质应用于 $v\in I(c,u)$ 和 $c\in I(s,v)$，可得 $d(s,u)\geq d(s,c)+d(v,u)\geq e(v)-1+e(v)-1=2r$，这是不可能的。因此，必有 $e(c)=d(u,c)=d(u,v)=e(v)=r+1$。

假设在 G 中存在一个顶点 g，使得 gc、$gv\in E$和 $d(g,u)=r=d(u,c)-1$。若 $d(g,s)>d(c,s)$，那么对 $c\in I(g,s)$和 $g\in I(u,c)$应用 α_1-度量性质，可得$d(s,u)\geq d(s,c)+d(g,u)=e(v)-1+r=2r$，这不可能。若 $d(g,s)\leq d(c,s)$，那么$g\in S_1(v,s)$，并且根据 c的选取，必定存在一个顶点 $t\in F(g)\setminus F(c)$（回想一下，$u\in F(c)\setminus F(g)$，因为 $e(g)\geq r+1$）。因此，对 $c\in I(g,t)$和 $g\in I(u,c)$应用 α_1-度量性质，可得 $d(t,u)\geq d(t,c)+d(g,u)\geq 2r$，这不可能。

因此，在下文中，我们可以假设在 G 中不存在同时为 c 和 v 的公共邻点 g，且该公共邻点与 $d(g,u)=r=d(u,c)-1$。由于 $d(u,c)=d(u,v)$，根据推论 6，存在一个顶点 f，它到 c 和 v 的距离均为 2，到 u 和 $-2=r-1$ 的距离为 $d(u,c)$，并且它与任意 $b\in N(c)\cap N(f)$ 以及任意 $a\in N(v)\cap N(f)$ 构成一个诱导的 $C_5=(c,b,f,a,v)$。

我们声称，对于每个 $a\in N(v)\cap N(f)$，都有 $d(s,a)=d(s,v)$。事实上，如果 $d(s,a)<d(s,v)$，那么根据圆盘 $D(s,r)$ 的凸性，顶点 a 和 c 必须相邻（因为它们都与 v 相邻，且满足 $d(v,s)=r+1$），这与 $ac\notin E$ 矛盾。如果 $d(s,a)>d(s,v)$，那么，将 α_1-度量性质应用于 $v\in I(a,s)$ 和 $a\in I(u,v)$，可得 $d(s,u)\geq d(s,v)+d(a,u)\geq 2r+1$，这是不可能的。

由 $d(s,a)=d(s,v)$，我们还得到 $d(s,f)\geq d(s,c)$。假设 $d(s,f)=d(s,c)+1$。若 $d(s,b)=d(s,c)$，则 $b\in I(s,f)$。又由于 $f\in I(b,u)$，α_1-度量性质蕴含 $d(s,u)\geq d(s,b)+d(f,u)=d(s,c)+r-1=2r-1$，这不可能。若此时 $d(s,b)=d(s,c)+1$，则 $c\in I(s,b)$。又由于 $b\in I(c,u)$，α_1-度量性质蕴含 $d(s,u)\geq d(s,c)+d(b,u)=2r$，这不可能。前述两个矛盾表明，$d(s,f)=d(s,c)+1$不可能，即必须有 $d(s,f)=d(s,c)$。由圆盘 $D(s,r)$ 的凸性，对每个 $b\in I(f,c)$，都有 $d(s,b)\leq r$。我们分两种情况讨论。两种情况下都会导出矛盾。

情况 1：存在一个公共邻点 b，它与 f 和 c 相邻，且距 s 为 $r-1=d(s,c)-1$。

我们有 $d(v,u)=r+1=d(c,u)=d(u,f)+2$ 以及 $d(v,s)=r+1=d(a,s)=d(s,b)+2$。根据引理 23，要么 $d(u,s)=2r-1$（这是不可能的），要么存在一个顶点 h，它与

$C_5 = (b, c, v, a, f)$ 的所有顶点都相邻。后一种情况与我们先前的断言矛盾：对于每个 $a \in N(v) \cap N(f)$，都有 $d(s,a) = d(s,v)$（注意，$h \in N(v) \cap N(f)$，且 $d(s,h) = d(s,b) + 1 = d(s,v) - 1$）。

情形 2：不存在与 f 和 c 的公共邻点，该公共邻点与 s 之间的距离为 $r-1 = d(s,c) - 1$。

因此，对于每个 $b \in I(f,c)$，$d(b,s) = r$。根据引理 20，存在一个顶点 s'，其与 c 和 f 的距离为 2，并且与 s 的距离为 $r-2$。考虑 c 和 s' 的一个公共邻点 x，以及 f 和 s' 的一个公共邻点 y。不妨设 $yc, xf \notin E$（否则我们处于情形 1）。我们断言，$d(y,v) = 2$。假设 $d(y,v) = 3$。如果还有 $d(a,x) = 3$，那么 $a \in I(y,v)$ 且 $v \in I(a,x)$，并且 α_1-度量性质意味着 $d(y,x) \geq d(y,a) + d(v,x) = 4$，这是不可能的。因此，必有 $d(a,x) = 2$，从而根据圆盘 $D(a,2)$ 的凸性，顶点 x 和 y 相邻（注意，$x, y \in D(a,2)$ 且 $s' \notin D(a,2)$）。由于 $y \in I(f,x)$、$y \notin D(v,2)$ 且 $f, x \in D(v,2)$，我们得到与圆盘 $D(v,2)$ 的凸性相矛盾的结论。因此，必有 $d(y,v) = 2$。根据圆盘 $D(v,2)$ 的凸性，顶点 x 和 y 必须相邻。

考虑 y 和 v 的一个公共邻点 w。由圆盘 $D(s',2)$ 的凸性，顶点 w 和 c 相邻。为避免出现导出圈，C_4、w 和 x 也相邻。若 $d(w,u) = d(u,c) - 1$，那么根据 c 的选取，存在一个顶点 $t \in F(w) \setminus F(c)$（回忆一下，$u \in F(c) \setminus F(w)$，因为 $e(w) \geq r+1$）。因此，将 α_1- 度量性质应用于 $c \in I(w,t)$ 和 $w \in I(u,c)$，可得 $d(t,u) \geq d(t,c) + d(w,u) \geq 2r$，这是不可能的。因此，必有 $d(w,u) = d(u,c) = r+1$。特别地，顶点 w 和 f 不可能相邻。还要注意，$d(a,y) = d(v,y) = 2$（因为 $d(a,s) = d(v,s)$ 且 $wa \notin E$（为避免一个导出 C_4）。因此，(v,w,y,f,a) 在 G 中导出一个 C_5。

现在，我们有 $d(v,u) = r+1 = d(w,u) = d(f,u) + 2$ 和 $d(v,s) = r+1 = d(a,s) = d(s,y) + 2$。由引理 23，要么 $d(u,s) = 2r-1$（这是不可能的），要么存在一个顶点 h，它与 $C_5 = (y,w,v,a,f)$ 中的所有顶点都相邻。后一种情况与我们先前的断言相矛盾：对于每个 $a \in N(v) \cap N(f)$，都有 $d(s,a) = d(s,v)$（注意 $h \in N(v) \cap N(f)$ 且 $d(s,h) = d(s,y) + 1 = d(s,v) - 1$）。

由此得到的矛盾证明了该引理。 □

现在，定理 6 可由引理 8、引理 21、引理 22 和引理 24 得出。下面我们给出定理 6 的三个有趣推论。

推论 7. 设 G 是一个 α_1-度量图。那么，

(i) 如果 $diam(G) < 2rad(G) - 1$（即 $diam(G) = 2rad(G) - 2$），那么 G 上离心率函数的每个局部最小值都是全局最小值。(ii) 如果 $diam(G) \geq 2rad(G) - 1$，那么 G 上离心率函数的每个局部最小值都是全局最小值，或与某个全局最小值的距离为 2。

推论8。对于每个 α_1-度量图 G 以及任意顶点 v，以下公式成立：

$$d(v, C(G)) + rad(G) \geq e(v) \geq d(v, C(G)) + rad(G) - \epsilon,$$

其中 $\epsilon \leq 1$，如果 $diam(G) \geq 2rad(G) - 1$，否则为 $\epsilon = 0$。

图 G 中从顶点 v 到顶点 x 的路径 $(v = v_0, \ldots, v_k = x)$，若对每个 $i\,(0 \leq i \leq k-1)$ 都有 $e(v_i) > e(v_{i+1})$，则称其为（相对于离心率函数）严格递减路径。若对每个 $i\,(0 \leq i \leq k-1)$ 都有 $e(v_i) \geq e(v_{i+1})$，则称其为递减路径。图 G 的边 $ab \in E$，若满足 $e(a) = e(b)$，则称其为（相对于离心率函数）水平边。

推论 9. 设 G 是一个 α_1-度量图， v 是其任意顶点。那么，存在一条从 v 到 $C(G)$ 中最近顶点 x 的最短路径 $P(v,x)$，使得：

(i) 如果 $diam(G) < 2rad(G) - 1$（即 $diam(G) = 2rad(G) - 2$），那么 $P(v,x)$ 严格递减；(ii) 如果 $diam(G) \geq 2rad(G) - 1$，那么 $P(v,x)$ 递减，且最多只有一条水平边，其端点与 x 相邻。

3.2 α_1-度量图的中心直径

注意，图 $G = (V,E)$ 的中心 $C(G)$ 可以表示为所有半径为 $rad(G)$ 的圆盘 G 的交集，即 $C(G) = \bigcap\{D(v, rad(G)) : v \in V\}$。因此， α_1- 度量图 G 的中心 $C(G)$ 是凸的（特别地，它是连通的），因为凸集的交集始终是一个凸集。一般而言，任何集合 $\mathcal{C}_{\leq i}(G) := \{z \in V : ecc(z) \leq rad(G) + i\}$ 都是 G 的一个凸集，因为 $\mathcal{C}_{\leq i}(G) = \bigcap\{D(v, rad(G) + i) : v \in V\}$。

推论10. 在 α_1-度量图 G 中，所有集合 $\mathcal{C}_{\leq i}(G)$、 $i \in \{0, \ldots, diam(G) - rad(G)\}$ 都是凸的。特别地， α_1-度量图 G 的中心 $C(G)$ 是凸的。

本节中，我们给出 α_1-度量图的中心的直径和半径的紧确界。此前已知，弦图的中心的直径（半径）至多为 3（至多为 2） [15]。为证明我们的结果，我们需要一些技术性引理。

引理25. 设 G 是一个 α_1-度量图。那么，对于每条最短路径 $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$，以及满足对所有 $i \in \{1, \ldots, 5\}$ 均有 $d(u, x_i) = k$ 的 G 中的顶点 u，存在顶点 t、 w、 s，使得 $d(t,u) = d(s,u) = k-1$， $k-2 \leq d(w,u) \leq k-1$，且 t 与 x_1、 x_2、 w 相邻， s 与 x_4、 x_5、 w 相邻。

证明。根据引理 20，存在一个顶点 u'，它与每个 x_i $(1 \leq i \leq 4)$ 的距离均为 2，且与 u 的距离为 $k-2$。假设 $d(u', x_5)$ 大于 2，即 $d(u', x_5) = 3$。考虑 u' 和 x_4 的一个公共邻点 a。我们有 $x_4 \in I(x_5, a)$ 和 $a \in I(u, x_4)$。于是，根据 α_1-度量性质， $k = d(x_5, u) \geq 1 + k - 1 = k$；因此，由引理17，必存在顶点 b 和 c，使得 $bx_5, cb, ca \in E$ 且 $d(c,u) = k-2$。由于 $d(c,u) = d(u',u) = k-2$，且 $d(u, a) = k-1$，根据圆盘 $D(u, k-2)$ 的凸性，顶点 u' 和 c 必须相邻。若 c 与 x_1 的距离为 2，那么根据圆盘 $D(c, 2)$ 的凸性，每个顶点 x_i $(1 \leq i \leq 5)$ 与 c 的距离均为 2，因此我们可以用 c 替换 u'（参见下文 $d(u', x_5) = 2$ 的情形）。若 c 与 x_1 的距离为 3，那么根据 $u' \in I(c, x_1)$ 和 $c \in I(u', x_5)$，由 α_1-度量性质可得 $4 = d(x_1, x_5) \geq 2 + 2 = 4$。现在，由引理17，必存在顶点 t、 w 和 s，使得 $sx_5, sc, sw, tu', tx_1, tw \in E$。此外，由于 $d(x_5, t) = d(x_5, x_2) = 3$，且 $d(x_5, x_1) = 4$，根据圆盘 $D(x_5, 3)$ 的凸性，顶点 t 和 x_2 也必须相邻。同理， $sx_4 \in E$。必然有 $d(u,t) = d(u,s) = k-1$。根据圆盘 $D(u, k-1)$ 的凸性，或者 $d(u,w) = k-1$，或者 $d(u,w) = k-2$。在后一种情况下，由于圆盘 $D(w, 2)$ 的凸性， w 的所有顶点 x_i, $1 \leq i \leq 5$ 与其距离均为 2。

剩下的情况，即 $d(u', x_5) = 2$，也可以用类似（甚至更简单）的方法处理。令 $w := u'$, t 为 u' 和 x_1 的任意一个公共邻点，令 s 为 u' 和 x_5 的任意一个公共邻点。由圆盘 $D(x_1, 3)$ 和 $D(x_5, 3)$ 的凸性，可得边 tx_2 和 sx_4 存在。□

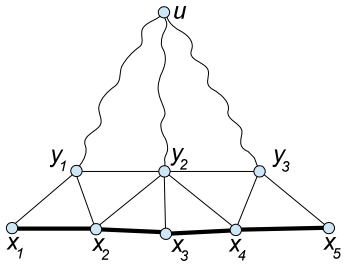


图 4. 引理 26 的示意图。

引理 26。设 G 是一个 α_1-度量图。那么，对于每条最短路径 $P=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 以及 G 中满足对所有 $i\in\{1,\dots,5\}$ 都有 $d(u,x_i)=k$ 的顶点 u，存在一条最短路径 $Q=(y_1,y_2,y_3)$，使得对每个 $i\in\{1,\dots,3\}$，都有 $d(u,y_i)=k-1$，并且 $N(y_1)\cap P=\{x_1,x_2\}$，$N(y_2)\cap P=\{x_2,x_3,x_4\}$，且 $N(y_3)\cap P=\{x_4,x_5\}$（见图 4）。

证明。根据引理25，存在顶点 t,s，使得 $d(t,u)=d(s,u)=k-1$, t 与x_1,x_2相邻，且 s与 x_4,x_5相邻。若 $d(x_4,t)=3$，则 $x_2\in I(t,x_4)$ 且 $t\in I(u,x_2)$；由α_1-度量性质可得 $d(x_4,u)\geq 2+k-1=k+1$，这不可能。因此，必有 $d(x_4,t)=2$。设 v 是 t 和 x_4的公共邻点。若 $d(v,u)=k$，则再次对 $v\in I(t,x_5)$ 和 $t\in I(u,v)$ 应用 α_1- 度量性质，可得 $d(x_5,u)\geq 2+k-1=k+1$，这不可能。因此，必有$d(v,u)=k-1$。由于 $d(v,u)=k-1=d(s,u)$ 且 $d(u,x_4)=k$，根据 $D(u,k-1)$ 的凸性，顶点 v 和 s 必相邻。还要注意，x_3 不能与 t 或 s相邻。例如，若 $x_3s\in E$（$tx_3\in E$ 的情形可用类似方法处理），则对 $s\in I(u,x_3)$ 和 $x_3\in I(s,x_1)$ 应用 α_1-度量性质，将得到 $d(x_1,u)\geq 2+k-1=k+1$，这不可能。现在，圆盘 $D(x_1,2)$ 的凸性蕴含边 vx_3，而圆盘 $D(x_3,1)$ 的凸性蕴含边 vx_2。令 $y_1:=t$, $y_2:=v$ 且 $y_3:=s$，即可得到所需的路径 Q。□

定理 7. 设 G 是一个 α_1-度量图。对于 G 中每一对满足 $d(s,t)\geq 4$的顶点 s、t，都存在一个顶点 $c\in I^o(s,t)$，使得 $e(c)<\max\{e(s),e(t)\}$。

证明。只需证明该结论对满足 $d(s,t)=4$的顶点 s、t 成立。

由推论 5 可知，对于每个 $c\in I(s,t)$，都有 $e(c)\leq\max\{e(s),e(t)\}$。反设不存在顶点 $c\in I^o(s,t)$，使得 $e(c)<\max\{e(s),e(t)\}$。不妨设 $e(s)\leq e(t)$。那么，对于每个 $c\in I^o(s,t)$，都有 $e(c)=e(t)$。考虑一个顶点$c\in S_1(s,t)$。若 $e(c)>e(s)$，则 $e(c)=e(s)+1$。考虑来自 $F(c)$的一个顶点 z。必有 $z\in F(s)$。对 $c\in I(s,t)$、$s\in I(c,z)$应用 α_1-度量性质，得到 $e(c)=e(t)\geq d(t,z)\geq d(c,t)+d(s,z)=3+e(s)=2+e(c)$，这不可能。因此，对于每个 $c\in I^o(s,t)$，都有 $e(s)=e(c)=e(t)$。

考虑连接顶点 s 和t 的任意最短路径 $P=(s=x_1,x_2,x_3,x_4,x_5=t)$。我们断言，对于任意顶点 $u\in F(x_3)$，P 中所有顶点到 u 的距离均为 $k:=d(u,x_3)=e(x_3)$。由于 $e(x_i)=e(x_3)$，我们知道 $d(u,x_i)\leq k$ $(1\leq i\leq 5)$。假设 $d(u,x_i)=k-1$，$d(u,x_{i+1})=k$，且 $i\leq 2$。将 α_1-度量性质应用于 $x_i\in I(u,x_{i+1})$ 和 $x_{i+1}\in I(x_i,x_{i+3})$，可得 $d(x_{i+3},u)\geq k-1+2=k+1$，这与 $d(u,x_{i+3})\leq k$ 矛盾。因此，$d(u,x_1)=d(u,x_2)=k$。由对称性，同样有 $d(u,x_4)=d(u,x_5)=k$。于是，根据引理 26，对于路径 $P=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$，存在一条最短路径 $Q=(y_1,y_2,y_3)$，使得对每个 $i\in\{1,\dots,3\}$，均有 $d(u,y_i)=k-1$，且 $N(y_1)\cap P=\{x_1,x_2\}$、$N(y_2)\cap P=\{x_2,x_3,x_4\}$ 和 $N(y_3)\cap P=\{x_4,x_5\}$（见图 4）。由于对每个 $i\in\{1,\dots,3\}$，$y_i\in I^o(x_1,x_5)=I^o(s,t)$，因此我们有 $e(y_i)=e(x_3)=k$。

上述结论对连接顶点s 和 t的每一条最短路径 $P = (s = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = t)$ 均成立。现在，假设选择 P 的方式是：在 $S_2(s,t)$ 中所有顶点里，顶点 x_3 的远点数最小，即 $|F(x_3)|$ 尽可能小。由于 y_2 也属于 $S_2(s,t)$，且有一个顶点与其距离为 $k-1$，根据 x_3 的选取方式，必定存在一个顶点 $u' \in F(y_2)$，其到 x_3 的距离为 $k-1$。将前述论证应用于路径$P' := (s = x_1, x_2, y_2, x_4, x_5 = t)$，可得对于 $i = 1$、2、4 和 5，有 $d(x_i, u') = d(y_2, u') = k$；并且根据引理 26，可得另外两个顶点 v 和 w，它们到 u' 的距离为 $k-1$，且 vx_1、vx_2、wx_4、$wx_5 \in E$ 以及 vy_2、$wy_2 \notin E$（见图 5）。根据圆盘 $D(u', k-1)$ 的凸性，vx_3、$wx_3 \in E$ 也成立。现在考虑圆盘 $D(x_2, 2)$。由于 y_3、w 在圆盘内，而 x_5 不在其中，顶点 w 和 y_3 必须相邻。但这样一来，顶点 y_2、x_3、w、y_3 就构成了一个禁忌导出圈 C_4。

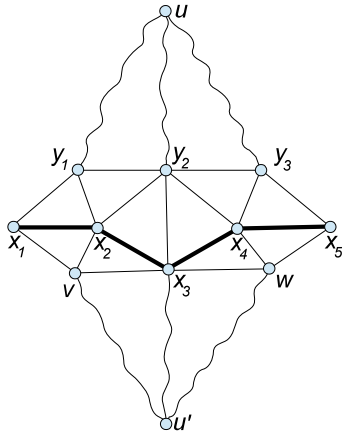


图 5. 定理 7 证明的示意图。

因此，必定存在一个顶点 $c \in I^o(s, t)$，其 $e(c) < \max\{e(s)\ e(t)\}$。 □

推论 11. 设 G 是一个 α_1-度量图。那么，$diam(C(G)) \leq 3$ 且 $rad(C(G)) \leq 2$.

证明。反设存在顶点 $s, t \in C(G)$，使得 $d(s,t) \geq 4$。那么，根据定理 7，必定存在一个顶点 $c \in I^o(s,t)$，使得 $e(c) < \max\{e(s)\ e(t)\}$。后者意味着 $e(c) < rad(G)$，这是不可能的。因此，必有 $diam(C(G)) \leq 3$。由于 $C(G)$ 是 G 的一个凸集，由 $C(G)$ 诱导的 G 的子图也是一个 α_1-度量图。根据 [53]，对于每一个 α_1-度量图 G，$diam(G) \geq 2rad(G) - 2$ 均成立。因此，对于由 $C(G)$ 诱导的图，有 $3 \geq diam(C(G)) \geq 2rad(C(G)) - 2$，即 $rad(C(G)) \leq 2$。□

由于弦图是 α_1-度量图，我们还可以得到以下经典结果。

推论 12（[15]）。设 G 为弦图。则，$diam(C(G)) \leq 3$ 且 $rad(C(G)) \leq 2$。

3.3 寻找 α_1-度量图的中心顶点

我们提出了一种局部搜索算法，可在次二次时间内计算任意 α_1-度量图的中心顶点（定理8）。对于一个重要的 α_1-度量图子类，即 (α_1, Δ)-度量图，我们的算法甚至能达到线性运行时间（定理 9），从而回答了 [31] 中提出这一子类时留下的一个开放问题。(α_1, Δ)-度量

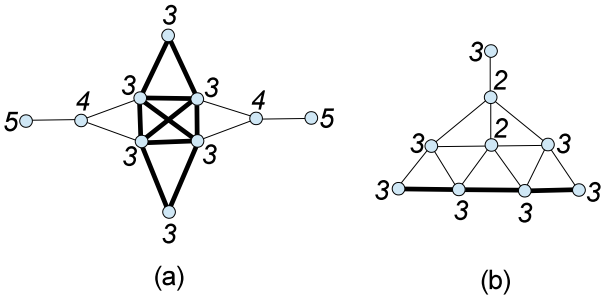


图 6. 定理 7 和推论 11 结果的紧确性。(a) 一个弦图，其中 $diam(C(G)) = 3$ 和 $rad(C(G)) = 2$。(b) 一个 α_1-度量图，其中有一对距离为 3 的顶点，且它们之间的任何最短路径上都不存在离心率更小的顶点。每个顶点旁的数字表示其离心率。

图恰好是满足所谓三角条件的 α_1-度量图：对于任意顶点 u, v, w，若 u 和 v 相邻，且 $d(u, w) = d(v, w) = k$，则必定存在某个公共邻点 $x \in N(u) \cap N(v)$，使得 $d(x, w) = k - 1$。弦图以及内部顶点度至少为 7 的平面三角剖分，都是 (α_1, Δ)-度量图（见[14,15,31,53]）。

距离-k 门。我们首先为本部分引入所需的新记号和术语。下文中，令 $\mathrm{proj}(v, A) = \{a \in A : d(v, a) = d(v, A)\}$ 表示顶点 v 到顶点子集 A 的度量投影。对于每个满足 $0 \le k \le d(v, A)$ 的 k，我们定义 $S_k(A, v) = \bigcup\{S_k(a, v) : a \in \mathrm{proj}(v, A)\}$。相对于 A，v 的距离-k 门是满足 $v^* \in \bigcap\{I(a, v) : a \in \mathrm{proj}(v, A)\}$ 且 $d(v^*, A) \le k$ 的顶点 v^*。若 $k = 1$，则按照 [16]，我们就简称其为门。注意，每个满足 $d(v, A) \le k$ 的顶点 v 都是其自身的距离-k 门。我们研究相对于邻点集和团的距离-k 门（其中 $k \le 2$）是否存在。后者是我们主要算法的基石。我们认为，它们本身也值得关注。

引理 27. 设 x 和 v 是 G 中的 α_1-度量图顶点，满足 $d(x, v) \ge 3$。对于任意顶点 $u, u' \in S_3(x, v)$，度量投影 $\mathrm{proj}(u, D(x, 1))$ 和 $\mathrm{proj}(u', D(x, 1))$ 在包含关系下可比较。

证明. 反设 $U = \mathrm{proj}(u, D(x, 1))$ 和 $U' = \mathrm{proj}(u', D(x, 1))$ 在包含关系下不可比较。令 $a \in U \setminus U'$ 和 $a' \in U' \setminus U$。注意，$d(u, a) < d(u', a)$，同理 $d(u', a') < d(u, a')$。此外，$a, a' \in N(x) \cap I(x, v) (= D(x, 1) \cap D(v, d(v, x) - 1))$ 必须相邻，因为根据定理 5，每个圆盘都是凸集，且两个凸集的交集也为凸集。因此，对 u, a, a', u' 应用 α_1-度量性质，可得 $d(u, u') \ge d(u, a) + d(a', u') = 4$。这会导致矛盾，因为 $u, u' \in S_3(x, v)$，并且根据引理 2，G 的区间薄度至多为 2。□

引理28. 设 x 和 u 是 G 中的顶点，其中 G 是一个 α_1-度量图，满足 $d(x, u) = 3$。对于每个顶点 $w, w' \in N(u) \cap I(x, u)$，度量投影 $\mathrm{proj}(w, D(x, 1))$、$\mathrm{proj}(w', D(x, 1))$ 按包含关系可比较。

证明。由于 $w, w' \in N(u) \cap I(u, x)$ 是两个圆盘的交集，且根据定理 5，每个圆盘都必须是凸的，因此顶点 w and w' 必须相邻。反设 $\text{proj}(w, D(x, 1))$, $\text{proj}(w', D(x, 1))$ 在包含关系下不可比较。设 $a, a' \in N(x)$ 满足 $a \in N(w) \setminus N(w')$ 且 $a' \in N(w') \setminus N(w)$。与上文类似，我们证明 $a, a' \in N(x) \cap I(x, u)$ 必须相邻。但这样一来，顶点 a, a', w', w 就会诱导出一个 C_4，这是不可能的。□

推论 13. 设 x 是 α_1-度量图 G 的任意顶点。G 的每个顶点 v 都有一个关于 $D(x, 1)$ 的闸点 v^*。

证明。如果 $d(v, x) \leq 2$，那么我们可以选择 $v^* = v$。从现在开始，$d(x, v) \geq 3$。令 $u \in S_3(x, v)$ 使得 $|\text{proj}(u, D(x, 1))|$ 最大化。根据引理 27，$\text{proj}(v, D(x, 1)) = \text{proj}(u, D(x, 1))$。然后，令 $v^* \in N(u) \cap I(u, x)$ 使得 $|\text{proj}(v^*, D(x, 1))|$ 最大化。根据引理28，$\text{proj}(v^*, D(x, 1)) = \text{proj}(u, D(x, 1)) = \text{proj}(v, D(x, 1))$。□

现在我们将注意力转向团。一般的 α_1-度量图与 (α_1, Δ)-度量图之间存在差异，这在一定程度上解释了为何在后一个子类中计算中心顶点能够获得更好的运行时间。

引理29（[31]）。设 K 是（α_1，Δ）-度量图 G中的一个团。每个顶点 v 相对于 K都有一个门v^*。

引理29对于一般的 α_1-度量图并不成立。例如，如果在C_5中取一条边，那么与该边的两个端点距离均为二的顶点相对于这条边不存在门。尽管如此，我们接下来将证明距离二门的存在性。

引理30。设 K 是 α_1-度量图 G中的一个团。每个顶点 v 相对于 K都有一个距离为二的门v^*。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $d(v, K) \geq 3$。令 $v^* \in S_2(K, v)$ 为使 $|\text{proj}(v^*, K)|$ 最大化的点。反设 $\text{proj}(v^*, K) \neq \text{proj}(v, K)$，则产生矛盾。任取 $x \in \text{proj}(v, K) \setminus \text{proj}(v^*, K)$，并令 $w \in S_2(x, v)$。根据 $|\text{proj}(v^*, K)|$ 的极大性，存在一个 $y \in \text{proj}(v^*, K) \setminus \text{proj}(w, K)$。由于 G 是一个 α_1-度量图，因此 $d(v^*, w) \geq d(v^*, y) + d(x, w) = 4$。我们还有 $d(v^*, w) < d(v^*, y) + 1 + d(x, w) = 5$，否则，圆盘 $D(v, d(v, K) - 2)$ 将不可能是凸的，从而与定理 5 矛盾。因此，$d(v^*, w) = 4$。根据引理17，存在 $y' \in N(y) \cap N(v^*)$ 和 $x' \in N(x) \cap N(w)$，使得 $d(x', y') = 2$。然而，由于我们有 $x', y' \in I(v^*, w) \setminus D(v, d(v, K) - 2)$，这仍然与圆盘$D(v, d(v, K) - 2)$ 的凸性相矛盾。□

门和距离二门的计算。门的计算问题已经受到了一些关注，例如，参见 [16]。我们在设计主要算法时使用这一程序。

引理 31（[38]）。设 A 是某个具有 m 条边的图 G 中的任意顶点子集。总计用时 $O(m)$，我们可以将每个顶点 $v \notin A$ 映射到某个顶点 $v^* \in D(v, d(v, A) - 1) \cap N(A)$，使得 $|N(v^*) \cap A|$ 最大化。此外，如果 v 相对于 A 有一个门，那么 v^* 就是 v 的一个门。

距离二门的高效计算更具挑战性。我们提出了一种次二次时间过程，但它仅适用于我们这一特殊设置。

引理32. 设 K 是某个具有 m 条边的 α_1-度量图 G 中的一个团。我们可以在总计 $O(m^{1.41})$时间内，将每个顶点 $v \notin K$ 映射到相对于 K的某个距离二门 v^* 。此外，在此过程中，我们还可以将 v^*映射到某个独立集 $J_K(v^*) \subseteq D(v^*, 1)$，使得对于每个 $w \in J_K(v^*)$，$\mathrm{proj}(v^*, K)$都是邻点集 $N(w) \cap K$的不交并。

证明。为简便起见，对每个顶点 v，记 $p_K(v) = |\mathrm{proj}(v, K)|$。若 $v \in N(K)$，则可令 $v^* = v, J_K(v) = \{v\}$，并令 $p_K(v) = |N(v) \cap K|$。对 $N(K)$ 的每个顶点，总共可在 $O(m)$ 时间内完成此操作。因此，接下来我们只考虑满足 $d(v, K) \geq 2$ 的顶点 v。

对于满足 $d(u, K) = 2$ 的每个顶点 u，我们计算 $J_K(u)$。为此，我们按照 p_K 值非递增的顺序，对 $N(u) \cap N(K)$ 的顶点排序。对于每个 $x \in N(u) \cap N(K)$，若存在某个 $y \in N(K)$，使得有一个三角形xyu 且该顶点排在 x 之前，那么我们断言 $N(x) \cap K \subseteq N(y)$，因此可以忽略 x。确实，由于 x, y 相邻，$N(x) \cap K$ 和 $N(y) \cap K$ 必须在包含关系下可比较（否则，由于 K 是一个团，就会存在一个诱导的 C_4，其中包含 x, y 以及 $(N(x) \setminus N(y)) \cap K$、$(N(y) \setminus N(x)) \cap K$ 中的任意顶点）。由于 y 排在 x 之前，$p_K(y) \geq p_K(x)$，这就如所断言的那样意味着 $N(x) \cap K \subseteq N(y)$。否则，对于任何排在 x 之前的 $y \in N(K) \cap N(u)$，我们断言 $N(x) \cap K$ 和 $N(y) \cap K$ 必须不相交。确实，否则就会存在一个诱导的 C_4，其中包含 u, x, y 以及 $N(x) \cap N(y) \cap K$ 中的任意一个顶点。然后，我们将顶点 x 放入 $J_K(u)$。总而言之，剩下的问题是解决一个众所周知问题的变体：判断图中的每条边是否属于某个三角形。该问题可在 $O(m^{1.41})$ 时间内解决 [2]。

最后，我们按到 K 的距离非递减顺序，考虑所有满足 $d(v, K) \geq 2$ 的顶点 v。如果 $d(v, K) = 2$，则令 $v^* = v$，并令 $p_K(v) = \sum\{p_K(x) \colon x \in J_K(v)\}$。否则，我们选择某个邻点 $u \in N(v)$，使得 $d(u, K) = d(v, K) - 1$，且 $p_K(u)$ 最大化。然后，令 $v^* = u^*$，并令 $p_K(v) = p_K(u)$。根据引理30，距离二门始终存在，因此假设距离二门始终存在时，该过程是正确的。□

局部搜索算法。既然我们已经证明门和距离二门的存在性，并给出了计算它们的高效算法，接下来我们关注以下子问题：给定 α 度量图 G 中的一个顶点 x，要么计算一个邻点 y，使得 $e(y) < e(x)$；要么断言 x 是离心率函数的局部最小值（但不一定是中心顶点）。我们对接下来这些算法的分析主要基于第3.1节的结果。我们首先介绍以下特殊情况，该情况本身也具有研究价值，并且与更一般的引理 34 相比，我们得到了更好的运行时间。

引理 33。设 x 是 α_1-度量图 G 中的任意顶点，且该图有 m 条边。如果 $e(x) \geq rad(G) + 2$，则 $\bigcap\{N(x) \cap I(x, z) : z \in F(x)\} \neq \emptyset$，并且该子集中每个邻点 y 都满足 $e(y) < e(x)$。特别地，存在一个 $O(m)$ 时间算法，它要么输出一个 $y \in N(x)$，使得 $e(y) < e(x)$，要么断言 $e(x) \leq rad(G) + 1$。

证明. 若 $e(x) \geq rad(G) + 2$，则根据定理 6，存在一个 $y \in N(x)$，使得 $e(y) < e(x)$。特别地，$\bigcap\{N(x) \cap I(x, z) \colon z \in F(x)\} \neq \emptyset$。令 y'为该子集中的任意一个邻点 x。反设 $e(y') \geq e(x)$。根据引理 19，$e(y') \leq e(x)$。因此，$e(x) = e(y') \geq rad(G) + 2$。此外，$F(x) \cap F(y') = \emptyset$，因为我们假设对每个 $z \in F(x)$，都有 $y' \in N(x) \cap I(x, z)$。但是，令 $z \in F(x)$ $z' \in F(y')$ 为任意项。由于 G是一个 α_1-度量图，$d(z, z') \geq d(z, y') + d(x, z') = e(y') - 1 + e(x) - 1 \geq 2(rad(G) + 1) > diam(G)$。后者不可能。

最后，我们描述一种针对任意顶点 x （其离心率未知）的 $O(m)$ 时间算法。不失一般性，假设 $e(x) \geq 2$。对于每个 x （ e），我们计算相对于 z^* 的门

$D(x,1)$，其存在性由推论 13 得出。根据引理 31，这可以在 $O(m)$ 时间内完成。然后，我们计算 $K=\bigcap\{N(x)\cap I(x,z):\ z\in F(x)\}$。注意，$K=\bigcap\{N(x)\cap N(z^*):\ z\in F(x)\}$，因此我们也可以在 $O(m)$ 时间内计算 K。如果 $K=\emptyset$，则可以断言 $e(x)\le rad(G)+1$。否则，令 $y\in K$ 为任意顶点。如果 $e(x)\le e(y)$，那么同样可以断言 $e(x)\le rad(G)+1$。否则，我们就完成了 y 的输出。□

我们可以如下强化引理 33，但代价是更高的运行时间。

引理 34。设 x 是一个 α_1-度量图 G 中的任意顶点，该图具有 m 条边。存在一个运行时间为 $O(m^{1.41})$ 的算法，它要么输出一个 $y\in N(x)$，使得 $e(y)<e(x)$；要么断言 x 是离心率函数的局部最小值。若 G 是 (α_1,Δ)-度量的，则其运行时间可以降低至 $O(m)$。

证明。若 $e(x)\le 2$，则除非 $e(x)=2$ 且 x 与某个全邻接顶点 y 相邻，否则 x 总是离心率函数的局部最小值。因此，在证明的其余部分，我们假设 $e(x)\ge 3$。首先，我们计算 $K=\bigcap\{N(x)\cap I(x,z):\ z\in F(x)\}$。利用与引理 33 完全相同的方法，可以在 $O(m)$ 的时间内完成计算。若 $K=\emptyset$，则显然 x 是离心率函数的局部最小值。否则，我们需要判断是否存在一个属于 K 的顶点，其离心率小于 $e(x)$。为此，我们断言只需考虑满足 $d(v,K)\ge e(x)-1\ge 2$ 的顶点 v。事实上，根据定理 5，G 的圆盘必须是凸的，这意味着 K 是一个团。特别地，任何满足 $d(v,K)\le e(x)-2$ 的顶点 v，到 K 中每个顶点的距离都至多为 $e(x)-1$。因此，该断言得证。现在，如果至少存在一个顶点 v 使得 $d(v,K)=e(x)$，那么 K 中的每个顶点的离心率都至少为 $e(x)$，因此我们可以断言 x 是离心率函数的局部最小值。否则，设 $F(K)=\{v\in V:\ d(v,K)=e(x)-1\}$。对于每个 $y\in K$，为了判断是否 $e(y)<e(x)$，只需判断是否 $y\in\bigcap\{\mathrm{proj}(v,K):\ v\in F(K)\}$；或者更强地，计算满足 $y\in\mathrm{proj}(v,K)$ 的顶点 $v\in F(K)$ 数量。

对于一般的 α_1-度量图，我们对每个 $v\in F(K)$ 计算距离二门 v^*，其存在性由引理30保证。根据引理32，这可以在 $O(m^{1.41})$ 时间内完成。再给定独立集 $J_K(v^*)\subseteq N(v^*)$，对于每个 $v\in F(K)$，如引理32所述，我们计算定义在 $N(K)$ 上的如下权函数 $\alpha:\ \alpha(w)=|\{v\in F(K):\ w\in J_K(v^*)\}|$。这可以在 $O(m)$ 时间内完成。回顾一下，对于每个 $v\in F(K)$，$\mathrm{proj}(v,K)$ 是每个 $w\in J_K(v^*)$ 对应的 $N(w)\cap K$ 的不相交并。因此，对于每个 $y\in K$，满足 $y\in\mathrm{proj}(v,K)$ 的顶点 $v\in F(K)$ 数量恰为 $\sum\{\alpha(w):\ w\in N(y)\setminus K\}$，对 K 中的每个顶点计算，总计需要 $O(m)$ 时间。

最后，在证明的其余部分中，假设 G 是 (α_1,Δ)-度量的，并按如下方式修改过程的最后一部分。对于每个 $v\in F(K)$，我们计算门 v^*，其存在性由引理29保证。根据引理 31，这可以在 $O(m)$ 时间内完成。对于每个 $w\in N(K)$，令$\alpha(w)=|\{v\in F(K):\ v^*=w\}|$。与之前一样，对于每个 $y\in K$，满足 $y\in\mathrm{proj}(v,K)$ 的顶点 $v\in F(K)$ 数量恰好为 $\sum\{\alpha(w):\ w\in N(y)\setminus K\}$；对于 K中的每个顶点，仍可在总计 $O(m)$ 时间内计算该数量。□

主要过　　程。我们首先介绍一般 α_1-度量图的算法　　s.

定理8. 若 G 是一个具有 m 条边的 α_1-度量图，则可在 $O(m)$ 时间内计算出一个顶点 x_0，使得 $e(x_0)\le rad(G)+1$。此外，可在 $O(m^{1.71})$ 时间内计算出一个中心顶点。

证明. 根据定理 2，我们可以在 $O(m)$ 时间内计算出一个顶点 x_0，使得 $e(x_0) \leq rad(G) + 3$。我们反复应用引理 33，直到能够进一步断言 $e(x_0) \leq rad(G) + 1$（因此，根据定理 6，$d(x_0, C(G)) \leq 2$）。由于至多调用该局部搜索过程两次，运行时间为 $O(m)$。然后，我们从 x_0 和 $X_0 := V$ 开始应用以下过程，直到能够断言当前顶点 x_i（在第 i^{th} 次迭代中考察）是中心顶点。

1. 如果 $deg(x_i) \leq m^{.29}$，那么我们输出 $D(x_i, 2)$ 中离心率最小的顶点，然后停止。具体做法是对 $D(x_i, 1)$ 中的每个顶点应用引理 34。否则（$deg(x_i) > m^{.29}$），我们进入步骤 2。2. 任取 $z_i \in F(x_i)$。我们设置 $X_{i+1} := X_i \cap D(x_i, 5) \cap D(z_i, e(x_i) - 1)$。如果 $X_{i+1} = \emptyset$，那么我们输出 x_i。否则，任取一个顶点 $y \in X_{i+1}$，然后进入步骤 3。3. 接下来我们考虑几种情况。(a) 如果 $e(y) < e(x_i)$，那么我们输出 y；(b) 否则，如果 $e(y) = e(x_i)$，那么我们设置 $x_{i+1} := y$，并返回步骤 1；(c) 否则，分为三种子情况。如果 $\bigcap\{X_{i+1} \cap N(y) \cap I(y, w) : w \in F(y)\} = \emptyset$，那么我们输出$x_i$。否则，我们在该子集中任取一个邻点 y'。如果 $e(y') \geq e(y)$，那么我们也输出 x_i。否则，我们设置 $y := y'$，并重复步骤 3。

我们强调，在第 i^{th} 次迭代中，我们在步骤 2 确保 $x_i \in X_i \setminus X_{i+1}$。特别是，$X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_i$。这意味着我们的过程最终会在某次迭代 T 时终止，因为如果 $X_{i+1} = \emptyset$，我们总会在步骤 2 停止。反设我们没有输出中心顶点。对于每个满足 $0 \leq i < T$ 的 i，我们在步骤 3b 确保 $e(x_{i+1}) = e(x_i)$。因此，$e(x_T) = e(x_{T-1}) = \ldots = e(x_0) \leq rad(G) + 1$。由于在第 T^{th} 次迭代中，我们输出了一个离心率至多为 $e(x_T)$ 的顶点，因此必有 $e(x_T) \geq rad(G) + 1$。这意味着对于每个满足 $0 \leq i \leq T$ 的 i，都有 $e(x_i) = rad(G) + 1$。于是，根据定理 6，对于每个满足$0 \leq i \leq T$ 的 i，都有 $d(x_i, C(G)) \leq 2$。现在考虑在迭代 T 中执行的最后一步。它不可能是步骤 1，因为 $D(x_T, 2)$ 中的最小离心率顶点必定是中心顶点。反设我们在步骤 2 终止。那么，$X_{T+1} = \emptyset$。我们用归纳法证明，对于每个满足$0 \leq i \leq T + 1$ 的 i，都有 $C(G) \subseteq X_i$，从而得到矛盾。对于 $i = 0$，这成立，因为 $X_0 = V$。现在假设对于某个满足 $0 \leq i \leq T$ 的 i，结论成立。回顾 $d(x_i, C(G)) \leq 2$。根据推论 11，$diam(C(G)) \leq 3$。因此，$C(G) \subseteq D(x_i, 5)$。此外，$C(G) \subseteq D(z_i, e(x_i) - 1)$，因为我们有 $rad(G) = e(x_i) - 1$。因此，$C(G) \subseteq X_i \cap D(x_i, 5) \cap D(z_i, e(x_i) - 1) = X_{i+1}$。由上述结论可知，我们必定在步骤 3 终止。由于我们假设输出的顶点离心率为 $e(x_T) = rad(G) + 1$，这意味着我们在步骤 3c 终止。特别地，我们找到了一个顶点 $y \in X_{T+1}$，使得 $e(y) \geq e(x_T) + 1$，并且满足以下二者之一：$\bigcap\{X_{T+1} \cap N(y) \cap I(y, w) : w \in F(y)\} = \emptyset$；或者，对于该子集中的某个任意邻点，$e(y') \geq e(y)$。然而，根据推论 9，存在一条递减的最短 $yC(G)$-路径，并且若其中存在水平边，则它必有一个端点与 $\text{proj}(y, C(G))$ 中的端点相邻（也就是说，从 y 出发，它必定是路径上的倒数第二条边）。特别地，这条最短路径上 y 的邻点 y'' 必须满足 $e(y'') < e(y)$。由于 $y \in X_{T+1}$，$C(G) \subseteq X_{T+1}$，并且根据定理 5，子集 X_{T+1} 必定是凸的（因为它是凸圆盘的交集），我们得到 $y'' \in X_{T+1}$。于是，$\bigcap\{X_{T+1} \cap N(y) \cap I(y, w) : w \in F(y)\} \neq \emptyset$。此外，由于我们假设 $e(y) \geq rad(G) + 2$，根据引理 33，该子集中的每个邻点 y' 都必须满足 $e(y') < e(y)$。矛盾。

最后，我们来分析该过程的运行时间。回想一下，所有顶点 $x_0, x_1, \ldots, x_T$ 两两不同。由于除最后一个外，这些顶点的度都大于 $m^{.29}$，迭代次数为 $O(m/m^{.29}) = O(m^{.71})$。考虑任意一次迭代 i，其中 i 满足 $0 \leq i \leq T$。在步骤1中，我们要么什么也不做，要么（仅当 $i = T$ 时）调用

引理 34，最多调用 $O(m^{.29})$ 次，然后停止。在后一种情况下，运行时间为 $O(m^{1.7})$。步骤 2 需要 $O(m)$ 时间。随后，在步骤 3 中，我们只考虑顶点 $y \in D(x_i, 5)$。由于每个这样的顶点 y 都满足 $e(y) \leq e(x_i) + 5$，我们最多可以执行步骤 3c 五次。对于每次执行步骤 3c，我们可以稍微修改引理 33 的算法，从而在 $O(m)$ 时间内完成所有计算。因此，步骤 3 也需要 $O(m)$ 时间。总的来说，每次迭代的运行时间为 $O(m)$，但最后一次迭代除外，其运行时间可能为 $O(m^{1.7})$。由于迭代次数只有 $O(m^{.71})$，最终运行时间为 $O(m^{1.71})$。□

为了将（α_1, Δ）-度量图的运行时间降低至 $O(m)$，我们采用一种不同的方法，该方法基于这些图的以下附加性质。遗憾的是，这些性质关键地依赖于三角条件。

引理 35 ([31])。设 G 是一个 (α_1, Δ)-度量图。那么，在每个切片 $S_k(y, z)$ 中，都存在一个顶点 w 与该切片全邻接，即 $S_k(y, z) \subseteq D(w,1)$。

引理 36. 设 x, y 是 (α_1, Δ)-度量图 G 中相邻的顶点，且 x, y 都是离心率函数的局部极小值，并且 $e(x) = e(y) = rad(G)+1$。对于每个 $z \in \text{proj}(x, C(G))$，存在一个 $u \in N(x) \cap N(z)$，使得 $F(u) \subseteq F(x) \cap F(y)$。

证明。首先我们证明 $z \in \text{proj}(y, C(G))$。反设结论不成立。根据定理 6，$d(x, C(G)) = d(y, C(G)) = 2$。因此，$d(y, z) = 3$ 且 $x \in N(y) \cap I(y, z)$。令$w \in N(x) \cap N(z)$为任意元素。注意，$e(w) \leq e(z) + 1 = e(x)$。这意味着 $e(w) = e(x) = rad(G) + 1$，因为假设 x 是离心率函数的局部最小值。然后，令$v \in F(w)$为任意元素。由于 G 是 α_1-度量，$d(v, y) \geq d(v, z) + d(w, y) = rad(G) + 2$。后者与 $e(y) = rad(G) + 1$矛盾。

由于 x、y 相邻且 $d(x、z) = d(y、z) = 2$，三角条件意味着存在某个公共邻点 $u \in N(x) \cap N(y) \cap N(z)$。回忆 $e(u) = e(x) = e(y) = rad(G) + 1$。反设存在一个 $v \in F(u) \setminus F(x)$。由于 G 是一个 α_1-度量图，$d(z、v) \geq d(z、u) + d(x、v) = 1 + rad(G)$，这对 $z \in C(G)$ 是不可能的。因此，$F(u) \subseteq F(x)$。类似地，我们证明 $F(u) \subseteq F(y)$，从而 $F(u) \subseteq F(x) \cap F(y)$。□

定理 9. 如果 G 是一个具有 m 条边的 (α_1, Δ)-度量图，那么可以在 $O(m)$ 时间内计算出一个中心顶点。

证明。该算法从一个顶点 x 开始，该顶点是 G 的离心率函数的局部最小值。为了在 $O(m)$ 时间内计算出这样一个顶点，我们首先应用定理 2，以计算一个离心率至多为 $rad(G) + 3$ 的顶点。然后，我们最多应用引理 34 三次。

我们执行一个核心过程，该过程要么输出两个相邻顶点 $u, v \in D(x, 1)$，使得 $e(u) = e(v) = e(x)$ 和 $F(u)$ $F(v)$ 之间不存在包含关系，要么输出一个中心顶点。在前一种情况下，任取 $y \in F(u) \setminus F(v)$ 和 $z \in F(v) \setminus F(u)$。由于 G 是一个 α_1- 度量图，因此 $d(y, z) \geq d(y, v) + d(u, z) = 2e(x) - 2$。如果 $d(y, z) \geq 2e(x) - 1$，那么 $rad(G) > e(x) - 1$，因此 x 是一个中心顶点。从现在起，我们假设 $d(y, z) = 2e(x) - 2$。那么，任何离心率为 $e(x) - 1$ 的顶点都必须包含在 $S_{e(x)-1}(y, z)$ 中。令 w 满足 $S_{e(x)-1}(y, z) \subseteq D(w, 1)$，其存在性由引理 35 保证。我们应用引理 34，以便在 $D(w, 1)$ 内计算一个最小离心率顶点 x'。最后，我们输出 x, x' 中离心率最小的任意一个。为了完整描述我们的算法，下面给出核心过程。

1. 对每个 $z \in F(x)$，我们计算相对于 $D(x, 1)$ 的门 z^*，其存在性由推论 13 保证。根据引理 31，这可以在 $O(m)$ 时间内完成。然后，对于每个 $y \in N(x)$，我们

计算 $f_x(y) = |\{z \in F(x): y \in N(x) \cap I(x,z)\}|$。通过对每个 $y \in N(x)$ 枚举 $N(y)$ 中的门 z^*，同样可以在 $O(m)$ 时间内完成。

2. 我们选择一个邻点 y_1，使得 $f_x(y_1)$达到最大值。共有三种情况。

(a) 如果 $e(y_1) > e(x)$，那么根据引理19，我们可以断定 x 是一个中心顶点。从现在起，$e(y_1) \leq e(x)$。由于 x 是离心率函数的局部最小值，因此 $e(x) = e(y_1)$。(b) 如果 y_1 不是 G的离心率函数的局部最小值，那么根据引理 34，我们可以在 $O(m)$时间内计算出一个距 $N(y_1)$不超过 $O(m)$的中心顶点。从现在起，x、y_1 都是离心率函数的局部最小值。(c) 如果 $F(y_1)\backslash F(x) \neq \emptyset$，那么我们可以输出 $u = x$、$v = y_1$。事实上，我们还有 $F(x)\backslash F(y_1) \neq \emptyset$，因为对于某个 $z \in F(x)$，有 $y_1 \in N(x) \cap I(x,z)$。接下来，我们假设 $F(x)$ $F(y_1)$在包含关系下可比较，因此 $F(y_1) \subset F(x)$。

3. 设 $z_1 \in F(y_1)$ 是任意的。我们在 $N(x) \cap I(x,z_1)$ 中选择一个邻点 y_2，使 $f_x(y_2)$ 最大。注意，为了在 $O(m)$ 时间内计算 $N(x) \cap I(x,z_1)$，从而计算 y_2，只需考虑 $N(x) \cap N(z_1^*)$ 的顶点。分两种情况。

(a) 若 $e(y_2) > e(x)$，那么根据引理19，我们可以断定 x 是一个中心顶点。下面假设 $e(y_2) = e(x)$。(b) 若 y_2 不是 G 的离心率函数的局部最小值，那么根据引理 34，我们可以在 $O(m)$ 时间内计算出一个中心顶点，且满足 $N(y_2)$。下面假设顶点 x、y_1、y_2 都是该离心率函数的局部最小值。

4. 由于 $f_x(y_1)$ 的极大性以及 $z_1 \in F(x) \cap F(y_1)$ 的存在，我们有 $f_x(y_2) \leq f_x(y_1) < |F(x)|$。此外，$F(x) \setminus F(y_1)$ $F(x) \setminus F(y_2)$ 均非空。对于每个 $i \in \{1,2\}$，我们计算 $B_i = \bigcap\{N(x) \cap I(x,z): z \in F(x) \setminus F(y_i)\}$。由于 $B_i = \bigcap\{N(x) \cap N(z^*): z \in F(x) \setminus F(y_i)\}$，这可以在 $O(m)$ 时间内完成。现在分为两种情况。

(a) 假设存在一条边 uv，其中 $u \in B_1$、$v \in B_2$。如果 $\max\{e(u)\ e(v)\} > e(x)$，那么根据引理19，我们可以断定 x 是一个中心顶点。否则，我们接下来证明 $F(u)$ $F(v)$ 在包含关系下不可比较，因此可以输出 u、v。事实上，$F(y_1)$ $F(x) \cap F(y_2)$ 在包含关系下不可比较，因为

$$|F(x) \cap F(y_2)| = |F(x)| - f_x(y_2) \geq |F(x)| - f_x(y_1) = |F(y_1)|$$

以及 $z_1 \in F(y_1) \setminus F(y_2)$。此外，$F(x) \cap F(u) \subseteq F(y_1)$（分别为 $F(x) \cap F(v) \subseteq F(y_2)$），因为 $u \in B_1$ ($v \in B_2$，分别如此）。接着，$F(u) \cap F(x) = F(y_1)$，且 $F(v) \cap F(x) = F(y_2) \cap F(x)$，否则这将与 $f_x(y_1)$ 或 $f_x(y_2)$ 的极大性相矛盾。

(b) 最后，假设 B_1 的每个顶点都与 B_2 的每个顶点不相邻。我们声称 x 是一个中心顶点。反设 $e(x) = rad(G) + 1$。令 $z \in \text{proj}(x, C(G))$ 为任意值。根据引理 36，存在顶点 u, $v \in N(x) \cap N(z)$，使得 $F(u) \subseteq F(x) \cap F(y_1) = F(y_1)$，$F(v) \subseteq F(x) \cap F(y_2)$。注意，$\max\{e(u)\ e(v)\} \leq e(z) + 1 = rad(G) + 1$。由于 x 是离心率函数的局部最小值，我们得到 $e(u) = e(v) = rad(G) + 1$。于是，$u \in B_1, v \in B_2$。特别地，u, v 必须不相邻，从而与 $D(x, 1) \cap D(z, 1)$ 的凸性矛盾，因此得到定理 5。

□

我们将以下问题留作开放问题：是否存在一种线性时间算法，能够在 α_1-度量图中计算一个中心顶点。

3.4 在 α_1-度量图中近似所有离心率

由第3.3节和第2.2节的结果可知，对于每个 α_1-度量图 G，都能在线性时间内找到一个离心率至多为 $rad(G)+1$ 的顶点，以及一个离心率至少为 $diam(G)-5$ 的顶点。此外，对于 α_1-度量图，可在总计线性时间内计算所有顶点离心率，且加性单侧误差至多为 5（见第2.3节）。这里，我们给出第3节结果的两个直接推论，从而回答 [25,31] 中的一些开放问题。

定理 10. 每个 α_1-度量图 G 都存在一棵离心率 3-近似生成树。此外，可以在次二次总时间内计算 G中所有顶点离心率的加性4-近似。

证明。只需证明：以顶点 $c \in C(G)$ 为根的 G 的任意广度优先搜索树 T 都是 G 的一棵离心率 4-近似生成树；而以顶点 $c \in C(C(G))$ 为根的 G的任意广度优先搜索树 T（即，由 $C(G)$ 诱导的 G 的子图中的一个中心顶点）都是 G的一棵离心率 3-近似生成树。我们不知道如何高效地找到一个顶点 $c \in C(C(G))$，但根据定理8，可以在 $O(m^{1.71})$ 时间内计算出具有 m 条边的 G 的中心顶点 c。

考虑 v 中的任意顶点，并令 v' 为 $C(G)$ 中距离 v最近的顶点。根据推论8，$e(v) \geq d(v, v') + rad(G) - \epsilon$，其中 $\epsilon \leq 1$。由于 T是最短路径树，且 c是 G的中心顶点，$e_T(v) \leq d_T(v, c) + e_T(c) = d_G(v, c) + e_G(c) = d_G(v, c) + rad(G)$。因此，根据三角不等式，$e_T(v) - e_G(v) \leq d_G(v, c) + rad(G) - d_G(v, v') - rad(G) + \epsilon \leq d_G(c, v') + \epsilon \leq d_G(c, v') + 1$.

根据推论 11，我们知道 $diam(C(G)) \leq 3$ 和 $rad(C(G)) \leq 2$。因此，如果 $c \in C(G)$，那么$d_G(c, v') \leq 3$；如果 $c \in C(C(G))$，那么 $d_G(c, v') \leq 2$。□

对于 (α_1, Δ)-度量图，这一结果还可以进一步加强。

定理 11. 每个 (α_1, Δ)-度量图 G 都存在一棵离心率 2-近似生成树。此外，对于具有 m 条边的 G，可以在总计 $O(m)$ 时间内计算所有顶点离心率的加性3-近似。

证明. 令 T 为一棵 $BFS(c)$-树，其中 c 是 G 的中心顶点。我们可以沿用定理 10 的证明，得到 $e_T(v) - e_G(v) \leq d_G(c, v') + \epsilon$，其中 v' 是 $C(G)$ 中距离 v 最近的顶点。在 (α_1, Δ)-度量图 G 中，若 $diam(G) = 2rad(G)$，则有 $\epsilon \leq 1$；否则有 $\epsilon = 0$ [31]。此外，当 $diam(G) = 2rad(G)$ 时，必有 $diam(C(G)) \leq 2$ 和 $rad(C(G)) \leq 1$ [31]。因此，若 $c \in C(G)$，则 $e_T(v) - e_G(v) \leq d_G(c, v') + \epsilon \leq diam(C(G)) + \epsilon \leq 3$（即 $\leq 3+0$ 或$\leq 2+1$）；若 $c \in C(C(G))$，则 $e_T(v) - e_G(v) \leq d_G(c, v') + \epsilon \leq rad(C(G)) + \epsilon \leq 2$（即 $\leq 2+0$ 或 $\leq 1+1$）。还要注意，可以在线性时间内计算 (α_1, Δ)-度量图的中心顶点（定理 9）。□

在一个 (α_1, Δ)-度量图中，偏心率 2-近似生成树的存在性已由 [31] 得知。定理 11 的第二部分回答了 [25] 提出的一个开放问题。

4 总结

我们以一些基于本文结果而自然引出的开放问题作为结尾。

1. 我们关于一般 α_i-度量图中离心率的（近似）界能否改进？具体而言，i) 我们给出的两个互相远离的顶点之间最短路径的中间顶点离心率上界是否已经最优？ii) 我们给出的距任意顶点最远的顶点的离心率上界是否紧？iii) 我们关于中心的直径的上界 $3i+2$ 能否改进为 $2i+1$？2. 对于一个 α_1-度量图 G，能否在线性时间内得到半径和直径的最佳近似？具体而言，iv) 是否存在一种线性时间算法，能够找出一个 α_1-度量图的中心顶点（从而得到精确半径）？v) 能否证明，距任意顶点最远的顶点的离心率至少为 $diam(G)-2$？vi) 能否在线性时间内找到一个离心率至少为 $diam(G)-1$ 的顶点？

回顾一下，在弦图（ α_1-度量图的一个子类）中，可以在线性时间内找到一个中心顶点，并且距离任意顶点最远的顶点的离心率至少为 $diam(G)-2$[16]。此外，通过一次 LexBFS [33]，可以在线性时间内找到一个离心率至少为 $diam(G)-1$ 的顶点。另一方面，除非众所周知的强指数时间假设（SETH）不成立，否则不可能在次二次时间内计算出弦图的精确直径 [6]。

参考文献

1. A. Abboud、V. Vassilevska Williams 和 J. Wang，《稀疏图中半径和直径的近似算法与亚二次固定参数算法》，载于 *SODA*，第 377–391 页，美国工业与应用数学学会，2016 年。 2. N. Alon、R. Yuster、U. Zwick，《寻找和计数给定长度的环》，*Algorithmica* 17 (1997)，209-223。 3. A. Backurs、L. Roditty、G. Segal、V. Vassilevska Williams、N. Wein，《迈向图直径和离心率的紧确近似界》，载于 *STOC* 2018，第 267-280 页。 4. H.-J. Bandelt、V. Chepoi，《1-双曲图》，*SIAM J. Discr. Math.* 16 (2003)，323–334。 5. V. G. Boltyanskii 和 P. S. Soltan，《各类凸集的组合几何》［（俄文）］，

Stiint˘a，基希讷乌（1978）。 6. M. Borassi、P. Crescenzi 和 M. Habib，《进入平方：关于若干可在二次时间内求解的问题的复杂性》，*Electronic Notes in TCS*，322(2016)，51–67。 7. A. Brandst¨adt、V. Chepoi 和 F.F. Dragan，《超树结构与最大邻域排序的算法应用》，*DAM*，82(1998)，43–77。 8. K. Bringmann、T. Husfeldt 和 M. Magnusson，《正交范围查询与以树宽为参数的图距离的多变量分析》，载于 *IPEC*，2018 年。 9. S. Cabello，《平面图中直径及两两距离之和的亚二次算法》，*ACM TALG* 15 2 21, 2018，（）：。

10. D. Corneil 、 F. F. Dragan 、 M. Habib 和 C. Paul，《受限图族上的直径确定》，DAM，113(2001)，143–166。 11. D.G. Corneil、F.F. Dragan 和 E. K¨ohler，《广度优先搜索确定图直径的能力》，*Networks* 42 (2003)，209-222。 12. D. Coudert、G. Ducoffe 和 A. Popa，《若干有界团宽图类的全多项式 FPT 算法》，*ACM TALG*，15(3)，2019。 13. S. Chechik、D.H. Larkin、L. Roditty、G. Schoenebeck、R.E. Tarjan、V. Vassilevska Williams，《更优的图直径近似算法》，载于 *SODA* 2014，第 1041-1052 页。 14. V. Chepoi，《三角剖分图中的若干 d-凸性性质》，载于 *Mathematical Research*，第 87 卷，S˘tiint˘a，Chi˘sin˘au，1986 年，第 164–177 页（俄文）。 15. V. Chepoi，《三角剖分图的中心》，*Math. Notes* 43 (1988)，143–151。 16. V. Chepoi、F.F. Dragan，《寻找弦图中心顶点的线性时间算法》，载于 *Proceedings of the Second European Symposium on Algorithms – ESA'94* 159 170，–。

17. V. Chepoi 和 F. F. Dragan，《不相交集合问题》，1992 年。

18. V. Chepoi 和 F. F. Dragan，《在 HHD-无图中寻找中心顶点》， *DAM*，131(1) (2003)，93–111。 19. V.D. Chepoi、F.F. Dragan、B. Estellon、M. Habib 和 Y. Vax`es，《δ-双曲测地空间与图的直径，中心及近似树》，*24th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG 2008)* 9 11, 2008, 59 68 论文集，6 月—马里兰州大学公园市，美国，第 - 页。 20. V. Chepoi、F.F. Dragan、M. Habib、Y. Vax`es 和 H. Alrasheed，《双曲图中离心率和距离的快速近似》， *Journal of Graph Algorithms and Applications*，23(2019)，393–433。 21. F.F. Dragan，《图的中心与 Helly 性质》（俄文），博士论文，摩尔多瓦国立大学，Chi.sin˘au，1989 年。 22. F.F. Dragan，《HT-图：中心、连通 r-支配与斯坦纳树》， *Comput. Sci. J. of Moldova* (基希讷乌)，1(1993)，64–83。 23. F.F. Dragan，《距离遗传图中的支配团》，载于 *SWAT '94*，第 370–381 页，施普林格，1994 年。 24. F.F. Dragan，《利用 LexBFS 在线性时间内求无房孔图的近似直径》，*Discret. Appl. Math.* ( )，-。95 1999 223 239
25. F.F. Dragan，《弦图的离心率 2- 近似生成树可在线性时间内计算》，*Information Processing Letters*，154(2020)，105873。 26. F.F. Dragan、G. Ducoffe， α_i-度量图：双曲性， *in Preparation*，2022—2023年。 27. F.F. Dragan、G. Ducoffe、H.M. Guarnera，《计算（双曲）Helly 图中所有离心率的快速确定性算法》，载于 *WADS* 2021。第 300-314 页。 28. F.F. Dragan 和 H.M. Guarnera，《距离遗传图中的离心率函数》，*Theor. Comput. Sci.*，833 2020 26 40( )，–。 29. F.F. Dragan、H.M. Guarnera，《 δ-双曲图的离心率地形》，*J. Comput. Syst. Sci.* 112 (2020)，50-65。 30. F.F. Dragan、M. Habib 和 L. Viennot，《借助证书重新探讨图中半径、直径及所有离心率的计算》， *CoRR*，abs/1803.04660，2018。 31. F.F. Dragan、E. K¨ohler、H. Alrasheed，《离心率近似树》， *Discrete Applied Mathematics*，232 (2017)，142–156。 32. F.F. Dragan 和 F. Nicolai，《距离遗传图的 LexBFS 排序及其在直径端点对问题中的应用》， *DAM*，98(2000)，191–207。 33. F.F. Dragan、F. Nicolai、A. Brandst¨adt，《LexBFS 排序与图的幂》，WG'96 论文集，*Lecture Notes in Computer Science* 1197, 1997, 166 180 ，第 Springer 卷，柏林，第 – 页。 34. G. Ducoffe，《轻松计算离心率近似树》， *DAM*，260 (2019)，267–271。 35. G. Ducoffe，《围绕 AT-无图的直径》， *JGT*，99(4) (2022)，594–614。 36. G. Ducoffe，《超越 Helly 图：绝对收缩上的直径问题》，载于 *WG*，第 321-335 页，2021 年。 37. G. Ducoffe，《有界团宽图中的最优直径计算》，*Algorithmica*，84 (2022)，3192—3222。 38. G. Ducoffe，《Helly 图和 k-Helly 图中的距离问题》，*Theoretical Computer Science*，(2023)。 39. G. Ducoffe 和 F.F. Dragan，《关于直径、半径与（近似）Helly 性质的故事》， *Networks*，77(2021)，435-453。 40. G. Ducoffe、M. Habib 和 L. Viennot，《H-无子式图及距离 VC 维有界图上的直径计算》，载于 *SODA*，第 1905–1922 页，美国工业与应用数学学会，2020 年。 41. M. Farber、R.E. Jamison，《图的局部凸性》， *Discr. Math.* 66 (1987)，231–247。 42. A. Farley 和 A. Proskurowski，《外平面图中心与直径的计算》， *DAM*，2(1980)，185–191。 43. P. Gawrychowski、H. Kaplan、S. Mozes、M. Sharir 和 O. Weimann，《平面图上的 Voronoi 图，以及在确定性 $O(n^{5/3})$ 时间内计算直径》，载于 *SODA*，第 495–514 页，美国工业与应用数学学会，2018 年。 44. M. Gromov，《双曲群》，第 75–263 页。施普林格，纽约州纽约，1987 年。 45. E. Howorka，《距离遗传图的刻画》， *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 28 (1977)，417–420。
46. D. Kosch¨utzki、K. Lehmann、L. Peeters、S. Richter、D. Tenfelde-Podehl 和 O. Zlotowski，《中心性指标》，载于 *Network Analysis*，第 16–61 页。施普林格，2005 年。 47. S. Olariu，《计算区间图中心的简单线性时间算法》，*Int. J. of Computer* ，( )，–。*Mathematics* 34 1990 121 128
48. E. Prisner，《弦图中的离心率近似树》， *Discrete Mathematics*，220(2000)，263-–269。 49. L. Roditty 和 V. Vassilevska Williams，《稀疏图直径和半径的快速近似算法》，载于 *STOC*，第 515–524 页。美国计算机协会，2013 年。 50. V.P. Soltan、V.D. Chepoi，《图中集合在 d *Cy-* -凸 *bernetics* 19 1983 750 756 化下直径不变的条件》，( )，–（俄文，英文译本）。

51. O. Weimann, R. Yuster, 《近线性时间内近似计算平面图的直径》,

ACM Trans. Algo- ( ), : - : ( )。52. Y. Wu 和 C.

rithms 12 1 12 1 12 13 2016
Zhang, 《图的双曲性与弦性》, *Electr. J. Comb.*, 18(1): Paper #P43, 2011。53. S.V. Yushmanov, V. Chepoi, 《研究与离心率相关的度量图性质的一般方法》, 载于 *Mathematical Problems in Cybernetics*, 第 3 卷, Nauka, 莫斯科, 1991, 第 217–232 页（俄文）。