arXiv:2305.02553v1 [math.CO] 4 May 2023

结构常数的复杂性与渐近性质

GRETA PANOVA

“跳出黑箱思考”

Abstract. Kostka 系数、刘维尔-理查德森系数、克罗内克系数和复合系数是代数组合学中的基本量，但关于它们的许多自然问题在 80 多年后仍未得到解答。克罗内克系数和复合系数缺乏“优美公式”，这一概念可以使用计算复杂性理论加以形式化。除了公式和组合解释之外，我们还可以尝试理解它们在各种情形下的渐近行为，以及它们可能满足的不等式。理解这些量的意义超越了组合学本身。一方面，结构常数的渐近性质与理解统计力学中顶点模型和铺砌模型的 [极限]行为密切相关。近年来，这些结构常数还被用于建立计算复杂性下界，以及证明 VP 与 VNP 等复杂性类之间的分离；后者是算术复杂性理论中 P 与 NP 的代数类比。在这里，我们将讨论与结构常数的渐近性质、正性和复杂性相关的悬而未决问题，重点关注对称群的克罗内克系数，并在较小程度上讨论复合系数。

本文是根据2022年5月在代数组合学开放问题研讨会（Open Problems in Algebraic Combinatorics）上所作的报告撰写的综述论文。

1. Introduction

代数组合学通过研究对称性在离散对象中的表现形式来探索对称性，并与表示论、统计力学、计算复杂性理论和代数几何等领域相联系。其许多问题源于对群表示、不可约表示分解、模的维数公式、几何中的交数等代数现象进行定量且明确理解的需求。

其起源在于对称群 S_n 和一般线性群GL_N的表示论。它们的不可约模由整数分拆标记，其基可用标准杨表和半标准杨表（标准杨表和半标准杨表）描述。下一步，自然是理解不可约表示的张量积如何分解为不可约分量。对于 GL_N，同型分量的重数是刘维尔-理查德森（LR）系数。对于 S_n，重数是克罗内克系数。不可约 GL 模的复合运算会分解为不可约表示，其重数由复合系数给出。

虽然不存在刘维尔-理查德森系数的简洁公式，但可以通过其组合解释——刘维尔-理查德森规则——来理解；该规则以某些斜形半标准杨表的形式给出这些系数。刘维尔-理查德森规则于1934年提出，但经过40年才得到正式证明。受刘维尔-理查德森系数的启发，Murnaghan于1938年定义了克罗内克系数，并指出计算这些系数是一项极具挑战性的任务。20世纪70年代末和80年代，研究转向寻求正公式。2000年，Stanley将寻找克罗内克系数及复合系数的非负组合解释，列为代数组合学中的一个重大开放问题。然而，相关进展甚微。

南加州大学数学系，https://sites.google.com/usc.edu/gpanova/即将发表于 *Proceedings of the Open Problems in Algebraic Combinatorics* 会议，2022年5月。https://www.samuelfhopkins.com/OPAC/opac.html。

除了提出亟待解答的基本自然问题外，克罗内克系数和复合系数在代数复杂性理论，尤其是几何复杂性理论（GCT）中也发挥着重要作用。代数复杂性理论研究如何使用算术电路计算形式多项式，其主要问题包括分离复杂性类 VP $\neq$ VNP，这是 P $\neq$ NP 千年难题的代数类比。几何复杂性理论通过研究通用多项式（通常是行列式和永久式）的对称性与几何性质来处理这些问题，并进一步考察这些多项式的 GL 轨道闭包的坐标环。复杂性下界和复杂性类分离归结为理解这些坐标环的 GL不可约表示并比较其重数。这些重数与刘维尔-理查德森系数、克罗内克系数及复合系数密切相关；证明这些重数满足某些不等式，即可实现复杂性类的分离。

代数组合学的另一个应用领域是统计力学、渐近表示论和随机矩阵理论。一些早期的联系可以追溯到置换的最长递增子序列这一非凡的故事：它与随机厄米矩阵的最大特征值以及取自 Plancherel测度的标准杨表的高度，具有相同的 [Tracy-Widom] 分布。对称多项式，尤其是舒尔函数，在随机菱形铺砌、排斥过程和顶点模型的研究中被广泛应用。平面分拆本身就是具有特定边界的菱形铺砌。反过来，概率方法和渐近方法也被用于理解代数组合量。在缺乏紧凑公式和组合解释的情况下，理解结构常数的增长行为是顺理成章的下一步。除了与统计力学的交互之外，理解它们的增长也与其在前文提及的几何复杂性理论中的应用密切相关。

论文结构。本文将简要定义相关的结构常数，介绍一些背景，并提出三个不同方面的开放问题：正性、复杂性和渐近性。关于复杂性理论及其与代数组合学的具体联系，更多背景信息请参阅配套论文 [Pan23] 及其中的参考文献。

本文展现的是作者的个人观点，重点围绕她曾参与研究的问题展开。本文无意成为对这些主题的全面综述。

致谢。作者感谢多年来的合作者，尤其感谢 Christian Ikenmeyer 和 Igor Pak 在本文主题上的大量工作。我们谨以此文纪念 Christine Bessenrodt；她在该领域深刻而富有洞见的研究推动了许多进展，作者也曾有幸于 2020 年与她短暂合作。我们感谢“代数组合学中的开放问题”会议的组织者举办了这场启发人心的会议，并给予我们介绍这些问题的机会。

作者获得了美国国家科学基金会的部分资助。

2. Basic objects and notions

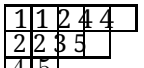
我们假设读者熟悉代数组合学中的基本概念，例如整数分拆、杨表和对称函数。关于这些内容的简要回顾，见 [Pan23]。关于组合方面的细节，见[Sta99、Mac95] ；关于表示论方面，见 [Sag01、Ful97]。

2.1. 分拆与杨表。 本文始终采用 [Mac95] 和 [Sta99, §7]中的标准记号。

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ 是一个大小为 $n := |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\ell$ 的分拆，其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell \geq 1$。我们将该分拆记为 $\lambda \vdash n$ ，并用 $\mathcal{P} = \{\lambda\}$ 表示所有分拆的集合。 λ 的长度记为 $\ell(\lambda) := \ell$。用 $p(n)$ 表示分拆 $\lambda \vdash n$ 的数量。令 $\lambda + \mu$ 表示分拆 $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$

特殊的分拆包括矩形形状 $(a^b) = (a, \ldots, a)$，共 b 次；钩形形状 $(k, 1^{n-k})$；双行形状 $(n-k, k)$；以及阶梯形状 $\rho_\ell = (\ell, \ell-1, \ldots, 1)$。

一个杨图 形状 λ 是由若干方格排列而成的，$(i, j) \subset \mathbb{N}^2$ 其中 $1 \le i \le \ell(\lambda)$ 和$1 \le j \le \lambda_i$。令 $\lambda \vdash n$。一个半标准杨表 T 形状 λ 且权 α 是将 α_k 若干整数 k 填入 λ中的方格，使各行弱递增，各列向下严格递增



是一个半标准杨表

列，即 $T(i,j) \le T(i,j+1)$ 且 $T(i,j) \le T(i+1,j)$。例如，形状为 $\lambda = (5, 4, 2)$、类型为 $\alpha = (2, 3, 1, 3, 2)$ 的半标准杨表。记这类杨表的集合为 $\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$，并将 $K(\lambda, \alpha) = |\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)|$ 记为科斯塔数。形状为 λ 的标准杨表（SYT）是类型为 (1^n) 的半标准杨表，并且有 $f^\lambda := K_{\lambda, 1^n}$，该数值可通过 [FRT54]的钩长公式（HLF）计算得到。

2.2. 的表示 S_n 和 GL_N。 对称群S_n 的不可约表示是 斯佩希特模 $\mathbb{S}_\lambda$，并由分拆 $\lambda \vdash n$进行索引。 $\mathbb{S}_\lambda$ 的一组基可由标准杨表进行索引。特别地

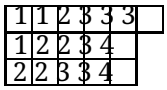
$$\dim \mathbb{S}_\lambda = f^\lambda.$$

我们有， $\mathbb{S}_{(n)}$ 是平凡表示，即对每个 w 赋值 1；$\mathbb{S}_{1^n}$ 是符号表示。

该特征标 $\chi^\lambda(w)$ 的 $\mathbb{S}_\lambda$ 可以通过 *Murnaghan-Nakayama* 法计算。设 w 的类型为 α，即它分解为长度分别为 α_1、α_2、……、α_k 的轮换。那么

$$\chi^\lambda(w) = \chi^\lambda(\alpha) = \sum_{T \in MN(\lambda;\alpha)} (-1)^{ht(T)},$$

其中， MN 是形状为 λ 、类型为 α的边钩杨表集合，其条目沿行和沿列均弱递增，并且所有等于 i 的条目构成一个长度为 α_i的边钩形状（即连通且不含 2×2 框）。每个边钩的高度比其跨越的行数少一，而 $ht(T)$是所有这些高度之和。例如：



是一个形状为 (6, 5, 5)、类型为 (3, 5, 6, 2) 的 Murnaghan-Nakayama 杨表，其高度为 $ht(T) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$。

$GL_N(\mathbb{C})$ 的不可约多项式表示是 Weyl 模 V_λ，它们由满足 $\ell(\lambda) \le N$ 的所有分拆标记。它们的特征标恰好是舒尔函数 $s_\lambda(x_1, \ldots, x_N)$，其中 $x_1, \ldots, x_N$ 是 $g \in GL_N(\mathbb{C})$ 的特征值。

2.3. 对称函数。令 $\Lambda[\mathrm{x}]$ 为对称函数环 $f(x_1, x_2, \ldots)$，其中，对称性意味着对于变量的任意置换 σ，都有 $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}\,\sigma)$，且 f 是形式幂级数。齐次对称函数的环 Λ_n 按次数 n 分次，有几个重要的基：齐次对称函数 h_λ、初等对称函数 e_λ、单项式对称函数 m_λ 、幂和对称函数 p_λ 以及舒尔函数 s_λ。舒尔函数可以定义为形状为 λ 的半标准杨表的生成函数

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu,$$

同时使用 Weyl 行列式公式

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_\ell) = \frac{\det[x_i^{\lambda_j + \ell - j}]_{i,j=1}^{\ell}}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)}$$

以及雅可比-特鲁迪恒等式

$$s_\lambda = \det[h_{\lambda_i - i+j}]_{i,j=1}^{\ell(\lambda)}.$$

柯西恒等式

$$\sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

通过 RSK 对应，柯西恒等式有一个引人注目的组合证明：它建立了同形状的半标准杨表对与具有非负整数项的矩阵之间的对应。

2.4. 计算复杂性。 关于计算复杂性类的详细介绍，请参阅 [Aar16、Wig19、BCS97] ；关于它们与代数组合学之间的联系，请参阅 [Pak22+、Pan23] 以及其中的参考文献。

判定问题是一种计算问题，其输出为“是”或“否”。P 和 NP 是两个主要的复杂性类，也是 P 对 NP 千禧年难题的研究对象。P 是这样一类判定问题：对于任意大小为 n （即对其进行编码所需的比特数）的输入，答案都能在多项式时间内得出，记作 $poly(n)$；也就是说，存在一个固定的 k ，以及一个算法，它经过 $O(n^k)$ 步（基本运算）即可完成计算。NP 是这样一类判定问题：若答案为“是”，则可以在多项式时间内验证；换言之，存在一个可在多项式时间内计算的见证。显然，P $\subset$NP，并且人们普遍认为 P $\neq$NP。FP 和 #P 分别是 P 和 NP 的计数类比。若一个计数问题的答案等于某台 NP 图灵机的接受路径数，则该问题属于 #P。实际中，这类计数问题的答案是若干个 0-1 值函数的和，项数呈指数级 M；其中每个函数都能在 $O(n^k)$ 时间内计算，且 k 固定：

$$\sum_{b\in\{0,1\}^m} M(b),$$

其中 $m = poly(n)$。我们定义类 GapP $= \{f - g | f, g \in$ #P$\}$ 和 GapP$_{\geq 0} = \{f - g | f, g \in$ #P 以及 $f - g \geq 0\}$。

代数复杂性类 VP 和 VNP 由 Valiant [V79a], 引入，作为 P 和 NP 的代数类比（形式定义和性质参见 [B¨ur00a] ）。它们研究使用算术电路计算次数为 $poly(N)$ 的多项式 $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_N]$：电路的输入是来自域 $\mathbb{F}$ 的任意大小的常数以及形式变量 $x_1, \dots, x_n$，门为 $+, \times$，输出为 f。于是，VP 是这样一类多项式：存在一个固定的 k，以及一个大小为 $O(n^k)$、用于计算该多项式 f 的电路。VNP 是这样一类多项式 f：存在一个 k 和 $m = O(N^k)$，以及一个属于 VP、含有 $N + m$ 个变量的多项式 $g \in$ ，使得

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{b\in\{0,1\}^m} g(x_1, \dots, x_N, b_1, \dots, b_m).$$

主要猜想是 VP $\neq$ VNP，并且与 P $\neq$ NP 密切相关，参见例如 [B¨ur00b]。正如 Valiant 所证明的，对于每个多项式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ，都存在一个 K 和一个 $K \times K$ 矩阵 $A :=$ $A_0 + \sum_{i=1}^N A_i x_i$ ，满足 $A_j \in \mathbb{C}^{K\times K}$ ，使得 det$A = f$。这样的最小 K 称为 f的行列式复杂度，记作 dc(f)；对于每个 f，该复杂度都是有限的。VP$_{\text{ws}}$的通用多项式是行列式，具体而言， $f \in$ VP$_{\text{ws}}$ 当且仅当 dc(f) $= poly(n)$，其中 $poly(n)$表示任意一个固定的多项式次数的 n。这里，VP $_{\text{ws}}$ 是由多项式规模的代数分支程序（介于“公式”和“电路”之间的一种模型）计算的多项式类。VP $_{\text{ws}}$ 一直是研究的主要对象，而且常与 VP 互换使用。经典的 VNP 完全多项式是永久式

$$\text{per}_m[X_{ij}]_{i,j=1}^m = \sum_{\sigma\in S_m} \prod_{i=1}^m X_{i\sigma(i)}.$$

Thus，通过证明 dc(per_m) $\gg poly(m$，可以将 VP$_{\text{ws}}$ 与 VNP 区分开来。).

《几何复杂性理论 (GCT) 程序由 Mulmuley 和 Sohoni 提出 [MS01，MS08]通过比较行列式和永久式在GL_{n^2}对变量（X_{11}，……，X_{nn}）的作用下的轨道闭包来进行比较。如果 $\mathsf{dc}(\mathrm{per}_m) \le n$，那么 $GL_{n^2}\mathrm{per}_m \subset GL_{n^2}\mathrm{det}_n$，传递到坐标环后，这会导出一个 GL_{n^2}-等变满射

$$\mathbb{C}[\overline{GL_{n^2}\mathrm{det}_n}] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\overline{GL_{n^2}X_{11}^{n-m}\mathrm{per}_m}] \tag{2.1}$$

为了证明 $\mathsf{dc}(\mathrm{per}_m)$ 的下界，即 $\mathsf{dc}(\mathrm{per}_m) > n$，我们需要证明上述满射不会发生。将这些模分解为任意给定次数 d 下的不可约表示，我们得到

$$\mathbb{C}[\overline{\mathrm{GL}_{n^2}\mathrm{det}_n}]_d \simeq \bigoplus_\lambda V_\lambda^{\oplus\delta_{\lambda,d,n}}, \quad \text{and} \quad \mathbb{C}[\overline{\mathrm{GL}_{n^2}\mathrm{per}_m^n}]_d \simeq \bigoplus_\lambda V_\lambda^{\oplus\gamma_{\lambda,d,n,m}}. \tag{2.2}$$

因此，要证明 2.1 不可能成立，我们可以找到一个不可约的 GL_{n^2} 模 V_λ，使得 $\gamma_{\lambda,d,n,m} > \delta_{\lambda,d,n}$，其中某个 d 满足条件。这样的 λ 称为重数障碍，而 γ 和 δ 与复合运算和克罗内克系数密切相关。当 $\delta_{\lambda,d,n} = 0$ 也成立时，λ 就是一个出现障碍。[BIP19] 已证明，对于 $n > m^{25}$，不存在出现障碍，因此我们需要寻找重数障碍。

这是克罗内克系数和复合系数的主要应用之一，也是我们开展这项工作的动机。特别地，我们有

$$\delta_{\lambda,d,n} \le g(\lambda, n^d, n^d) \qquad \text{and} \qquad \gamma_{\lambda,d,n,m} \le a_\lambda(d[n]).$$

请参见§3 以了解定义，并参见 [Pan23] 以简要了解这些联系。

3. Multiplicities and structure constants

一旦对不可约表示有了充分的了解，自然就会考虑如何由它们构造其他表示，以及这些表示如何分解为不可约表示。

在 $GL_N(\mathbb{C})$ 的情形下，这些系数称为 Littlewood–Richardson 系数 (LR) $c_{\mu\nu}^\lambda$，定义为 V_λ 在 $V_\mu \otimes V_\nu$中的重数，因此

$$V_\mu \otimes V_\nu = \bigoplus_\lambda V_\lambda^{\oplus c_{\mu\nu}^\lambda}.$$

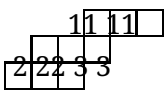
通过特征标，它们也可以等价地定义为

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda, \qquad \text{and} \qquad s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu.$$

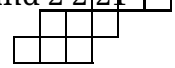
虽然没有便于计算它们的乘积公式，但它们有一种 组合诠释，即所谓的 Littlewood-Richardson 规则，参见 [Sta99，附录 1]。

定理 3.1（Littlewood-Richardson 规则）。Littlewood-Richardson 系数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ 等于形状为 λ/μ 且类型为 ν的斜形半标准杨表 T 的数量，其读字是一个投票序列。

投票序列是指在序列的每个前缀中，1 的数量 $\ge$ 2 的数量 $\ge$ 3 的数量等。例如，我们有 $c^{(6,4,3)}_{(3,\ 1),\ (4,\ 3,\ 2)} = 2$ 因为有两个 LR 杨表（半标准杨表形状为 (6, 4, 3)/(3, 1)、类型为 (4, 3,2) 的读词为投票序列）



1 1 1 with读字 111221332 and 2 2 2 1 3 3



读字为 111222331。

对称群的克罗内克系数 $g(\lambda,\mu,\nu)$是 S_n- 不可约表示环的相应结构常数。也就是说， S_n 在两个斯佩希特模的张量积上对角作用，相应的模分解为不可约表示，其重数为 $g(\lambda,\mu,\nu)$

$$\mathbb{S}_\lambda \otimes \mathbb{S}_\mu = \bigoplus_\nu \mathbb{S}_\nu^{\oplus g(\lambda,\mu,\nu)}.$$

用特征标表示，我们可以将它们写成

$$g(\lambda,\mu,\nu) = \langle \chi^\lambda \chi^\mu, \chi^\nu \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{w\in S_n} \chi^\lambda(w)\chi^\mu(w)\chi^\nu(w). \tag{3.1}$$

最后一个公式表明，在互换底层分拆时，它们具有对称性$g(\lambda,\mu,\nu) = g(\mu,\nu,\lambda) = \cdots$这促使我们采用这种对称记法。

该克罗内克积 $*$ 在 Λ 舒尔基上的定义为

$$s_\lambda * s_\mu = \sum_\nu g(\lambda,\mu,\nu) s_\nu,$$

并通过线性扩展。

受 Littlewood-Richardson 系数的启发，Murnaghan 于 1938年 定义了它们。事实上，他证明了，见 [Mur56],

Theo引理 3.2（Murnaghan）。对于任意 λ、μ、ν，使得 $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$，我们有 tha t

$$c_{\mu\nu}^\lambda = g((n-|\lambda|,\lambda),(n-|\mu|,\mu),(n-|\nu|,\nu)),$$

对于足够大的 n。

特别是，可以看出 $n = 2|\lambda| + 1$ 是可行的。注意，即使分拆的大小之和不相等，右端仍会随着 $n \to \infty$ 趋于 约化克罗内克系数而稳定，参见 7。

借助舒尔-韦伊对偶，它们也可以通过舒尔函数来解释为

$$s_\lambda[\boldsymbol{xy}] = \sum_{\mu,\nu} g(\lambda,\mu,\nu) s_\mu(\boldsymbol{x}) s_\nu(\boldsymbol{y}),$$

其中 xy $=(x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_2y_1, \ldots)$ 是所有两两乘积构成的向量。就 GL 表示而言，它们给出了不变空间的维数。

$$g(\lambda,\mu,\nu) = \dim(V_\mu \otimes V_\nu \otimes V_\lambda^*)^{GL_N \times GL_M},$$

其中 V_μ被视为一个 GL_N-模，而 V_ν作为一个 GL_M-模，并且 V_λ^*是一个对偶 GL_{NM}-模。换言之，它们是最高权向量空间的维数；利用将它们解释为最高权空间的维数这一点，可以证明如下结论，参见 [CHM07]

定理 3.3（半群性质）。设 $(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)$ 和 $(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)$ 是两个分拆三元组，满足 $|\alpha^1| = |\beta^1| = |\gamma^1|$ and $|\alpha^2| = |\beta^2| = |\gamma^2|$。假设 $g(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1) > 0$ and $g(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2) > 0$。则

$$g(\alpha^1+\alpha^2, \beta^1+\beta^2, \gamma^1+\gamma^2) \geq \max\{g(\alpha^1,\beta^1,\gamma^1), g(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)\}.$$

根据特征标的原始定义，我们可知

$$g(\lambda,\mu,\nu) = g(\lambda',\mu',\nu)$$

因为 $\chi^{\lambda'}(w) = \chi^\lambda(w)\mathrm{sgn}(w)$。特别地，对于所有 λ 和 $g(\lambda,\mu,1^n) = \delta_{\lambda,\mu'}$，我们有 $g(\lambda,\mu,(n)) = \delta_{\lambda,\mu}$。

例 3.4。根据上述观察，我们有

$$h_k[\boldsymbol{xy}] = s_k[\boldsymbol{xy}] = \sum_{\lambda\vdash k} s_\lambda(\boldsymbol{x}) s_\lambda(\boldsymbol{y}).$$

利用雅可比-特鲁迪恒等式，我们可以写成

$$\begin{aligned} s_{2,1}[\boldsymbol{xy}] = h_2[\boldsymbol{xy}]h_1[\boldsymbol{xy}] - h_3[\boldsymbol{xy}] &= (s_2(\boldsymbol{x})s_2(\boldsymbol{y}) + s_{1,1}(\boldsymbol{x})s_{1,1}(\boldsymbol{y}))\, s_1(\boldsymbol{x})s_1(\boldsymbol{y}) \\ &\quad - s_3(\boldsymbol{x})s_3(\boldsymbol{y}) - s_{2,1}(\boldsymbol{x})s_{2,1}(\boldsymbol{y}) - s_{1,1,1}(\boldsymbol{x})s_{1,1,1}(\boldsymbol{y}) \\ = s_{2,1}(\boldsymbol{x})s_{2,1}(\boldsymbol{y}) + s_{2,1}(\boldsymbol{x})s_3(\boldsymbol{y}) + s_3(\boldsymbol{x})s_{2,}(\boldsymbol{y}) + s_{1,1,1}(\boldsymbol{x})s_{2,1}(\boldsymbol{y}) + s_{2,1}(\boldsymbol{x})s_{1,1,1}(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

因此我们看到 $g((2,1),(2,1),(2,1)) = 1$。

复合系数$a^{\lambda}_{\mu,\ \nu}$是一个不可约 GL 表示在两个 GL 表示复合运算中的重数。具体而言，设 $\rho^{\mu}: GL_N \to GL_M$ 是一个不可约表示，并且 $\rho^{\nu}: GL_M \to GL_K$ 是另一个表示。那么 $\rho^{\nu} \circ \rho^{\mu}: GL_N \to GL_K$ 是 GL_N 的另一个表示，其特征标为 $s_{\nu}[s_{\mu}]$，它分解为不可约表示如下

$$s_{\nu}[s_{\mu}] = \sum_{\lambda} a^{\lambda}_{\mu,\nu} s_{\lambda}.$$

这里，复合记号 $f[g]$ 表示将 f 在 g 的单项式上取值，并将其视为变量：如果 $g = \mathbf{x}^{\alpha^1} + \mathbf{x}^{\alpha^2} + \cdots$，那么 $f[g] = f(\mathbf{x}^{\alpha^1}, \mathbf{x}^{\alpha^2}, \ldots)$。

例 3.5。我们有

$$\begin{aligned} s_{(2)}[s_{(1^2)}] = h_3[e_2] = h_2(x_1x_2, x_1x_3, \ldots) &= x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2x_3 + 3x_1x_2x_3x_4 + \cdots \\ &= s_{2,2}(x_1, x_2, x_3, \ldots) + s_{1,1,1,1}(x_1, x_2, x_3, \ldots), \end{aligned}$$

所以 $a^{(2,2)}_{(2),(1,1)} = 1$ 以及 $a^{(3,1)}_{(2),(1,1)} = 0$。

我们将特别关注 $\mu = (d)$ 或 (1^d)，它们分别是 d 次对称幂 Sym^d和 d 次外幂 Λ^d，以及 $\nu = (n)$。我们用 $a_{\lambda}(d[n])$ 表示这个复合运算系数：$= a^{\lambda}_{(d),\ (n)}$和

$$h_d[h_n] = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(d[n]) s_{\lambda}.$$

这些系数是几何复杂性理论应用的核心，值得特别关注。

4. Combinatorial interpretations

“组合解释”虽然从未在文献中得到正式定义，但通常被认为是一族良好的离散对象，其基数给出所需的量。实际上，对于具有组合解释的量，计算它们属于 #P。另一方面，属于 #P 并不一定能提供“良好”的组合解释，但无疑是一个起点。此处考虑的所有问题都属于 GapP，因此 #P 是研究“显然非负”公式时自然要考虑的复杂性类。如果这类问题不属于 #P，那么在给定的语境下，就不可能有合理的非负组合解释。这一范式在 [IP22、Pak22+、Pan23]中有详细讨论。

继1934年发现刘维尔-理查德森规则后，Murnaghan [Mur38] 定义了 S_n 的克罗内克系数，并计算了若干特殊情形，但很快就发现这并非易事。20世纪80年代，人们重新关注这些系数的非负组合解释，参见 [Las79、GR85], ；这一问题后来被列为 Stanley 列表中的问题10[1] 《代数组合学中的开放问题》 [Sta00]。

公开问题 4.1（Stanley）。为 $g(\lambda, \mu, \nu)$ 找到一种组合解释，从而用组合方法证明它们是非负的。

[1]参见此处 原始列表及有关问题的更新 https://mathoverflow.net/questions/349406 /

多年来，这个问题几乎没有取得什么进展。1989 年，Remmel 确定了当两个分拆为钩形时的 $g(\lambda, \mu, \nu)$。1994 年，Remmel 和 Whitehead [RW94] 确定了当两个分拆为两行时的 $g(\lambda, \mu, \nu)$，即 $\ell(\lambda)\ \ell(\mu) \leq 2$。随后，[BMS15] 也研究了这一情形。2006 年，Ballantine 和 Orellana [BO05] 确定了 $g(\lambda, \mu, \nu)$ 的一条规则：当一个分拆为两行，例如 $\mu = (n-k, k)$，且另一个分拆的第一行很长，即 $\lambda_1 \geq 2k-1$ 时成立。2012 年，Blasiak [B13] 确定了最一般的规则，适用于一个分拆为钩形的情形；此后 Blasiak 和 Liu [BL18], 对其进行了简化，随后 Liu [Liu17]又进一步简化了它。对于无重数克罗内克积，还有一些非常特殊的情形已被计算出来：Bessenrodt-Bowman [BB17], 给出了相应的克罗内克积；Ikenmeyer-Mulmuley-Walter [IMW17]研究了与金字塔对应的克罗内克积； $g(m^k, m^k, (mk-n, n))$ 可表示为带标号树的计数，见 Pak-Panova 的注释 4.4；Tewari [T15], 研究了近矩形分拆，等等。

类似的问题也涉及复合系数。以下问题是 Stanley 列表中的第 9 个问题[Sta00]。

开放问题 4.2（Stanley）。为复合系数a_μ^λ寻找一种组合解释ν。

A 关于部分结果和方法的详细综述可见于 [COSSZ22]。

即使是 a_λ简单情形 $d[n] = \langle s_\lambda,\ h_d[h_n] \rangle$ 一般情况下也未知，除非 $n = 2$。尽管克罗内克系数与复合系数之间没有直接联系，但当 ℓ（λ） $= 2$时二者相同，见 [PP14]„ 实际上还给出了一种组合解释，具体如下所述。

命题 4.3。我们有 $g(\lambda, n^d, n^d) = a_\lambda(d[n]) = p_k(n, d) - p_{k-1}(n, d)$，其中 $\lambda = (nd-k, k) \vdash nd$。这里，$p_r(a, b) = \#\{\mu \vdash r :\ \mu_1 \leq a, \ell(\mu) \leq b\}$ 是包含在 r的 $a \times b$矩形内的分拆。

注释 4.4。特别地，这些就是 q-二项式中的系数。

$$\sum_r p_r(a, b) q^r = \binom{a+b}{a}_q := \prod_{i=1}^{a} \frac{(1-q^{i+b})}{1-q^i}.$$

Kathy O'Hara 对 $p_r(a, b)$ 的单峰性所作的组合证明，为特定克罗内克系数和复合系数提供了组合解释，即将它们视为某些带标签树的计数，参见 [Pan15，第 9]。

为了将这些问题形式化，我们在计算复杂性框架内对其进行表述。为通过一个示例做好铺垫，我们从 Littlewood-Richardson 系数开始。

ComputeLR：输入：

λ, μ, ν输出： $c_{\mu\nu}^\lambda$ 的值。

在下文中，输入可以编码为一进制或二进制，这可能会影响复杂度。这里的一进制是指，每个分拆的输入都写成 $(\underbrace{11\ldots1}_{\lambda_1}, \underbrace{1\ldots1}_{\lambda_2}, \ldots)$，因此

输入大小为 $O(|\lambda|) = O(n)$。在二进制中，我们将每个部分 λ_i 用 2 进制编码，因此输入大小为 $\log_2(\lambda_1) + \log_2(\lambda_2) + \cdots = O(\ell(\lambda)\log_2(\lambda_1))$。

根据 Littlewood-Richardson 规则，当输入为一进制时，ComputeLR$\in$#P，因为我们的见证是斜 λ/μ 杨表，其数量至多为 $n^n = O(2^{n^2})$ 个，并且每个都可以在 $O(n^2)$ 时间内验证是否为 LR 杨表。LR 条件可以转化为 $O(\ell(\lambda)^2)$ 个线性不等式，这些不等式构成了 LR 多胞体。由此可知，即使输入为二进制，我们仍有 ComputeLR$\in$#P。

通过将其归约到二进制输入的背包问题，不难看出

定理 4.5 (Narayanan [Nar06])。 当输入 λ， μ， ν 为二进制时， *ComputeLR* 是 #P-完全的。

当输入采用一进制表示时，我们不知道该问题是否仍然如此困难。

猜想 4.6（Pak-Panova 2020）。当输入采用一进制表示时，ComputeLR 是 #P-完全的。

然而，由于缺乏任何正的组合公式，上述任何结果都尚未应用于克罗内克系数和复合系数。Mulmuley 还猜想，计算克罗内克系数属于 #P，从而仿照 Littlewood-Richardson 系数。

ComputeKron：输入： λ、 μ、
ν输出： $g(\lambda$、 μ、 $\nu)$ 的值。

猜想 4.7（Pak）。在诸如多项式层次不坍缩等合理的复杂性理论假设下， ComputeKron 不属于 #P。

如果上述结论得到证明，那么解决开放问题 4.1 就会和多项式层次坍塌一样不可能。任何合理的组合解释，例如计数某些对象，都将表明该问题属于 #P，因为这些对象很可能能在多项式时间内得到验证。该问题对一进制和二进制输入都成立。

注意，ComputeKron $\in$ GapP ([BI08]) 属于该类，因为很容易写出用于计算它的交错和，例如使用列联数组，见 [PP17b]。

作者在研究克罗内克系数方面的经验表明，某些特定族的问题可能与一般问题一样难。

猜想 4.8（Panova）。当 $\ell(\lambda) = 2$ 时，ComputeKron 属于 #P，当且仅当 ComputeKron 属于 #P。同样，当以 $\mu = \nu = (n^d)$ 和 $\lambda \vdash nd$ 作为输入时，ComputeKron 属于 #P，当且仅当 ComputeKron 属于 #P。

当然，反向蕴含是显然的：如果一般问题属于 #P，那么特殊子问题也属于 #P。

也可以从这一角度研究复合系数。

ComputePleth：输入： λ、
μ、 ν输出：a_μ^λ的值，ν。

开放问题 4.9。确定 ComputePleth∈是否属于 #P。

利用对称函数恒等式，不难为复合运算找到一个交错公式，并证明它们也属于 GapP，参见 [FI20]。他们还证明了判定正性是 NP-困难的，因此计算问题是 #P-困难的。 ComputePleth 在一般情况下可能不属于 #P ，即使 μ、 ν 是单行分拆。系数 $a_\lambda(d[n])$ 在这种情况下对于几何复杂性理论具有特殊意义，参见 [Pan23]。

上述提及的所有表示论重数，其基础都是对称群的特征标。例如，方程（3.1）通过特征标表示克罗内克系数，而其他结构常数也可以通过类似的方式表示。这促使我们从计算角度对它们进行理解。正如我们将看到的，它们也为这样一种观点提供了概念验证：某些非负整数代数组合量确实可能不存在组合解释。

这些特征标满足一些特别优美的恒等式，这些恒等式源自 S_n 中特征标表的行与列的正交性。我们有：

$$\sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(w)^2 = \prod_i i^{c_i} c_i!\,, \tag{4.1}$$

其中， c_i = 表示 $w \in S_n$中长度为 i 的轮换数量。当 w = 为恒等置换时，我们有 χ^λ(id) $= f^\lambda$，即标准杨表的数量，而这一恒等式是利用优美的 RSK 双射证明的。该证明的第一步是将$(f^\lambda)^2$ 识别为具有相同形状的标准杨表对的数量。

能否对方程（4.1）做类似的处理？第一步是理解对象 $\chi^\lambda(w)^2$ 所计数的内容，以及它是否具有某种正的组合解释？我们使用 CC 范式重新表述如下：

ComputeCharSq：输入： λ,
$\alpha \vdash n$, 一进制。输出：整数 $\chi^\lambda(\alpha)$
[2]。

定理 4.10 ([IPP22])。 *ComputeCharSq*$\notin \#P$除非 $PH = \Sigma_2^P$。

最后一个条件表明“多项式层次坍缩到第二层”，这几乎与 P =NP 一样不可能。普遍认可的计算复杂性假设是 P $\neq$ NP，且多项式层次不会坍缩。这个问题表明，代数组合学中的一些自然问题确实不属于 #P。

该定理的证明源于我们证明的另一项复杂性理论结果，即判定 $\chi^\lambda(\alpha) \neq 0$ 是否属于多项式层次-困难同样成立，参见§5末尾。

5. Positivity problems

受其他进展的启发，关于克罗内克系数的更多问题也随之出现。在[HSTZ13] 关于有限李型群的斯坦伯格特征标的平方的研究之后，作者们猜想，对称群也应存在类似的不可约特征标，并提出了如下猜想。

猜想 5.1（张量平方猜想）。对于每个 $n \geq 9$ ，都存在一个对称分拆$\lambda \vdash n$，使得 $\mathbb{S}_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda$ 包含每个不可约 S_n 模。换言之，对于所有$\mu \vdash n$， $g(\lambda, \lambda, \mu) > 0$。

随后，Saxl 猜想了一个具体的分拆，即阶梯形分拆，并认为它满足该条件。

猜想 5.2 (Saxl，见 [PPV16])。 设 $\delta_k = (k,\ k-1,\ \ldots,\ 1)$ 为阶梯分拆。那么(, ,) 对所有 以及 均成立。

这个猜想因其具体明确而受到广泛关注。

正性结果是通过结合三种方法证明的：半群性质，即从构件递归构造正三元组；运用 [Ful00], 中的技巧进行显式最高权构造；以及一种不同寻常的特征标比较。该比较最初由 Bessenrodt and Behns 在 [BB04] 中陈述，用以证明 $g(\lambda,\ \lambda,\ \lambda) > 0$ 对 $\lambda = \lambda'$成立，后来在 [PPV16], 中得到推广，并在 [PP17a]中形成最终版本。

ˆ定理 5.3 ([PP17a])。 设 λ, $\mu \vdash n$ 且 $\lambda = \lambda'$。设 $\lambda = (2\lambda_1 - 1,\ 2\lambda_2 - 3,\ 3\lambda_3 - 5,\ \ldots)$ 为 λ的主钩。那么

$$g(\lambda, \lambda, \mu) \geq |\chi^\mu(\hat{\lambda})|.$$

构造显式最高权向量的技巧得出了以下更一般的结果。

定理 5.4 ([I15])。 设 $\mu \vdash \binom{k+1}{2}$ 是一个与 ρ_k 在支配序下可比较的分拆，即$\mu \succ \rho_k$ 或 $\rho_k \succ \mu$。 那么 $g(\rho_k, \rho_k, \mu) > 0$。

利用这一结果及其推广，并巧妙地结合半群性质3.3，Luo 和 Sellke [LS17] 证明了 $\chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k}$ 包含所有 χ^{μ}，并且 $\chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k}$包含“绝大多数”不可约表示。在 [B18], Bessenrodt 证明，所有双钩（即 Durfee 大小为 2 的分拆）都包含在 $\chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k}$中，而 Li 将这一结果推广到了三钩 [L21]。Harman 和 Ryba [HR22] 证明了 $\chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_k} \otimes \chi^{\rho_m}$ 包含所有不可约表示。

半群性质是一种强有力的工具，可以通过诱导，利用构建块生成正的克罗内克三元组。然而，要用构建块构造特定的分拆（如阶梯形分拆或矩形）限制很多，而且很快就会遇到数论问题。矩形只能被“切分”为其他矩形。这促使我们扩大正三元组的类别。2020 年，我们与 Christine Bessenrodt 将猜想5.1 推广如下（并验证了所有大小不超过 20 的分拆）。

猜想 5.5（Bessenrodt-Panova 2020）。对于每个 n ，都存在一个 $k(n)$，使得对于每个$\lambda \vdash n$ ，若 $\lambda = \lambda'$ 且 $d(\lambda) > k_n$ 不是平方分拆，则对所有$\mu \vdash n$，都有 $g(\lambda, \lambda, \mu) > 0$ 。

这里 $d(\lambda) = \max\{i : \lambda_i \geq i\}$ 是该分拆的 Durfee 方形大小。关于该猜想的部分进展将见于 Chenchen Zhao 的工作。

受几何复杂性理论中的应用启发，另一个正性结果见 [IP17] as

引理 5.6（[IP17，定理 1.10]）。设 $X := \{1, 1^2, 1^4, 1^6, 21, 31\}$，且设分拆 $\nu \notin X$。记$\ell := \max\{\ell(\nu) + 1, 9\}$，并假设 $r > 3\ell^{3/2}$，$s \geq 3\ell^2$，以及 $|\nu| \leq rs/6$。设 $\nu[N] := (N - |\nu|, \nu_1, \nu_2, \ldots)$。则 $g(s^r, s^r, \nu[rs]) > 0$。

张量平方猜想提出了这样一个问题：如何简单地确定何时 $g(\lambda, \mu, \nu) > 0$。根据表示论，当 $n > 2$ 对每个 $\mu \vdash n$ 都存在一个 $\lambda \vdash n$，使得 $g(\lambda, \lambda, \mu) > 0$，这是一个推论，见 [Sta99，例 7。82] 但即便如此，也没有组合证明。

为了理解这类问题为何困难，我们借助计算复杂性框架。对于科斯塔数，判断 $K_{\lambda,\mu} > 0$ 是否成立很容易，只需检查 $\lambda \succ \mu$是否处于支配序中。对于刘维尔-理查德森问题，尽管存在组合规则，判断起来却要复杂得多。

LRPos：输入： λ、 μ、
ν输出：是 $c_{\mu\nu}^{\lambda} > 0$吗?

Knutson 和 Tao 对饱和猜想的证明表明，一个刘维尔-理查德森系数非零，当且仅当相应的蜂巢多面体非空。该多面体是盖尔范德-策特林多面体的一种细化，其定义由 $O(\ell(\lambda)^2)$ 个不等式给出。因此，证明该多面体非空就是一个线性规划问题，可以在多项式时间内求解，参见 [MNS12]。

Th定理 5.7. 当输入为二进制（或一进制）时，我们有 LRPos $\in$P。 .

KronPos：输入： λ, μ, ν
输出： $g(\lambda, \mu, \nu)$ 是 > 0 吗?

在几何复杂性理论的早期阶段，Mulmuley 曾猜想[MS08] 它们的行为会类似于刘维尔-理查德森系数，因此 KronPos$\in$P，但这一猜想最近已被证伪。

Theo注 5.8 ([IMW17])。 当输入 λ， μ， ν是用一进制表示时，*KronPos* 是NP 困难 .

证明利用了这样一个事实：在某些情况下，$g(\lambda,\mu,\nu)$ 等于边缘为 λ、μ、ν 的金字塔数量，而判定是否存在这样的金字塔是 NP完全的。然而，该问题尚未属于 NP：对于每个 λ、μ、ν，我们还没有多项式见证来证明在这种情况下 $g(\lambda,\mu,\nu) > 0$。这又是一个开放问题。

开放问题 5.9。确定当输入 λ,μ,ν为一进制时，KronPos 是否属于 NP。

毋庸置疑，当输入为二进制时，这个问题在 [计算上] 会更难。

复合系数的正性甚至更不为人所知。复合系数 $a_\lambda(d[n])$ 在几何复杂性理论中十分重要，而对于具有 $a_\lambda(d[n])$的 λ 长首行分拆的正性已在 [BIP19]中得到证明。一般来说，我们不认为这个问题会容易多少。

PlethPos：输入：λ,μ,ν输出：$a^\lambda_{\mu,\nu} > 0$是否成立?

在[FI20], 中，Fischer 和 Ikenmeyer 证明了PlethPos 是NP-困难问题。由于通常不存在组合解释，也没有简洁的正性判据，我们无法判断该问题是否属于NP。

开放问题 5.10。判断 PlethPos 是否属于 NP。

关于复合系数，有一个重要猜想。

猜想 5.11（Foulkes）。设 $d > n$，则

$$a_\lambda(d[n]) \geq a_\lambda(n[d])$$

对所有 $\lambda \vdash nd$，均成立。

这个猜想与 Alon-Tarsi猜想有关，也曾出现在与几何复杂性理论相关的研究中。在 [DIP19] 我们证明了它对若干类三行分拆成立。

由于这些量大多可以通过对称群特征标计算，自然会想知道判断一个特征标是否为 0 有多容易。

CharVanish:
输入：$\lambda,\alpha \vdash n$, 一进制。
输出：$\chi^\lambda(\alpha)$ 是 $= 0$ 吗?

定理 5.12 ([IPP22])。我们有 *CharVanish*是 $\mathsf{C_{=}P}$ -完全的，在多对一归约下。

类 $\mathsf{C_{=}P}$ 形式化定义为 $[\mathsf{GapP} = 0]$，即判定两个 #P 函数的值是否相等的复杂度类。该类被认为严格大于 coNP 和 NP。因此，我们不能指望判定 $\chi = 0$ 属于 coNP，且 $\chi \neq 0$ 属于 NP。这也引出了命题 5.3 的证明。参见 [Pan23]，了解该主题的讨论以及证明概要。

6. Asymptotic Algebraic Combinatorics

渐近代数组合学是受概率论和渐近表示论启发的代数组合学的自然延伸。我们不再寻求精确的公式、双射和组合解释，而是希望近似地理解这些量。事实上，在缺乏优美公式的情况下，这正是我们对给定结构常数所能抱有的期望。

正如引言中所提到的，这类问题与统计力学和可积概率论有着天然的联系。它们对于寻找几何复杂性理论中的重数障碍也很重要，参见 [Pan23]。

6.1. 最大重数。 此类渐近分析的第一步是估计可能取值的范围。在[Sta99, Sta20], Stanley观察到

$$\max_{\lambda\vdash n}\max_{\mu\vdash n}\max_{\nu\vdash n} g(\lambda,\mu,\nu) \;=\; \sqrt{n!}\,e^{-O(\sqrt{n})}\,,$$
$$\max_{0\le k\le n}\max_{\lambda\vdash n}\max_{\mu\vdash k}\max_{\nu\vdash n-k} c^{\lambda}_{\mu,\nu} \;=\; 2^{n/2-O(\sqrt{n})}.$$

并提出了要求

开放问题 6.1（Stanley）。固定 n。对于哪些 λ,μ,ν with $\lambda\vdash n$, $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ 渐近地达到最大值？对于哪些 λ,μ,ν, $g(\lambda,\mu,\nu)$ 渐近地达到最大值?

利用涉及这些系数之和的各种对称函数恒等式和表示论恒等式，[PPY19a] 中观察到，这类极大分拆 λ 也必定具有渐近极大的维数 f^{λ}。根据 Vershik-Kerov [VK] 和 Loggan-Shepp[LoS], 的开创性工作，我们知道这类分拆会趋近于一条特定的显式曲线，我们称之为 VKLS 形状，而对应的分拆称为 VKLS 分拆；对于所有这些分拆，我们都有 $f^{\lambda}=\sqrt{n!}\;e^{-O(\sqrt{n})}$。

定理 6.2 ([PPY19a])。 设 $\{\lambda^{(n)}\vdash n\}$, $\{\mu^{(n)}\vdash n\}$, $\{\nu^{(n)}\vdash n\}$ 为三个分拆序列，使得

$$(*)\qquad g\big(\lambda^{(n)},\mu^{(n)},\nu^{(n)}\big) \;=\; \sqrt{n!}\,e^{-O(\sqrt{n})}\,.$$

那么 $\lambda^{(n)},\mu^{(n)},\nu^{(n)}$ 具有 VKLS 形状（即渐近地达到最大值）。反过来，对于任意两个 VKLS 序列 $\{\lambda^{(n)}\vdash n\}$ 和 $\{\mu^{(n)}\vdash n\}$，都存在一个 VKLS 分拆序列 $\{\nu^{(n)}\vdash n\}$，使得 (*) 成立。

这一陈述证明了“存在性”；这里的问题是，找出一个具体的显式分拆族，使其满足这些渐近性质。

开放问题 6.3。确定一个分拆族 $\lambda^{(n)},\mu^{(n)},\nu^{(n)}\vdash n$，使得

$$g\big(\lambda^{(n)},\mu^{(n)},\nu^{(n)}\big) \;=\; \sqrt{n!}\,e^{-O(\sqrt{n})}$$

当 $n\to\infty$ 时。

我们认为，对于阶梯分拆 $\rho_k=(k,k-1,\ldots,1)$，克罗内克系数 $g(\rho_k,\rho_k,\rho_k)$ 会超指数增长；这是一个可能取得较大但非最大值的具体候选。然而，目前尚未知道此情形下的指数下界。

对 Littlewood-Richardson 系数也可以进行类似的分析。同样，证明只能推出“存在性”，但无法给出任何具体的序列族。

定理 6.4 ([PPY19a])。 固定 $0<\theta<1$ 并令 $k_n:=\lfloor\theta n\rfloor$。则：

1. 对于每个 VKLS 分拆序列 $\{\lambda^{(n)}\vdash n\}$，存在 VKLS 分拆序列 $\{\mu^{(n)}\vdash k_n\}$ 和 $\{\nu^{(n)}\vdash n-k_n\}$，使得

$$(**)\qquad c^{\lambda^{(n)}}_{\mu^{(n)},\,\nu^{(n)}} \;=\; \binom{n}{k_n}^{1/2} e^{-O(\sqrt{n})}\,,$$

2. 对于所有 VKLS 分拆序列 $\{\mu^{(n)}\vdash k_n\}$ 和 $\{\nu^{(n)}\vdash n-k_n\}$，存在一个 VKLS 分拆序列 $\{\lambda^{(n)}\vdash n\}$，使得（$**$）成立，

3. 对于所有 VKLS 分拆序列 $\{\lambda^{(n)}\vdash n\}$ 和 $\{\mu^{(n)}\vdash k_n\}$，存在一个分拆序列$\{\nu^{(n)}\vdash n-k_n\}$，使得

$$f^{\nu^{(n)}} \;=\; \sqrt{n!}\,e^{-O(n^{2/3}\log n)} \quad \textit{and} \quad c^{\lambda^{(n)}}_{\mu^{(n)},\,\nu^{(n)}} \;=\; \binom{n}{k_n}^{1/2} e^{-O(n^{2/3}\log n)}\,.$$

我们再次探讨何时能达到这样的最大值。

开放问题 6.5。设 $\theta \in (0,1)$ 是某个固定数，且 $k_n := \lfloor \theta n \rfloor$。找出分拆族 $\{\lambda^{(n)} \vdash n\}$、$\{\mu^{(n)} \vdash k_n\}$ 和 $\{\nu^{(n)} \vdash n - k_n\}$，使得

$$c_{\mu^{(n)},\,\nu^{(n)}}^{\lambda^{(n)}} \;=\; \binom{n}{k_n}^{1/2} e^{-O(\sqrt{n})}\,,$$

尽管克罗内克系数的渐近行为几乎尚未得到研究，但不同情形下舒尔函数的渐近性质一直是可积概率领域的核心内容。这与随机矩阵理论中的 Harish-Chandra-Itzhykson-Zuber 积分密切相关。再进一步，我们会研究 Kostka 系数和 Littlewood-Richardson 系数，它们也可以用所谓的椭圆积分进行估计，见 [BGH]。在那里，渐近问题被转化为隐式变分分析，但仍无法得出明确具体的答案。

有。　　目前尚无关于复合系数的此类非平凡渐近结果　　.

未解决的问题 习题 6.6. 确定复合系数的最大渐近值。

$$\max_{\lambda \vdash n^2} a_\lambda(n[n]).$$

唯一非平凡的界来自它们与矩形克罗内克系数的关系，尤其是在 λ 是一个两行分拆时，参见 § 6.3。我们预计最大值至少应呈指数增长。另一个非平凡下界的来源见于[FI20] ，其中将复合运算与金字塔进行了比较。在 [PP20a中也采用了类似的比较来获得一族较大的克罗内克系数PP23]。

6.2. 有界行数与对角线。在“最大”情形下，所涉及的分拆接近 VKLS 形状；对于大小为 n 的分拆，该形状是对称的，长度为 $O(\sqrt{n})$。渐近性质会根据所涉及分拆的收敛情形而发生显著变化。

当分拆的长度有界时，来自对称函数并将其与列联表联系起来的公式会变得很有用。我们有如下上界。

定理 6.7 ([PP20a])。 设 λ， μ， $\nu \vdash n$ 满足 $\ell(\lambda) = \ell$， $\ell(\mu) = m$，且 $\ell(\nu) = r$。则：

$$g(\lambda,\mu,\nu) \;\le\; \left(1 + \frac{\ell m r}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{n}{\ell m r}\right)^{\ell m r}.$$

特别是，当 $\lambda = \mu = \nu = ((\ell^2)^\ell) \vdash \ell^3 = n$ 时，我们有 $g(\lambda,\mu,\nu) \le 4^n$。然而，对于这种情形，类似的下界仍难以获得。

进一步运用 Schur 函数技巧进行分析，还能在分拆的 Durfee 大小（对角线长度）有界时，即使其长度不断增长，也得到界。如下所示，参见 [PP23]。

定理 6.8 ([PP23])。 设 n， $k \ge 1$，并设 λ， μ， $\nu \vdash n$，满足 $d(\lambda)\ d(\mu)\ d(\nu) \le k$。则：

$$g(\lambda,\mu,\nu) \;\le\; \frac{1}{k^{8k^2}\, 2^{8k^3}}\; n^{4k^3+13k^2+31k}. \tag{6.1}$$

我们还知道，实际最大值与这个界相差不远。令

$$A(n,k) \;:=\; \max\left\{ g(\lambda,\mu,\nu) \;:\; \lambda,\mu,\nu \vdash n \;\text{ and }\; \ell(\lambda),\ell(\mu),\ell(\nu) \le k \right\}.$$

定理 6.9 ([PP23])。 对所有 $k \ge 1$，存在常数 $C_k > 0$，使得　　t

$$A(n,k) \;\ge\; C_k\, n^{k^3-3k^2-3k+3} \qquad \textit{for all} \quad n \ge 1\,. \tag{6.2}$$

然而，对于具体的分拆族，我们离找到接近这些最大值的渐近性质仍相去甚远。

开放问题 6.10。对于每个固定的 k，确定一族分拆 $\lambda^{(n)}$、$\mu^{(n)}$、$\nu^{(n)} \vdash n$，使得$\ell(\lambda^{(n)})\ \ell(\mu^{(n)})\ \ell(\nu^{(n)}) \le k$，满足。

$$g(\lambda^{(n)},\mu^{(n)},\nu^{(n)}) = O(n^{(k-1)^3}).$$

利用多变量渐近组合学（ACSV）这一强大的技术， $k \le 4$ 的情形已得到较为充分的理解，并已在[MT]中推导出明确的渐近表达式。然而，对于任意但固定的 k ，ACSV 不再适用，因此我们需要采用其他方法来计算这一结果。

同样的问题也适用于复合系数。

开放问题 6.11。证明：对于每个固定的 k ，长度为 k 的分拆上的最大复合系数关于 n呈多项式增长。特别地，我们有

$$\log \max_{\lambda \vdash n^2,\, \ell(\lambda)=k} a_\lambda(n[n]) = \Omega(\log(n))$$

这一点已在 [IP17] 中证明：复合运算的系数有矩形克罗内克系数作为上界，

$$a_\lambda(d[n]) \le g(\lambda, n^d, n^d)$$

对于 $\ell(\lambda) \le m^2, \lambda_1 \ge d(n-m)$ 和 d, n 足够大、从而处于稳定范围时，也就是说，只要 d, n 和 λ_1 增长，复合运算与克罗内克系数的取值便保持不变。因此，我们并不认为复合系数的增长会超过克罗内克系数。

6.3. 紧渐近。 在极少数非平凡情形下，我们有克罗内克系数和复合系数的某些显式公式，并能够据此推导出紧渐近。其中一种情形是矩形克罗内克系数 $g(\lambda, m^\ell, m^\ell)$，其中 λ 有两行。根据 [PP17a], ，对于 $\lambda = (m\ell - n, n)$，我们有：

$$g(m^\ell, m^\ell, \lambda) = p_n(\ell, m) - p_{n-1}(\ell, m) = a_\lambda(m[\ell]),$$

其中， $p_n(\ell, m) = \#\{\alpha \vdash n, \alpha_1 \le m, \ell(\alpha) \le \ell\}$ 是杨图包含在一个 $\ell \times m$ 矩形内的 k 的分拆数。

利用这种分拆计数的解释，并使用倾斜几何随机变量推导出 $p_n(m, \ell)$ 的紧渐近，我们得到

定理 6.12 ([MPP19a])。 设 $A := \frac{\ell}{m}$ $B := \frac{n-1}{m^2}$ 。设 c， d 是某个带参数的积分方程组的解 A, B。我们有

$$a_\lambda(m[\ell]) = g(\lambda, m^\ell, m^\ell) = p_n(\ell, m) - p_{n-1}(\ell, m) \sim \frac{d}{m} p_{n-1}(\ell, m) \sim \frac{d\, e^{m[cA + 2dB - \log(1 - e^{-c-d})]}}{2\pi m^3 \sqrt{D}}.$$

请注意，定理成立的一些技术条件还包括 ℓ、 m 以相同的速率增长，并且 $\frac{n}{m\ell}$ 应远离1 2。当 $n \sim \frac{1}{2} m\ell$ 时，我们无法再如此精确地估计 p_n之间的差异，因此下面需要采用不同的方法

未解决问题 6.13。当 $\lambda = (\lceil m^2/2 \rceil, \lfloor m^2/2 \rfloor)$ 时，求 $g(m^m, m^m, \lambda$ 的紧渐近).

此情形下最好的下界来自特征标，并见于 [PP17a]。

毋庸置疑，任何其他明确的紧渐近结果都将具有重要价值，而且利用半群性质，有望在其他参数范围内得到更优的下界。

7. Reduced Kronecker coefficients

由于克罗内克系数很快就被发现难以理解，人们转而寄希望于稳定克罗内克系数定义为

$$\overline{g}(\alpha, \beta, \gamma) := \lim_{n \to \infty} g\big(\alpha[n], \beta[n], \gamma[n]\big), \qquad \alpha[n] := (n - |\alpha|, \alpha_1, \alpha_2, \ldots),\ n \ge |\alpha| + \alpha_1.$$

它们推广了。刘维尔-理查德森系数，遵循定理 3.2 出自 [Mur56] .

$$\overline{g}(\alpha, \beta, \gamma) = c^\alpha_{\beta\gamma} \quad \text{for} \quad |\alpha| = |\beta| + |\gamma|,$$

因此，在 [Kir04]中，它们被称为“扩展的 Littlewood-Richardson 系数”。因此，它们处于刘维尔-理查德森系数与普通 Kronecker 系数之间的中间位置，并一直是独立研究和关注的主题，参见 [Mur38, Mur56, Bri93, Val99, Kir04, Kly04, BOR11, BDO15, CR15, Man15, SS16, IP17, PP20b, OZ21]。此外，寻找组合解释的问题也一直是普通 Kronecker 系数研究议程的一部分，参见 [Sta00]。

普通 Kronecker 系数可以表示为约化 Kronecker 系数的一个小交错和，而约化 Kronecker 系数则是某些普通 Kronecker 系数的和，见 [BOR11, BDO15]。这些关系表明，计算约化 Kronecker 系数同样是 #P-困难的，见 [PP20b]。然而，无法立即推导出其正性是 NP -困难的，因此引出了以下问题。

开放问题 7.1。给定输入 λ, μ, ν（以一进制表示），判断 $\overline{g}(\lambda, \mu, \nu) > 0$ 是否为 NP-困难？确定计算 $\overline{g}(\lambda, \mu, \nu)$ 是否为 #P-完全？

正如我们所指出的，如果能为它们或普通 Kronecker 系数找到组合解释，那么该问题的第二部分便可迎刃而解。

组合解释的一些特殊情形可以由普通 Kronecker 系数推导出来。另一方面，在 [CR15] 中，当 μ, ν 是矩形且 λ 是单行时，给出了一种组合解释；其他类似情形则在 [BO05]中推导得到。计算这些系数以及普通 Kronecker 系数的方法已在一系列论文中得到发展，参见 [BDO15,BOR11,OZ20, OZ21]。

直到最近，人们一直认为它们的表现严格优于普通的克罗内克系数，以下猜想便是明证 [Kir04, Kly04]

猜想 7.2（Kirillov、Klyachko）。约化克罗内克系数满足饱和性质：

$$\overline{g}(N\alpha, N\beta, N\gamma) > 0 \quad \textit{for some } N \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{g}(\alpha, \beta, \gamma) > 0.$$

<escape>利用近期的正性结果，尤其是关于矩形 Kronecker 系数的结果，来自 [IP17], 这一点也已被证伪。</escape>

定理 7.3 ([PP20b])。对于所有 $k \geq 3$，三元分拆 $\left(1^{k^2-1}, 1^{k^2-1}, k^{k-1}\right)$ 是该猜想的反例。对于每个分拆 γ 满足 $\gamma_2 \geq 3$，存在无穷多对$(a, b) \in \mathbb{N}^2$ 满足 (a^b, a^b, γ) 是反例。

如[PP20b], 渐近地，从复杂性角度来看，它们的表现更接近普通克罗内克系数，而非刘维尔-理查德森系数。

注记 7.4. 在撰写本文期间，开放问题 7.1 的第一部分在 [IP23], 中得到了解决，文中证明了每个克罗内克系数都等于一个 [大不了多少的] 约化克罗内克系数：

$$g(\lambda, \mu, \nu) = \overline{g}(\nu_1^{\ell(\lambda)} + \lambda, \nu_1^{\ell(\mu)} + \mu, (\nu_1^{\ell(\lambda)+\ell(\mu)}, \nu)).$$

因此，约化克罗内克系数与克罗内克系数同样难以计算，复杂性结果可由§ 4推出。这也表明，这些问题本质上是相同的，而且一般而言，约化克罗内克系数并不更容易计算。

8. Methods

尽管具体的开放问题推动着该领域的研究，但真正重要的任务是开发理解克罗内克系数和复合系数的工具。当然，终极工具或许是“组合解释”，但它本身已成为最难理解的问题，而解决它需要新的工具。迄今为止，这方面几乎没有取得进展，因此显然我们需要一些新方法。

克罗内克系数可通过 S_n 解释为重数。借助舒尔-韦伊对偶，它们也可以表示为 GL 作用下不变空间的维数。后一种解释揭示了半群性质，而这一点无法从 S_n 的视角看出。另一方面，转置不变性 $g(\lambda, \mu, \nu) = g(\lambda', \mu', \nu)$则可从其 S_n 定义中看出。还有许多例子表明，采用不同方法可以得到各式各样的结果，同时也能看到每种方法的局限性。或许最理想的工具应当能够统一所有这些视角。

对称函数一直是代数组合学中最有用的工具之一，也无疑是作者最喜欢的工具。刘维尔-理查德森系数是对称函数环中的结构常数，因此一直以来都通过舒尔函数得到了非常成功的研究。然而，克罗内克系数无法以这种方式加以诠释。受此启发，一族对称函数在 [OZ20,OZ21] 中得到发展。对称函数在确立正性结果方面并不是很有用，因为所涉及的公式通常是交错和。不过，它们对于寻找渐近性质和界很有用，例如正如 [PP20a, PP23] 中所示。在可积概率领域内，它们更加成功，从渐近表示论、经由菱形铺砌，到随机矩阵，参见例如 [BG15, GP15, BGH] 及其中的参考文献。

复合系数也可以利用对称函数来研究，但通常仍无法通过这种方法推导出正性性质。例如，在 [DIP19] 中，利用对称函数推导出了一些关于 $a_\lambda(d[n])$ 的显式公式，其中 λ 是一个三行分拆；后来， [FI20] 将此方法推广，给出了一个交错公式，并将其归入 GapP。

证明正性的一种方法是构造显式的最高权杨表求值，参见 [Ful00], ；这种方法用于复合运算时更为简便，但也适用于克罗内克情形。例如，这种方法曾用于 [I15] 中证明定理5.4，并在 [LS 17], 和 [BIP19] 中得到推广，用以证明复合系数的正性。

表示论中的实用工具包括模的诱导与限制，从而转向其他群的表示论。例如，特征标界5.3 是通过限制到交错群 $A_n \subset S_n$得到的，参见 [BB04、PPV16、PP17a]。类似方法也被发展出来，用于提取适用于有限域上表示的正性判据，例如参见 [BBL]。另一方面，图代数也可用于研究克罗内克问题，例如参见 [BDO15], ，以及复合系数，例如参见 [COSSZ22、OSSZ]。

另一种有用的方法来自离散几何。鉴于表示论中的许多对象都对应于多面体中的整数点，这一点并不令人意外。例如，半标准杨表就是盖尔范德–采特林多面体中的整数点，另见[DM06] ，其中也讨论了一些复杂性方面的联系。Vallejo 利用这类关系发展了离散层析方法，并通过金字塔为克罗内克系数找到了一个下界，见[Val97、Val99、IMW17]。如 [?，PP20a] 所示，克罗内克系数由具有给定二维边缘的三维列联表从上方界定，可据此得到上界。将它们与 Kostant 分拆函数联系起来的类似表达式见[MRS21]，并在 [MT] 中用于研究渐近性质。

最后，计算复杂性理论除了提供分析框架外，也提供了一些工具。该框架旨在解释问题的困难性，以及可能出现哪些答案。工具包括构造元，以及可供归约的基本困难/完全问题，例如 3-SAT、完美匹配、集合划分等。将这类完全问题嵌入我们的问题中是一门艺术，与寻找单射十分相似，经典结果可参见 [GJ79] 。其他工具则来自代数复杂性和几何复杂性理论；某些多项式的复杂性可能推出相关结构常数之间的不等式。

尽管问题、方法和应用多种多样，克罗内克系数和复合系数仍然是一个神秘的黑箱。它有时会给我们送上礼物。但我们还无法看清其内部……至少目前还不能。

References

[Aar16] S. Aaronson，P ? = NP，载于 *Open problems in mathematics*，Springer，Cham，2016，1–122。[BO05] C. Ballantine，R. Orellana，克罗内克积 $s_{(n-p,p)} * s_\lambda$ 中系数的组合解释。 *Sém. Lothar. Combin.* **54**A（2005/07），29页。[BGH] S. Belinschi，A. Guionnet，J. Huang，通过球面积分的大偏差原理， *Prob. Math. Phys.***3 (3)**（2022），第543–625页。[BB04] C. Bessenrodt 和 C. Behns，关于对称群及其双覆盖的特征的克罗内克积的 Durfee 大小， *J. Algebra* **280**（2004），132–144。[BB17] C. Bessenrodt，C. Bowman，对称群特征的无重数克罗内克积。*Adv. Math.* **322**（2017），第473–529页。[B18] C. Bessenrodt，临界类、自旋特征的克罗内克积与 Saxl 猜想，

Alg.（），–。[BBL] C.

Combinatorics **1** 2018 353 369
Bessenrodt，C. Bowman，L. Sutton，克罗内克正性与

2 *Trans.* -模表示论，（），–。[

*Amer. Math. Soc. Ser. B***8** 2021 1024 1055
BBR06] F. Bergeron，R. Biagioli 和 M. H. Rosas，Littlewood–Richardson 系数之间的不等式，*J. Combin. Theory*， *Ser. A* **113**（2006），567–590。[Bia98] Ph. Biane，对称群的表示与自由概率， *Adv. Math.* **138**（1998），126–181。[B13] J. Blasiak，单钩形状的克罗内克系数， *Sém. Lothar. Combin*，77:2016–2017。[BL18] J. Blasiak，R.I. Liu，克罗内克系数与非交换超 Schur 函数。

J. Combin.（），–。[BMS15] J.

*Theory Ser. A***158** 2018 315 361
Blasiak，K. Mulmuley，M. Sohoni，几何复杂性理论 IV：克罗内克问题的非标准量子群。 *Mem. Amer. Math. Soc.***235**（2015），第1109号。[BI18] M. Bl¨aser 和 C. Ikenmeyer， *Introduction to geometric complexity theory*，暑期学校讲义，2018，148页；https://tinyurl.com/nhe2wxvw [BDO15] C. Bowman，M. De Visscher，R. Orellana，分拆代数与克罗内克系数。

Trans.（），第–号。[BOR11]

Amer. Math. Soc. **367** 2015 5, 3647 3667
E. Briand，R. Orellana 和 M. Rosas，舒尔函数克罗内克积的稳定性，

J.（），–。[Bri93] M.

Algebra **331** 2011 11 27
Brion，复合运算的稳定性质：关于 Foulkes 的两个猜想， *Manuscripta mathematica*（1993），80:347–371。[BG15] A. Bufetov，V. Gorin，经典李群的表示与量子化自由卷积。

Geom.，–（）。[B¨ur00a] P.

Funct. Anal. **25** 763 814 2015
B¨urgisser， *Completeness and reduction in algebraic complexity theory*，Springer，Berlin，2000，168页。[B¨ur00b] P. B¨urgisser，Cook 猜想与 Valiant 猜想， *Theor. Comp. Sci.* **235**（2000），71–88。[BCS97] P. B¨urgisser，M. Clausen 和 M. A. Shokrollahi， *Algebraic complexity theory*，Springer，Berlin，1997。[BI08] P. B

¨ *20th Annual Interna-* urgisser，C.

tional Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics 2008 357 368
Ikenmeyer，计算克罗内克系数的复杂性。（FPSAC），第–页。[BIP19] P. B¨urgisser，C. Ikenmeyer 和 G. Panova，几何复杂性理论中的无出现障碍， *J. Amer. Math. Society* **32**（2019），163–193；扩展摘要载于 *57-th FOCS*（2016），IEEE，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，386–5。[BLMW11] P. B¨urgisser，J. M. Landsberg，L. Manivel 和 J. Weyman，几何复杂性理论方法中关于 VP ? = VNP 的数学问题概述， *SIAM J. Comput.* **40**（2011），1179–1209。[CHM07] M. Christandl，A. Harrow，G. Mitchison，非零克罗内克系数及其关于谱的启示。 *Comm. Math. Phys.* **270**（2007），第3期，第575–585页。[CDW12] M. Christandl，B. Doran 和 M. Walter，计算李群表示的重数，载于

Proc.（），IEEE，–。[

53-rd FOCS 2012 639 648
COSSZ22] L. Colmenarejo，R. Orellana，F. Saliola，. Schilling，M. Zabrocki，复合系数之谜，https://arxiv.org/abs/2208.07258（2022）。[CR15] L. Colmenarejo 和 M. Rosas，一族约化克罗内克系数的组合学，

C.R. Math.（），第–号。[DM06] J.

Acad. Sci. Paris **353** 2015 10, 865 869
A. De Loera 和 T. B. McAllister，关于 Clebsch–Gordan 系数的计算及膨胀效应， *Experimental Math.* **15**（2006），7–19。[D 93] Y. Dvir，关于 S_n 特征的克罗内克积， *J. Algebra* **154**（1993），125–140。[DIP19] J. D¨orfler，C. Ikenmeyer 和 G. Panova，关于几何复杂性理论：在 *Proc. 46-th ICALP*（2019）中，重数障碍强于出现障碍，第51号文章，14页。i [FI20] N. Fischer 和 C. Ikenmeyer，复合系数的计算复杂性，

Comput. Complex-（），第–号，论文页数。

ity **29** 2020 2, 8, 43

[FRT54] J. S. Frame、G. de B. Robinson 和 R. M. Thrall，对称群的钩图，

Canad. J. ( )，–。[Ful97]

Math. **6** 1954 316 324

W. Fulton， *Young tableaux*，剑桥大学出版社，英国剑桥，1997年，260页。[Ful00] W. Fulton，特征值、不变因子、最高权与舒伯特演算， *Bull. AMS* **37** (2000)，209–249。[GJ79] M. R. Garey 和 D. S. Johnson， *Computers and intractability*，Freeman，美国加利福尼亚州旧金山，1979年。[GR85] A. M. Garsia 和 J. Remmel，排列的洗牌与克罗内克积，

natorics 1985 1 217 263 *Graphs and Combi*

( )，：-。[GIP17]

F. Gesmundo、C. Ikenmeyer 和 G. Panova，几何复杂性理论与矩阵幂运算，

Diff. ( )，–。[GP15] V.

Geom. Applications **55** 2017 106 127

Gorin 和 G. Panova，对称多项式的渐近行为及其在统计力学和表示论中的应用， *Ann. Probab.* **43** (2015)，3052–3132。[HR22] N. Harman、C. Ryba，萨克斯尔猜想的张量立方版本，arXiv:2206.13769。[HSTZ13] G. Heide、J. Saxl、P. H. Tiep、A. Zalesski，共轭作用、诱导表示与李型单群的斯坦伯格平方， *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 106 (2013)，第4期，908–930。[I15] C. Ikenmeyer，Saxl 猜想与支配序， *Disc. Math.* (11) 6 (2015)，第1970–1975页。[IMW17] C. Ikenmeyer、K. D. Mulmuley 和 M. Walter，论克罗内克系数的消失，

Computational

Complexity **26** 2017 949 992 ( )，–。[IP22] C.

Ikenmeyer 和 I. Pak，什么属于 #P，什么不属于？，预印本（2022），82页；扩展摘要将发表于 *Proc. 63rd FOCS* (2022)；arXiv:2204.13149。[IPP22] C. Ikenmeyer、I. Pak 和 G. Panova，对称群特征标的正性与多项式时间层次一样难，预印本（2022），15页；扩展摘要将发表于 *Proc. 34th SODA* (2023)；arXiv:2207.05423。[IP17] C. Ikenmeyer 和 G. Panova，几何复杂性理论中的矩形克罗内克系数与复合运算， *Adv. Math.* **319** (2017)，40–66；扩展摘要发表于 *57th FOCS* (2016)，IEEE，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，396–4055。[IP23] C. Ikenemeyer 和 G. Panova，所有克罗内克系数都是约化克罗内克系数，（2023）。[Kir04] A. N. Kirillov，广义饱和猜想导论， *Publ. RIMS* **40** (2004)，1147–1239。[Kly04] A. Klyachko，量子边缘问题与对称群的表示，arXiv:quant-ph/0409113。[KT99] A. Knutson 和 T. Tao，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂窝模型 I：饱和猜想的证明， *J. AMS* **12** (1999)，1055–1090。[Las79] A. Lascoux，对称群表示的克罗内克积。

´ ´

Séminaire dÀlgèbre Paul ，巴黎（第...年），

Dubreil et Marie-Paule Malliavin: Proceedings 1979 32` ´ 319 329 1979

页码 – （）。[L21] Xin Li，三重钩的萨克斯尔猜想， *Discrete Math.* **344** (2021) 6。[Liu17] Ricky Liu，单钩形状的简化克罗内克规则， *Proc. Amer. Math. Soc.*(2017)，145(9):3657-3664。[LoS] B. F. Logan 和 L. A. Shepp，随机杨表的一个变分问题， *Adv. Math.* **26** (1977)，206–222。[LS17] S. Luo、M. Sellke，利用半群性质证明四次幂的 Saxl 猜想。

J. Algebraic Combin. ( )，第 – 期。[

45 2017 1, 33 80

Mac95] I. G. Macdonald， *Symmetric functions and Hall polynomials*（第二版），牛津大学出版社，纽约，1995年。[Man15] L Manivel，论克罗内克系数的渐近行为， *J. Alg. Combinatorics*(2015)，42(4):999-1025。[MPP19a] S. Melczer、G. Panova 和 R. Pemantle，矩形内分拆的计数，

SIAM J. Discrete ( )，–；扩展摘要

Math. **34** 2020 2388 2410 *Proc. 31st FPSAC* 2019

发表于，。[MRS21] M. Mishna、M. Rosas、S. Sundaram，向量分拆函数与克罗内克系数，

J. Phys. A: ( )。[MT] M.

Math. Theor. 2021 **54**

Mishna、S. Trandafir，克罗内克系数的估计与计算：向量分拆函数方法，arXiv:2210.12128。[Mul11] K. D. Mulmuley，几何复杂性理论 VI：通过正性实现翻转，预印本（2011），40页，见 http://gct.cs.uchicago.edu/gct6.pdf；另见 arXiv:0704.0229，139页。[Mul17] K. Mulmuley，几何复杂性理论 V：诺特正规化的高效算法，

J. ( )，–。[MNS12]

AMS **30** 2017 225 309

K. D. Mulmuley、H. Narayanan 和 M. Sohoni，几何复杂性理论 III：论刘维尔-理查德森系数非零性的判定，

J. Algebraic Combin. **36** (2012)，103–110。[MS01] K. D. Mulmuley 和 M. Sohoni，几何复杂性理论 I：一种研究 P 与 NP 及相关问题的方法， *SIAM J. Comput.* **31**，2001，496–526。

[MS08] K. D. Mulmuley 和 M. Sohoni，几何复杂性理论 II：迈向类簇之间嵌入的显式障碍， *SIAM J. Comput.* **38**, 2008，1175–1206。[Mur38] F. D. Murnaghan，对称群不可约表示的克罗内克积分析， *Amer. J. Math.* **60** (1938年), 761–784。[Mur56] F. D. Murnaghan，论对称群不可约表示的克罗内克积，

Proc. ( )，–。[

Natl. Acad. Sci. USA **42** 1956 95 98

Nar06] H. Narayanan，论计算科斯塔数和 Littlewood–Richardson 系数的复杂性，*J. Algebraic Combin.* **24** (2006), 347–354。[OSSZ] R. Orellana、F. Saliola、A. Schilling、M. Zabrocki，复合运算与均匀块置换的代数，

Alg. Combinatorics **5** (2022) (5)，第1165–1203页。[OZ20] R. Orellana、M. Zabrocki，多元多项式环作为 S_n-模的分解组合模型 *The Elect. Journal of Comb.***27**(3) (2020)，#P3.24。[OZ21] R. Orellana、M. Zabrocki，对称群特征标作为对称函数 *Adv. Math.* **390** (2021)。[Pak22+] I. Pak，什么是组合解释？，预印本（2022），58页；即将发表于 *Proc. OPAC*，AMS，普罗维登斯，罗得岛州。[PP13] I. Pak 和 G. Panova， q-二项式系数的严格单峰性，

C.R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013)，415–418。[PP14] I. Pak 和 G. Panova，通过克罗内克积实现单峰性，

J. Algebraic Combin. **40** (2014)，1103–1120。[PP17a] I. Pak、G. Panova，某些类别的克罗内克系数与q-二项式系数的界，*binatorial Theory Series A***147** 2017 1 17 *Journal of Com.* ，

( )，第–页。[PP17b] I. Pak 和 G. Panova，论计算克罗内克系数的复杂性， *Comput. Complexity* **26** (2017)，1–36。[

PP20a] I. Pak 和 G. Panova，利用列联表给出的克罗内克系数界， *Linear Alg. Appl.* **602** (2020)，157–178。[

PP20b] I. Pak、G. Panova，约化克罗内克系数的分解， *Comptes Rendus. Mathématique*

358 4 463 468 ( )，- PP I. Pak、G. Panova，德菲方块、对称分拆与克罗内克系数的界， *J. Algebra*

[23]

(2023)，即将发表。[PPV16] I. Pak、G. Panova、E. Vallejo，克罗内克积、特征标、分拆与张量平方猜想，

Advances in Mathematics **288** (2016)，第702–731页。[PPY19a] I. Pak、G. Panova 和 D. Yeliussizov，论最大的克罗内克系数与刘维尔–理查德森系数，*J. Combin. Theory, Ser. A* **165** (2019)，44–77。[Pan15] G. Panova，克罗内克系数：组合学、复杂性及其他，AMS-EMS 会议，葡萄牙波尔图（2015），幻灯片见 https://tinyurl.com/bdd4w3pj [Pan23] G. Panova，代数组合学中的计算复杂性，*Current Developments in Mathematics* 2023 ，哈佛大学

（）。[RW94] J. Remmel、T. Whitehead，论两行形状舒尔函数的克罗内克积。

Bull. Belg. ( )，第 – 期。

Math. Soc. Simon Stevin **1** 1994 5, 649 683

[Sag01] B. E. Sagan， *The symmetric group* （第二版），Springer，纽约，2001年。[SS16] S. V. Sam 和 A. Snowden， *Proof of Stembridge's conjecture on stability of Kronecker coefficients* *J.* ,

Alg. Combinatorics 2016 **43** 1 1 10

( )，( )：-。[Sta99] R. P. Stanley， *Enumerative Combinatorics*，第1卷（第二版）和第2卷，剑桥大学出版社，2012年和1999年。[Sta00] R. P. Stanley，代数组合学中的正性问题与猜想，载于 *Mathematics: frontiers and perspectivies* 2000, 295 319 ，AMS，普

罗维登斯，罗得岛州，–。[Sta20] R. P. Stanley，[的补充练习99], Sta~可见 http://www-math.mit.edu/~rstan/ec。[T15] V. Tewari，若干近矩形分拆的克罗内克系数， *J. Algebra* (2015) 429，第287–317页。[V79a] L. G. Valiant，代数中的完全性类。 *Proc. 11th STOC* (1979)，249–261。[V79b] L. G. Valiant，计算永久式的复杂性。

Theor. Comp. Sci. **8** (1979)，189–201。[Val97] E. Vallejo，可加集合、唯一性集合与金字塔的归约，

Discrete Math. **173** (1997)，257–267。[Val99] E. Vallejo，对称群不可约特征标的克罗内克积的稳定性，

Electron. J. ( )，RP 页。

Combin. **6** 1999 39, 7

[VK] A. M. Vershik 和 S. V. Kerov，对称群不可约表示的最大维数与典型维数的渐近行为， *Funct. Anal. Appl.* **19** (1985)，21–31。[Wig19] A. Wigderson， *Mathematics and Computation*，专著草稿，2019年。