arXiv:2305.02565v1 [physics.flu-dyn] 4 May 2023

奇黏度诱导的表面活性剂负载剪切驱动黏性薄膜在光滑斜面上流动

预印本

Md. MouzakkirHossain印度理工学院焦特布尔分校数学系，拉贾斯坦邦 342037，印度
mouzakkir123@gmail.com

Sukhendu Ghosh
印度理工学院焦特布尔分校数学系，拉贾斯坦邦 342037，印度
sukhendu.math@gmail.com

Harekrushna Behera*国立台湾海洋大学海洋工程卓越中心，基隆 202301，台湾 hkb.math@gmail.com

2023年5月5日

摘要

本研究聚焦于奇黏度诱导的施加剪切牛顿流体沿倾斜的光滑床面向下流动时的稳定性分析，液体表面顶部含有不溶性表面活性剂。针对微小扰动流应用正规模态法，建立奥尔-索末菲边值问题，并采用切比雪夫谱配置法进行数值求解。数值结果证实，长波区存在 Yih 模态和马兰戈尼模态。对于液膜流动的洁净/受污染表面，奇黏度系数或霍尔黏度系数的存在会降低表面波能量，并延缓流动从层流向扰动流的转变。此外，它也能稳定不稳定的马兰戈尼模态。当更强的外部剪切沿流体流动的下游/上游方向作用时，洁净和受污染液体表面的增长率会增大/减小。此外，滑移参数会降低临界雷诺数，使液体表面更加不稳定。马兰戈尼力增强导致临界雷诺数升高，这表明不溶性表面活性剂有可能抑制 Yih 模态失稳。此外，在惯性力非常大且倾斜角很小的情况下，不稳定剪切模态会出现在有限波数区间。剪切模态失稳可能随施加剪切呈现双重变化。然而，在黏性降膜中引入奇黏度系数可能会加剧剪切模态失稳。

关**键词** 降膜；奇黏度；外加剪切；滑移参数；不溶性表面活性剂；Orr–Sommerfeld；Chebyshev 配点法。

1 引言

由于在涂布 [1], 不同技术应用中的摄影胶片制造 [2], 等领域具有重要应用，重力驱动降液膜的动力学与稳定性在过去几十年中受到了广泛关注。倾斜基底上黏性降膜的流体动力学稳定性分析最早由 Yih [3] 和 Benjamin [4]提出。他们利用奥尔-索末菲边值问题中的长波展开法，从理论上推导出了表面模态初级失稳的中性边界。随后，Lin [5] 和 Bruin [6] 进一步拓展了 Yih [3] 和 Benjamin [4], 的工作，并确定了剪切模态的存在

该模态具有非常高的惯性力和很小的倾角。他们观察到表面模态与剪切模态之间的竞争会引发液膜流动系统的初级失稳。在过去几十年中，许多研究人员一直致力于开发控制系统，以改善或抑制单层薄膜的自由表面流动失稳，因为单层薄膜在地球物理、工业和技术领域具有广泛应用（[7], [8], [9], [1], [10]）。表面活性物质通常在这些应用中发挥重要作用，有助于提高液层的稳定性（见 [11], [12], [13], [14]）。人们之所以关注这一问题，是因为单层流体流动具有多种潜在用途，可用于解决现实世界中的各种问题。

早期研究主要关注流体动力学稳定性分析中黏度张量的偶黏度部分。尽管黏度张量中非零的奇黏度部分，对薄膜流动动力学至关重要，例如存在外磁场的二维量子霍尔流体（[15]）或游动策略（[16]）。过去，这些论述曾与等离子体相关联（有关更多信息，请参阅 Berestetskii 等人 [17]）。奇黏度对于稳定系统中的流动至关重要。尽管奇黏度是稳定流动系统所必需的，文献中关于它的研究却远少于关于偶黏度的研究。Lapa 和 Hughes [18] 最先分析了小雷诺数情况下由奇黏度引起的二维液体中近圆形游动体。他们发现，奇黏度部分会显著影响流体动力学应力张量。基于此前关于量子霍尔效应的研究，Avron [15] 考察了虚构流体中波动方程和纳维–斯托克斯方程的解；在这类流体中，应力由奇黏度主导，并据此研究奇黏度的基本性质。他证实，在打破时间反演对称性的经典液体中，黏度张量可以表示为对称分量（称为偶黏度）与反对称分量（改称为奇黏度）之和。一旦时间反演对称性和宇称均被打破，奇黏度通常普遍非零（参见 [19] 和 [20]）。例如，微观科里奥利力或洛伦兹力可以产生非零奇黏度（参见 [21]）。Souslov 等人[22] 阐明了奇黏度系数如何显著影响流动系统中线性扰动的拓扑特征。作者指出，界面两侧的奇黏度与外磁场，恰好取决于手性边缘态的净数量（[23], [24]）。此外，经典液体的时间反演对称性在自然界中经常被打破，例如在生物过程里（更多信息及其他参考文献请参见 [25], [26], [27], [28] ）。人们认为，这种新行为将对这类系统的动力学产生重大影响。

近年来，许多研究人员（[29], [30], [31], [32], [33], [23], [34], [35], [36]）在多个研究领域探索了奇黏度诱导的黏性降膜相关问题。Kirkinis 和 Andreev [29] 研究了由表面剪切应力驱动、位于均匀加热刚性基底上的黏性薄膜，其周围为环境气相。他们推导了液-气界面的演化方程，并证实奇黏度能够抑制热毛细不稳定性。随后，Bao 和 Jian [31]建立了一个黏性液体系统模型，其中含有奇黏度系数，并施加了外部均匀法向电场。基于线性稳定性分析和弱非线性稳定性分析，他们的结果表明，外电场能够减弱奇黏度引发的不稳定性。此外，Mukhopadhyay 和 Mukhopadhyay [32] 探讨了均匀加热的倾斜平面上由奇黏度驱动的黏性流体所产生的热毛细不稳定性特征。他们假设液体表面存在恒定的温度梯度。通过进行线性稳定性分析和弱非线性稳定性分析，他们推断奇黏度下的初生波有望抑制热毛细不稳定性，并使液膜流动趋于稳定。Chattopadhyay 等人 [33] 研究了奇黏度对运动的垂直壁面上降膜表面波失稳的影响。他们采用渐近展开法推导了液层厚度的非线性演化方程，并证实奇黏度对液体表面具有显著的稳定作用。最近，Samanta [16] 研究了具有非零奇黏度应力的重力驱动黏性液体所激发的表面波和剪切波动力学。他求解了流体流动模型的奥尔-索末菲特征值问题，并表明奇黏度系数能够减弱表面波和剪切波的不稳定性。此外，他证实，奇黏度系数能够延缓从单向基流向非线性扰动波的转变过程，这是由于非线性波速和最大振幅降低所致。

本文中，我们的思路是扩展 Samanta [16] 的工作：通过在液体表面附着不溶性表面活性剂，减弱外加剪切力产生的失稳；同时，探究奇黏度系数对马兰戈尼失稳的影响，而不仅仅考察表面波和剪切波失稳。含表面活性剂薄膜流在传统技术和生物流动等不同领域的广泛应用（[37], [38], [39], [40]）激发了我们的研究兴趣。在过去几十年里，许多研究人员将液体表面的不溶性表面活性剂和外部剪切用作控制黏性流体流动失稳的策略（[41], [42], [43], [44], [45], [46]），以研究气道中含表面活性剂的降落液体的波动力学，这种情况会出现在气道阻塞过程 [47, 48] 或推注分散式表面活性剂替代疗法 [40, 49] 中。不溶性表面活性剂在延缓流动从未受扰动的单向平行流转变为由施加剪切产生的扰动流方面极为有效（Bhat 和 Samanta [43]）。另一方面，外部剪切力在控制方面发挥着重要作用

当作用于流体主体的重力变得非常微弱时，可通过改变净驱动力来影响流体流动的失稳机制。对于液体表面存在不溶性表面活性剂、受外部剪切作用并沿倾斜平面流动的液体，Bhat 和 Samanta [43] 发现，外部剪切会引发马兰戈尼模态（表面活性剂模态）的初级失稳。他们观察到三种不同的时间模态，并基于能量预算分析法（[50], [51]）研究了剪切诱导的表面模态失稳的物理机制。Hossain 等人 [46] 研究了自由表面受外部剪切作用、覆盖多孔介质的降膜，同时考虑了流体表面上的不溶性表面活性剂。沿下游/上游方向施加的剪切会促进表面模态失稳/稳定，而且洁净表面比受污染表面更不稳定。此外，他们证实，流体流动下方较厚的多孔床层可能会加剧表面波失稳。最近，Paul 等人 [36]研究了在具有破缺的时间反演对称性的倾斜平面上，受外部剪切作用的黏性降膜。他们采用解析和数值方法求解流体流动模型。研究表明，奇黏度系数有助于抑制表面波失稳，并能够控制由外部剪切力激发的强波。

鉴于不溶性表面活性剂和施加剪切具有重要意义，我们着手研究黏性应力中的时间反演对称性遭到破坏时，表面活性剂负载的外部剪切作用降膜沿滑移斜面流动的情况。选择在液体—底部界面采用滑移边界条件，主要是因为许多实际情形下 [52] 底床并非完全光滑（即具有滑移性）。为了更准确地预测流体流动的不稳定性，需要考虑表面粗糙度。我们使用达西定律（[53], [54]）对滑移底面上的流体流动进行建模。奇黏度的存在为流体压力梯度引入了一个新参数。在所考虑的流体流动模型中，我们识别出三种特性不同的模态：与液体表面偏转相关的表面模态、与流体表面表面活性剂浓度偏转相关的表面活性剂表面模态（马兰戈尼模态），以及因雷诺数较高且倾角较小而出现的剪切模态。我们的主要目标是考察诱导的奇黏度系数对不同模态产生的波动力学的影响，并探究在黏性降膜中存在奇黏度系数时，施加剪切在不同模态下是否表现不同。为此，我们在线性流体流动扰动方程中对扰动变量采用正规模态形式，推导出奥尔-索末菲边值问题（OS 边值问题）。随后，采用切比雪夫配置法求解该边值问题，并在固定其他参数的情况下，针对不同范围的流动参数绘制各类结果。

鉴于此，本文安排如下：第2节介绍一组关于外加剪切所诱导的含表面活性剂降膜奇黏度的精确平均方程。第3节通过对扰动方程进行正规模态分析，求解 OS 边值问题。第4节详细讨论不同类型模态可能呈现的特征行为。最后，第5节总结主要研究结果。

2 数学表述

如图1所示，我们在二维笛卡尔坐标系中建立了一个流体流动模型：重力驱动的不可压缩黏性牛顿流体沿与水平线成角度 β 的滑移倾斜平面流动。这里， $x-$ 轴位于倾斜液底界面处， $y-$ 轴与 $x-$ 轴垂直；其中， x 轴和 y 轴分别表示流体流动方向上的纵向和横向。此外，假设作用于流体表面的外部剪切应力 τ_s 沿流动的两个方向作用。这里，假设密度为 ρ 的未扰动流体厚度为 H 。本文假设黏性流体打破了时间反演对称性，从而在柯西应力张量中引入另一个黏度系数，称为奇黏度或霍尔黏度。

因此，柯西应力张量 $\mathcal{T}$ 可表示为两个分量之和：

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^e + \mathcal{T}^o. \tag{1}$$

其中， $\mathcal{T}^e$ 定义了柯西应力张量的常规（偶）分量，其对应的典型（偶）黏度为 μ_e ； $\mathcal{T}^o$表示柯西应力张量的奇分量，其对应的奇（霍尔）黏度为 μ_o ，当时间反演对称性破缺出现时便会产生。上述公式（1）可在二维情形（[15], [16]）下改写为：

$$\mathcal{T}^e_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i,j = 1,2, \tag{2}$$

$$\mathcal{T}^o_{ij} = -\mu_o \left[(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2}) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - (\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \quad i,j = 1,2, \tag{3}$$

其中， δ_{ij} 表示克罗内克δ。这里， u_i 是 x_i 方向上的速度分量。在本问题中，(x_1， x_2)和(u_1， u_2)分别选为(x， y)和(u, v)。

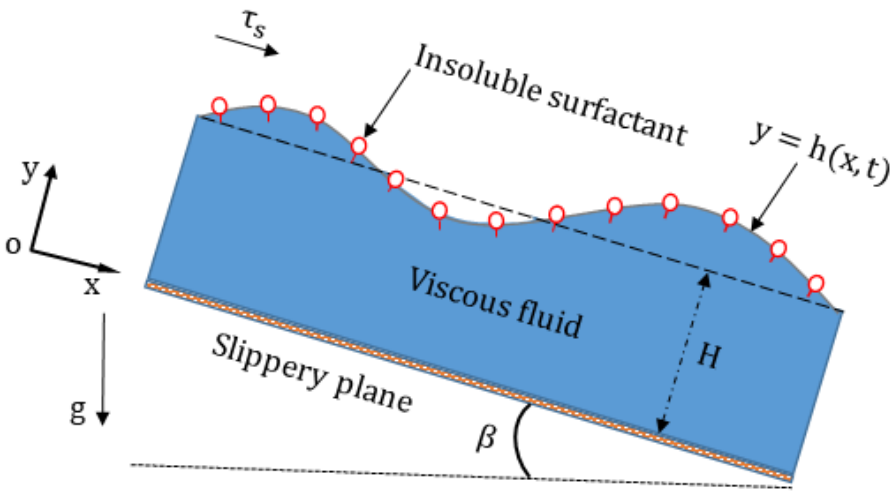


图1：奇黏度诱导的、受剪切作用的降膜在具有不溶性表面活性剂的液体表面的滑移斜面上流动的示意图。

所研究流体流动系统的修正运动方程的无量纲形式可表示为 ([16], [33], [36]):

$$u_x + v_y = 0, \tag{4}$$

$$Re\,(u_t + u\,u_x + v\,u_y) = -p_x + 2 + (u_{xx} + u_{yy}) - \mu(v_{xx} + v_{yy}), \tag{5}$$

$$Re\,(v_t + u\,v_x + v\,v_y) = -p_y - 2\cot\beta + (v_{xx} + v_{yy}) + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \tag{6}$$

其中，流体流动的流向速度分量和横向速度分量分别用 u 和 v 表示， p 表示流体压力， g 表示重力加速度。选取平均液膜厚度 H 和最大平均速度 $V = \frac{\rho g H^2}{2\,\mu_e}\sin\beta$ 分别作为长度和速度无量纲化的尺度，$\frac{H}{V}$ 作为时间尺度， $\frac{\mu_e V}{H}$ 作为压力尺度。此外，运动方程中的新项 $\mu = \frac{\mu_o}{\mu_e}$ 表示奇黏度系数与偶黏度系数之比，并将其重新命名为奇黏度系数或霍尔黏度系数，而 $Re = \frac{\rho H V}{\mu_e}$ 表示雷诺数。流体表面的运动学边界条件可得

$$v = h_t + u\,h_x \quad \text{at} \quad y = h(x,t), \tag{7}$$

动力学条件包含流体表面的应力平衡。切向应力（[41], [42], [16]）与外部剪切应力平衡，并导致

$$\Big[(1-h_x^2)(u_y+v_x) - 2(u_x - v_y)h_x\Big] + \mu\Big[(u_x - v_y)(1-h_x^2) + 2(u_y+v_x)h_x\Big] = (-Ma/Ca\,\Gamma_x + \tau)\sqrt{1+h_x^2} \quad \text{at} \quad y = h(x,t), \tag{8}$$

其中， $\tau = \frac{\tau_s H}{\mu_e V}$ 为无量纲施加剪切。 $\tau\,(+\tau)$的正值表示外部剪切方向与流体流动方向一致，而负值 $\tau\,(-\tau)$ 表示施加剪切方向与回流方向一致。此外，液体表面的法向应力跃变边界条件（[55], [56], [57]）为

$$p = \frac{1}{(1+h_x^2)}\Big[2\left\{u_x h_x^2 - (u_y+v_x)h_x + v_y\right\} + \mu\left\{(u_y+v_x)(1-h_x^2) - 2(u_x - v_y)h_x\right\}\Big] - 1/Ca\Big[1 - Ma(\Gamma - 1)\Big]\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{at} \quad y = h(x,t). \tag{9}$$

这里，无量纲参数 $Ma = \frac{E\,T_0}{\sigma_0}$ 和 $Ca = \frac{\mu V}{\sigma_0}$ 分别表示马兰戈尼数和毛细数，其中 σ_0 表示基流的表面张力。在流体的自由表面处，存在一种不溶性表面活性剂

浓度 $\Gamma(x,t)$ 被假定占据流体的自由表面。表面活性剂浓度 $\Gamma(x,t)$ 的演化方程由浓度方程 ([14], [58]) 描述

$$\Gamma_t + u\,\Gamma_x + \Gamma\Big(u_x + u_y h_x\Big) = \frac{1}{Pe}\Gamma_{xx}. \tag{10}$$

这里，无量纲参数 $Pe = \dfrac{VH}{D_s}$ 称为佩克莱数，其中 D_s 为表面活性剂的扩散率。局部表面张力 $\sigma(x,t)$ 会根据流体自由表面上每个特定位置的局部表面浓度而波动，并且取决于表面活性剂浓度。需要注意的是，表面张力与表面活性剂浓度呈线性关系（[43], [56]），其中 $\sigma(x,t) = \sigma_0 - RT(\Gamma - \Gamma_0)$（称为朗缪尔等温线线性关系），$\Gamma_0$ 表示表面活性剂的基础浓度，R 为通用气体常数，T为绝对温度 [59]。此外，假定底部基底具有滑移性，因此在液体—底部界面处满足纳维滑移条件，且液体不会发生穿透（[54], [60]）。由此，在 $y = 0$处得到边界条件:

$$u = \alpha\, u_y \quad \text{and} \quad v = 0. \tag{11}$$

其中，$\alpha = \frac{\kappa}{H}$ 为滑移参数，κ 为有量纲的速度滑移长度。

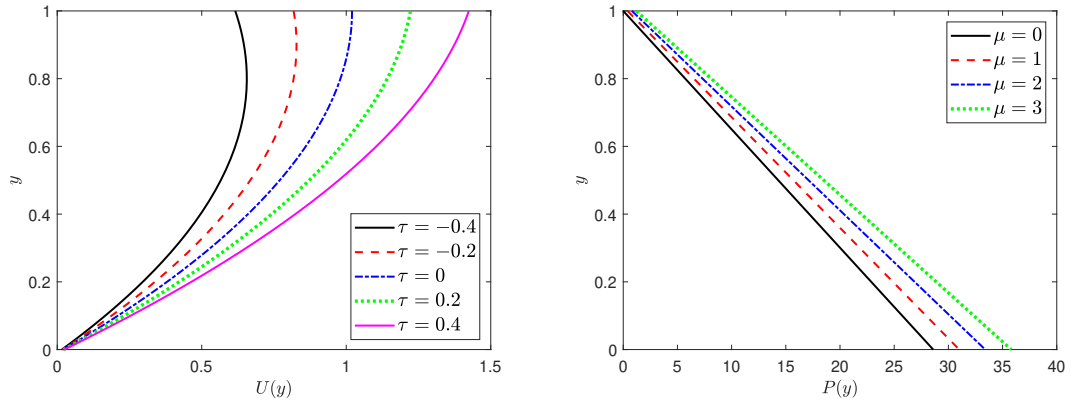
2.1 基流与稳定性解

为了考察所研究流动系统的线性不稳定性行为，必须求得单向平行流（基流）的解。通过在无量纲运动方程及边界条件（式（4）—（11））中令变量 $u = U$（y）、 $v = 0$和$p = P$（y）为稳态变量，计算基本状态解。这里，U（y）和P（y）分别表示基流速度和压力。通过求解与基流对应的边界条件相关联的运动方程，可得以下基态解，其形式为

$$U(y) = -y^2 + (2+\tau)(y+\alpha) \quad \text{and} \quad P(y) = 2(\mu + \cot\beta)(1-y) + \mu\tau. \tag{12}$$

值得注意的是，液膜的基流速度取决于外力 τ 和滑移参数 α，但不取决于奇黏度系数 μ；而基态压力则同时取决于 τ 和 μ。需要强调的是，在时间反演对称性未被打破的黏性流体流动中，施加剪切不会影响基态压力（即黏度中不存在奇黏度项（[42], [43], [57]））。但是，外部剪切会显著影响奇黏度诱导的黏性降膜的基态压力（见式。

(12))。基流速度 $U(y)$ 随施加剪切的变化（图 2(a)）表明，外部剪切会显著影响自由表面附近的基流速度。沿下游/上游方向施加外部剪切会加快/限制液体的基流速度。另一方面，图 2(b) 显示，基态压力在底部基底附近达到最大值，而较高的奇黏度会以不确定的方式增强流体的静水压力。此外，外部剪切的存在会导致液体表面的基态压力随奇黏度发生变化（见式 (12)）。



(a) (b)

图2： (a) 当 τ 变化时，基流速度随 $\mu = 1$ 的变化；(b) 当 μ 变化时，基态压力随 $\tau = 0.4$ 的变化。其他固定参数为 $\alpha = 0.01$ 和 $\beta = 4°$。

3 修正的 Orr-Sommerfeld 方程

对流体流动模型进行线性稳定性分析，以了解不同流体特征参数下基流无穷小扰动的线性响应。为此，对基流解施加无穷小扰动，其中各无量纲流动变量 $(u,\ v,\ p,\ h, \Gamma)$= $(U(y)\ +\tilde{u},\ \tilde{v},\ P(y)\ +\tilde{p},\ 1+h,\ 1+\Gamma)$，其中各扰动变量 $\tilde{u},\ \tilde{v}, \tilde{p}, h, \Gamma << 1$。扰动变量的正规模态形式为 $(\tilde{u}, \tilde{v}, h, \Gamma)= (\phi'(y)\ -\mathrm{i}k\phi(y)\ \eta, \gamma)\exp\ [\mathrm{i}k(x-ct)],$，其中 ϕ 表示流函数振幅，符号 $'$ 表示导数算子 $\frac{d}{dy}$， k 表示流向波数，而 $c = c_r + ic_i$ 为复波速。通过检验扰动的指数增长/衰减，可以判断其线性不稳定性/稳定性。将扰动变量的正规模态形式代入扰动后的流体流动方程，即可得到以下 Orr-Sommerfeld 系统（详情见 [3], [55], [61] ）：

$$(\phi^{''''} - 2k^2\phi^{''} + k^4\phi) - \mathrm{i}kRe\big[(U-c)\ (\phi^{''} - k^2\phi) - U^{''}\phi\big] = 0, \tag{13}$$

$$\phi + (U-c)\eta = 0 \text{ 在 } \ y = 1, \tag{14}$$

$$(\phi^{''} + k^2\phi + 2\mathrm{i}k\mu\phi^{'}) + (U^{''} + 2\mathrm{i}k\mu U^{'})\eta + \mathrm{i}k\, Ma/Ca\, \gamma = 0 \quad \text{at} \quad y = 1, \tag{15}$$

$$\phi^{'''} - 3k^2\phi^{'} - \mathrm{i}kRe\big[(U-c)\phi^{'} - U^{'}\phi\big] - 2\mathrm{i}k^3\mu\,\phi + \mathrm{i}k\left[2\mathrm{i}kU^{'} - 2\cot\beta - k^2/Ca\right]\eta = 0 \quad \text{at} \quad y = 1, \tag{16}$$

$$\phi^{'} = \alpha\,\phi^{''} \quad \text{and} \quad \phi = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, \tag{17}$$

$$\phi^{'} + \left[U - c - \mathrm{i}k/Pe\right]\gamma + U^{'}\eta = 0 \quad \text{at} \quad y = 1. \tag{18}$$

这里，$'$ 符号定义了对 y 的导数。这个常微分方程组（13）–（18）描述了广义特征值问题，称为 OS 边值问题，其中广义特征向量 ϕ 对应于广义特征值 c。此外，二维扰动的时间频率定义为 $\omega = \omega_r + \mathrm{i}\omega_i = k(c_r + ic_i)$，其中 $\omega_i = kc_i$ 定义了线性扰动的时间增长率。当 ω_i 为正时，流体流动不稳定；当 ω_i 为负时，流体流动稳定；当 ω_i 等于零时，流体流动处于临界状态（即既不稳定也不稳定）。值得注意的是，若不存在黏度比，且假设底部表面光滑，则上述 OS 边值问题（方程（13）–（18））可简化为 Bhat 和 Samanta [43]研究的倾斜平面上由外部剪切驱动的受污染黏性液膜的 OS 边值问题。此外，当液体表面不含表面活性剂（即 $Ma = 0$）、不存在施加剪切（即 $\tau = 0$），且底部基底被视为光滑平面（即 $\alpha = 0$）时，上述方程（13）–（18）与 Samanta [16], 推导的相应 Orr-Sommerfeld 特征值问题完全一致。

4 结果与讨论

本节揭示了剪切驱动黏性液体沿滑移斜面流动时，奇黏度对不同不稳定模态的影响。针对所考虑的流体流动模型，我们采用基于 MATLAB 中切比雪夫谱配置法的数值方法求解 OS 边值问题，得出了在宽范围流动特征参数下的重要结果。由于存在不溶性表面活性剂，系统中存在两种模态，即表面模态和表面活性剂表面模态。此外，当惯性力很大且倾斜角较小时，还会出现另一种称为剪切模态的模态。我们将这三种不同模态——表面模态、表面活性剂表面模态和剪切模态——分别命名为 SM、SSM 和 SHM。我们的主要目标是探究施加剪切和诱导奇黏性系数对沿滑移基底流下的含表面活性剂黏性液体中不同模态的综合影响。在图 3 中，我们绘制了流动特征参数固定时的特征谱，以确定不同模态是否存在，并考察奇黏度系数μ对不稳定表面模态（见图 3(a)）、SSM（见图 3(b)）和 SHM（见图 3(c)）的影响。特征模态根据相速度（[43], [56], [57]）满足不等关系 $c_r|_{SM} \geq c_r|_{SSM} \geq c_r|_{SHM}$。随着 μ 增大，表面模态的初级失稳随即减弱（图 3(a)）。系数 μ 通过提高流体的基态压力来限制表面波能量。在图 3(b) 中，较高的奇黏度参数 μ 会减弱表面活性剂模态不稳定性，因为较高的奇黏度会降低液体表面表面活性剂浓度的变形。当惯性力变得非常大且倾角较小时，剪切模态失稳占主导地位。奇黏度系数通过提高相速度，促进剪切模态引发的初级失稳。在接下来的小节中，我们将在宽范围流动特征参数下，详细阐述图 3 所示各个存在模态的线性不稳定性行为。

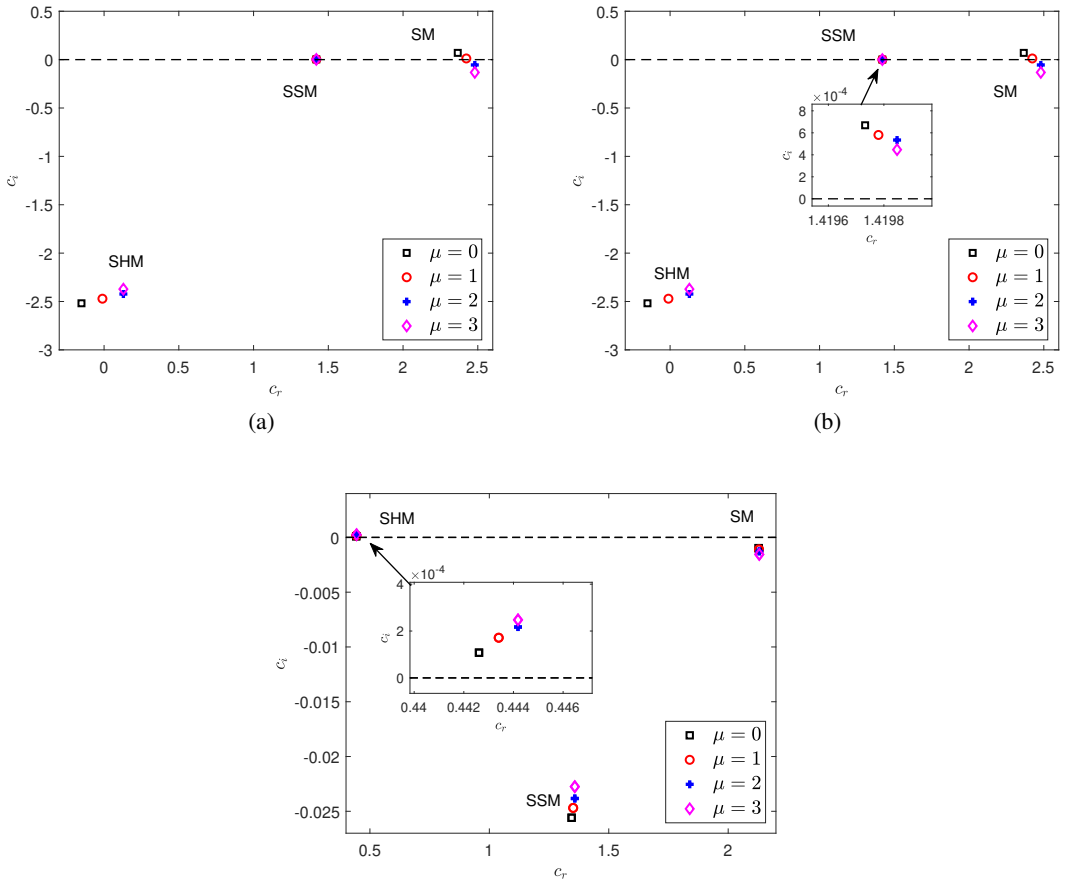


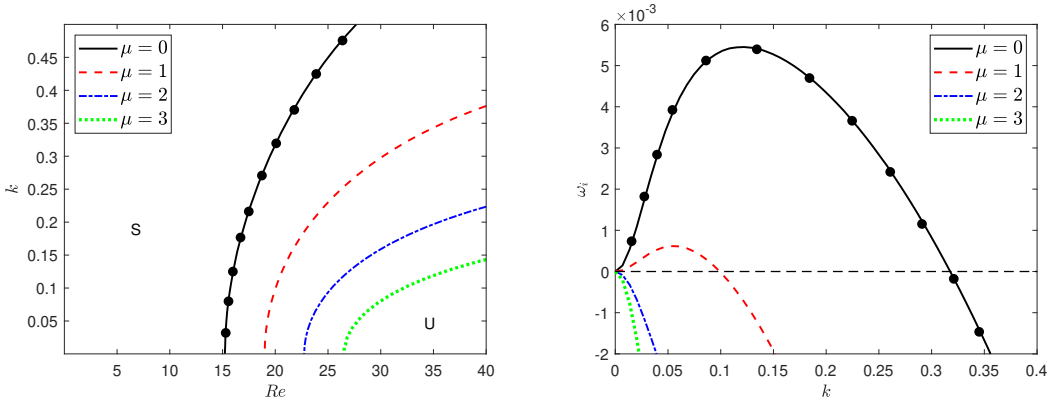
图3：奇黏度 μ 对不稳定（a）表面模态（$Pe = 1000$）、（b）表面活性剂表面模态（$Pe = 25$，当 $k = 0.05$、$Re = 20$、$\tau = 0.4$ 和 $\beta = 4°$ 时）以及（c）剪切模态（$k = 2.32$、$\tau = 0.2$、$Re = 4400$、$\beta = 1'$ 和 $Pe = 1000$）对应特征谱的影响。其他固定参数为 $\alpha = 0.01$、$Ca = 2$ 和 $Ma = 1$。

4.1 表面模态

这里，我们讨论存在黏度比 μ 时外部剪切对表面模态不稳定性的影响。我们采用数值方法，通过选取一些固定的流体特征参数，绘制中性稳定性和时间增长率结果。

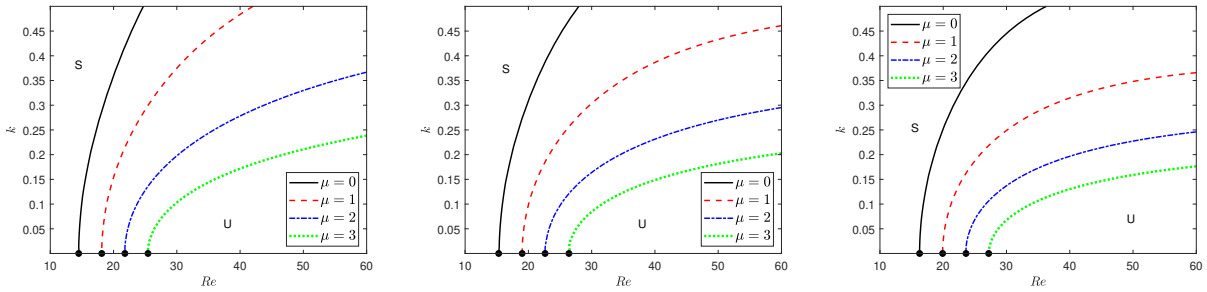
图 4(a) 展示了在固定参数 $\tau = 0.5$、$\beta = 4°$、$\alpha = 0$、$Ca = 2$、$Ma = 1$ 和 $Pe = 1000$ 下，不同奇黏度系数 μ 对应的不稳定表面模态的临界稳定曲线。这里分别使用 S 和 U 符号表示线性稳定区和不稳定区。主要目的是通过与 Bhat 和 Samanta [43] 得到的先前结果进行比较，检验我们所得表面模态数值结果的有效性和准确性。值得注意的是，不稳定表面模态的结果完全重现了 Bhat 和 Samanta [43] 的结果。随着 μ 增大，通过提高临界雷诺数并缩小不稳定波数范围，不稳定区域随之减小。此外，相应的时间增长率结果绘制于图 4(b) 中，进一步验证了图 4(a) 中得到的结果。较大的奇黏度 μ 会降低最大增长率，这证实了奇黏度 μ 对表面波具有稳定作用。

图 5 展示了黏度比 μ 变化时未受污染（$Ma = 0$，如图 5(a) 所示）和受污染（$Ma \neq 0$，如图 5(b) 和 (c) 所示）表面波的中性曲线。对于洁净和受污染的流体表面，随着 μ 增大，临界雷诺数持续上升，不稳定区的带宽随之缩小。因此，很容易预测奇黏度系数 μ 对洁净和受污染表面波的稳定作用。奇黏度 μ 增强了基态压力，从而削弱了对流流动中的惯性力，使不稳定表面模态呈现稳定趋势。此外，研究发现



(a) (b)

图4：（a）不同奇黏度 μ下表面模态的临界稳定曲线。（b）当 $Re = 20$时，相应的增长率ω_i 随波数 k 的变化。共同参数为 $\tau = 0.5$、 $\alpha = 0$、 $\beta = 4°$、 $Ca = 2$、 $Ma = 1$和$Pe = 1000$。黑色实心圆表示 Bhat 和 Samanta [43] 的结果（其论文中的图 8(a)）。



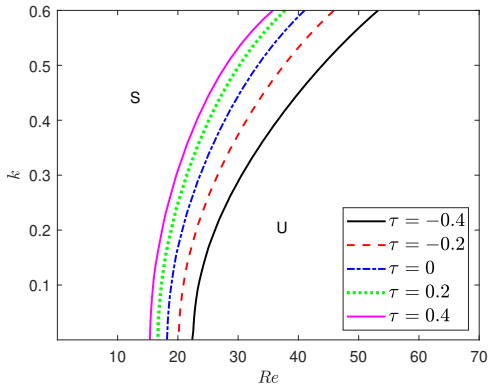
（a） $Ma = 0$ （b） $Ma = 1$ （c） $Ma = 2$

图5：固定 $\tau = 0.4$、 $\alpha = 0.01$、 $Re = 20$、 $\beta = 4°$、$Ca = 2$和 $Pe = 1000$时，不同奇黏度 μ 下表面模态临界稳定曲线的变化：（a） $Ma = 0$（洁净表面）以及（（b）和（c）） $Ma \neq 0$ （受污染表面）。

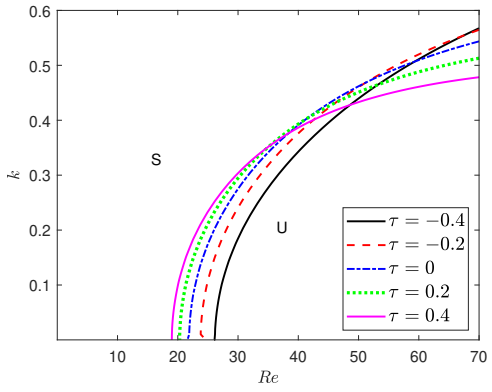
从图 5(a)、(b) 和 (c) 可以看出，较高的马兰戈尼数 Ma 会缩小不稳定区域的带宽，从而减弱由表面模态引发的液膜流动不稳定性，这证实了马兰戈尼力 Ma 具有稳定作用。在所考虑的流动特征参数范围内，受阻尼的表面活性剂模态的存在，是表面模态具有这种稳定作用的主要原因。表面活性剂浓度梯度会造成表面张力梯度，而由此产生的马兰戈尼应力会减少向扰动表面波的能量传递。因此，马兰戈尼力在控制表面模态不稳定性的发展方面发挥着至关重要的作用。由此可得，黏性降膜中奇黏度系数的存在会增强马兰戈尼力的稳定作用。

图 6 展示了当奇黏度系数（μ）不同时，沿下游和上游方向施加的外部剪切（τ）对表面模态不稳定性的影响。当不存在黏度比（即 $\mu = 0$）时，只要外部剪切（τ）沿下游/上游方向增大，表面模态的不稳定带宽（见图 6(a)）就会扩大/缩小。因此，当流动系统中的时间反演对称性未被破坏时（[43]），正施加剪切有可能引发表面模态不稳定性。然而，当黏度比为 $\mu \neq 0$ 时，图 6(b)、(c) 和 (d) 显示，外部剪切对表面模态不稳定性的影响呈现双重行为。只要施加剪切沿下游/上游流动方向增大，表面模态对应的不稳定区域在不稳定性起始点附近会显著扩大/缩小，而远离不稳定性起始点时则会缩小/扩大。由于奇黏度的影响，较强的外部剪切会使自由表面附近的基态压力升高。这会增加流体的静水力。因此，奇黏度与外部剪切的相互作用可能使强沿流向施加的剪切产生稳定作用。

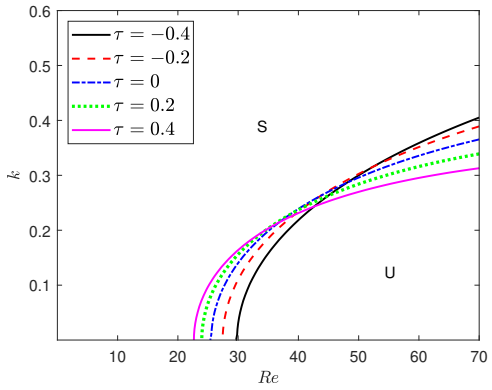
为进一步阐明上述观点，图 7 绘制了固定 $\mu = 3$ 下的时间增长率结果，其中 Re值选自不稳定区域。因此， $Re = 35$（图 7(a)）选自临界性附近的区域



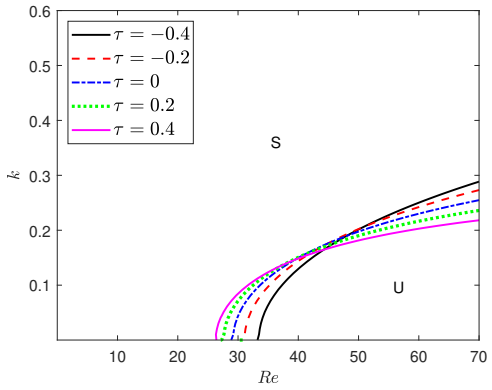
(a) $\mu = 0$



(b) $\mu = 1$

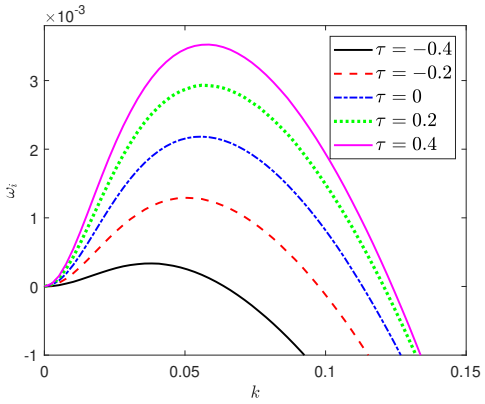


(c) $\mu = 2$

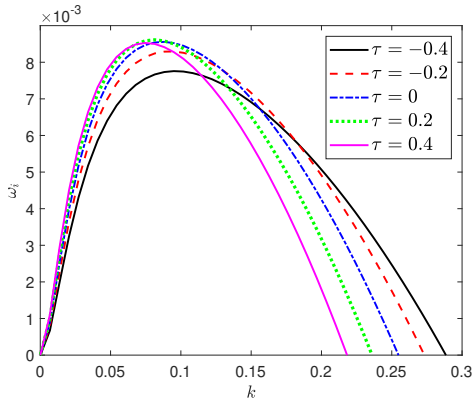


(d) $\mu = 3$

图6：不同施加剪切条件下，与表面模态相关的临界稳定曲线的变化，其中（a）$\mu = 0$（不存在破缺的时间反演对称性），而（（b）、（c）和（d））$\mu \neq 0$（存在破缺的时间反演对称性）。共同参数为 $\alpha = 0.01$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$ 和 $Pe = 1000$。



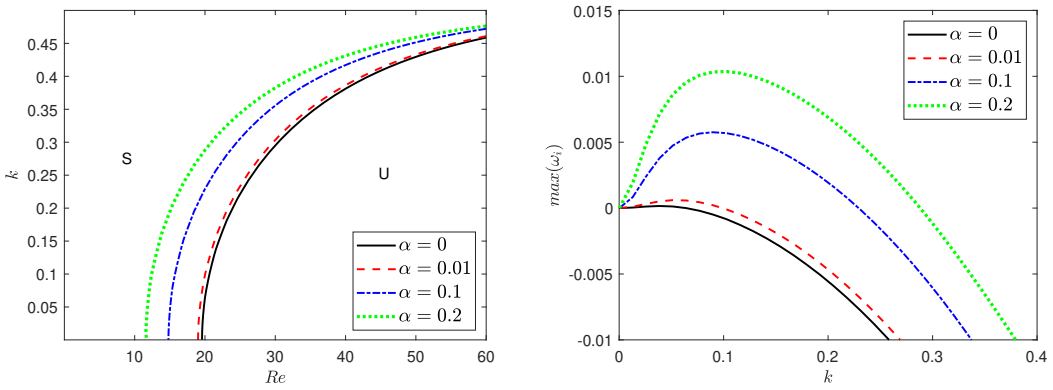
(a) $Re = 35$



(b) $Re = 70$

图7：当 (a) $Re = 35$和 (b) $Re = 70$时，施加剪切 ($\pm\tau$) 对表面模态时间增长率曲线的影响。共同参数为 $\mu = 3$、$\alpha = 0.01$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$ 和 $Pe = 1000$。

而 $Re = 70$ （图 7(b)）选自远离临界性的区域。当 $Re = 35$ 时，随着正外部剪切（$+\tau$）的增加，表面模态的增长率在长波区域增大；而随着正施加剪切（$+\tau$）值的增加，表面模态的增长率在有限波数区域减小

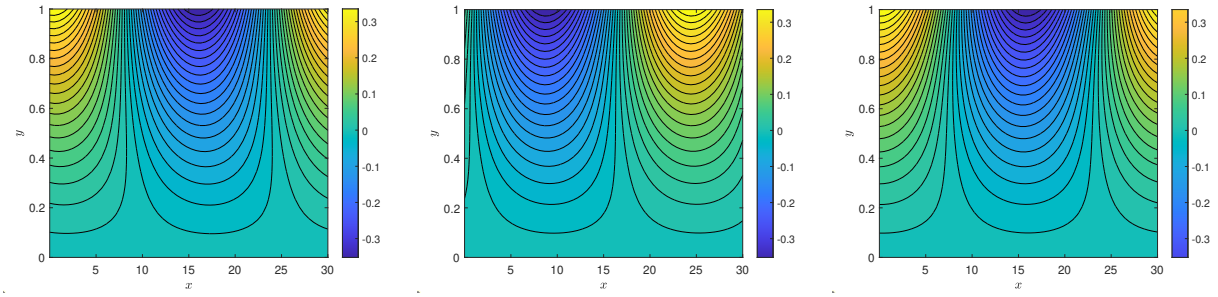


(a) (b)

图8: （a）稳定性边界随滑移参数（α）的变化。（b）当 $Re = 20$时表面模态最大增长率的变化。共同参数为 $\mu = 1$、 $\tau = 0.4$、 $\beta = 4°$、 $Ca = 2$、$Ma = 1$和 $Pe = 1000$。

当 $Re = 70$ 时。这一事实证实了剪切力对表面模态的双重作用。总而言之，值得指出的是，在黏性降膜中，可以通过在下游方向施加外部剪切，并选择适当的黏度比，来减弱液体表面失稳并限制液膜流量。

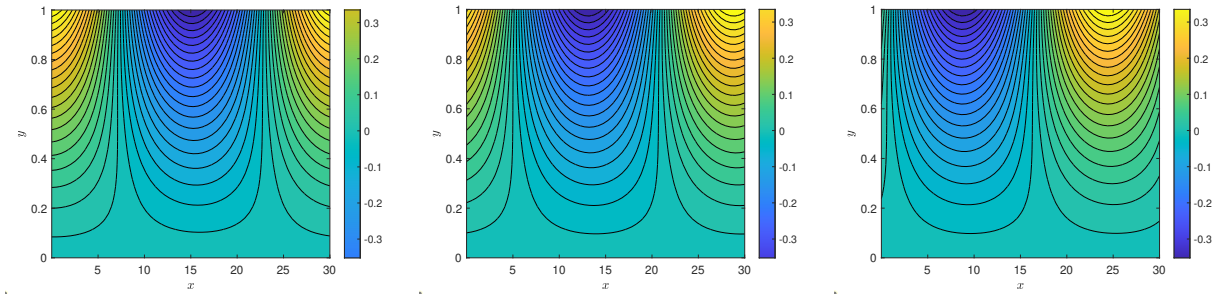
图 8(a) 表明，滑移参数 α 的值越大，临界雷诺数随机减小，从而扩大失稳边界。因此，滑移表面增强了外部剪切对表面波的失稳影响。从物理角度来看，随着滑移长度增加，流体层底部的速度梯度减小。因此，流体的摩擦力减小，导致液膜流动系统产生失稳效应。此外，如图 8(b) 所示，在表面模态的整个外部剪切 τ $(-0.4 \leq \tau \leq 0.4)$ 范围内，滑移长度越大，最大增长率曲线越高。这意味着滑移表面增强了剪切诱导的表面模态失稳。



(a) $\mu = 0$ (b) $\mu = 1$ (c) $\mu = 2$

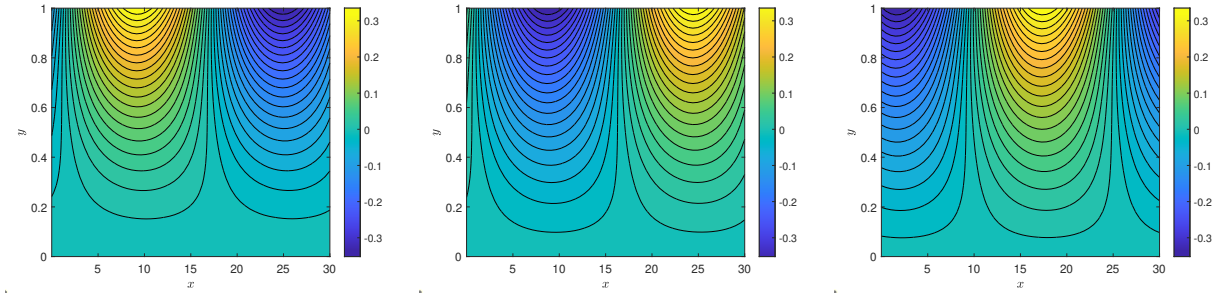
图9: 不同奇黏度 μ 下表面模态对应的速度分布， $\tau = 0.4$和 $\alpha = 0.1$。共同参数为 $k = 0.2$、 $Re = 20$、 $\beta = 4°$、 $Ca = 2$、 $Ma = 1$ 和 $Pe = 1000$。

图 9–11 展示了不同黏度比 μ（图 9）、外部剪切 τ（图 10）和滑移参数（图 11）下表面波水平扰动速度部分的等值线。扰动涡量集中在液体表面附近，并一直延伸到底部表面。图 9 显示，较高的奇黏度系数会限制扰动波的运动，最大和最小涡旋则随之向空间方向的相反方向移动。此外，下游方向较强的外力（$+\tau$；图 10(b) 和 (c)）会加快流向上的速度分布，并促进扰动波运动。另一方面，上游方向较强的外力（$-\tau$；见图 10(a) 和 (b)）会延缓扰动波运动。此外，图 11 显示，随着滑移参数增大，沿流动方向的速度分布也会增大。



(a) $\tau = -0.4$ (b) $\tau = 0$ (c) $\tau = 0.4$

图10：不同外加剪切值 τ下，与表面模态相关的速度分布，其中 $\mu = 1$ 和 $\alpha = 0.1$。共同参数为 $k = 0.2$、$Re = 20$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$和 $Pe = 1000$。

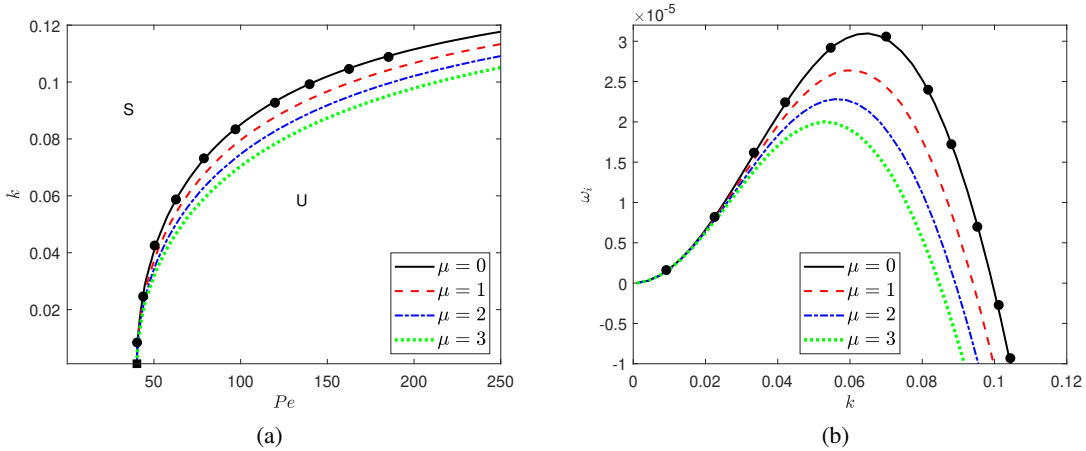


(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 0.1$ (c) $\alpha = 0.2$

图11：当滑移参数为 α、$\mu = 1$和 $\tau = 0.4$时，与表面模态相关的速度分布。共同参数为 $k = 0.2$、$Re = 20$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$和 $Pe = 1000$。

4.2 表面活性剂模态

在本节中，我们讨论了图 3(b) 所示的共存表面活性剂模态的重要失稳行为。为验证表面活性剂模态的结果与 Bhat 和 Samanta [43], 的数值结果一致，计算了 $\alpha = 0$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 0.1$、$Re = 3$和 $\tau = 1$（见图 12）。图 12(a) 显示，当前的中性曲线

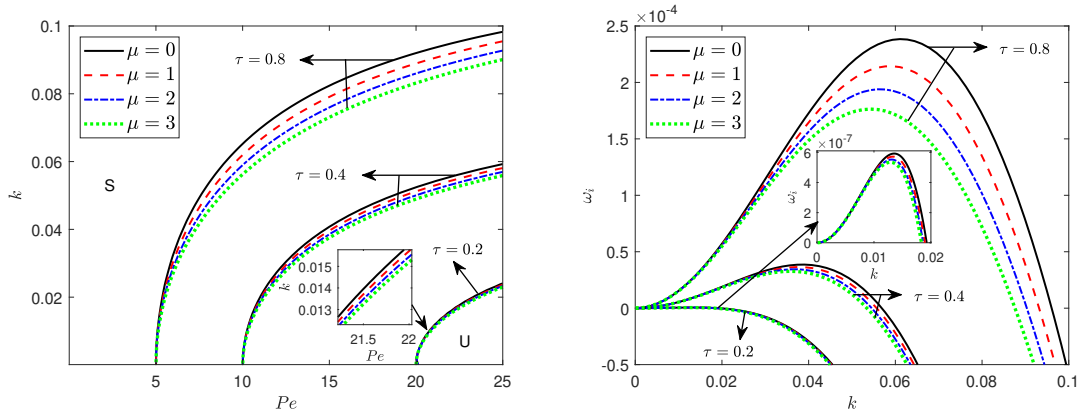


(a) (b)

图 12：(a) 奇黏度系数 μ 对中性稳定曲线的影响，位于波数 k 与佩克莱数 Pe 构成的平面中。(b) 对应的增长率 ω_i 随波数 k 的变化，其中 $Pe = 140$。此处固定值为 $Re = 3$、$\alpha = 0$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 0.1$和 $\tau = 1$。实心矩形表示临界佩克莱数 Pe_c。实心黑圆点为 Bhat 和 Samanta [43] 的结果（其论文中的图 11(a)）。

稳定性曲线完整 m 与 Bhat 和 Samanta [43] 在极限 $\tau = 1$下推导的结果相符。由此可见，截 e

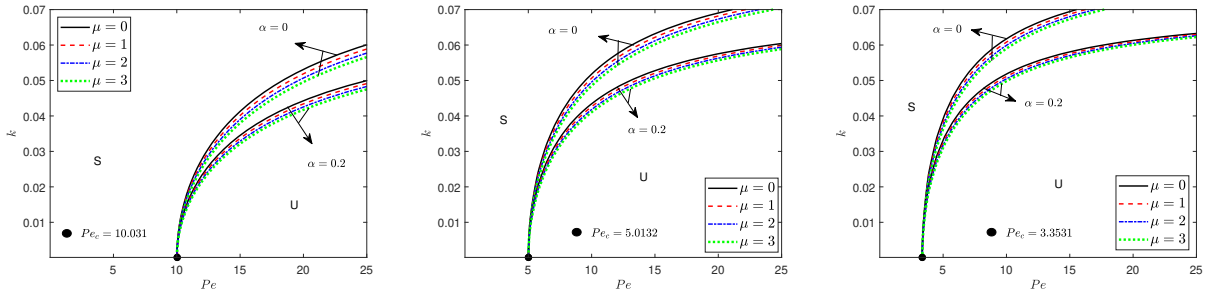
数值结果表明，临界佩克莱数是奇黏度系数 μ 的独立函数。注意，马兰戈尼模态的不稳定有限波数范围（$k \nrightarrow 0$）会随着数值 μ 增大而减小，并产生黏度比 μ 的稳定化作用。此外，图 12(b) 中绘制的相应增长率曲线与图 12(a) 的结果完全一致。奇黏度系数 μ 会降低有限波数范围内表面活性剂模态的最大增长率。



(a) (b)

图13：（a）在不同施加剪切值 τ 下，奇黏度对 (Pe, k) 平面中与表面活性剂模态相关的临界稳定曲线的影响。（b）相应的增长率 ω_i 随波数 k 的变化，其中 $Pe = 23$。其他参数值为 $\alpha = 0.01$、$Re = 20$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$ 和 $Ma = 1$。

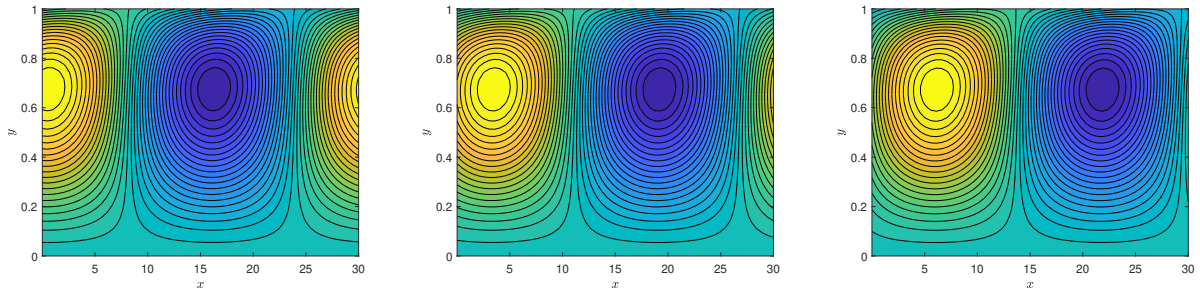
采用数值方法研究奇黏度对马兰戈尼模态初级失稳的影响（见图13）。图13(a)展示了施加剪切 τ 变化时，不同奇黏度比对应的表面活性剂模态在 (Pe, k) 平面中的中性曲线。对于每个奇黏度系数 μ，沿流向作用的强外部剪切（$+\tau$）通过降低临界佩克莱数 Pe_c，增大了表面活性剂模态的不稳定带宽。这一结果表明，流动方向上的外部剪切会在长波和有限波数范围内 destabilize 表面活性剂模态，这与 Bhat 和 Samanta [43] 的结果相似。这种失稳效应背后的主要物理原因是，正外部剪切（$+\tau$）会增加不溶性表面活性剂的扰动能量。事实上，奇黏度系数 μ 会减弱有限波数区域中的表面活性剂模态不稳定性，但不会影响长波区。为说明图13(a)，图13(b)给出了从不稳定区域选取佩克莱数 Pe 时对应的增长率。奇黏度 μ越大，表面活性剂模态的增长率越低；而沿流向施加的外部剪切越强，增长率则呈现相反趋势，这与图13(a)完全一致。



（a） $Ma = 1$ （b） $Ma = 2$ （c） $Ma = 3$

图14：不同奇黏度值 μ 下，与表面活性剂模态相关的临界稳定曲线变化。共同参数为 $\tau = 0.4$、$Re = 20$、$\beta = 4°$ 和 $Ca = 2$。实心黑圆点表示相应的临界佩克莱数 Pe_c。

不同奇黏度 μ 下、不同 Ma 值对应的中性曲线在 (Pe, k) 平面中的变化，如图 14 所示，分别针对刚性底面 ($\alpha = 0$) 和滑移底面 ($\alpha \neq 0$)。比较图 14(a) ($Ma = 1$)、(b) ($Ma = 2$) 和 (c) ($Ma = 3$) 中的曲线可以发现，只要马兰戈尼数 Ma 发生变化，表面活性剂模态的带宽就会显著改变。对于较高的



(a) $\mu = 0$ (b) $\mu = 1$ (c) $\mu = 2$

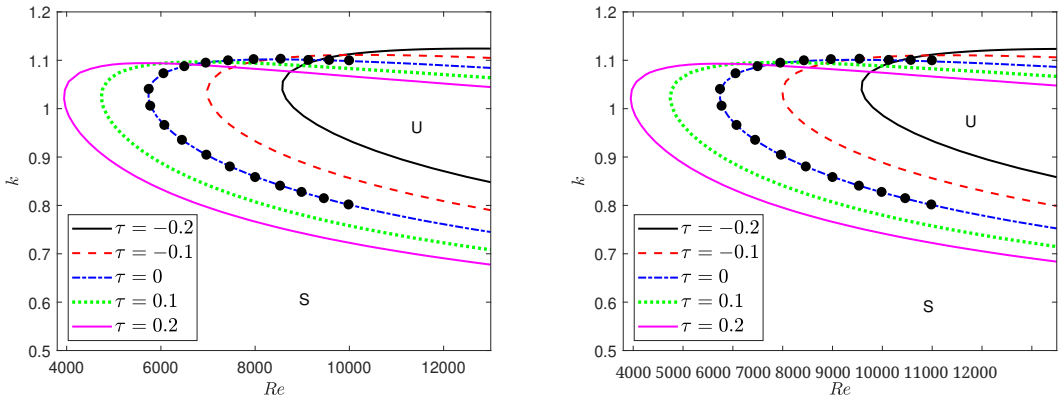
图15：不同奇黏度值 μ 下与表面活性剂模态相关的速度分布。共同参数为 $k = 0.2$、$\tau = 0.4$、$\alpha = 0.01$、$Re = 20$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$ 和 $Pe = 20$。

通过降低临界佩克莱数 Pe_c 的值 Ma。因此，可以得出结论：马兰戈尼数有可能增强表面活性剂模态不稳定性。从物理角度看，随着马兰戈尼力增大，表面活性剂浓度在液体表面迅速演化。此外，对于每个马兰戈尼数 Ma，奇黏度 μ 会由于不稳定表面活性剂模态带宽增加而降低有限波数区域内的表面活性剂模态不稳定性。这些图还显示了另一个重要现象：对于每个 Ma 和 μ 值，滑移参数 α 会降低有限波数范围内表面活性剂模态的不稳定性。滑移参数不会影响表面活性剂模态的 Pe_c。此外，无论时间反演对称性是否破缺（即 $\mu = 0$ 或 $\mu \neq 0$），滑移底面都会显著限制表面活性剂浓度在有限波数范围内的传播。

如图 15 所示，表面活性剂模态水平速度分量的等值线表明，奇黏度 μ 会使水平速度扰动的最大值偏向流体流动方向的反方向。总之，我们可以强调表面活性剂模态的两个重要情形：(i) 当较强的马兰戈尼力作用下，较大的外部剪切沿下游方向施加时，可能会产生显著的失稳作用；(ii) 奇黏度系数和滑移底面均可减弱马兰戈尼力的失稳效应。

4.3 剪切模态

在本小节中，我们关注由已识别的失稳剪切模态所诱发的剪切作用下奇黏度诱导的降膜流动失稳行为，如图 3(c) 所示。当 Re值很高且倾角较小时，该模态会通过数值计算显现。为继续讨论剪切模态失稳结果，我们



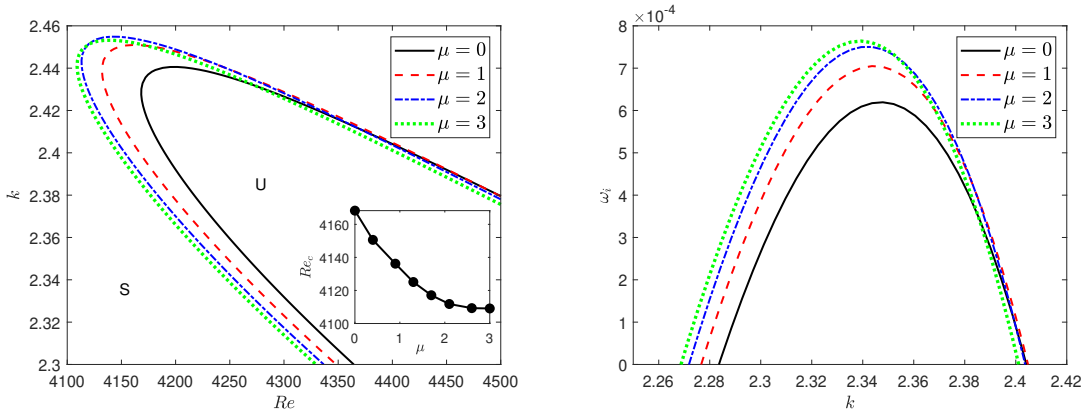
(a) $\mu = 0$ (b) $\mu = 2$

图16：黏性降膜中，不同施加剪切 τ 下剪切模态的临界稳定曲线变化情况：(a) 不存在奇黏度系数（即 $\mu = 0$）时；(b) 存在奇黏度系数 μ 时（即 $\mu \neq 0$）。共同参数为 $\alpha = 0$、$\beta = 4°$、$Ca = 2$、$Ma = 1$ 和 $Pe = 10000$。实心黑圆点表示 Bhat 和 Samanta [43] 的结果（其论文中的图13）。

已验证 nu 通过将我们的结果与 Bhat 和此前得出的结果进行比较，开展数值研究。 d

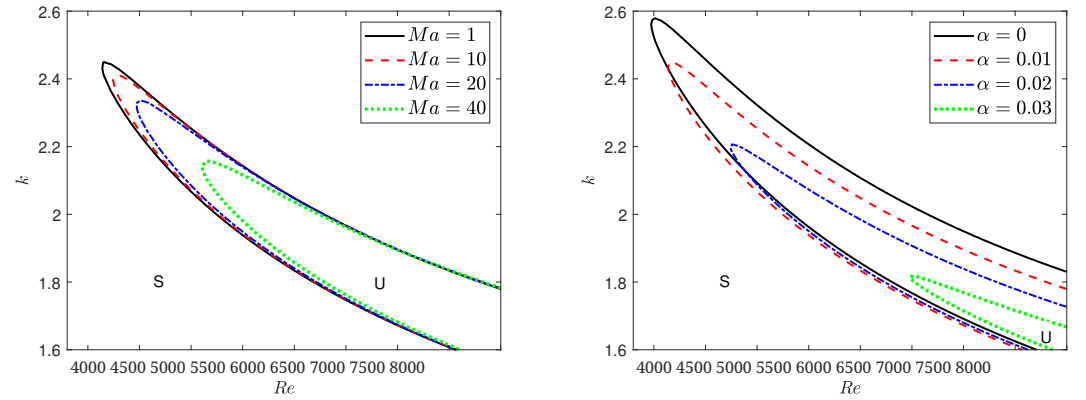
Samanta [43], 当固定参数为 $\alpha = 0$、 $\beta = 4°$、 $Ma = 1$、 $Pe = 10000$ 和 $Ca = 2$ 时。Bhat 和 Samanta[43] 研究了沿刚性床面下落的受污染的下落液体，其中外部剪切施加在受污染表面上，且黏性流体中未考虑奇黏度。图16(a) 中的中性稳定性曲线与 Bhat 和 Samanta [43] 在 $\mu = 0$、 $\alpha = 0$ 和 $\tau = 0$ 时的结果完全吻合。

在有限波数域内，沿流动方向的外部剪切会扩大剪切模态激发的不稳定区域带宽，直至某一波数 k，此后则会缩小该不稳定区域。因此，外部剪切对剪切模态的初级失稳具有双重作用。再次重复数值测试，以观察在剪切作用下的受污染黏性降膜中存在 μ 时，施加剪切的影响（图16(b)）。尽管存在时间反演对称性破缺（即奇黏度系数 $\mu \neq 0$），但图16(b)中也观察到施加剪切 τ 对剪切模态所诱导的不稳定区的影响与图16(a)中类似。此处，奇黏度对剪切模态的影响可以忽略，除非倾斜角非常小（见后续图17）。



(a) (b)

图17：(a) 不同奇黏度（μ）下与剪切模态相关的中性曲线。(b) 当 $Re = 4400$时，时间增长率的变化。共同参数为 $\tau = 0.2$、 $\alpha = 0.01$、 $\beta = 1'\ (= \frac{1}{60°})$ 、$Ma = 1$、 $Ca = 2$和 $Pe = 1000$。



(a) (b)

图18：(a) 当 $\alpha = 0.01$时，不同 Ma 值对应的中性曲线。(b) 当 $Ma = 1$时，不同 α 值对应的中性曲线。共同参数为 $\tau = 0.2$、 $\mu = 1$、 $\beta = 1'\ (= \frac{1}{60°})$ 、$Ca = 2$和 $Pe = 1000$。

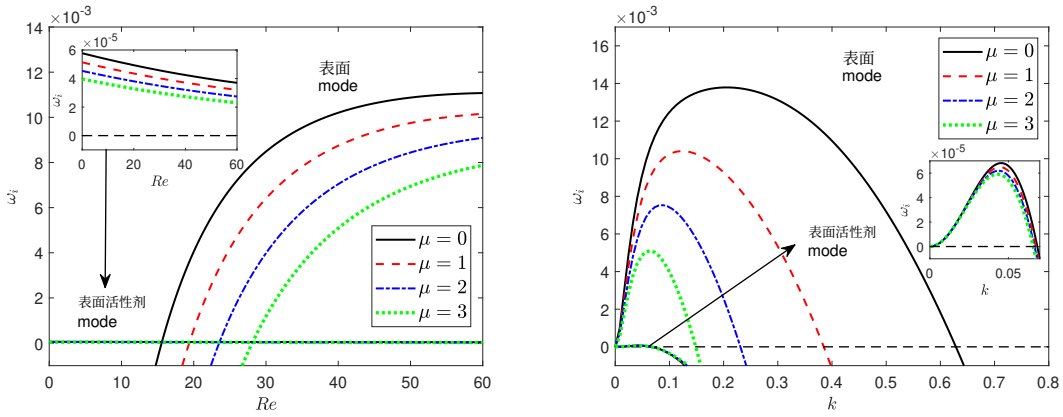
在图17中，展示了 $\beta = 1'$时不同 μ 值下剪切模态的中性曲线及相应增长率的变化。当奇黏度比 μ 较高时，较高波数范围内不稳定区域的带宽显著增大（见图17(a)）。因此，奇黏度 μ 可以增强由剪切模态诱导的初级失稳，这一点也可由临界雷诺数逐渐降低得到进一步证实（见图17(a)中的插图）。为验证上述结果，数值计算了相应的增长率结果。

并显示于图17(b)中。较高的奇黏度系数 μ 会增强最大增长率，并使剪切模态呈现失稳特性。

图 18(a) 展示了不同马兰戈尼数 Ma下临界稳定曲线的变化，而较高波数范围内出现的不稳定带宽会随着较高的 Ma 值逐渐减小。此外，从图 18(b) 可以发现，滑移长度 α 的轻微变化会显著改变较高波数区间内的临界稳定曲线。滑移参数会削弱由剪切模态引发的不稳定性。因此，滑移底面对剪切模态具有稳定作用。

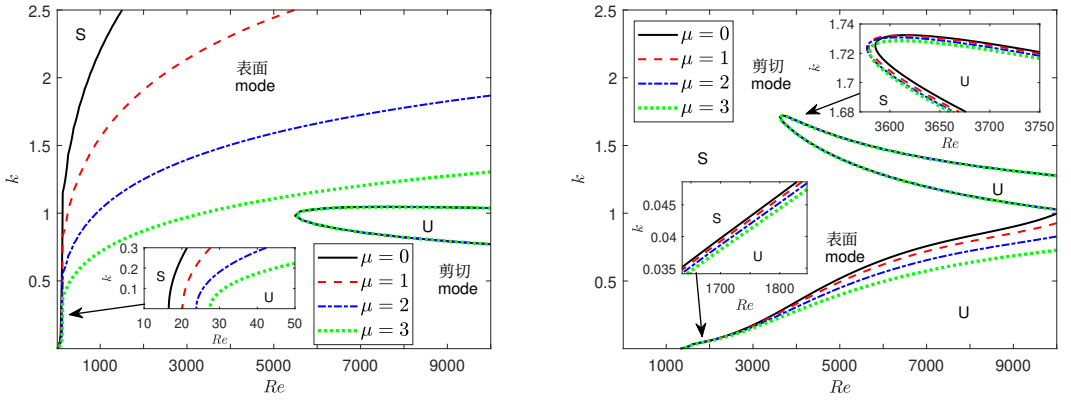
4.4 模态竞争

本小节的主要目的是考察不同共存模态在各种流动参数范围内对主导地位的竞争，正如 Bhat 和 Samanta [62],Bhat 和 Samanta [43] 以及 Hossain 等人 [46] 所讨论的那样。



(a) (b)

图19：当 (a) $k = 0.06$ 和 (b) $Re = 40$ 时，不同奇黏度值 μ 下不稳定表面模态与表面活性剂模态变化之间的主导权竞争。共同参数为 $\tau = 0.4$、 $\alpha = 0.01$、 $\beta = 4°$、$Ma = 1$、 $Ca = 2$ 和 $Pe = 40$。



(a) (b)

图20：当 (a) $\beta = 4°$ 和 (b) $\beta = 0.05°$ 时，不同奇黏度值 μ 下不稳定表面模态与剪切模态变化之间的主导权竞争。共同参数为 $\tau = 0.1$、 $\alpha = 0.01$、 $Ma = 0.01$、$Ca = 2$ 和 $Pe = 1000$。

图 19(a) 绘出了固定参数为 $\alpha = 0.01$、 $\tau = 0.4$、 $\beta = 4°$、 $Pe = 40$、 $Ma = 1$ 和 $Ca = 2$ 时，不同黏度比 μ 下表面模态和表面活性剂模态的时间增长率随雷诺数的变化。表面模态的增长率为负，而表面活性剂模态的增长率为正，直至雷诺数小到足够低的 Re；这说明在 μ 极小的

范围内，表面活性剂模态占主导。随后，随着 Re 增大，表面模态的增长率（ω_i）也随之增大；当 Re 达到某一特定值时，增长率超过中性线（$\omega_i = 0$），从而引发表面波失稳。从 Re 的这一特定值起，表面模态便占据主导地位。图 19(b) 给出了不同奇黏度系数下时间增长率随波数变化的曲线（其中 $Re = 40$），进一步证实了在雷诺数足够高时，表面模态比表面活性剂模态占主导。不稳定的表面活性剂模态仅存在于长波区，而不稳定的表面模态既存在于长波区，也存在于有限波数区间。因此，当 Re 足够小时，表面模态完全占据主导地位。此外，较高的奇黏度系数 μ 会降低与表面模态/表面活性剂模态失稳相关的增长率。

现在，采用数值方法来观察当固定值为 $\tau = 0.1$、$\alpha = 0.01$、$Ma = 0.01$、$Ca = 2$ 和 $Pe = 1000$ 时，初级失稳中表面模态与剪切模态之间的竞争。图 20 展示了不同 μ 下表面模态和剪切模态对应的中性曲线。结果发现，较高的 μ 值通过缩小不稳定带宽，对共存的表面模态具有显著的稳定化作用，但对剪切模态的稳定化／失稳影响较弱。如图 20(a) 所示，当 $\beta = 4^\circ$ 时，对于所有 Re 值，由表面模态引起的失稳边界线完全覆盖剪切模态失稳的边界线。这意味着在整个 k 区域内（即从长波到较高波数范围），表面模态完全占主导。因此，对于所有 Re 值，表面模态不稳定性发生得比剪切模态失稳更快，并产生更高的增长率。但在倾角 $\beta = 0.05^\circ$ 时，图 20(b) 中观察到了不同的情形。结果表明，在长波范围内表面模态占主导，而在较高波数范围内剪切模态占主导。事实上，与表面模态相比，剪切模态受奇黏度 μ 的影响较小。

5 结论

本研究对时间反演对称性破缺时，滑移斜面上含表面活性剂的受剪切黏性液膜的波动力学进行了研究。通过对线性扰动方程进行正规模态分析，推导出与该流体模型对应的 Orr-Sommerfeld 特征值问题，并基于数值切比雪夫谱配置法求解。总体而言，研究考察了不同流动参数区域内表面模态和表面活性剂模态的线性稳定性/失稳特性。此外，还讨论了在高雷诺数和小倾斜角条件下所识别出的剪切模态的线性响应。

奇黏度系数会缩小由表面模态产生的不稳定长波区域，并增强表面模态的稳定作用。此外，若沿流动方向施加更强的外部剪切，则表面模态不稳定性会增强；而施加与流动方向相反的外部剪切，则会产生相反的趋势。不过，当奇黏度系数取较大值时，通过在液体表面施加更强的顺流向外部剪切，可以减弱表面模态不稳定性。此外，由于基流速度增加，滑移底面提高了波不稳定性的程度。

此外，在有限波数范围内，随着奇黏度增大，表面活性剂模态变得更加稳定。马兰戈尼力对本研究所确定的所有模态的影响与受剪切作用的表面活性剂污染降膜沿刚性基底向下流动的情况几乎相似（Bhat 和 Samanta [43]），其中不存在奇黏度。此外，在有限波数区域内，滑移基底有助于降低表面活性剂模态的不稳定性，并能够减弱马兰戈尼效应对衰减模态的影响。
对于较小的倾角（即当作用于流体的重力较弱时），极高的雷诺数 Re 会触发惯性力，导致较高波数区域出现不稳定的剪切模态。由剪切模态引起的最强激发波可通过表面活性剂和滑移底面共同得到稳定。此外，黏度比通过降低临界雷诺数，提高剪切波速，并增强剪切分层流体的流量。事实上，奇黏度对剪切模态的影响远小于其对表面模态的影响。

利益冲突

我没有利益冲突。

利益冲突声明

作者声明，据其所知，不存在可能影响本文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

作者贡献声明

Md. Mouzakkir Hossain：概念构思、方法论、软件、撰写——原始稿件、验证、形式分析、调查。

Sukhendu Ghosh：概念构思、审阅与编辑、软件、审阅与编辑。Harekrushna Behera：概念构思、定义问题、方法论、监督、软件、审阅与编辑。

参考文献

[1] SJ Weinstein 和 KJ Ruschak。《涂层流》。《流体力学年度评论》，36:29，2004。[2] CD Han。《聚合物加工中的多相流》。Springer，1980。[3] CS Yih。《液体沿斜面流动的稳定性》。《流体物理》，6(3):321–334，1963。[4] TB Benjamin。《倾斜平面上层流中的波的形成》。《流体力学杂志》，2(6):554–573，1957。[5] SP Lin。《液体沿倾斜平面流动时的液膜失稳》。《流体物理》，10(2):308–313，1967。[6] GD Bruin。《液体沿倾斜平面流动时液层的稳定性》。《工程数学杂志》，8(3):259–270，1974。[7] EO Tuck。《重力作用下的连续涂布与射流剥离》。《流体物理》，26(9):2352–2358，1983。[8] MB Allen。《用于油藏组分流建模的配置法》。Springer，1984。[9] S Alekseenko、VE Nakoryakov 和 BG Pokusaev。《液膜波流》。Begell House，1994。[10] S. Zhao、M. Dietzel 和 S. Hardt。《润滑膜上液层的法拉第失稳》。《流体力学杂志》，879:422–447，2019。[11] JB Grotberg 和 OE Jensen。《柔性管中的生物流体力学》。《流体力学年度评论》，36:121–147，2004。[12] R Levy、M Shearer 和 TP Witelski。《含不溶性表面活性剂的重力驱动薄液膜：光滑行波》。《欧洲应用数学杂志》，18(6):679–708，2007。[13] Anjalaiah 和 R. Usha。《速度滑移对受污染双层膜流无惯性失稳的影响》。《力学学报》，226:3111–3132，2015。[14] MG Blyth 和 C Pozrikidis。《表面活性剂对液膜沿倾斜平面流动稳定性的影响》。《流体力学杂志》，521:241–250，2004。[15] JE Avron。《奇黏度》。《统计物理学杂志》，92(3):543–557，1998。[16] A Samanta。《奇黏度在下落黏性流体中的作用》。《流体力学杂志》，938，2022。[17] VB Berestetskii、EM Lifshitz 和 LP Pitaevskii。《量子电动力学：第4卷》，第4卷。Butterworth-Heinemann，1982。[18] MF Lapa 和 TL Hughes。《奇黏度或霍尔黏度流体中的低雷诺数游动》。《物理评论E》，89(4):043019，2014。[19] M Kaminski 和 S Moroz。《二维空间中的非相对论宇称破缺流体力学》。《物理评论B》，89(11):115418，2014。[20] K Jensen、M Kaminski、P Kovtun、R Meyer、A Ritz 和 A Yarom。《 2+ 1维中的宇称破缺流体力学》。《高能物理学杂志》，2012(5):1–39，2012。[21] S Chapman 和 TG Cowling。《非均匀气体的数学理论：气体黏度、热传导和扩散的动理论论述》。剑桥大学出版社，1990。[22] A Souslov、K Dasbiswas、M Fruchart、S Vaikuntanathan 和 V Vitelli。《具有奇黏度流体中的拓扑波》。《物理评论快报》，122(12):128001，2019。[23] B Jia 和 Y Jian。《奇黏度对受热倾斜基底上液膜瑞利–泰勒失稳的影响》。《流体物理》，34(4):044104，2022。

[24] B Gjevik。《下落液膜上有限振幅表面波的出现》。《流体物理》，13(8):1918–1925，1970。[25] Y Sumino、KH Nagai、Y Shitaka、D Tanaka、K Yoshikawa、H Chaté 和 K Oiwa。《集体运动的微管形成的大尺度涡旋晶格》。《自然》，483(7390):448–452，2012。[26] RJ Klein、C Zeiss、EY Chew、JY Tsai、RS Sackler、C Haynes、AK Henning、JP Sangiovanni、SM Mane、ST Mayne 等。《年龄相关性黄斑变性中的补体因子H多态性》。《科学》，308(5720):385–389，2005。[27] JC Tsai、F Ye、J Rodriguez、JP Gollub 和 TC Lubensky。《手性颗粒气体》。《物理评论快报》，94(21):214301，2005。[28] G Livingston、A Sommerlad、V Orgeta、SG Costafreda、J Huntley、D Ames、C Ballard、S Banerjee、A Burns、J Cohen-Mansfield 等。《痴呆预防、干预与护理》。《柳叶刀》，390(10113):2673–2734，2017。[29] E Kirkinis 和 AV Andreev。《奇黏度诱导的黏性薄液膜稳定化》。《流体力学杂志》，878:169–189，2019。[30] S Chattopadhyay。《奇黏度对液膜沿滑移倾斜平面下落的影响》。《流体物理》，33(6):062106，2021。[31] G Bao 和 Y Jian。《奇黏度诱导的外电场作用下下落薄膜失稳》。《物理评论E》，103(1):013104，2021。[32] S Mukhopadhyay 和 A Mukhopadhyay。《线性温度变化条件下黏性液膜沿倾斜平面流动时的热毛细不稳定性与波的形成：奇黏度的影响》。《流体物理》，33(3):034110，2021。[33] S Chattopadhyay、GY Subedar、AK Gaonkar、AK Barua 和 A Mukhopadhyay。《奇黏度对液膜沿垂直运动板流动时动力学与稳定性的影响》。《国际非线性力学杂志》，140:103905，2022。[34] X Chu、L Chang、B Jia 和 Y Jian。《奇黏度对法拉第波不稳定性的影响》。《流体物理》，34(11):114123，2022。[35] S Mukhopadhyay 和 A Mukhopadhyay。《霍尔黏度摆动作用下流动液膜的表面波与热毛细不稳定性》。《物理学D辑：非线性现象》，439:133404，2022。[36] D Paul、MM Hossain 和 H Behera。《奇黏度诱导的受剪切作用降膜的流体动力学不稳定性》。《流体物理》，2023。[37] SP Lin。《表面活性剂对液膜流动的稳定作用》。《美国化学工程师学会杂志》，16(3):375–379，1970。[38] S Whitaker 和 LO Jones。《下落液膜的稳定性：界面及界面质量传递的影响》。《美国化学工程师学会杂志》，12(3):421–431，1966。[39] W Ji 和 F Setterwall。《存在表面活性溶质时垂直下落液膜的不稳定性》。《流体力学杂志》，278:297–323，1994。[40] D Halpern、OE Jensen 和 JB Grotberg。《表面活性剂和液体输送至肺部的理论研究》。《应用生理学杂志》，1998。[41] HH Wei。《表面活性剂对受剪切作用的液体沿倾斜平面流动的长波不稳定性的影响》。《流体物理》，17(1):012103，2005。[42] A Samanta。《剪切驱动下落液膜》。《流体力学杂志》，753:131—149，2014。[43] FA Bhat 和 A Samanta。《含表面活性剂的受剪切作用降膜的线性稳定性分析》。《流体物理》，31(5):054103，2019。[44] A Samanta。《振动倾斜平面上受剪切作用流动的失稳》。《流体力学杂志》，915，2021。[45] MM Hossain 和 H Behera。《多孔滑移表面上的受剪切作用牛顿流体薄膜下落》。《流体物理》，2022。[46] MM Hossain、S Ghosh 和 H Behera。《倾斜多孔床层上含表面活性剂的受剪切作用降膜的线性不稳定性》。《流体物理》，34(8):084111，2022。[47] DR Otis、M Johnson、TJ Pedley 和 RD Kamm。《肺表面活性剂在气道闭合中的作用：一项计算研究》。《应用生理学杂志》，75(3):1323–1333，1993。[48] D Halpern 和 JB Grotberg。《表面活性剂对内衬液体的柔性管中流体弹性不稳定性的影响：气道闭合模型》。《生物力学工程杂志》，115(271)，1993。

[49] FF Espinosa 和 RD Kamm。表面活性剂替代疗法中药丸剂在肺部的扩散。《应用生理学杂志》，86(1):391–410，1999。[50] AP Hooper 和 WGC Boyd。两种黏性流体界面处的剪切流失稳。《流体力学杂志》，128:507–528，1983。[51] RE Kelly、DA Goussis、SP Lin 和 FK Hsu。倾斜平面上液膜流动中表面波失稳的机制。《流体物理*A*：流体动力学》，1(5):819–828，1989。[52] J Jeevahan、M Chandrasekaran、GB Joseph、RB Durairaj 和 G Mageshwaran。超疏水表面：基础、应用与挑战综述。《涂层技术与研究杂志》，15(2):231–250，2018。[53] GS Beavers 和 DD Joseph。自然渗透壁面处的边界条件。《流体力学杂志》，30(1):197–207，1967。[54] JP Pascal。多孔倾斜平面上流体流动的线性稳定性。《物理学*D*辑：应用物理》，32(4):417，1999。[55] Anjalaiah、R Usha 和 S Millet。不溶性表面活性剂存在下多孔基底上的薄膜流动：稳定性分析。《流体物理》，25(2):022101，2013。[56] FA Bhat 和 A Samanta。滑移倾斜平面上含表面活性剂双层液膜流动的线性稳定性。《化学工程科学》，第115611页，2020。[57] M Sani、SA Selvan、S Ghosh 和 H Behera。施加剪切对滑移斜面上受污染双层膜流动力学的影响。《流体物理》，32(10):102113，2020。[58] HA Stone。沿变形界面输运表面活性剂的时变对流-扩散方程的简单推导。《流体物理*A*：流体动力学》，2(1):111–112，1990。[59] AL Frenkel 和 D Halpern。表面活性剂和重力依赖的双层库埃特流失稳及其非线性饱和。《流体力学杂志》，826:158–204，2017。[60] A Samanta、C Ruyer-Quil 和 B Goyeau。滑移倾斜平面上的降膜。《流体力学杂志》，684:353，2011。[61] A Samanta。表面活性剂对倾斜平面上双层膜流动失稳的影响。《流体物理》，26(9):094105，2014。[62] FA Bhat 和 A Samanta。滑移倾斜平面上受污染流体流动的线性稳定性。《物理评论*E*》，98(3):033108，2018。