arXiv:2305.02566v1 [math.PR] 4 May 2023

A Kadison–Singer 型结果的双曲扩展

S

Ruizhe Zhang* Xinzhi Zhang†

2023年5月5日

摘要

2013年，Marcus、Spielman 和 Srivastava 解决了著名的 Kadison–Singer 猜想。该猜想表明，对于 n 独立随机向量 $v_1, \cdots, v_n$ 如果这些向量的期望平方范数有界，并且在期望意义下处于各向同性位置，那么行列式多项式 $\det(xI - \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^\top)$ 的根以 $(1+\sqrt{\epsilon})^2$为界的概率为正。Kadison-Singer 定理的一种解释是：我们总能将向量 $v_1, \cdots, v_n$ 划分为两个集合，使其在谱范数意义下具有较低的差异度（换言之，依据行列式多项式）。

在本文中，我们针对更广泛的一类多项式——双曲多项式，给出两个结果。此外，我们的结果适用于两种推广的情形：

- 第一项表明，Kadison-Singer 结果只需要一个更弱的假设，即这些向量的双曲范数之和有界。
- 第二项将 Kadison-Singer 结果的分布假设放宽为强 Rayleigh 分布。

据我们所知，先前的结果仅支持行列式多项式 [Anari and Oveis Gharan'14, Kyng, Luh and Song'20]。目前尚不清楚能否将其推广到更广泛的多项式类别。此外，我们还提供了一种亚指数时间算法来构造我们的结果。

*ruizhe@utexas.edu。德克萨斯大学奥斯汀分校。研究得到大学研究生继续奖学金的支持。

†xinzhi20@cs.washington.edu。华盛顿大学。研究得到美国国家科学基金会 CCF-1813135 号拨款的支持。

1 引言

由 [KS59], 提出的 Kadison-Singer 问题，长期以来一直是数学中的一个开放问题。Marcus、Spielman 和 Srivastrava 在他们的开创性著作 [MSS15b]中解决了这一问题：对于任意一组独立随机向量 $u_1, \cdots, u_n$ 若每个 u_i 都有有限支撑，且 $u_1, \cdots, u_n$在期望意义下处于各向同性位置，则 $\sum_{i=1}^n u_i u_i^*$ 以正概率具有有界的谱范数，其上界为 $1 + O(\max_{i\in[n]} \|u_i\|)$。 [MSS15b] 的主要结果如下：

定理 1.1 ([MSS15b]的主要结果）。设 $\epsilon > 0$，并设 $v_1、\cdots、v_n \in \mathbb{C}^m$ 为 n 具有有限支撑的独立随机向量，满足 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n v_i v_i^*] = I$，且 $\mathbb{E}[\|v_i\|^2] \le \epsilon、\ \forall i \in [n]$。则

$$\Pr\left[\left\|\sum_{i\in[n]} v_i v_i^*\right\| \le (1+\sqrt{\epsilon})^2\right] > 0.$$

Kadison-Singer 问题与差异理论密切相关，而差异理论是数学和理论计算机科学中的一个重要领域。一个经典的差异问题如下：给定n 个集合，它们取自 n 个元素，能否将每个元素染成红色或蓝色，使得每个集合中两种颜色的元素数量大致相同？更形式化地说，对于向量 $a_1、\ldots\ldots、a_n \in \mathbb{R}^n$，其中 $\|a_i\|_\infty \le 1$，以及一种着色 $s \in \{\pm 1\}^n$，差异度定义为 差异度$(a_1、\ldots\ldots、a_n;\ s)$: $= \|\sum_{i\in[n]} s_i a_i\|_\infty$。著名的 Spencer 六个标准差定理 [Spe85] 表明，存在一种着色，其差异度至多为$6\sqrt{n}$，优于标准的 Chernoff 界；该界表明，随机着色的差异度为 $\sqrt{n\log n}$。更一般地，我们可以考虑差异度的“矩阵版本”：对于矩阵 $A_1、\ldots\ldots、A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 以及一种着色 $s \in \{\pm 1\}^n$，

$$\mathrm{Disc}(A_1, \ldots, A_n; s) := \left\|\sum_{i\in[n]} s_i A_i\right\|.$$

定理1.1 等价于以下关于秩一矩阵的差异度结果：

定理 1.2 ([MSS15b])。 设 $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^m$ 并假设 最大值$_{i\in[n]} \|u_i u_i^*\| \le \epsilon$ 且 $\sum_{i=1}^n u_i u_i^* = I$。那么，

$$\min_{s\in\{\pm1\}^n} \mathrm{Disc}(u_1 u_1^*, \ldots, u_n u_n^*; s) \le O(\sqrt{\epsilon}).$$

换言之，秩一各向同性矩阵的最小差异度至多为 $O(\sqrt{\epsilon})$，其中 ϵ 是最大谱范数。该结果也优于矩阵 Chernoff 界 [Tro15]，后者表明，对矩阵进行随机着色会产生 $O(\sqrt{\epsilon \log\ d})$的差异度。 [MSS15b] 中的主要技术是交错多项式方法，以及 [MSS15a]中提出的障碍方法。

利用与 [MSS15b]中所述相同的技术框架，人们建立了 Kadison-Singer 型结果的若干推广，这些结果在理论计算机科学中有有趣的应用。特别是，Kyng、Luh 和 Song [KLS20] 给出了 Kadison–Singer 猜想的“四个推导足矣”版本：不再假设每个独立随机向量都具有有界范数，KLS20] 中的主要结果只要求谱范数平方和有界于 ，并证明了一个差异界 4σ：

定理 1.3 ([KLS20])。 设 $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^m$ 且 $\sigma^2 = \|\sum_{i=1}^n (u_i u_i^*)^2\|$。那么，我们有

$$\Pr_{\xi\sim\{\pm1\}^n}\left[\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i u_i u_i^*\right\| \le 4\sigma\right] > 0.$$

这一结果最近被 [LZ20] 用于近似求解广义网络设计问题。

此外，Anari 和 Oveis-Gharan [AO14] 将 Kadison-Singer 猜想推广到了实稳定多项式的情形。他们不再假设随机向量相互独立，而是 [AO14]假设这些向量是从任意一个边缘概率有界的齐次强 Rayleigh 分布中抽样得到的，具有有界范数，并且处于各向同性位置：

定理 1.4 ([AO14])。 设 μ 是定义在 $[n]$上的齐次强 *Rayleigh* 概率分布，且每个元素的边缘概率至多为 ϵ_1，并设 $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^m$ 是处于各向同性位置的向量， $\sum_{i=1}^n u_i u_i^* = I$满足 最大值$_{i\in[n]} \|u_i\|^2 \leq \epsilon_2$。那么

$$\Pr_{S\sim\mu}\left[\left\|\sum_{i\in S} u_i u_i^*\right\| \leq 4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2\right] > 0.$$

定理 1.4 在谱图论中有一个直接的对应结果：给定任意一个（带权）连通图$G=(V,E)$，其拉普拉斯矩阵为 L_G。对于任意一条边 $e=(u,v) \in E$，将对应于e 的向量定义为 $v_e = L_G^{\dagger/2}(\mathbf{1}_u - \mathbf{1}_v)$（这里 $L_G^\dagger$ 是 Moore-Penrose 逆）。那么， $\{v_e$ 的集合： $e \in E\}$ 处于各向同性位置，且 $\|v_e\|^2$ 等于相对于 e的图有效电阻。此外， E 中这些边的任意生成树分布都是齐次强 Rayleigh 分布。由定理 1.4 可知，任何最大有效电阻有界的图都存在一个谱稀疏生成树 [AO14]。此外， [AO15] 为非对称旅行商问题提供了一个令人振奋的应用，并获得了一个 $O(\log\log n)$-近似。

将 Kadison-Singer 定理推广的一种不同思路，是研究相对于比谱范数（即行列式多项式的最大根）更一般的范数而言的差异度。Bränden 最近的一项工作 [Brä18] 证明了定理 1.2 的高秩版本，适用于双曲多项式这一更广泛的多项式类别，其中包括行列式多项式。此外，向量的双曲范数是矩阵谱范数的一种自然推广。（我们将在第 1.1 节介绍双曲多项式。）从这一角度来看，一个很自然的问题是：

我们能否也将定理 *1.3* 和定理 *1.4*推广到更一般的多项式类别，例如双曲多项式?

1.1 我们的结果

在这项工作中，我们将定理 1.3 和定理 1.4推广到双曲多项式的情形，从而给出了肯定的回答。在陈述主要结果之前，我们先介绍下文将用到的一些双曲多项式基本记号。

双曲多项式构成了一类更广泛的多项式，其中包含行列式多项式和齐次实稳定多项式。若一个 m 元、次数为 d 的齐次多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 关于方向 $e \in \mathbb{R}^m$ 是双曲的，则对于所有 $x \in \mathbb{R}^m$，单变量多项式 $t \mapsto h(te - x)$ 都只有实根。（附录 E 中给出了一些双曲/实稳定多项式的例子。）使得 $h(te - x)$ 的所有根均为非负（或严格为正）的 $x \in \mathbb{R}^m$ 集合称为双曲锥 $\Gamma_+^h(e)$（或 $\Gamma_{++}^h(e)$）。一个广为人知的结果 [Brä10] 指出，开双曲锥 $\Gamma_{++}^h(e)$ 中的任意向量 x 本身都关于多项式 h 是双曲的，并且与 e 具有相同的双曲锥，也就是说， $\Gamma_{++}^h(e) = \Gamma_{++}^h(x)$。因此， h 的唯一双曲锥可简洁地表示为 Γ_+^h。

双曲多项式与矩阵的行列式多项式有相似之处，因为二者都可用于定义迹、范数和特征值。给定一个双曲多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 和任意向量 $e \in \Gamma_{++}^h$，我们可以定义相对于 $h(x)$ 和 e 的范数如下：对于任意 $x \in \mathbb{R}^m$，其 双曲范数 $\|x\|_h$ 等于线性限制多项式 $h(te - x) \in \mathbb{R}[t]$ 的最大根（按绝对值计）。类似于矩阵的特征值，我们将 x 的双曲特征值 定义为 $h(te - x)$ 的 d 个根，记作 $\lambda_1(x) \geq \cdots \geq \lambda_d(x)$。我们还可以定义双曲迹 和双曲秩：

$$\mathrm{tr}_h[x] := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(x), \quad \text{and} \quad \mathrm{rank}(x)_h := |\{i \in [d] : \lambda_i(x) \neq 0\}|.$$

回想一下，定理 1.3和定理 1.4 都给出了和的谱范数上界$\| \sum_{i=1}^n \xi_i v_i v_i^\top \|$。在双曲多项式的情形下，我们应当给出双曲范数的上界 $\| \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \|_h$ 对于向量 $v_1, \ldots, v_n$ 这些向量位于双曲锥中，也就是所有双曲特征值均为非负的向量所构成的集合。

我们的主要结果如下：

定理 *1.5*（主要结果 *I*，定理 *B.1* 的非正式陈述，定理 *1.4*, [*KLS20*] 的双曲版本）。令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示方向为 $e \in \mathbb{R}^m$ 的双曲多项式。令 $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma_+^h$ 为闭双曲锥中的 n 个向量。令 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 为具有有限支撑的 n 个独立随机变量，且 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$ 和 $\mathit{Var}[\xi_i] = \tau_i^2$。假设 $\sigma := \| \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \mathit{tr}_h[v_i] v_i \|_h$。那么存在一个赋值 $(s_1, \ldots, s_n)$，其中对所有 $i \in [n]$，s_i 都属于 ξ_i 的支撑，使得

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (s_i - \mu_i) v_i \right\|_h \leq 4\sigma.$$

我们指出，定理 1.5 不要求满足 v_1、$\cdots$、v_n 中所述的各向同性位置条件，这与 [Brä18]的情形相同。此外，我们只需 $\mathrm{tr}_h[v_i] v_i$ 的双曲范数之和有界，而[Brä18]的结果要求每个向量的迹分别有界。

我们还想指出，双曲多项式类远比行列式多项式类广泛，而原始的 Kadison-Singer 型定理使用的正是行列式多项式。Lax 在 [Lax57] 中猜想，每个三变量双曲/实稳定多项式都可以表示为行列式多项式；这一猜想后来在 [HV07、LPR05]中得到解决。然而，当变量个数超过 3时，Lax 猜想并不成立； [Brä11、BVY14]通过反例展示了双曲/实稳定多项式 $h(x)$，甚至$(h(x))^k$ 也无法表示为任何 $k > 0$的行列式多项式。

我们的第二个主要结果考虑随机向量并非相互独立，而是从强 Rayleigh 分布中抽样的情形。若定义在 $[n]$ 的子集上的分布 μ 满足其生成多项式 $g_\mu(z) := \sum_{S \subseteq [n]} \mu(S) z^S \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_n]$ 为实稳定多项式，则称该分布为强 ***Rayleigh***；这意味着 $g_\mu(z)$ 在复平面的上半部分没有任何根，即对于任何满足 $\Re(z) \succ 0$ 的 $z \in \mathbb{C}^n$，都有 $g_\mu(z) \neq 0$。

定理 1.6 （主要结果 II，定理C.1 的非正式陈述，定理 1 的双曲版本。2, [AO14]）。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示方向 $e \in \mathbb{R}^m$上的双曲多项式。设 μ 是定义在 $[n]$ 上的齐次强 ***Rayleigh*** 概率分布，且每个元素的边缘概率至多为 ϵ_1。

假设 v_1、$\cdots$、$v_n \in \Gamma_+^h$ 属于 h 的双曲锥，且满足 $\sum_{i=1}^n v_i = e$，并且对所有 $i \in [n]$，都有 $\|v_i\|_h \leq \epsilon_2$。那么存在属于 μ 的支撑的 $S \subseteq [n]$，使得

$$\left\| \sum_{i \in S} v_i \right\|_h \leq 4(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2.$$

值得一提的是，先前的论文 [KLS20、AO14] 聚焦于行列式多项式，但其技术能否扩展到双曲／实稳定情形这一问题仍未得到解决。在我们的论文中，我们通过开发专门针对双曲多项式的新技术，填补了这一空白。

此外，我们沿用 [AOSS18] 的结果，并给出一种算法，可在亚指数时间内求出定理 1.5和定理 1.6 的近似解，具体为 m:

命题 1.7 （定理1.5的亚指数算法，推论 D.10的非正式表述）。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 是一个方向为 $e \in \mathbb{R}^m$ 的双曲多项式。设 $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma_+^h$是 n 个属于 Γ_+^h 的双曲锥 h中的向量。假设 $\sigma = \| \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \|_h$。

设 $\mathcal{P}$ 是证明定理*1.6*时使用的交错族。那么存在一个亚指数时间算法 $\mathrm{KadisonSinger}(\delta, \mathcal{P})$，使得对于任意 $\delta > 0$，它都会返回一个满足以下条件的符号赋值$(s_1, \cdots, s_n) \in \{\pm 1\}^n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n s_i u_i \right\|_h \leq 4(1+\delta)\sigma.$$

命题 1.8 （定理 1.6 的亚指数算法，推论 D.14 的非正式表述）。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示方向为 $e \in \mathbb{R}^m$ 的双曲多项式。设 μ 是定义在 $[n]$ 上的齐次强 ***Rayleigh*** 概率分布，且每个元素的边缘概率至多为 ϵ_1，并设 v_1、 $\cdots$、 $v_n \in \Gamma_+^h$ 是 n 向量，满足 $\sum_{i=1}^n v_i = e$，且对所有$i \in [n]$, $\|v_i\|_h \leq \epsilon_2$。

设 $\mathcal{Q}$ 是定理 *1.6* 证明中使用的交错族。则存在一个亚指数时间算法 $\mathrm{KadisonSinger}(\delta,\ \mathcal{Q})$，使得对于任意 $\delta > 0$，它返回集合 S，该集合属于 μ的支撑，并满足

$$\left\| \sum_{i \in S} u_i \right\|_h \leq (1+\delta) \cdot \left(4(\epsilon_1+\epsilon_2) + 2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2\right).$$

2 相关工作

实稳定多项式 实稳定性是多变量多项式的一项重要性质。在 [BB09], 中，作者利用实稳定性，为统计力学和组合学中的李-杨型问题提供了一个统一框架。实稳定多项式还与行列式永久函数有关。Gurvits [Gur07] 通过实稳定多项式的容量证明了范德瓦尔登猜想。该猜想认为， $n \times n$ 双随机矩阵的永久函数下界为 $n!/n^n$。最近， [GL21] 改进了实稳定多项式的容量下界，这一结果可应用于矩阵缩放和度量旅行商问题。此外，实稳定多项式还是解决许多计数和采样问题的重要工具[NS16, AOR16, AO17, SV17, AOSS16, AMOV18, AOV18, ALOV19, ALO+21]。

双曲多项式 双曲多项式最初是为了研究偏微分方程的稳定性而定义的 [Går51, Hor83, Kry95]。在理论计算机科学领域，Güler[Gül97] 首次引入了用于优化（双曲规划）的双曲多项式，这是一种对线性规划和半定规划的推广。随后，人们为双曲规划设计了若干算法 [Ren06, MT14, RS14, Ren16, NP18, Ren19]。另一方面，研究人员为证明双曲规划与半定规划之间的等价性付出了大量努力，这与“广义拉克斯猜想”（该猜想认为每个双曲锥都是谱半代数的）及其变体密切相关 [HV07, LPR05, Brä14, KPV15, Sau18, Ami19, RRSW19]。

强 Rayleigh 分布强 Rayleigh 分布由 [BBL09]提出。作者还证明了强 Rayleigh 分布的许多基本性质，包括负相关性，以及在条件化、乘积和限制到子集等操作下的闭包性质。 [PP14] 证明了强 Rayleigh 随机变量的 Lipschitz 函数的一个集中性结果。 [KS18] 证明了强 Rayleigh 随机变量的矩阵集中性，这意味着添加少量均匀随机生成树即可得到图的谱稀疏化器。

强 Rayleigh 分布也有许多算法应用。 [AOR16] 利用齐次强 Rayleigh 分布的负依赖性质，设计了使用蒙特卡洛马尔可夫链从行列式点过程生成近似样本的高效算法。生成树分布的强 Rayleigh 性质是改进旅行商问题 [KKO20、KKO21] 和 k-边连通图问题[KKOZ21]。

Kadison-Singer 型结果的其他推广BCMS19改进了 [秩一 Kadison-Singer 定理的上界，RL20]。 [AB20] 进一步将 [RL20]的结果推广，证明了 Anderson 铺砌猜想的实稳定版本。然而，他们对实稳定多项式使用了不同的范数，因此他们的结果与我们的结果不可比较。在高秩情形下，[Coh16a] 也为高秩矩阵证明了一个 Kadison-Singer 结果。 [SZ22] 将 [Brä18]的结果放宽到了处于次各向同性位置的向量。此外，他们还为常秩向量证明了一个双曲 Spencer 定理。

推广 Kadison-Singer 类型结果的另一个方向，是将 $\{+1,-1\}$-着色放宽为 $\{0,1\}$-着色，这被称为文献 [Wea04] 中 Kadison-Singer 问题的单侧版本。更具体地说，给定 n 各向同性向量 $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^m$，其范数为 $\frac{1}{\sqrt{N}}$，目标是找到一个大小为 $S \subset [n]$ 的子集 k，使得 $\|\sum_{i\in S} v_i v_i^\top\| \leq \frac{k}{n} + O(1/\sqrt{N})$。与原始的 Kadison-Singer 问题不同，Weaver [Wea04] 证明了该问题可以在多项式时间内求解。最近，Song、Xu 和 Zhang [SXZ22] 借助高效的内积搜索数据结构，降低了算法的时间复杂度。

Kadison-Singer 问题的应用 Kadison-Singer 定理衍生出了许多有趣的结果。在谱图论中， [HO14] 利用交错族的相同证明技巧，给出了谱稀疏树猜想的一个充分条件。 [AO14]利用 Kadison-Singer 定理的 strongly-Rayleigh 扩展，证明了一个较弱的充分条件。基于这一结果， [AO15] 证明了任意 k-边连通图都有一棵 $O(^{\log}\log(n)\,k)$-稀疏树，并给出了非对称旅行商问题的 poly(log log(n)) 积分间隙。 [MSS18, Coh16b] 利用 Kadison-Singer 定理构造了任意规模和次数的二分 Ramanujan 图。在网络设计问题中， [LZ20]利用文献 [KLS20], 中的结果，为一般网络设计凸规划构造了一种谱舍入算法，该算法可应用于加权实验设计、谱网络设计和加性谱稀疏化器。

3 证明概述

3.1 双曲偏差

在本节中，我们将概述 Kadison-Singer 定理的双曲推广（定理1.5）的证明。我们将采用与 [MSS15a、MSS15b], 中原始 Kadison-Singer 定理（定理1.1）相同的策略，分为以下三个主要技术步骤。

为简单起见，我们假设随机变量 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \{\pm 1\}$ 是相互独立的 Rademacher 随机变量，即对于所有 $i \in [n]$，$\Pr[\xi_i = 1] = \frac{1}{2}$ 和 $\Pr[\xi_i = -1] = \frac{1}{2}$。

要将 Kadison-Singer 结论推广到双曲范数，一个主要障碍是如何定义随机向量之和 $\sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ 的双曲范数的方差。在行列式多项式的情形中，每个 v_i 对应一个秩为 1 的矩阵 $u_i u_i^*$，不难看出，谱范数的方差为 $\| \sum_{i=1}^n (u_i u_i^*)^2 \|$。然而，在双曲/实稳定多项式的框架中，并没有与“矩阵平方”相对应的概念。相反，我们定义双曲方差：

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \right\|_h$$

用双曲迹来表示，并证明四个双曲偏差就足够了。

定义特征多项式交错族。第一步，我们构造一族特征多项式 $\{p_s : \ s \in \{\pm 1\}^t, \ t \in \{0, \cdots, n\}\}$ 如下：对于每个$\mathbf{s} \in \{\pm 1\}^n$，定义叶节点多项式：

$$p_{\mathbf{s}}(x) := \left(\prod_{i=1}^n p_{i,s_i} \right) \cdot h\left(xe + \sum_{i=1}^n s_i v_i \right) \cdot h\left(xe - \sum_{i=1}^n s_i v_i \right),$$

对于所有 $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$，$\mathbf{s}' \in \{\pm 1\}^\ell$，我们构造一个内节点，其对应的多项式与比特串 $\mathbf{s}'$ 相对应：

$$p_{\mathbf{s}'}(x) := \sum_{\mathbf{t} \in \{\pm 1\}^{n-\ell}} p_{(\mathbf{s}', \mathbf{t})}(x).$$

其中，$(\mathbf{s}', \mathbf{t}) \in \{\pm 1\}^n$ 是将 $\mathbf{s}'$ 与 $\mathbf{t}$ 拼接而成的比特串。

接下来我们将证明，上述特征多项式族构成一个交错族（详见引理 B.6 ）。根据交错族的基本性质，我们总能找到一个叶节点根多项式 p_s（其中 $s \in \{\pm 1\}^n$），使其最大根的上界不超过最顶层多项式的最大根。

$$p_\emptyset(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1, \cdots, \xi_n} \left[h\Big(xe + \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \Big) \cdot h\Big(xe - \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \Big) \right].$$

（我们称 $p_\emptyset$ 为混合特征多项式）。注意，将p_s 的最大根改写为 $\sum_{i=1}^n s_i v_i$ 的期望双曲范数后，我们得到

$$\lambda_{\max}(p_\emptyset) = \left\| \sum_{i=1}^n s_i v_i \right\|_h. \tag{1}$$

（正式表述请参见推论 B.7。）

此外，我们将取 $s \in \{\pm 1\}^n$ 作为主定理（定理1.5）中对应的符号赋值。接下来，只需对混合特征多项式的最大根给出上界。

从混合特征多项式到多元多项式。在第二步中，我们将证明，对 n 随机变量取平均所得的混合特征多项式

$$p_\emptyset(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left[h\Big(xe+\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\Big)\cdot h\Big(xe-\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\Big)\right]$$

等价于一个具有 n 个额外变量 $z_1, \cdots, z_n$ 的多项式：

$$\prod_{i=1}^n\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Big|_{z=0}\left(h\Big(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i\Big)\right)^2. \tag{2}$$

（详见引理 B.8 。）因此，我们可以将 $\chi_{\max}(p_\emptyset)$ 的上界转化为（2）中最大根的上界。借助障碍论证，后者的估计结果更容易得到 [MSS15b]。

为证明这种等价关系成立，我们对随机变量 ξ_1、……、ξ_n 使用归纳法。具体而言，我们从 ξ_1 出发，并在 ξ_2、……、ξ_n 的任意固定取值条件下进行讨论。我们证明，对 ξ_1 取期望等价于对多项式应用算子 $(1-\frac{\partial^2}{\partial z_1^2})$

$$\left(h(xe+z_1v_1+\sum_{i=2}^n \xi_i v_i)\right)^2$$

并令 $z_1=0$。这里我们利用期望与二阶导数之间的关系：对于任意 Rademacher 随机变量 ξ,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi}[h(x_1-\xi v)\cdot h(x_2+\xi v)] = \left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\Big|_{t=0} h(x_1+tv)h(x_2+tv).$$

重复此过程，每次移除一个随机变量。经过 n 次迭代后，我们得到所需的多元多项式。

我们还需要证明该多元多项式（方程（2））具有实根性。首先考虑一个简单情形： h本身是实稳定多项式，如行列式多项式的情形。根据实稳定多项式的闭包性质（见事实 A.5），即可轻松推出其具有实根性。具体来说，我们可以证明 $(h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i))^2$ 也是实稳定多项式。此外，应用算子 $(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2})$ 并对 $z=0$ 施加限制，都会保持实稳定性。因此，该多元多项式是单变量实稳定多项式，这等价于它具有实根。

接下来，我们证明当 h 是双曲多项式时，该多元多项式（方程（2））也具有实根性。我们的方法是证明 h： $h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)$ 的线性限制是关于 $\mathbb{R}[x,z_1,\ldots,z_n]$的实稳定多项式。实稳定性的一个众所周知的判别方法是：若对任意$a\in\mathbb{R}^{n+1}_{>0}$， $b\in\mathbb{R}^{n+1}$，一维限制 $p(at+b)\in\mathbb{R}[t]$ 均非零且具有实根，则 $p(x)$ 就是实稳定的。我们通过将 $h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)$ 限制到 $at+b$来检验，得到以下多项式：

$$h\Big((a_1e+\sum_{i=1}^n a_{i+1}v_i)t+y\Big)\in\mathbb{R}[t],$$

其中， y是一个依赖于 b的固定向量。由于对于所有 $i\in[n+1]$， $a_i>0$，且 e， v_1，…， v_n都是双曲锥中的向量，因此向量 $a_1e+\sum_{i=1}^n a_{i+1}v_i$也属于双曲锥。

然后，根据双曲多项式的定义，我们立即可知，对于任意 $a \in \mathbb{R}^{n+1}_{>0}$和 $b \in \mathbb{R}^{n+1}$， $h((a_1e+\sum_{i=1}^n a_{i+1}v_i)t+y)$都是实根的。因此，我们可以得出结论，受限双曲多项式 $h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)$ 是实稳定的，剩余证明与实稳定情形相同。

应用障碍论证。最后，我们使用障碍论证来寻找一个"上障碍向量"，其各分量都大于多元多项式可能具有的任意根。具体而言，我们考虑多元多项式 $P(x,\ z) = (h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i))^2$。定义任意变量 $i \in [n]$ 的障碍函数如下：

$$\Phi_P^i(\alpha(t), -\delta) = \frac{\partial_{z_i} P(x,z)}{P(x,z)}\Big|_{x=\alpha(t), z=-\delta},$$

其中 $\delta \in \mathbb{R}^n$ 其中 $\delta_i = t\mathrm{tr}_h[v_i]$ ，对于 $i \in [n]$ ， $\alpha(t) > t$ 是一个取决于 t的参数 .

作为预热，考虑 $\sigma = 1$ 的情形，并假设 $\|\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[v_i]v_i\|_h \le 1$。由双曲特征值的线性性质和该假设，容易证明 $(\alpha(t) -\delta)$ 是 P的一个上障碍。接下来，我们对 $(\alpha(t) -\delta)$ 处障碍函数的值进行上界估计。当 h是行列式多项式时，这一步很简单，因为 log det 的导数就是矩阵的迹。对于一般的双曲多项式，我们将把偏导数 ∂_{z_i} 改写为方向导数 D_{v_i} ，并得到

$$\Phi_P^i(\alpha(t), -\delta) = 2 \cdot \frac{(D_{v_i}h)(\alpha e - te + t(e - \sum_{j=1}^n \mathrm{tr}_h[v_j]v_j))}{h(\alpha e - te + t(e - \sum_{j=1}^n \mathrm{tr}_h[v_j]v_j))}.$$

我们注意到，我们的假设 $\|\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[v_i]v_i\|_h \le 1$ 意味着 $e - \sum_{j=1}^n \mathrm{tr}_h[v_j]v_j \in \Gamma_+^h$。根据函数 $^{h}{}_{(x)}$ $D_{v_i}h(x)$ 在双曲锥上的凹性，我们可以证明：

$$\Phi_P^i(\alpha(t), -\delta) \le \frac{2\,\mathrm{tr}_h[v_i]}{\alpha(t) - t}.$$

现在，我们可以应用障碍更新引理于 [KLS20]（引理 A.23），其中 $\alpha(t) = 2t = 4$ 以证明

$$\Phi^j_{(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)P}(4, -\delta + \delta_i \mathbf{1}_i) \le \Phi_P^j(4, -\delta).$$

换言之，偏微分算子 $(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)$ 将上障碍平移了 $(0, \cdots, 0, \delta_i, 0, \cdots, 0)$。对变量 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 应用归纳法，我们最终可以得到一个上障碍，其为

$$(4, -\delta + \sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{1}_i) = (4, 0, \ldots, 0),$$

这意味着 $(4, 0, \ldots, 0)$ 位于根的上方。

$$\prod_{i=1}^n \Big(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big) \left(h\Big(xe + \sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i\Big)\right)^2 \tag{3}$$

（详见引理 B.14）。

这一过程中的一个挑战是确保障碍函数保持非负。为此，我们利用了如下文献所确立的双曲障碍函数的多维凸性：

[陶13]（引理 A.25）。对于 $\sigma \neq 1$的情形，通过简单的缩放论证即可满足这一要求。

将上述三个步骤结合起来，我们可以证明 $\Pr_{\xi_1,\cdots,\xi_n}[\|\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\|_h \leq 4\sigma] > 0$对于向量 $v_1,\ldots,v_n$ 位于双曲锥中，且满足 $\|\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[v_i]v_i\|_h = \sigma^2$。完整证明见附录B。

3.2 强 Rayleigh 分布的推广

我们对定理 1.6 的主要技术贡献，是提出了一种更具普适性且结构化的方法来刻画混合特征多项式。将混合特征多项式定义为

$$q_S(x) = \mu(S) \cdot h\left(xe - \sum_{i\in S} v_i\right). \tag{4}$$

我们希望证明它等价于受限多元多项式：

$$\prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2})\Big(h(xe + \sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0} \in \mathbb{R}[x, z_1, \cdots, z_n]. \tag{5}$$

尽管式（4）和式（5）是 [AO14]，的双曲推广，但我们无法应用前述技术。这是因为 [AO14] 会显式计算混合特征多项式，这严重依赖于特征多项式是一个行列式这一事实。目前尚不清楚如何将这种方法推广到双曲／实稳定特征多项式。

关键步骤在于 [AO14] 证明混合特征多项式与多元多项式之间的以下等式：

$$\begin{aligned} & x^{d_\mu - d} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mu}\left[\det\left(x^2 I - \sum_{i\in S} 2v_i v_i^\top\right)\right] \\ =& \prod_{i=1}^n (1 - \partial_{z_i}^2)\left(g_\mu(x\mathbf{1} + z) \cdot \det(xI + \sum_{i=1}^n z_i v_i v_i^\top)\right)\Big|_{z=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

其中 d_μ 是齐次强瑞利分布 μ 的次数（即g_μ的次数），而 m 是 v_i的维数。

然后他们展开右侧，得到：

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= \sum_{k=0}^m (-1)^k x^{d_\mu + m - 2k} \sum_{S\in\binom{[n]}{k}} \Pr_{T\sim\mu}[S \subseteq T] \cdot \sigma_k(\sum_{i\in S} 2v_i v_i^\top) \\ &= x^{d_\mu - m} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mu}\left[\det\left(x^2 I - \sum_{i\in S} 2v_i v_i^\top\right)\right] = \mathrm{LHS}, \end{aligned}$$

其中 $\sigma_k(M)$ 等于 $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 的所有 $k \times k$ 主子式之和。第一步来自展开乘积 $\prod_{i=1}^n (1 - \partial^2 z_i)$，第二步则来自 that

$$\det(x^2 I - \sum_{i=1}^n v_i v_i^\top) = \sum_{k=0}^m (-1)^{2k} x^{2m-2k} \sum_{S\in\binom{[n]}{k}} \sigma_k(\sum_{i\in S} v_i v_i^\top).$$

将一种技术直接推广到双曲/实稳定多项式 h 面临诸多挑战。其中一个挑战是缺少 h 的显式形式，这与 $h = \det$ 的情形不同，后者的行列式可以表示为若干子式的组合。缺少明确界定的子式，使得改写双曲/实稳定多项式颇为困难。为解决这一问题，我们设计了一种全新且结构化的证明，依赖归纳法，为该问题提供了新颖的解决方案。

归纳步骤。 我们首先将关于强瑞利分布 $T \sim \mu$ 的期望改写如下:

$$x^{d_\mu} \cdot 2^{-n} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{T\sim\mu}[h(xe - \sum_{i\in T} v_i)] = \frac{1}{2} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\cdots,\xi_n\sim\{0,1\}^{n-1}} \Big[(1-\partial_{z_1})h(x_2 + z_1v_1)x\partial_{z_1} g_2(x+z_1) + h(x_2)(1-x\partial_{z_1})g_2(x+z_1)\Big|_{z_1=0}\Big]$$

其中 g_2 定义为

$$g_2(t) := x^{\sum_{i=2}^n \xi_i} \cdot \prod_{i=2}^n \Big(\xi_i\partial_{z_i} + (1-\xi_i)(1-x\partial_{z_i})\Big) g_\mu(t, x+z_2, x+z_3, \cdots, x+z_n)\Big|_{z_2,\ldots,z_n=0}$$

并且 $x_2 = x^2 e - \sum_{i=2}^n \xi_i v_i$。主要观察是，齐次强瑞利分布的边缘分布可以通过其生成多项式的导数计算（事实 C.4）。

于是，我们可以将期望中的项展开为

$$(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_1}^2)\Big(h(x_2 + z_1v_1)g_2(x+z_1)\Big)\Big|_{z_1=0},$$

利用 $\mathrm{rank}(v_1)_h \le 1$ 和 $g_2(t)$ 的次数至多为 1 这一事实。

因此，我们得到归纳步骤如下:

$$\begin{aligned} & x^{d_\mu} \cdot 2^{-n} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(xe - \sum_{i=1}^n \xi_i v_i)\right] \\ = & \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_1}^2)\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\cdots,\xi_n}\left[h(xe - \sum_{i=2}^n \xi_i v_i + z_1 v_1)\cdot g_2(x+z_1)\right]\right)\Big|_{z_1=0}. \end{aligned}$$

归纳应用这一步。 重复上述过程 n 次后，我们最终得到

$$x^{d_\mu} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2 e - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i))\right] = \sum_{T\subseteq[n]} (-\frac{x}{2})^{|T|}\partial_{z^T}^2 \Big(h(x^2 e + \sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0}.$$

接下来，我们将偏导数改写为方向导数（详情请参见定义 A.13 ）。对于任意大小为 $T \subseteq [n]$ k 的子集，我们有

$$\begin{aligned} & (-\frac{x}{2})^k \partial_{z^T}^2 \Big(h(x^2 e + \sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0} \\ = & (-\frac{x}{2})^k \cdot 2^k \cdot \left(\prod_{i\in T} D_{v_i}\right) h(x^2 e)\cdot g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1}), \end{aligned}$$

其中 $g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1}) = \prod_{i\in T}\partial_{z_i} g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}$。根据 h 的齐次性，它进一步等于

$$x^d \cdot (-\frac{1}{2})^k \partial_{z^T}^2 \left(h(xe + \sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1}+z) \right) \Big|_{z=0}.$$

因此，我们证明了以下公式，该公式将 SR 分布下的特征多项式与多元多项式联系起来：

$$x^{d_\mu} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu} \left[h(x^2 e - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i)) \right] = x^d \cdot \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{2}\partial_{z_i}^2) \Big(h(xe + \sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1}+z) \Big) \Big|_{z=0}.$$

完整证明见附录 C。

内容安排。 附录 A 中给出了预备定义和事实。附录 B 中证明了第一个主要结果（定理 1.5），这是对 Kadison-Singer 结果的双曲推广，适用于较弱的条件（向量的平方和有界）。附录 C 中证明了第二个主要结果（定理1.6），这是对适用于强 Rayleigh 分布的 Kadison-Singer 结果的双曲扩展。主要结果的亚指数算法见附录 D。附录E 中给出了一些实稳定多项式和双曲多项式的例子。

参考文献

[AB20] Kasra Alishahi 和 Milad Barzegar。实稳定多项式和强 Rayleigh 过程的铺砌性质。arXiv 预印本 arXiv:2006.13923，2020年。[ALO+21] Nima Anari、Kuikui Liu、Shayan Oveis Gharan、Cynthia Vinzant 和 Thuy-Duong Vuong。对数凹多项式 IV：近似交换、紧混合时间以及近乎最优的森林采样。载于第53届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，第408–420页，2021年。[ALOV19] Nima Anari、Kuikui Liu、Shayan Oveis Gharan 和 Cynthia Vinzant。对数凹多项式 II：高维随机游走与一种用于计数拟阵基的 FPRAS。载于第51届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，第1–12页，2019年。[Ami19] Nima Amini。多变量匹配多项式的双曲锥的谱半代数性。《代数组合学杂志》，50(2):165–190，2019年。[AMOV18] Nima Anari、Tung Mai、Shayan Oveis Gharan 和 Vijay V Vazirani。可分、分段线性凹效用下不可分割物品的纳什社会福利。载于第二十九届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第2274–2290页。SIAM，2018年。[AO14] Nima Anari 和 Shayan Oveis Gharan。强 Rayleigh 测度的 Kadison-Singer 问题及其在非对称旅行商问题中的应用。载于 arXiv 预印本。https://arxiv.org/pdf/1412.1143.pdf，2014年。[AO15] Nima Anari 和 Shayan Oveis Gharan。降低有效电阻的流、谱稀疏树和非对称旅行商问题。载于《计算机科学基础》（FOCS），2015年 IEEE 第56届年度研讨会，第20–39页。IEEE，2015年。

[AO17] Nima Anari 和 Shayan Oveis Gharan。永久不等式的推广及其在计数与优化中的应用。载于《第49届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集》，第384–396页，2017年。[AOR16] Nima Anari、Shayan Oveis Gharan 和 Alireza Rezaei。用于强 Rayleigh 分布和行列式点过程采样的蒙特卡洛马尔可夫链算法。载于《学习理论会议》，第103–115页。PMLR，2016年。[AOSS16] Nima Anari、Shayan Oveis Gharan、Amin Saberi 和 Mohit Singh。纳什社会福利、矩阵永久式与稳定多项式。arXiv 预印本 arXiv:1609.07056，2016年。[AOSS18] Nima Anari、Shayan Oveis Gharan、Amin Saberi 和 Nikhil Srivastava。最大根的近似及其在交错族中的应用。载于《第二十九届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，第1015–1028页。SIAM，2018年。[AOV18] Nima Anari、Shayan Oveis Gharan 和 Cynthia Vinzant。对数凹多项式、熵以及一种用于拟阵基计数的确定性近似算法。载于《2018 年 IEEE 第59届计算机科学基础年会（FOCS）》，第35–46页。IEEE，2018年。[BB08] Julius Borcea 和 Petter Brändén。稳定多项式在混合行列式中的应用：Johnson猜想、单峰性与对称化Fischer乘积。《杜克数学杂志》，143(2):205–223，2008年。[BB09] Julius Borcea 和 Petter Brändén。Lee-Yang 和 Pólya-Schur计划。第二部分：稳定多项式理论及其应用。《纯粹与应用数学通讯：库朗数学科学研究所发行的期刊》，62(12):1595–1631，2009年。[BBL09] Julius Borcea、Petter Brändén 和 Thomas Liggett。负依赖与多项式几何。《美国数学学会杂志》，22(2):521–567，2009年。[BCMS19] Marcin Bownik、Pete Casazza、Adam W Marcus 和 Darrin Speegle。Weaver猜想和Feichtinger猜想的改进界。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2019(749):267–293，2019年。[BGLS01] Heinz H Bauschke、Osman Güler、Adrian S Lewis 和 Hristo S Sendov。双曲多项式与凸分析。《加拿大数学杂志》，53(3):470–488，2001年。[Brä10] Petter Brändén。关于双曲锥的笔记。可参见 https://math. berkeley. edu/ ˜ bernd/branden. pdf，2010年。[Brä11] Petter Brändén。行列式表示性的障碍。《数学进展》，226(2):1202–1212，2011年。[Brä14] Petter Brändén。初等对称多项式的双曲锥是谱锥。《优化快报》，8(5):1773–1782，2014年。[Brä18] Petter Brändén。双曲多项式与 Kadison-Singer 问题。arXiv 预印本 arXiv:1809.03255，2018年。

[BVY14] Sam Burton、Cynthia Vinzant 和 Yewon Youm。Vamos 拟阵多项式的实稳定扩张。arXiv 预印本 arXiv:1411.2038，2014 年。[Coh16a] Michael Cohen。高秩矩阵之和的改进谱稀疏化与 Kadison-Singer。载于班夫数学创新与发现国际研究站。https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/48630/items/ 1.0340957，2016 年。[Coh16b] Michael B Cohen。多项式时间内的拉马努金图。载于 2016 IEEE 第57届年度计算机科学基础研讨会（FOCS），第276–281页。IEEE，2016 年。[CS07] Maria Chudnovsky 和 Paul Seymour。无爪图的独立多项式的根。J. Combin. Theory Ser. B，97(3)：350–357，2007 年。[DG94] Jean-Pierre Dedieu 和 R. J. Gregorac。勘误："重新审视 Obreschkoff 定理：哪些凸集包含于双曲多项式集合中？" [J. Pure Appl. Algebra 81（1992），第3期，269–278；MR1179101（93g:12001）| 作者为 Dedieu。J. Pure Appl. Algebra，93(1)：111–112，1994 年。[Fel80] H. J. Fell。关于多项式凸组合的零点。Pacific J. Math.，89(1)：43–50，1980 年。[Går51] Lars Gårding。具有常系数的线性双曲偏微分方程。Acta Mathematica，85：1–62，1951 年。[Går59] Lars Gårding。关于双曲多项式的一个不等式。Journal of Mathematics and Mechanics，第957–965页，1959 年。[GL21] Leonid Gurvits 和 Jonathan Leake。通过乘积化得到容量下界。载于第53届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，第847–858页，2021年。[Gül97] Osman Güler。双曲多项式与凸规划的内点法。Mathematics of Operations Research，22(2)：350–377，1997 年。[Gur07] Leonid Gurvits。类似范德瓦尔登/Schrijver-Valiant 的猜想与稳定（即双曲）齐次多项式：一个适用于全部情形的定理。arXiv 预印本 arXiv:0711.3496，2007 年。[HLJ09] F Reese Harvey 和 H Blaine Lawson Jr。双曲多项式与狄利克雷问题。arXiv 预印本 arXiv:0912.5220，2009 年。[HO14] Nicholas JA Harvey 和 Neil Olver。pipage 舍入、悲观估计量与矩阵集中。载于第二十五届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第926–945页。SIAM，2014 年。[Hor83] L Hormander。线性偏微分算子的分析 II。Grundlehren，257，1983 年。[HV07] J William Helton 和 Victor Vinnikov。集合的线性矩阵不等式表示。Communications on Pure and Applied Mathematics：库朗数学科学研究所发行的期刊，60(5)：654–674，2007 年。

[KKO20] Anna R Karlin、Nathan Klein 和 Shayan Oveis Gharan。半整数情形下 TSP 的一种改进近似算法。载于《第52届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，第 28–39 页，2020年。[KKO21] Anna R Karlin、Nathan Klein 和 Shayan Oveis Gharan。度量 TSP 的一种（略有改进的）近似算法。载于《第53届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，第 32–45 页，2021年。[KKOZ21] Anna R Karlin、Nathan Klein、Shayan Oveis Gharan 和 Xinzhi Zhang。针对最小 k-边连通多子图问题的一种改进近似算法。arXiv 预印本 arXiv:2101.05921，2021年。[KLS20] Rasmus Kyng、Kyle Luh 和 Zhao Song。秩一矩阵只需四个偏差。载于《数学进展》。arXiv 预印本 arXiv:1901.06731，2020年。[KPV15] Mario Kummer、Daniel Plaumann 和 Cynthia Vinzant。双曲多项式、交错多项式与平方和。《数学规划》，153(1):223–245，2015年。[Kry95] N.V. Krylov。关于完全非线性二阶椭圆方程的一般概念。《美国数学会汇刊》，347(3):857–895，1995年。[KS59] Richard V Kadison 和 Isadore M Singer。纯态的扩张。《美国数学杂志》，81(2):383–400，1959年。[KS18] Rasmus Kyng 和 Zhao Song。针对强 Rayleigh 分布的矩阵 Chernoff 界，以及由少量随机生成树构造的谱稀疏化器。载于《2018 年 IEEE 第59届计算机科学基础年会（FOCS）》，第 373–384 页。IEEE，2018年。[Lax57] Peter D Lax。微分方程、差分方程与矩阵理论。技术报告，纽约大学，纽约。原子能委员会计算与应用数学中心，1957年。[LPR05] Adrian Lewis、Pablo Parrilo 和 Motakuri Ramana。Lax 猜想成立。《美国数学会会刊》，133(9):2495–2499，2005年。[LZ20] Lap Chi Lau 和 Hong Zhou。网络设计的谱方法。载于《第52届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，第 826–839 页，2020年。[MSS15a] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 I：任意次数的二分 Ramanujan 图。《数学年刊》（第2辑），182(1):307–325，2015年。[MSS15b] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 II：混合特征多项式与 Kadison-Singer 问题。《数学年刊》（第2辑），182(1):327–350，2015年。[MSS18] A. Marcus、D. Spielman 和 N. Srivastava。交错族 IV：任意规模的二分 Ramanujan 图。《SIAM 计算杂志》，47(6):2488–2509，2018年。[MT14] Tor Myklebust 和 Levent Tunçel。基于原始-对偶度量的凸优化内点算法。arXiv 预印本 arXiv:1411.2129，2014年。

[NP18] Simone Naldi 和 Daniel Plaumann。双曲规划中的符号计算。《代数及其应用杂志》，17(10):1850192，2018。[NS16] Aleksandar Nikolov 和 Mohit Singh。在划分约束下最大化行列式。载于《第四十八届 ACM 计算理论研讨会论文集》，第 192–201 页，2016。[PP14] Robin Pemantle 和 Yuval Peres。行列式测度及其他强 Rayleigh 测度下 Lipschitz 泛函的集中性。《组合学、概率与计算》，23(1):140–160，2014。[Ren06] James Renegar。双曲规划及其导数松弛。《计算数学基础》，6(1):59–79，2006。[Ren16] James Renegar。适用于一般凸优化的“高效”次梯度方法。《SIAM 优化杂志》，26(4):2649–2676，2016。[Ren19] James Renegar。双曲规划的加速一阶方法。《数学规划》，173(1-2):1–35，2019。[RL20] Mohan Ravichandran 和 Jonathan Leake。混合行列式与 Kadison–Singer 问题。《数学年刊》，377(1):511–541，2020。[RRSW19] Prasad Raghavendra、Nick Ryder、Nikhil Srivastava 和 Benjamin Weitz。双曲锥谱半代数表示的指数级下界。载于《第三十届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，第 2322–2332 页。SIAM，2019。[RS14] James Renegar 和 Mutiara Sondjaja。一种用于半定规划和双曲规划的多项式时间仿射缩放方法。arXiv 预印本 arXiv:1410.6734，2014。[Sau18] James Saunderson。半正定锥一阶导数松弛的谱半代数表示。《优化快报》，12(7):1475–1486，2018。[Spe85] Joel Spencer。六个标准差就足够了。《美国数学会汇刊》，289(2):679–706，1985。[SV17] Damian Straszak 和 Nisheeth K Vishnoi。实稳定多项式与拟阵：优化与计数。载于《第 49 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集》，第 370–383 页，2017。[SXZ22] Zhao Song、Zhaozhuo Xu 和 Lichen Zhang。利用内积搜索数据结构加速稀疏化，2022。[SZ22] Zhao Song 和 Ruizhe Zhang。双曲集中性、反集中性与差异度。载于《近似、随机化与组合优化：算法与技术（APPROX/RANDOM 2022）》。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik，2022。[Tao13] Terence Tao。实稳定多项式与 Kadison-Singer 问题。https://terrytao.wordpress.com/2013/11/04/real-stable-polynomials-and-the-kadison-singer-problem/，2013。

[Tro15] Joel A. Tropp。矩阵集中不等式导论。《基础与趋势》® 机器学习，8(1-2):1–230，2015。[Wag11] David Wagner。多元稳定多项式：理论与应用。《美国数学会通报》，48(1):53–84，2011。[Wea04] Nik Weaver。差异理论中的 Kadison-Singer 问题。《离散数学》，278(1- 3):227–239，2004。

A 预备知识

我们汇集了以下小节中的若干基本线性代数与分析事实。

记号。 对于任意正整数 n，我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$。我们用 $\mathbf{1}$ 表示全一向量，并用 $\mathbf{1}_i$ 表示第 i 个坐标为 1、其他坐标为 0 的向量。

A.1 实稳定多项式

定义 A.1。 若多元多项式 $p \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ 在区域 $\{(x_1, \ldots, x_m) : \mathrm{Im}(x_i) > 0$ 中没有零点（对所有 $i \in [m]\}$），则称其为稳定 。若 p 稳定且具有实系数，则称 p 为实稳定 。

在本文余下部分，我们将讨论范围限定在实系数多项式上。

事实 A.2. 称单变量多项式 $p \in \mathbb{R}[t]$ 是实根的，当且仅当它是实稳定的。

事实 A.3 (实稳定多项式的等价定义**)。** 多元多项式 $p \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$是实稳定的，当且仅当对于任意 $a \in \mathbb{R}^m_{>0}$ 和 $b \in \mathbb{R}^m$，关于 t 的单变量多项式 $p(at + b)$ 不恒为零且是实根的。

引理 A.4 (命题 2.4, [BB08]**)。** 若 $A_1, \ldots, A_n$ 是半正定对称矩阵，则多项式

$$\det\left(\sum_{i=1}^{n} z_i A_i\right)$$

是实稳定的。

我们还需要实稳定性在乘积下（参见 [BBL09]）、将变量限制为实数值（参见 [Wag11，引理 2.4(d)]）以及取 $(1 - \partial_{x_i}^2)$ 时（参见 [AO14，推论 2.8]）保持不变。

事实 A.5 (实稳定多项式的闭包运算**)。** 设 p、$q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 是两个实稳定多项式。则以下运算保持实稳定性：

- **(乘积)** $p \cdot q$。
- **(实值限制)** 对于任意 $a \in \mathbb{R}$，$p|_{x_1=a} = p(a, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}[x_2, \ldots, x_m]$。
- **(一减二阶偏导数)** 对于任意 $c \in \mathbb{R}_+$，$i \in [n]$，$(1 - c \cdot \partial_{x_i}^2) p(x_1, \ldots, x_n)$.

A.2 双曲多项式

定义 A.6 (双曲多项式**)。** 齐次多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 关于向量 $e \in \mathbb{R}^m$ 是双曲的，且满足 $h(e) > 0$，如果对于所有 $x \in \mathbb{R}^m$，单变量多项式$t \mapsto h(te - x)$ 只有实根。

此外，如果 h 的次数为 d，则固定任意 $x \in \mathbb{R}^m$，我们可以写成

$$h(te - x) = h(e) \prod_{i=1}^{d} (t - \lambda_i(x)),$$

其中 $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \cdots \geq \lambda_d(x)$ 是单变量多项式 $h(te-x)$ 的实根。特别是，

$$h(x) = h(e)\prod_{i=1}^{d}\lambda_i(x).$$

我们将 λ_i（x）记为 x 的第 i 个特征值。

定义 A.7（双曲锥）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 是一个关于 $e \in \mathbb{R}^m$ 的 d 次双曲多项式。对于任意 $x \in \mathbb{R}^m$，令 h（$te-x$）的实根为 λ_1（x）$\geq \cdots \geq \lambda_d$（$x$）$\in \mathbb{R}^d$。定义 h 的双曲锥为

$$\Gamma_{++}^h := \{x \ : \ \lambda_d(x) > 0\}.$$

此外，定义 Γ_+^h 的闭包为

$$\Gamma_+^h := \{x \ : \ \lambda_d(x) \geq 0\}.$$

事实 A.8。对于任意 $e \in \mathbb{R}_{>0}^m$ 和任意齐次实稳定多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$，$h$ 是关于 e 的双曲多项式。换言之，$\mathbb{R}_{>0}^m \subseteq \Gamma_+^h$。

证明。对于任意 $e \in \mathbb{R}_{>0}^m$ 以及任意 $x \in \mathbb{R}^m$，根据事实 A.3（将 a 替换为 e，并将 b 替换为 x），单变量多项式 $h(te-x)$ 的根均为实数。根据定义 A.6 h 是关于方向 e的双曲多项式。

□

定义 A.9（双曲迹、秩和谱范数）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 是关于 $e \in \mathbb{R}^m$ 的次数为 d 的齐次双曲多项式。对于任意 $x \in \mathbb{R}^m$，令 $\lambda_1(x) \geq \cdots \geq \lambda_d(x) \in \mathbb{R}^d$ 为 $h(te-x)$ 的实根。定义

$$\mathrm{tr}_h[x] := \sum_{i=1}^{d}\lambda_i(x), \quad \mathrm{rank}(x)_h := |\{i \ : \ \lambda_i(x) \neq 0\}|,$$
$$\|x\|_h := \max_{i\in[d]}|\lambda_i(x)| = \max\{\lambda_1(x), -\lambda_d(x)\}.$$

事实 A.10（用特征多项式的最大根表示双曲范数）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 是关于 $e \in \mathbb{R}^m$ 的次数为 d 的双曲多项式。对于任意 v_1、$\cdots v_m \in \Gamma_+^h$ 以及任意 s_1、$\cdots$、$s_m \in \mathbb{R}$，我们有

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right\|_h = \lambda_{\max}\left(h\left(xe-\sum_{i=1}^{n}s_iv_i\right)\cdot h\left(xe+\sum_{i=1}^{n}s_iv_i\right)\right)$$

其中 $\lambda_{\max}(f(x))$是 $f(x)$的最大根。

证明。对于任意向量 $v \in \mathbb{R}^m$，容易看出第 i 大特征值 $\lambda_i(v) = -\lambda_{d-i+1}(-v)$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}\left(h\left(xe-\sum_{i=1}^{n}s_iv_i\right)\cdot h\left(xe+\sum_{i=1}^{n}s_iv_i\right)\right) &= \max\left\{\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right), \lambda_1\left(-\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right)\right\}\\ &= \max\left\{\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right), -\lambda_d\left(\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right)\right\}\\ &= \left\|\sum_{i=1}^{m}s_iv_i\right\|_h.\end{aligned}$$

□

注 A.11。 将双曲多项式视为行列式多项式的推广是有益的。令 $X \in S^n(\mathbb{R})$ 为一个对称矩阵。定义 $h\colon\ S^n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ 如下

$$h(X) = \det(X).$$

那么， h 相对于单位矩阵 $I_n \in S^n(\mathbb{R})$是双曲的，因为对于所有 $X \in S^n(\mathbb{R})$， $h(tI - X)$ 的根都是 X 的特征值，因此 $h(tI - X)$ 是实根多项式。

定义 *A.7* 和定义 *A.9* 中的双曲多项式基本概念在线性代数中也有对应概念。为说明这些概念，令 h 为行列式多项式:

- h 的双曲锥为

$$\Gamma_+^h = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \ :\ \lambda_n(X) > 0\} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \ :\ X \succ 0\}.$$

- 对于所有 $X \in S^n(\mathbb{R})$， X 的双曲迹为

$$\mathrm{tr}_h[X] = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = \mathrm{tr}[X].$$

- 对于所有 $X \in S^n(\mathbb{R})$， X 的双曲秩为

$$\mathrm{rank}_h(X) = |\{i \ :\ \lambda_i(X) \neq 0\}| = \mathrm{rank}(X).$$

- 对于所有 $X \in S^n(\mathbb{R})$， X 的双曲谱范数为

$$\|X\|_h = \max_{i\in[n]} |\lambda_i(X)| = \|X\|.$$

此处 $\|X\|$ 表示 X的谱范数。

定义 A.12 （方向导数）。 给定多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$和向量$v \in \mathbb{R}^m$，定义 h 沿 v 方向的方向导数为

$$D_v h := \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

事实 A.13 （方向导数的等价定义）。 给定多项式 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$和向量 x， $v \in \mathbb{R}^m$，

$$(D_v h)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(x + tv), \tag{6}$$

$$(D_v^2 h)(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} h(x + tv). \tag{7}$$

事实 A.14 （双曲多项式的方向导数）。 令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 表示关于 $e \in \mathbb{R}^m$的双曲多项式。令 v_1、...、 $v_n \in \mathbb{R}^m$ 为满足 $\forall i \in [n]$、秩$_h$（v_i） ≤ 1的 n 向量。则对于任意 $t \in \mathbb{R}$，

$$(\prod_{i=1}^m D_{v_i} h)(te) = (\prod_{i=1}^n \partial_{z_i} h)(te + \sum_{i=1}^n z_i v_i).$$

此外，对于任意 $T \subseteq [m]$，我们有

$$(\prod_{i\in T} D_{v_i} h)(te) = (\prod_{i\in T} \partial_{z_i} h)(te + \sum_{i=1}^n z_i v_i)\Big|_{z=0}.$$

事实 A.15 (双曲多项式的一阶展开)。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 为任意双曲多项式。对于任意满足 $\forall i \in [n]$的向量 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$，使得 秩$_h(v_i) \leq 1$，以及任意实向量 $x \in \mathbb{R}^m$，

$$h(x \pm \sum_{i=1}^{n} v_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 \pm \partial_{z_i}) h(x + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i)\Big|_{z=0}.$$

此外，对于任意 $S \subseteq [n]$，

$$h(x \pm \sum_{i \in S} v_i) = \prod_{i \in S}(1 \pm \partial_{z_i}) h(x + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i)\Big|_{z=0}.$$

证明。 对 n 使用归纳法证明。

若 $n = 1$，则有

$$h(x \pm v_1) = (1 \pm D_{v_1})h(x) = (1 \pm \partial_{z_1})h(x + z_1 v_1)\Big|_{z_1=0},$$

这由 rank$_h(v_1) \leq 1$ 得出。

假设结论对 $n = k$ 成立。

当 $n = k + 1$ 时，令 $x' = x \pm \sum_{i=1}^{k} v_i$。我们有

$$\begin{aligned}
h(x \pm \sum_{i=1}^{k+1} v_i) &= h(x' \pm v_{k+1}) \\
&= (1 \pm \partial_{z_{k+1}}) h(x' + z_{k+1} v_{k+1})\Big|_{z_{k+1}=0} \\
&= (1 \pm \partial_{z_{k+1}}) h(x + z_{k+1} v_{k+1} \pm \sum_{i=1}^{k} v_i)\Big|_{z_{k+1}=0} \\
&= (1 \pm \partial_{z_{k+1}}) \prod_{i=1}^{k}(1 \pm \partial_{z_i}) h(x + \sum_{i=1}^{k+1} z_i v_i)\Big|_{z=0} \\
&= \prod_{i=1}^{k+1}(1 \pm \partial_{z_i}) h(x + \sum_{i=1}^{k+1} z_i v_i)\Big|_{z=0},
\end{aligned}$$

其中，第二步由 rank$_h(v_{k+1}) \leq 1$ 得出，第四步由归纳假设得出，最后一步则是因为算子 $(1 \pm \partial_{z_i})$ 和 $(1 \pm \partial_{z_j})$ 对于 $i \neq j \in [k+1]$ 可交换。

因此，命题得证。至于进一步的部分，这是因为当我们令 $z = 0$ 时，关于 $i \notin S$ 的剩余变量 z_i 将会消失。 □

A.3 交错族

我们回顾 [MSS15a] 中交错族的定义及其性质。

定义 A.16 （交错多项式与公共交错）。如果实根多项式 $g(x) = C\prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$ 交错于实根多项式 $f(x) = C'\prod_{i=1}^{n}(x - \beta_i)$，则

$$\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_n.$$

我们称多项式 f_1、……、 f_k 具有公共交错，如果存在一个多项式 g 与每个 f_i 交错。

以下引理将多项式之和的根与其公共交错的根联系起来。

引理 A.17 (引理 4.2, [MSS15a])。 设 $f_1, \ldots, f_k$ 是次数为 d、具有正首项系数的实根多项式。定义

$$f_\emptyset := \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

如果 $f_1, \ldots, f_k$ 具有公共交错，那么存在一个 $i \in [k]$，使得 f_i的最大根不大于 $f_\emptyset$的最大根。

定义 A.18 (定义 4.3, [MSS15a])。 设 $S_1, \ldots, S_n$ 为有限集。对于每种赋值 $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$，令 $f_{s_1,\ldots,s_n}(x)$ 为一个具有正首项系数的实根次数为 d 的多项式。对于 $k < n$的部分赋值 $s_1, \ldots, s_k \in S_1 \times \cdots \times S_k$，我们定义

$$f_{s_1,\ldots,s_k} := \sum_{s_{k+1} \in S_{k+1}, \ldots, s_n \in S_n} f_{s_1,\ldots,s_k,s_{k+1},\ldots,s_n}. \tag{8}$$

注意，这与我们在引理 *A.17*中对 $f_\emptyset$ 的定义相符。我们称多项式$\{f_{s_1,\ldots,s_n}\}$ 构成一个交错族，如果对于所有 $k = 0, \ldots, n-1$ 以及所有$(s_1, \ldots, s_k) \in S_1 \times \cdots \times S_k$，多项式

$$\left\{ f_{s_1,\cdots,s_k,t} : \ t \in S_{k+1} \right\}$$

具有公共交错。

以下引理将交错族的根与 $f_\emptyset$ 的根联系起来。

引理 A.19 （定理 4.4, [MSS15a]）。令 S_1、…、S_n 为有限集，并令 $\{f_{s_1,\ldots,s_n}\}$ 为交错族。那么存在某个 （s_1、…、 s_n） $\in S_1 \times \cdots \times S_n$，使得 $f_{s_1,\ldots,s_n}$ 的最大根以上界于 $f_\emptyset$ 的最大根。

最后，我们回顾实根性与公共交错之间的关系，这一关系已被多次独立发现 [DG94, Fel80, CS07]。

引理 A.20 ([DG94, Fel80, CS07]). 设 $f_1, \ldots, f_k$ 是次数相同且首项系数为正的单变量多项式。那么 $f_1, \ldots, f_k$ 有公共交错，当且仅当对于所有凸组合 $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ 都是实根的 $\alpha_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$。

A.4 屏障方法

定义 A.21 (多项式根的上屏障)。 对于多元多项式$p(z_1, \ldots, z_n)$，我们称 $z \in \mathbb{R}^n$ 在 p 的所有根之上，当且仅当对所有 $t \in \mathbb{R}^n_+$，

$$p(z + t) > 0.$$

我们用 $\mathbf{Ab}^p$ 表示所有位于 p 的根之上方的点所构成的集合。

我们使用如下的障碍函数 [MSS15b]和 [KLS20]。

定义 A.22 (障碍函数)。 对于多元多项式 p 和 $z \in \mathbf{Ab}^p$， p 在点 z 沿方向 i 的障碍函数为

$$\Phi_p^i := \frac{\partial_{z_i} p(z)}{p(z)}.$$

我们将使用以下引理，它控制应用二阶微分算子后根的偏移。该引理是 [KLS20]中的引理 5.3 的一个略微变体。

引理 A.23 (引理 5.3，出自 [KLS20])。设 $p(z_1, \cdots, z_m)$ 是实稳定的，且 $z \in \mathbf{Ab}p$。对于任意 $c \in [0,1]$ 和 $i \in [m]$，若

$$\Phi_p^i(z) < \sqrt{1/c}, \tag{9}$$

则 $z \in \mathbf{Ab}(1-c\cdot\partial_{z_i}^2)p$。若进一步对于 $\delta > 0$，

$$c \cdot \left(\frac{2}{\delta}\Phi_p^i(z) + (\Phi_p^i(z))^2\right) \leq 1, \tag{10}$$

则对于所有 $j \in [m]$，

$$\Phi^j_{(1-c\cdot\partial_i^2)p}(z + \delta \mathbf{1}_i) \leq \Phi_p^j(z).$$

注 A.24。在第 $c = 1/2$ 节和第 *B.4* 节 *C.4* 中使用上述引理时，我们取 .

引理 A.25 (多维凸性，[Tao13])。设 $p(z_1, \ldots\ldots, z_m)$ 是一个关于 m 个变量的实稳定多项式。对于任意 $i \in [m]$，

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_j^k}\Phi_p^i(x) \geq 0$$

对所有 $k = 0, 1$、2、.. . 以及 $x \in \mathbf{Ab}p$。

B 双曲 性 Kadison-Singer 关于标准差的推广 s

本节的目标是证明定理 B.1：

定理 *B.1*（定理 *1.5* 的正式表述）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示一个关于双曲方向 $e \in \Gamma_{++}^h$ 的双曲多项式，其中 $\Gamma_{++}^h \subseteq \mathbb{R}^m$ 是 h 的双曲锥。设 ξ_1、$\cdots$、ξ_n 表示 n 个独立随机变量，满足 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$ 和 $Var[\xi] = \tau_i^2$。设 v_1、.. .、 $v_n \in \Gamma_+^h$ 为向量，满足 $\forall i \in [n]$，$rank_h(v_i) \leq 1$。假设

$$\sigma^2 := \left\| \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \operatorname{tr}_h[v_i] v_i \right\|_h.$$

那么，

$$\Pr_{\xi_1,\cdots,\xi_n}\left[\left\| \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_i) v_i \right\|_h \leq 4\sigma\right] > 0.$$

我们将在第B.1节介绍预备知识。在第B.2节中，我们定义双曲特征多项式族，并证明其构成交错族。因此，接下来只需对交错多项式族的平均值，即混合特征多项式的最大根进行上界估计。我们注意到，需要使用一个将在第B.3节中证明的引理。

在第B.3节中，我们将混合特征多项式最大根的上界问题，化简为一个更容易的问题：求一个多元多项式最大根的上界。在第B.4节中，我们使用多元障碍方法求出该多元多项式最大根的上界。最后，在第B.5节中，我们证明定理B.1。

B.1 预备知识

本节陈述关于双曲多项式的一些有用事实。我们首先介绍双曲多项式的导数的一些重要性质：

定理 B.2 （见 [Brä18]，并在 [Går59、BGLS01、Ren06]中已知）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 是一个双曲多项式，并设 $v \in \Gamma_+$ 是一个满足 $D_v h \neq 0$的向量。则 *1)* $D_v h$ 是双曲的，且其双曲锥包含 Γ_{++}。

2) 多项式 $h(x) - y \cdot D_v h(x) \in \mathbb{R}[x, y]$ 是双曲的，其双曲锥包含$\Gamma_{++} \times \{y : y \leq 0\}$。此外，我们有 $(h(x) + y \cdot D_v h(x) \cdot (h(x) - y \cdot D_v h(x) \in \mathbb{R}[x, y]$ 是双曲的，其双曲锥包含 $\Gamma_{++} \times \{y : y \leq 0\}$。

3) 有理函数 $x \to \frac{h(x)}{D_v h(x)}$ 在 Γ_{++}上是凹的。

下面的引理建立了双曲迹与方向导数之间的联系：

事实 B.3 （双曲迹与导数之间的相关性）。令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 表示关于 $e \in \mathbb{R}^m$ 的双曲多项式。对于任意 $v \in \mathbb{R}^m$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有

$$\mathrm{tr}_h[v] = \alpha \cdot \frac{D_v h(\alpha e)}{h(\alpha e)}.$$

证明。根据定理 B.2，$D_v h$ 是双曲的，因此是齐次的。根据多项式根之和的韦达公式，我们有

$$\mathrm{tr}_h[v] = \frac{D_v h(e)}{h(e)}$$

由此可知，h 和 $D_v h$ 是齐次的，且 h 的次数比 $D_v h$大一。因而，

$$\alpha \cdot \frac{D_v h(\alpha e)}{h(\alpha e)} = \frac{D_v h(e)}{h(e)} = \mathrm{tr}_h[v].$$

□

事实 B.4. 令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 表示一个关于方向 $e \in \Gamma_{++}$ 的双曲多项式，并令 $\alpha > 0$。对于任意 M、$v \in \Gamma_+$，我们有

$$\frac{D_v h(\alpha e + M)}{h(\alpha e + M)} \leq \frac{D_v h(\alpha e)}{h(\alpha e)}.$$

证明。只需证明

$$\frac{h(\alpha e + M)}{D_v(\alpha e + M)} \geq \frac{h(\alpha e)}{D_v h(\alpha e)}.$$

根据定理 B.2，我们知道有理函数 $x \mapsto \frac{h(x)}{D_v h(x)}$ 在 Γ_{++} 上是凹的。因此我们知道

$$\begin{aligned}
\frac{h(\alpha e + M)}{D_v(\alpha e + M)} &\geq \frac{1}{2}\frac{h(2\alpha e)}{D_v h(2\alpha e)} + \frac{1}{2}\frac{h(2M)}{D_v h(2M)} \\
&= \frac{h(\alpha e)}{D_v h(\alpha e)} + \frac{h(M)}{D_v h(M)} \\
&\geq \frac{h(\alpha e)}{D_v h(\alpha e)}.
\end{aligned}$$

其中最后一步由$\frac{h(M)}{D_v h(M)} \geq 0$（根据 [Ren06]）。 □

B.2 定义特征多项式的交错族

在本节中，我们考虑以下交错族，并将关键性地利用它来证明定理B.1。

定义 *B.5*（定理 *B.1* 的交错族）。令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示一个关于双曲方向 $e \in \Gamma^h_{++}$的双曲多项式。令 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 表示 n 个具有有限支撑的独立随机变量，且 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$ 对于 $i \in [n]$。令 $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma^h_+$ 为满足对于所有 $i \in [n]$ 均有 $\mathit{rank}_h(v_i) \leq 1$ 的 n 个向量。对于每个 $s = (s_1, \ldots, s_n)$，其中 $s_i \in \mathit{supp}(\xi_i)$，令 $p_s \in \mathbb{R}[x]$ 定义如下多项式：

$$p_{\mathbf{s}}(x) := \left(\prod_{i=1}^{n} p_{i,s_i}\right) \cdot h\left(xe + \sum_{i=1}^{n}(s_i - \mu_i)v_i\right) \cdot h\left(xe - \sum_{i=1}^{n}(s_i - \mu_i)v_i\right)$$

其中 $p_{i,\ s_i} := \Pr_{\xi_i}[\xi_i = s_i]$。令 $\mathcal{P}$ 表示如下多项式族：

$$\mathcal{P} := \left\{ p_{(s_1,\cdots,s_\ell)} = \sum_{\substack{t_{\ell+1},\cdots,t_n: \\ t_j \in \mathrm{supp}(\xi_j)\ \forall j \in \{\ell+1,\ldots,n\}}} p_{(s_1,\cdots,s_\ell,t_{\ell+1},\cdots,t_n)} :\ \ell \in [n], s_i \in \mathrm{supp}(\xi_i)\ \forall i \in [\ell] \right\}.$$

引理 B.6（定理 B.1 的交错族）。在定义 $\mathcal{P}$ 中定义的多项式族*B.5*是一个交错族。

证明。任取 $\ell \in [n-1]$，并固定 $s_1, \cdots, s_\ell$ 作为 $\xi_1, \cdots, \xi_\ell$的任意部分赋值，即对于所有 $i \in \mathrm{supp}(\xi_i)$，$s_i \in \{\pm 1\}$。

容易看出，多项式 $p_{(s_1,\ldots,s_\ell)}$ 可以写成：

$$\left(\prod_{i=1}^{\ell} p_{i,s_i}\right) \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n} \left[h\left(xe + \left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i - \mu_i)v_i + \sum_{j=\ell+1}^{n}(\xi_j - \mu_j)v_j\right)\right) \cdot h\left(xe - \left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i - \mu_i)v_i + \sum_{j=\ell+1}^{n}(\xi_j - \mu_j)v_j\right)\right)\right]$$

令 $\{c_1, \ldots, c_k\}$ 为 $\xi_{\ell+1}$的支撑。于是，根据引理 A.20，只需证明对于任意满足 $\alpha \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ 且 $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$的，多项式

$$\alpha_1 p_{(s_1,\cdots,s_\ell,c_1)}(x) + \cdots + \alpha_k p_{(s_1,\cdots,s_\ell,c_k)}(x)$$

是实根的。我们将 α 解释为第 $(\ell+1)$ 个随机变量的概率密度，即令 $\sim p_{\ell+1,c_t} = \alpha_t$ 对所有 $t \in [k]$均成立。然后，我们可以定义一个新的随机变量 $\xi_{\ell+1}$，其支撑与 $\xi_{\ell+1}$ 相同~，且 $\Pr[\xi_{\ell+1} = c_t] = p_{\ell+1,c_t}$ 对所有 $t \in [k]$均成立。

注意到

$$\begin{aligned}\widetilde{p_{\mathbf{s}}}(x) :=& \left(\prod_{i=1}^{\ell} p_{i,s_i}\right) \\ &\times \mathop{\mathbb{E}}_{\widetilde{\xi}_{\ell+1},\xi_{\ell+2}\ldots,\xi_n}\left[h\left(xe-\left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i+(\widetilde{\xi}_{\ell+1}-\mu_{\ell+1})v_{\ell+1}+\sum_{j=\ell+2}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\right. \\ &\qquad \left.\cdot h\left(xe+\left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i+(\widetilde{\xi}_{\ell+1}-\mu_{\ell+1})v_{\ell+1}+\sum_{j=\ell+2}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\right] \\ =&\sum_{t=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{\ell} p_{i,s_i}\right)p_{\ell+1,c_t} \\ &\times \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+2},\ldots,\xi_n}\left[h\left(xe-\left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i+c_tv_{\ell+1}+\sum_{j=\ell+2}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\right. \\ &\qquad \left.\cdot h\left(xe+\left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i+c_tv_{\ell+1}+\sum_{j=\ell+2}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\right] \\ =&\sum_{i=1}^{k}\alpha_i p_{\mathbf{s},c_i}(x).\end{aligned}$$

根据引理B.8（我们指出，它不需要本节中的任何结果。我们将在第 B.3 节证明引理 B.8），$\widetilde{p_{\mathbf{s}}}$ 是实根的，这就完成了 $\mathcal{P}$ 是一个交错族的证明。

□

引理 B.6 推出以下推论，它是[KLS20]中命题 4.1 的双曲版本：

推论 B.7（交错族最大根的上界）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1,\cdots,x_m]$表示一个双曲多项式，其对应的双曲方向为 $e \in \Gamma_{++}^h$。设 ξ_1、...、ξ_n表示具有有限支撑集的 n 个独立随机变量，且对 $i \in [n]$ 有 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$ 。对于任意 v_1、$\ldots v_n \in \Gamma_{++}^h$，若对所有 $i \in [n]$ 都有秩$_h(v_i) \leq 1$，则存在一个符号赋值 s =(s_1、...、 s_n) ∈ 支撑(ξ_i) × ⋯ 支撑(ξ_n)，使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}(s_i-\mu_i)v_i\right\|_h$$

不超过最大根的

$$p_\emptyset(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\left[h\Big(xe+\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\cdot h\Big(xe-\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\right].$$

证明：设 $\mathcal{P}$ <style id='6}>为定义B.5中定义的交错族。根据引理B.6， $\mathcal{P}$ 是一个交错族。

对于任意固定的 $\ell \in [n]$ 以及前 ℓ 个s_1、 $\cdots$、 s_ℓ赋值，使得 $s_i \in \mathrm{supp}(\xi_i)$ 对于 $i \in [\ell]$，注意到

$$p_{s_1,\cdots,s_\ell}(x) = \left(\prod_{i=1}^{\ell} p_{i,s_i}\right) \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n}\left[h\left(xe - \left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i + \sum_{j=\ell+1}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\cdot h\left(xe + \left(\sum_{i=1}^{\ell}(s_i-\mu_i)v_i + \sum_{j=\ell+1}^{n}(\xi_j-\mu_j)v_j\right)\right)\right],$$

and

$$p_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\left[h\Big(xe + \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\cdot h\Big(xe - \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\right].$$

因此，由引理A.19，存在一个符号赋值

$$(s_1,\ldots,s_n) \in \mathrm{supp}(\xi_i)\times\cdots\mathrm{supp}(\xi_n)$$

使得 p_s 的最大根被其最大根所上界。

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\left[h\Big(xe + \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\cdot h\Big(xe - \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\right].$$

那么根据事实 A.10，我们有 $\|\sum_{i=1}^{m}(s_i-\mu_i)v_i\|_h = \lambda_{\max}(p_{\mathbf{s}})$，其上界为 $p_\emptyset$的最大根。

□

B.3 从混合特征多项式到多元多项式

在本节中，我们将证明混合特征多项式，即定义B.5中定义的交错族的平均值：

$$p_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\left[h\Big(xe + \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\cdot h\Big(xe - \sum_{i=1}^{m}(\xi_i-\mu_i)v_i\Big)\right]$$

在取 $z_1 = \cdots = z_n = 0$ 后，等于以下多元多项式。

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)h\Big(xe - Q + \sum_{i=1}^{n} z_i\tau_i v_i\Big)\cdot h\Big(xe + Q + \sum_{i=1}^{n} z_i\tau_i v_i\Big) \in \mathbb{R}[x, z_1, \cdots, z_n]$$

使用障碍论证对这个多元多项式的最大根给出上界相对容易。我们将在第 B.4 节中详述。

本节的主要引理如下：

引理 B.8 （命题 3.3 的双曲版本，见 [KLS20]）。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1,\cdots,x_m]$ 表示一个关于双曲方向 $e \in \Gamma_{++}^h$ 的双曲多项式。设 $v_1, \ldots v_n \in \Gamma_+^h$ 使得$\forall i \in [n]$，秩$_h(v_i) \le 1$。设 $\xi_1,\ldots,\xi_n$表示 n满足条件的独立随机变量 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$且 $\mathbf{Var}[\xi_i] = \tau_i^2$。对于任意 $Q \in \mathbb{R}^m$，有

$$\begin{aligned}&\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left[h\Big(xe - (Q + \sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)h\Big(xe + (Q + \sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)\right]\\ &= \prod_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Big|_{z_i=0} h\Big(xe - Q + \sum_{i=1}^{n} z_i\tau_i v_i\Big)\cdot h\Big(xe + Q + \sum_{i=1}^{n} z_i\tau_i v_i\Big). \qquad (11)\end{aligned}$$

此外，这是关于 x 的实根多项式。

证明。我们首先用归纳法证明式（11）。我们的归纳假设是，对于任意 $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left[h\Big(xe-(Q+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)h\Big(xe+(Q+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)\right]\\
=&\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}\prod_{i=1}^{k}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Big|_{z_i=0}h\Big(xe-Q-\sum_{i=k+1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i+\sum_{j=1}^{k}z_j\tau_j v_j\Big)\\
&\times h\Big(xe+Q+\sum_{i=k+1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i+\sum_{j=1}^{k}z_j\tau_j v_j\Big) \qquad (12)
\end{aligned}$$

基本情形 $k=0$ 显然成立，因为等式两边得到的是相同的公式。

对于归纳步骤，假设归纳假设对任意 $k \leq \ell$ 其中 $0 \leq \ell < n$均成立。将断言 B.9 应用于方程（12）右侧，并令 $k=\ell$ 可得

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\left[h\Big(xe-(Q+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)h\Big(xe+(Q+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i)\Big)\right]\\
=&\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+2},\ldots,\xi_m}\prod_{i=1}^{\ell+1}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Big|_{z_i=0}h\Big(xe-Q-\sum_{i=\ell+2}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i+\sum_{j=1}^{\ell+1}z_j\tau_j v_j\Big)\\
&\times h\Big(xe+Q+\sum_{i=\ell+2}^{n}(\xi_i-\mu_i)v_i+\sum_{j=1}^{\ell+1}z_j\tau_j v_j\Big) \qquad (13)
\end{aligned}$$

这就完成了式（11）的证明。

现在我们证明，方程（11）在 x 中是实根的。由断言 B.11，我们知道

$$h\Big(xe-Q+\sum_{i=1}^{n}z_i\tau_i v_i\Big) \quad \text{and} \quad h\Big(xe+Q+\sum_{i=1}^{n}z_i\tau_i v_i\Big) \in \mathbb{R}[x,z_1,\ldots,z_n],$$

是实稳定多项式。然后，根据事实 A.5，我们得到

$$h\Big(xe-Q+\sum_{i=1}^{n}z_i\tau_i v_i\Big)\cdot h\Big(xe+Q+\sum_{i=1}^{n}z_i\tau_i v_i\Big)$$

也是实稳定的。根据事实A.5 再次可知，算子

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Big|_{z_i=0}$$

保持实稳定性。因此，根据事实A.2，方程（11）右侧是实根的。 □

<escape>以下陈述在引理的证明中起着关键作用 B.8：</escape>

断言 B.9 （引理 3.1 的双曲版本，见 [KLS20]）。设 h 表示一个双曲多项式。设 ξ 表示具有 $\mathbb{E}[\xi]=0$ 且**方差** $[\xi]=\tau^2$ 的随机变量。对于任意满足 $v \in \mathbb{R}^m$ 的 秩 $_h(v) \leq 1$，以及任意 $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^m$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi}[h(x_1-\xi v)\cdot h(x_2+\xi v)]=\left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg|_{t=0}h(x_1+t\tau v)h(x_2+t\tau v).$$

备注 B.10。 断言 *B.9* 可以很容易地推广到非中心化随机变量 ξ，其满足 $\mathbb{E}[\xi] = \mu$:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi}[h(x_1 - (\xi-\mu)v) \cdot h(x_2 + (\xi-\mu)v)] = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg|_{t=0} h(x_1 + t\tau v)h(x_2 + t\tau v).$$

证明。 由于 $\mathrm{rank}_h(v) \le 1$，对于所有 $k \ge 2$, $D_v^k h \equiv 0$。因此，对于所有 $x_1 \in \mathbb{R}^m$,

$$h(x_1 - \xi v) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k D_v^k}{k!}\right) h(x_1) = (1 - \xi D_v)h(x_1).$$

其中第一步由 $h(x_1 - \xi v)$ 在 x_1 上的泰勒展开得到。

类似地，对于所有 $x_2 \in \mathbb{R}^m$,

$$h(x_2 + \xi v) = (1 + \xi D_v)h(x_2).$$

因此,

$$\begin{aligned} h(x_1 - \xi v) \cdot h(x_2 + \xi v) &= (1 - \xi D_v)h(x_1) \cdot (1 + \xi D_v)h(x_2) \\ &= h(x_1)h(x_2) - \xi h(x_2)D_v h(x_1) + \xi h(x_1)D_v h(x_2) - \xi^2 D_v h(x_1) D_v h(x_2) \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}[\xi] = 0$ and **方差**$[\xi] = \tau^2$，我们有

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi}[h(x_1 - \xi v) \cdot h(x_2 + \xi v)] &= \left(1 - \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2} D_v^2\right) h(x_1)h(x_2) + \mathop{\mathbb{E}}_{\xi}[\xi] \cdot (h(x_1)D_v h(x_2) - h(x_2)D_v h(x_1)) \\ &= \left(1 - \frac{\tau^2}{2} D_v^2\right) h(x_1)h(x_2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg|_{t=0} h(x_1 + t\tau v)h(x_2 + t\tau v). \end{aligned}$$

□

命题 B.11 （双曲多项式的线性限制是实稳定的）。 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 是关于 $e \in \mathbb{R}^m$ 的双曲多项式。令 $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma_+$ 和 $Q \in \mathbb{R}^m$。定义

$$p(x, z) := h\Big(xe + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i - Q\Big) \in \mathbb{R}[x, z_1, \ldots, z_n].$$

那么， $p(x, z)$ 是一个实稳定多项式。

证明。 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^{n+1}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$，我们有

$$\begin{aligned} p(at + b) &= h\Big((a_1 t + b_1)e - Q + \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}t + b_{i+1})v_i\Big) \\ &= h\Big((a_1 e + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}v_i)t + b_1 e - Q + \sum_{i=1}^{n} b_{i+1}v_i\Big). \end{aligned}$$

由于对于所有 $i \in [n+1]$，$e \in \Gamma_{++}$、v_1、……、$v_n \in \Gamma_+$ 和 $a_i > 0$ 均成立，因此我们有

$$e' := a_1 e + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} v_i \in \Gamma_{++},$$

这可由 Γ_{++} 是一个锥得出。

由于 Γ_{++} 中的每个向量都是 h 的一个双曲方向（例如，参见 [Brä18，定理 1.2，第 4]项），我们知道 h 相对于方向 e'也是双曲的，这意味着 $p(at+b)$ 是实根多项式，且不恒等于零多项式。

因此，根据事实 A.3，$p(x,\ z)$ 是一个实稳定多项式。 □

B.4 应用障碍论证界定多元多项式的最大根

在本节中，我们将给出以下多元多项式的最大根的上界：

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big) h\Big(xe - Q + \sum_{i=1}^{n} z_i \tau_i v_i\Big) \cdot h\Big(xe + Q + \sum_{i=1}^{n} z_i \tau_i v_i\Big)$$

使用屏障方法的实稳定版本，见 [KLS20]。

定义 B.12. 设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 是关于双曲方向 $e \in \mathbb{R}^m$ 的次数为 d 的双曲多项式。对于任意向量 u、$v \in \mathbb{R}^m$，如果 $u \preceq v$，我们称其为

$$\lambda_i(u) \le \lambda_i(v) \quad \forall i \in [d],$$

其中，$\lambda(u)$ $\lambda(v)$ 分别是 u 和 v 的有序特征值。

断言 B.13. 设 h 是关于双曲方向 $e \in \mathbb{R}^m$ 的次数为 d 的双曲多项式。设 $u \in \mathbb{R}^m$ 是满足 $u \preceq e$ 的任意向量。那么我们有 $e - u \in \Gamma_+^h$。

证明。对于任意 $i \in [d]$，我们有

$$\lambda_i(e-u) = 1 - \lambda_{d-i}(u) \ge 0,$$

其中最后一步源于对所有 $i \in [d]$，$\lambda_i(u) \le \lambda_i(e) \le 1$。

因此，$e - u \in \Gamma_+^h$。 □

本节的目标是证明以下引理：

引理 B.14. 令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_m]$ 表示一个双曲多项式，其对应的双曲方向为 $e \in \Gamma_+^h$。令 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 表示具有有限支撑集的 n 个独立随机变量，并且 $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu_i$ 和 $\mathbf{Var}[\xi_i] = \tau_i^2$ 对于 $i \in [n]$。令 $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma_+^h$ 满足 $\sum_{i=1}^n \tau_i^2 \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \preceq e$ 且 $\forall i \in [n]$，秩$_h(v_i) \le 1$。

那么，以下 $(n+1)$ 元多项式的所有根

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big) \left(h\Big(xe + \sum_{i=1}^{n} z_i \tau_i v_i\Big) \right)^2 \in \mathbb{R}[x, z_1, \ldots, z_n]$$

位于 $(4, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 以下。

证明。 定义 $(n+1)$ 元多项式 $P(x,z) \in \mathbb{R}[x, z_1, \ldots, z_n]$ 为

$$P(x,z) := \left(h\Big(xe + \sum_{i=1}^n z_i \tau_i v_i \Big) \right)^2 .$$

根据命题 B.11 和事实 A.5，我们可以证明 $P(x,z)$ 是实稳定的。因此，我们可以在 [KLS20] 中，对 $i \in [n]$ 应用多元障碍方法，使用障碍函数 $\Phi_P^i(x,z) = \frac{\partial_{z_i} P}{(x,z)\, P(x,z)}$。

对于 $t > 0$，令 $\delta_i = t\tau_i \mathrm{tr}_h[v_i]$，并令

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n).$$

对于某个 $\alpha(t) > t$，其中 $\alpha(t)$ 是稍后选定的参数，我们在以下位置计算 P

$$(\alpha, -\delta) = (\alpha(t), -\delta_1, \ldots, -\delta_n)$$

从而得到

$$\begin{aligned} P(\alpha(t), -\delta_1, \ldots, -\delta_n) &= \left(h\Big(\alpha(t) e - \sum_{i=1}^n \delta_i \tau_i v_i \Big) \right)^2 \\ &= \left(h\Big(\alpha(t) e - t \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \, \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \Big) \right)^2 \\ &= \left(h(e) \prod_{j=1}^d \Big(\alpha(t) - t\lambda_j\Big(\sum_{i=1}^n \tau_i^2 \, \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \Big) \Big) \right)^2 \end{aligned}$$

其中 d 是 h 的次数。这里，最后一步由 h 的双曲性以及根的集合这一事实得出

$$h\Big(\alpha(t) e - t \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \, \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \Big)$$

are

$$\left\{ \left(\frac{1}{\alpha(t)} \cdot \lambda_j\Big(\sum_{i=1}^n \tau_i^2 \, \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \Big) \right)^{-1} \right\}_{j \in [d]}$$

由于 $\sum_{i=1}^n \tau_i^2 \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \preceq e$，对于所有 $j \in [d]$，我们有 $\lambda_j(\sum_{i=1}^n \tau_i^2 \mathrm{tr}_h[v_i] v_i) \leq \lambda_j(e) = 1$。

因此，根据 $t < \alpha(t)$ 的假设，我们得到

$$P(\alpha(t), -\delta_1, \ldots, -\delta_n) \geq h(e)^2 (\alpha(t) - t)^{2d} > 0.$$

Th这意味着 $(\alpha, -\delta) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 位于 $P(x,z)$ 的根上方，即 $(\alpha, -\delta) \in \mathbf{Ab}_P$.

此外，我们可以按如下方式给 $\Phi_P^i(\alpha, -\delta)$ 取一个上界：

$$
\begin{aligned}
\Phi_P^i(\alpha(t),-\delta) &= \frac{\partial_{z_i} P}{P}\Big|_{x=\alpha(t),z=-\delta} \\
&= \frac{2h(xe+\sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i)\partial_{z_i} h(xe+\sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i)}{h(xe+\sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i)^2}\Big|_{x=\alpha(t),z=-\delta} \\
&= 2\cdot \frac{\partial_{z_i} h(xe+\sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i)}{h(xe+\sum_{i=1}^n z_i\tau_i v_i)}\Big|_{x=\alpha(t),z=-\delta} \\
&= 2\cdot \frac{(D_{\tau_i v_i}h)(\alpha e+\sum_{j=1}^n \delta_j\tau_j v_j)}{h(\alpha e+\sum_{j=1}^n \delta_j\tau_j v_j)} \\
&= 2\cdot \frac{(D_{\tau_i v_i}h)(\alpha e-t\sum_{j=1}^n \tau_j^2 \operatorname{tr}_h[v_j]v_j)}{h(\alpha e-t\sum_{j=1}^n \tau_j^2 \operatorname{tr}_h[v_j]v_j)} \\
&= 2\cdot \frac{(D_{\tau_i v_i}h)(\alpha e-te+t(e-\sum_{j=1}^n \tau_j^2 \operatorname{tr}_h[v_j]v_j))}{h(\alpha e-te+t(e-\sum_{j=1}^n \tau_j^2 \operatorname{tr}_h[v_j]v_j))} \\
&\le \frac{2(D_{\tau_i v_i}h)(\alpha e-te)}{h(\alpha e-te)} \\
&\le \frac{2\operatorname{tr}_h[\tau_i v_i]}{\alpha-t}.
\end{aligned}
$$

其中，倒数第二步由 $\sum_{i=1}^n \tau_j^2 \mathrm{tr}_h[v_i]v_i \preceq e$、断言 B.13 和事实 B.4 得出。最后一步根据事实 $(D_v h)(\beta e)\ h(\beta e) = \mathrm{tr}_\beta^{h[v]}$ 得出。B.3。

由于 秩$_h(v_i) \le 1$，我们有 $\operatorname{tr}_h[v_i] = \|v_i\|_h$ 对所有 $i \in [n]$。由于 $\sum_{j\neq i} \tau_j^2 \mathrm{tr}_h[v_j]v_j \in \Gamma_+^h$，根据双曲范数的单调性（ [HLJ09]中的定理 2.15），我们有

$$
(\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i])^2 = \|\tau_i^2 \operatorname{tr}_h[v_i]v_i\|_h \le \left\|\sum_{j=1}^n \tau_j^2 \operatorname{tr}_h[v_j]v_j\right\|_h \le \|e\|_h = 1
$$

对所有 $i \in [n]$。

因此，我们有

$$
\max_{i\in[n]} (\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i])^2 \le 1.
$$

选择 $\alpha(t) = 2t = 4$。我们得到

$$
\Phi_P^i(\alpha,-\delta) \le \frac{2\operatorname{tr}_h[\tau_i v_i]}{\alpha-t} = \frac{2\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i]}{\alpha-t} = \frac{2\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i]}{2} \le 1 < \sqrt{2}. \tag{14}
$$

这与引理 A.23 中的公式（9）一致。根据事实 A.5 我们还知道，$(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)P$ 是实稳定的。

因此由引理 A.23，对所有 $i \in [n]$,

$$
(4,-\delta) \in \mathbf{Ab}_{(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)P}.
$$

此外，$\forall i \in [n]$，由于 $\delta_i = t\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i] = 2\tau_i \mathbf{tr}_h[v_i] > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\delta_i}\Phi_P^i(4,-\delta) + \frac{1}{2}\Phi_P^i(4,-\delta)^2 &\le \frac{1}{2\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i]}\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i] + \frac{1}{2}(\tau_i \operatorname{tr}_h[v_i])^2 \\
&\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned} \tag{15}
$$

这与引理 A.23中的公式（10）一致。因此对于所有 $j \in [n]$,

$$\Phi^j_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_i})P}(4, -\delta + \delta_i \mathbf{1}_i) \le \Phi^j_P(4, -\delta). \tag{16}$$

特别地，我们有

$$\Phi^2_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1) \le \Phi^2_P(4, -\delta) < \sqrt{2}.$$

我们还有$(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1) \in \mathbf{Ab}_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}$，这由$(4, -\delta) \in \mathbf{Ab}_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}$推出。由引理A.25 及 $k = 0$，可得

$$\Phi^2_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1) \ge 0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta_2}\Phi^2_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1) + \frac{1}{2}\Phi^2_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1)^2 \\
\le\ &\frac{1}{\delta_2}\Phi^2_P(4, -\delta) + \frac{1}{2}\Phi^2_P(4, -\delta)^2 \\
\le\ &1,
\end{aligned}$$

其中，最后一步由等式（15）得出。

因此，再次由引理A.23 可得

$$\Phi^i_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_2})(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1 + \delta_2 \mathbf{1}_2) \le \Phi^i_{(1-\frac{1}{2}\partial^2_{z_1})P}(4, -\delta + \delta_1 \mathbf{1}_1).$$

对每个 $i \in [n]$ 重复此论证可得

$$\begin{aligned}
(4, -\delta + \sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{1}_i) &= (4, 0, 0, \ldots, 0) \\
&\in \mathbf{Ab}_{\prod_{i=1}^n (1-\partial^2_{z_i}/2)P}
\end{aligned}$$

也就是说，(4，0，0，.....，0) 位于这些根之上

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right) \left(h\Big(xe + \sum_{i=1}^n z_i \tau_i v_i\Big)\right)^2.$$

□

B.5 合并：定理 B.1 的证明

在本节　　中，我们将结合上一节的结果并证明定理B.1　　：

定理 *B.1* 的证明。定义 $u_i := \frac{v_i}{\sigma}$。注意，　$\sigma > 0$ 因为　v_1、.....、 v_n 都位于　h 的双曲锥中。

于是，我们有

$$\left\| \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \operatorname{tr}_h[u_i] u_i \right\|_h = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^2 \operatorname{tr}_h[v_i] v_i}{\sigma^2} \right\|_h = 1,$$

其中，第一步由双曲迹 tr_h 的线性性质得出，第二步则由 $\|\cdot\|_h$ 是范数得出。

根据引理B.14 并将 $z_i = 0$ 对所有 $i \in [n]$加以限制，我们有4 大于该单变量多项式的最大根

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)\Big|_{z_i=0}\left(h\Big(xe+\sum_{i=1}^{n}z_i\tau_i u_i\Big)\right)^2$$

由此，根据引理B.8 可得4 是以下多项式最大根的上界

$$p_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_1,\ldots,\xi_n}\left[h\Big(xe+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)u_i\Big)\cdot h\Big(xe-\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_i)u_i\Big)\right].$$

其中 $p_\emptyset$ 是定义B.5中的交错族 $\mathcal{P}$ 内各多项式的平均值。

最后，根据推论B.7，可得存在 s_1、…、 $s_n \in \mathrm{supp}(\xi_1) \times \cdots \times \mathrm{supp}(\xi_n)$使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(s_i-\mu_i)u_i\right\|_h \le 4.$$

因此我们有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(s_i-\mu_i)v_i\right\|_h \le 4\sigma.$$

□

C 双曲 强 Rayleigh 分布的 Kadison-Singer 扩展

在本节中，我们证明定理 1.6。定理重述如下：

定理 C.1 （定理 1.6的形式化表述）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_m]$ 表示关于双曲方向 $e \in \Gamma_{++}^h$的双曲多项式。设 μ 是定义在 $[n]$ 上的齐次强 *Rayleigh* 概率分布，使得每个元素的边缘概率至多为 ϵ_1，并设 v_1，$\cdots$，$v_n \in \Gamma_+^h$ 是处于各向同性位置的 n 向量，

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = e,$$

使得对所有 $i \in [n]$,

$$\mathrm{rank}_h(v_i) \le 1, \ and \ \|v_i\|_h \le \epsilon_2.$$

Then

$$\Pr_{S\sim\mu}\left[\Big\|\sum_{i\in S}v_i\Big\|_h \le 4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2\right] > 0.$$

我们将在第 C.1 节介绍预备知识。在第 C.2 节中，我们定义双曲特征多项式族，并证明它构成交错族。因此，接下来只需对交错多项式族的平均多项式（即混合双曲特征多项式）的最大根给出上界。我们指出，这需要用到一个引理，该引理将在第 C.3 节中证明。

在第 C.3 节中，我们将混合双曲特征多项式最大根的上界问题，简化为一个较容易的问题：求一个多元多项式最大根的上界。在第 C.4 节中，我们使用多元障碍方法求出该多元多项式最大根的上界。最后，在第 C.5 节中，我们证明定理 C.1。

C.1 预备知识

本节介绍关于强 Rayleigh 分布的一些预备结果。

定义 C.2 （概率分布的生成多项式）。设 $\mu : \ 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个概率分布。对于随机变量 $X \sim \mu$， μ 的生成多项式定义如下：

$$g_\mu(z_1, \ldots, z_n) = \mathbb{E}\left[z^X\right] = \sum_{S \subseteq [n]} \Pr[X = S] z^S.$$

定义 C.3 （强 Rayleigh 分布）。设 $\mu: \ 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个概率分布，g_μ 是其生成多项式。若 μ 是一个实稳定多项式，则称其为强 *Rayleigh*（*SR*）分布。

此外，我们 称 μ 为 d_μ-齐次强 *Rayleigh* 分布，如果g_μ 是 d_μ-齐次实稳定的 .

我们给出关于强 Rayleigh 分布的生成多项式的两个事实。

事实 C.4 (齐次 SR 分布的边缘分布)。 设 $\mu: \ 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个生成多项式为g_μ的 d_μ-齐次 *SR* 分布。对于 $1 \leq k \leq n$，考虑前 k 个元素上的边缘分布 $\mu_k: \ 2^{[k]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得

$$\mu_k(S) = \Pr_{T \sim \mu}[T \cap [k] = S] \quad \forall S \subseteq [k].$$

那么，对所有 $S \subseteq [k]$,

$$\mu_k(S) = x^{|S| - d_\mu} \cdot \prod_{i \in S} \partial_{z_i} \prod_{i \in [k] \setminus S} (1 - x\partial_{z_i}) g_\mu(x\mathbf{1} + z) \Big|_{z=0}. \tag{17}$$

特别地,

$$\mu(S) = x^{|S| - d_\mu} \cdot \prod_{i \in S} \partial_{z_i} \prod_{i \in [n] \setminus S} (1 - x\partial_{z_i}) g_\mu(x\mathbf{1} + z) \Big|_{z=0}.$$

注 C.5. 注意，哑变量 x 将在方程右边消去。(17)因此两边都是数。

证明。注意，g_μ 可以写成

$$g_\mu(x\mathbf{1} + z) = f(z_2, \ldots, z_n)(x + z_1) + g(z_2, \ldots, z_n),$$

其中

$$f(z_2,\dots,z_n) := \sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{1\},\\ |S|=d_\mu-1}} \mu(S\cup\{1\})\prod_{i\in S}(x+z_i), \quad \text{and}$$
$$g(z_2,\dots,z_n) := \sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{1\},\\ |S|=d_\mu}} \mu(S)\prod_{i\in S}(x+z_i).$$

首先，如果 $k=1$。我们有

$$\mu_1(\{1\}) = \Pr_{T\sim\mu}[1\in T] = x^{-d_\mu+1}\cdot f(z_2,\dots,z_n)\Big|_{z=0} = x^{-d_\mu+1}\cdot \partial_{z_1} g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}.$$

此外，

$$\mu_1(\emptyset) = \Pr_{T\sim\mu}[1\notin T] = x^{-d_\mu}\cdot g(z_2,\dots,z_n)\Big|_{z=0} = x^{-d_\mu}\cdot (1-x\partial_{z_1}) g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}.$$

因此，式（17）对 $k=1$ 成立。

对于 $k>1$s 的情形，我们可以对 k 作归纳法证明。假设式（17）对 $1,\ \cdots,\ k-1$ 成立。令 $S\subseteq[k]$ 为 $[k]$ 的任意子集。如果 $k\in S$，则考虑 $\partial_{z_k} g_\mu\ (x\mathbf{1}+z)$，它是 μ' 的生成多项式，该多项式将 μ 限制在满足 $T\subseteq[n]\setminus\{k\}$ 且 $\mu\ (T\cup\{k\})\ >0$ 的集合上。令 $S':=S\setminus\{k\}$。根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\mu(S)=\mu'(S') &= x^{|S'|-d_{\mu'}}\cdot\prod_{i\in S'}\partial_{z_i}\prod_{i\in[k-1]\setminus S'}(1-x\partial_{z_i})\partial_{z_k} g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}\\ &= x^{|S|-d_\mu}\cdot\prod_{i\in S}\partial_{z_i}\prod_{i\in[k]\setminus S}(1-x\partial_{z_i}) g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0},\end{aligned}$$

其中第二行由 $|S'|=|S|-1$ 和 $d_{\mu'}=d_\mu-1$ 得出。

如果 $k\notin S$，则考虑 $(1-x\partial_{z_k})\ g_\mu\ (x\mathbf{1}+z)\ \Big|_{z_k=0}$，它是 μ'' 的生成多项式，该多项式将 μ 限制在满足 $\mu\ (T)\ >0$ 的集合 $T\subseteq[n]\setminus\{k\}$ 上。然后根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\mu(S)=\mu''(S) &= x^{|S|-d_{\mu''}}\cdot\prod_{i\in S}\partial_{z_i}\prod_{i\in[k-1]\setminus S}(1-x\partial_{z_i})(1-x\partial_{z_k}) g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}\\ &= x^{|S|-d_\mu}\cdot\prod_{i\in S}\partial_{z_i}\prod_{i\in[k]\setminus S}(1-x\partial_{z_i}) g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}.\end{aligned}$$

因此，方程（17）对所有 $k\in[n]$ 均成立，从而完成了该事实的证明。 □

C.2 定义特征多项式的交错多项式族

在本节中，我们考虑以下多项式族：

定义 C.6（定理 C.1的交错族）。 设 $h\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_m]$ 表示一个关于双曲方向 d 的次数为 $e\in\Gamma^h_{++}$。设 $\mu:\ 2^{[n]}\to\mathbb{R}$ 为齐次

强 *Rayleigh* 概率分布。令 v_1、…、$v_n \in \Gamma_+^h$ 为 n 向量，使得对于所有 $i \in [n]$，秩$_h(v_i) \le 1$。令 $\mathcal{F} = \{S \subseteq [n] : \mu(S) > 0\}$ 为 μ 的支撑。对于任意 $S \in \mathcal{F}$，令

$$q_S(x) = \mu(S) \cdot h\left(xe - \sum_{i \in S} v_i\right). \tag{18}$$

令 $\mathcal{Q}$ 表示以下多项式族：

$$\mathcal{Q} := \left\{ q_{s_1 \cdots s_\ell}(s) = \sum_{\substack{t_{\ell+1}, \cdots, t_n \\ (s_1 \cdots s_\ell, t_{\ell+1}, \cdots, t_n) \in \mathcal{F}}} q_{s_1, \cdots, s_\ell, t_{\ell+1}, \cdots, t_n} : \forall \ell \in [n], (s_1, \cdots, s_\ell) \in \mathcal{F}|_{[\ell]} \right\}.$$

其中 $\mathcal{F}|^{[\ell]}$ 是将 $\mathcal{F}$ 限制在 $[\ell]$上的结果，子集则由二元示性向量表示 *or.*

我们证明上述定义的族是一个交错族。我们将关键地利用这一事实来证明定理 C.1。

引理 C.7 （定理 3.3 的双曲版本，见 [AO14]）。 令 $\mathcal{Q}$ 表示定义 *C.6*中所述的多项式族。那么，如果多项式

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi \sim \mu} \left[h(xe - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i)) \right]$$

对于任意强 *Rayleigh* 分布 μ，在 x 中都是实根的，那么多项式族 $\mathcal{Q}$ 构成交错族。

该引理的证明与 [AO14中定理 3.3 的证明相同].

由引理 A.19 和事实 A.10，可得以下推论：

推论 C.8. 令 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 表示一个关于双曲方向 $e \in \Gamma_{++}^h$ 的次数为 d 的双曲多项式。令 $\mu : 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ 为一个齐次强 *Rayleigh* 概率分布。令 v_1、…、$v_n \in \Gamma_+^h$ 为 n 个向量，使得对所有 $i \in [n]$，都有 秩$_h(v_i) \le 1$。令 $\mathcal{F} = \{S \subseteq [n] : \mu(S) > 0\}$ 为 μ的支撑。则存在 $S \in \mathcal{F}$，使得双曲范数$\| \sum_{i \in S} v_i \|_h$ 等于 q_S的最大根，且上界为

$$q_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi \sim \mu} \left[h(xe - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i)) \right].$$

证明。 根据引理C.9 (我们指出，这个引理不依赖本节中的结果。我们将在第 C.9节证明引理 C.3），混合特征多项式

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi \sim \mu} \left[h(xe - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i)) \right]$$

是实根的。根据引理 C.7，多项式族 $\mathcal{Q}$ (见定义 C.6）是一个交错族。因此，根据引理 A.17，存在一个子集 $S \in \mathcal{F}$，使得 q_S的最大根上界不超过

$$q_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi \sim \mu} \left[h(xe - (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i)) \right].$$

由此即可推出该推论，依据是事实 A.10。 □

C.3 从混合特征多项式到多元多项式

在本节中，我们要证明混合特征多项式

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]$$

取 $z_1=\cdots=z_n=0$ 后，其根等于下列多元多项式的根。

$$\prod_{i=1}^n(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)$$

利用障碍论证可以较容易地对这个多元多项式的最大根给出上界。我们将在第 C.4 节介绍详细内容。

本节的主要引理如下:

引理 C.9（定理 3.1 的双曲版本，见 [AO14]）。设 $h\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_m]$ 是一个次数为 d、双曲方向为 $e\in\Gamma_{++}^h$ 的双曲多项式。设 $\mu:2^{[n]}\to\mathbb{R}$ 是一个 d_μ-齐次强 *Rayleigh* 概率分布，其生成多项式为 $g_\mu\in\mathbb{R}[z_1,\cdots,z_n]$。设 $v_1,\ldots,v_n\in\Gamma_+^h$ 是 n 个向量，满足 秩$_h(v_i)\le 1$ 对所有 $i\in[n]$ 均成立。那么，我们有

$$x^{d_\mu}\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]=x^d\cdot\prod_{i=1}^n(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0}. \tag{19}$$

此外，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(xe-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]$$

在 x中是实根。

证明。首先，我们将（19）的左端重写为关于 $T\sim\mu$ 的期望，即关于 ξ 的所有子集的示性变量 $[n]$ 的期望:

$$\begin{aligned}
&x^{d_\mu}\cdot 2^{-n}\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{T\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i\in T}v_i))\right]\\
&=x^{d_\mu}\cdot 2^{-n}\cdot\sum_{\xi\in\{0,1\}^n}\left(h(x^2e-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\cdot\mu(\xi)\right)\\
&=x^{d_\mu}\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\{0,1\}^n}\left[h(x^2e-\sum_{i=1}^n\xi_iv_i)\cdot\mu(\xi)\right]\\
&=x^{d_\mu}\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\{0,1\}^n}\left[h(x^2e-\sum_{i=1}^n\xi_iv_i)\cdot x^{\sum_{i=1}^n\xi_i-d_\mu}\cdot\prod_{i=1}^n\big(\xi_i\partial_{z_i}+(1-\xi_i)(1-z_i\partial_{z_i})\big)g(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}\right]
\end{aligned}\tag{20}$$

其中在第三步中，我们令 $\xi\in\{0,1\}^n$ 为从 $\{0,1\}^n$ 中均匀采样的随机比特串。在最后一步中，我们使用事实 C.4 以及事实 $\prod_{i=1}^n\left(\xi_i\partial_{z_i}+(1-\xi_i)(1-z_i\partial_{z_i})\right)=\prod_{i\in[n]:\xi_i=1}\partial_{z_i}\prod_{i\in[n]:\xi_i=0}(1-z_i\partial_{z_i})$。令 $g_2\in\mathbb{R}[t]$ 为

$$g_2(t):=x^{\sum_{i=2}^n\xi_i}\cdot\prod_{i=2}^n\big(\xi_i\partial_{z_i}+(1-\xi_i)(1-x\partial_{z_i})\big)g(t,x+z_2,x+z_3,\cdots,x+z_n)\Big|_{z_2,\ldots,z_n=0}$$

以及 $x_2 = x^2 e - \sum_{i=2}^{n} \xi_i v_i$，我们可以将上面的方程简化为

$$
\begin{aligned}
& x^{d_\mu} \cdot 2^{-n} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{T\sim\mu}\left[h(x^2 e - (\sum_{i\in T} v_i))\right] \\
&= \frac{1}{2} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\cdots,\xi_n\sim\{0,1\}^{n-1}}\left[h(x_2 - v_1)x\partial_{z_1} g_2(x+z_1) + h(x_2)(1 - x\partial z_1) g_2(x+z_1)\Big|_{z_1=0}\right] \\
&= \frac{1}{2} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\cdots,\xi_n\sim\{0,1\}^{n-1}}\left[(1-\partial_{z_1})h(x_2 + z_1 v_1)x\partial_{z_1} g_2(x+z_1) + h(x_2)(1 - x\partial_{z_1}) g_2(x+z_1)\Big|_{z_1=0}\right].
\end{aligned} \tag{21}
$$

现在，我们可以展开式（21）中期望内部的项，得到

$$
\begin{aligned}
& (1-\partial_{z_1})h(x_2 + z_1 v_1)x\partial_{z_1} g_2(x+z_1) + h(x_2)(1 - x\partial_{z_1}) g_2(x+z_1)\Big|_{z_1=0} \\
&= xh(x_2 + z_1 v_1)(\partial_{z_1} g_2(x+z_1)) - x(\partial_{z_1} h(x_2 + z_1 v_1))(\partial_{z_1} g_2(x+z_1)) \\
&\quad + h(x_2) g_2(x+z_1) - h(x_2)(x\partial_{z_1} g_2(x+z_1))\Big|_{z_1=0} \\
&= xh(x_2)(Dg_2)(x) - x(D_{v_1} h)(x_2)(Dg_2)(x) + h(x_2) g_2(x) - xh(x_2)(Dg_2)(x) \\
&= h(x_2) g_2(x) - x D_{v_1} h(x_2)(Dg_2)(x) \\
&= (1 - \frac{x}{2}\partial_{z_1}^2)\Big(h(x_2 + z_1 v_1) g_2(x+z_1)\Big)\Big|_{z_1=0},
\end{aligned}
$$

其中，最后一步由 $\mathsf{rank}_h(v_1) \le 1$ and $\deg(g_2) \le 1$ 得出。

因此，（19）的左边等于

$$
\begin{aligned}
& x^{d_\mu} \cdot 2^{-n} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2 e - (\sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i))\right] \\
&= \frac{1}{2} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\ldots,\xi_n}\left[(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_1}^2)\Big(h(x_2 + z_1 v_1) g_2(x+z_1)\Big)\Big|_{z_1=0}\right] \\
&= \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_1}^2)\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_2,\ldots,\xi_n}\left[h(xe - \sum_{i=2}^{n} \xi_i v_i + z_1 v_1) g_2(x+z_1)\right]\right)\Big|_{z_1=0}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

如果我们将此过程重复 n 次，最终将得到

$$
x^{d_\mu} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2 e - (\sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i))\right] = \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(x^2 e + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0}. \tag{23}
$$

现在我们证明（23）右端等于（19）右端。首先，我们展开部分算子 $\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_i}^2)$ 的乘积，得到

$$
\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{x}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(x^2 e + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0} = \sum_{T\subseteq[n]} (-\frac{x}{2})^{|T|}\partial_{z^T}^2\Big(h(x^2 e + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1} + z)\Big)\Big|_{z=0}.
$$

对于任意满足 $|T|=k$ 的 $T\subseteq[n]$，我们有

$$(-\frac{x}{2})^k\partial_{z^T}^2\Big(h(x^2e+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0}=(-\frac{x}{2})^k\cdot 2^k\cdot\Big(\prod_{i\in T}D_{v_i}\Big)h(x^2e)\cdot g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1}),$$

其中 $g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1})=\prod_{i\in T}\partial_{z_i}g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big|_{z=0}$。

由于 h 是 d-齐次的，我们知道 $(\prod_{i\in T}D_{v_i})h$ 是 $(d-k)$-齐次的。因此，我们得到

$$\begin{aligned}(-\frac{x}{2})^k\partial_{z^T}^2\Big(h(x^2e+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0}&=(-\frac{x}{2})^k\cdot 2^k\cdot x^{d-k}\cdot\Big(\prod_{i\in T}D_{v_i}\Big)h(xe)\cdot g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1})\\&=x^d\cdot(-1)^k\cdot\Big(\prod_{i\in T}D_{v_i}\Big)h(xe)\cdot g_\mu^{(T)}(x\mathbf{1})\\&=x^d\cdot(-\frac{1}{2})^k\partial_{z^T}^2\left(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\right)\Big|_{z=0}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}x^{d_\mu}\cdot\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]&=\sum_{T\subseteq[n]}x^d\cdot(-\frac{1}{2})^k\partial_{z^T}^2\left(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\right)\Big|_{z=0}\\&=x^d\cdot\prod_{i=1}^n(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0},\end{aligned}$$

这就完成了公式（19）的证明。

最后，我们证明公式（19）在 x 中具有实根性。由于 $e\in\Gamma_{++}^h$ 以及 $v_1,\ldots\ldots,v_n\in\Gamma_+^h$，根据断言B.11，我们得到 $h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)$ 是实稳定的。此外，由于 $g_\mu(x\mathbf{1}+z)$ 是实稳定的，根据事实A.5，

$$h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)$$

也具有实稳定性。然后再次根据事实A.5，我们得到

$$\prod_{i=1}^n(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^n z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0}$$

是实稳定的。根据事实A.2，这意味着它在 x 中是实根的。等价地 y,

$$q_\emptyset(x^2)=\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]$$

关于 x 的实根。然后很容易看出，

$$q_\emptyset(x)=\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(xe-(\sum_{i=1}^n\xi_iv_i))\right]$$

由于 $q_\emptyset(x)$ 的复根意味着 $q_\emptyset(x^2)$ 存在复根，因此它在 x 中也具有实根。

于是，引理得证。 □

C.4 运用障碍论证界定多变量多项式的最大根

在本节中，我们给出以下多元多项式的最大根的上界：

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^{n}z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)$$

使用 [AO14] 中的实稳定版本屏障方法。

引理 C.10 (定理 4.1 的双曲版本，见 [AO14])。设 $h\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_m]$ 表示一个次数为 d、双曲方向为 $e\in\Gamma_{++}^h$ 的双曲多项式。设 v_1、$\cdots$、$v_n\in\Gamma_+^h$ 是 n 个满足 $\sum_{i=1}^n v_i=e$ 且 $\mathrm{tr}_h[v_i]\le\epsilon_2$ 的向量，其中 $i\in[n]$。设 $\mu\colon\ 2^{[n]}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ 是一个 d_μ-齐次强 *Rayleigh* 概率分布，且每个元素 $i\in[n]$ 的边缘概率至多为 ϵ_1。那么，

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^{n}z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\in\mathbb{R}[x,z_1,\cdots,z_n]$$

所有根都小于 $\overline{(\sqrt{4\epsilon+2}\epsilon^2},\ 0,\ \cdots,\ 0)\in\mathbb{R}^{n+1}$，其中 $\epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2$。

证明。令 $Q\in\mathbb{R}[x,z_1,\ldots,z_n]$ 为一个 $(n+1)$ 元多项式：

$$Q(x,z):=h(xe+\sum_{i=1}^{n}z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z).$$

我们已在引理 C.9 中证明 $Q(x,\ z)$ 是实稳定的。

对于 $0<t<\alpha$，其中 $\alpha=\alpha(t)$ 是一个待选参数，我们有

$$\begin{aligned}Q(\alpha,-t\mathbf{1})&=h(\alpha e-t\sum_{i=1}^{n}v_i)g_\mu((\alpha-t)\mathbf{1})\\&=h((\alpha-t)e)g_\mu((\alpha-t)\mathbf{1})\\&=(\alpha-t)^{d+d_\mu}h(e)g_\mu(\mathbf{1})\\&>0,\end{aligned}$$

其中，第二步由 $\sum_{i=1}^n v_i=e$ 得出，最后一步由 $\alpha>t$, $h(e)>0$ 和 $g_\mu(\mathbf{1})=1$ 得出。这意味着 $(\alpha,-t\mathbf{1})\in\mathbf{Ab}_Q$。

我们可以如下对 $\Phi_Q^i(\alpha, -t\mathbf{1})$ 给出上界。

$$\begin{aligned}
\Phi_Q^i(\alpha, -t\mathbf{1}) &= \left.\frac{\partial_{z_i} Q}{Q}\right|_{x=\alpha, z=-t\mathbf{1}} \\
&= \left.\frac{(\partial_{z_i} h(xe + \sum_{i=1}^n z_i v_i)) g_\mu(x\mathbf{1}+z) + h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)(\partial_{z_i} g_\mu(\mathbf{1}+z))}{h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i) g_\mu(x\mathbf{1}+z)}\right|_{x=\alpha, z=-t\mathbf{1}} \\
&= \left.\frac{\partial_{z_i} h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)}{h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)} + \frac{\partial_{z_i} g_\mu(x\mathbf{1}+z)}{g_\mu(x\mathbf{1}+z)}\right|_{x=\alpha, z=-t\mathbf{1}} \\
&= \left.\frac{D_{v_i} h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)}{h(xe+\sum_{i=1}^n z_i v_i)} + \frac{\partial_{z_i} g_\mu(x\mathbf{1}+z)}{g_\mu(x\mathbf{1}+z)}\right|_{x=\alpha, z=-t\mathbf{1}} \\
&= \frac{D_{v_i} h(\alpha e - te)}{h(\alpha e - te)} + \frac{(\alpha - t)^{d_\mu - 1} \cdot \Pr_{S\sim\mu}[i \in S]}{(\alpha - t)^{d_\mu}} \\
&\le \frac{\mathrm{tr}[v_i]}{\alpha - t} + \frac{\epsilon_1}{\alpha - t} \\
&\le \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\alpha - t},
\end{aligned}$$

其中第一个不等式由事实 B.3 得出。

令 $\epsilon := \epsilon_1 + \epsilon_2$。通过选择 $\alpha = 2t = \sqrt{4\epsilon + 2\epsilon^2}$，我们得到

$$\Phi_Q^i(\alpha, -t\mathbf{1}) \le \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon + \epsilon^2/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2/\epsilon}} < \sqrt{2}.$$

于是，由引理 A.23，我们知道，对于任意 $i \in [m]$，$(\alpha, -t\mathbf{1}) \in \mathbf{Ab}_{(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)Q}$。

此外，

$$\frac{1}{t}\Phi_Q^i(\alpha, -t\mathbf{1}) + \frac{1}{2}\Phi_Q^i(\alpha, -t\mathbf{1})^2 \le \frac{\epsilon}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{t^2} = 1.$$

根据引理的第二部分 A.23，对于所有 $j \in [m]$，

$$\Phi^j_{(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)Q}(\alpha, -t\mathbf{1} + t\mathbf{1}_i) \le \Phi_Q^j(\alpha, -t\mathbf{1}).$$

通过类似于引理 B.14 证明中的归纳法过程，我们有

$$\begin{aligned}
(\alpha, -t\mathbf{1} + \sum_{i=1}^n t\mathbf{1}_i) &= (\sqrt{4\epsilon + 2\epsilon^2}, 0, 0, \ldots, 0) \\
&\in \mathbf{Ab}_{\prod_{i=1}^n (1 - \partial_{z_i}^2/2) Q}
\end{aligned}$$

即（$\sqrt{4\epsilon + 2\epsilon^2}$，0，0，.....，0）位于.....的根之上

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)\left[h\Big(xe + \sum_{i=1}^n \xi_i v_i\Big) \cdot g_\mu(x\mathbf{1}+z)\right]$$

如预期。 □

C.5 合并：定理 C.1 的证明

Now 我们可以结合上一节的结果并证明定理C.1 :

定理 *C.1* 的证明。 令 $\mathcal{F}$ 为 μ的支撑。

根据引理 C.10 并将 $z_i = 0$ 限制为所有 $i \in [n]$，可知 $\sqrt{4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}$位于单变量多项式的最大根之上

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{2}\partial_{z_i}^2)\Big(h(xe+\sum_{i=1}^{n}z_iv_i)g_\mu(x\mathbf{1}+z)\Big)\Big|_{z=0}.$$

然后由引理 C.9 可得， $\sqrt{4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}$ 是以下多项式最大根的上界

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(x^2e-(\sum_{i=1}^{n}\xi_iv_i))\right].$$

因此，以下多项式的最大根

$$q_\emptyset = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi\sim\mu}\left[h(xe-(\sum_{i=1}^{n}\xi_iv_i))\right]$$

的上界为 $4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2$, ，其中 $q_\emptyset$ 是定义 C.6中交错族 $\mathcal{Q}$ 的多项式的平均值。

最后，根据推论 C.8，存在 $S \subseteq [n]$ 属于 μ的支撑，使得

$$\Big\|\sum_{i\in S}v_i\Big\|_h \le 4(\epsilon_1+\epsilon_2)+2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2.$$

□

D 亚指数算法

D.1 定义

定义 D.1 (k阶对称多项式)。 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+, k \le n$，令 $e_k \in \mathbb{R}[z_1,\cdots,z_n]$表示由下式定义的 k阶初等对称多项式

$$e_k(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{T\in\binom{[n]}{k}}\prod_{i\in T}z_i.$$

定义 D.2 (k阶幂和多项式)。 对于任意 $n,k \in \mathbb{Z}_+$，令 $p_k \in \mathbb{R}[z_1,\cdots,z_n]$ 表示由下式定义的 k阶幂和多项式 $p_k(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$。

事实 D.3 (韦达公式)。 令 $f \in \mathbb{R}[x]$ 为任意次数为 n 的首一变元多项式，定义为$f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$。那么对于任意 $k \in [n]$,

$$c_k = (-1)^k e_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

其中 λ_1、 $\cdots$、 $\lambda_n \in \mathbb{C}$ 是 f的根，而 e_k 是定义 *D.1*中定义的第 k 个初等对称多项式。

事实 *D.4*（牛顿恒等式）。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+, k \in [n]$, 令 $e_k, p_k \in \mathbb{R}[z_1,\cdots,z_n]$ 分别由定义 *D.1* 和定义 *D.2* 定义。则存在一个运行时间为 $O(k^2)$ 的算法 *ElemToPower*$(k, e_1, \cdots, e_k)$，使得对于任意 $k \in [n]$，以及任意固定的 $x \in \mathbb{R}^n$ 所对应的 $e_1 = e_1(x) \cdots, e_k = e_k(x)$，输出 $p_k = p_k(x)$。

D.2 近似最大根的算法

算法 1 近似最大根的算法。

过程 $\textsc{MaxRoot}(n \in \mathbb{Z}_+, k \in [n], f \in \mathbb{R}[x], c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R})$

前置条件： $k \le n$, c_1, $\cdots$, $c_k \in \mathbb{R}$ 是一个次数为 n 的实根多项式的最高 k 个系数。首一单变量多项式 $f \in \mathbb{R}[x]$。

输出： 返回 f 的最大根的近似值。

对于 $i = 1$ 至 k，**执行**

$e_k \leftarrow c_k \cdot (-1)^k$。

▷ $e_k = e_k(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 k 的根的第 f 次初等对称多项式，根据事实 D.3。

结束 for

$p_k \leftarrow \text{ElemToPower}(k, e_1, \cdots, e_k)$

▷ $p_k(\lambda) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ 是 f 根据事实 D.4，的根的幂和。

返回 $(p_k)^{1/k}$。

结束过程

引理 D.5。令 $f = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n \in R[x]$ 为任意次数为 n 的实根首一多元多项式。则 $\textsc{MaxRoot}(n, k, f, c_1, \cdots, c_k)$ *(算法 1)* 返回 $(n^{1/k})$-近似的最大根，计算对象为 f，所需时间为 $O(k^2 + k)$。

证明。令 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_n \in \mathbb{R}$ 表示 $f(x)$的根。根据事实 D.3 和事实 D.4，算法 1返回 $(p_k)^{1/k}$，其中 $p_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$。注意到

$$\frac{\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k}{n} \le \lambda_1^k \le \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$$

我们有

$$\lambda_1 \le (p_k/n)^{1/k} \le n^{1/k} \lambda_1.$$

□

备注 D.6。我们指出，当 $k > \log n$ 时，近似因子 $n^{1/k}$ 的上界为$1 + \log_k n$。

——

D.3 将 Kadison-Singer 化简为寻找交错多项式的首项系数

我们定义一个生成前k 个系数的预言机如下：

定义 D.7. 固定一族次数为 n 的首一多变量多项式 $\mathcal{F} = \{f_{s_1,\cdots,s_m} \in \mathbb{R}[x] : s_1, \cdots s_\ell \in S_1 \times \cdots \times S_\ell\}$。我们定义预言机 $\textsc{MaxCoeff}_{\mathcal{F}}(k, \ell, s_1, \cdots s_\ell)$ 如下：给定任意$k \in [n]$, $\ell \in [m]$, $s_1, \cdots s_\ell \in S_1 \times \cdots \times S_\ell$作为输入，它会在$\mathcal{T}_{\text{Coeff}}(\mathcal{F}, k)$时间内输出 $f_{s_1 \cdots s_\ell}$ 的最高-k 个系数。

引理 *D.8*（[*AOSS18*] 的定理 *4.4*）。设 $S_1, \cdots, S_m$ 为有限集，且 $\mathcal{F} = \{f_{s_1 \cdots s_m}(x) \in \mathbb{R}[x] : s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m\}$ 为一个由次数为 n 的实根首一单变量多项式组成的交错族。令 $\textit{MaxCoeff}_{\mathcal{F}}(k, \ell, s_1, \cdots s_\ell)$ 为查找最大 k 系数的预言机，其定义见定义 *D.7*。

<escape>然后存在一个算法 $\textsc{KadisonSinger}(\delta, \mathcal{F} = \{f_{s_1 \cdots s_m}(x) : s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m\})$(算法 2)，该算法以任意 $\delta > 0$ 和 $\mathcal{F}$ 作为输入，返回元素 $s'_1 \in S_1, \cdots, s'_m \in S_m$，使得 $f_{s'_1 \cdots s'_m}$ 的最大根至多为 $(1+\delta)$ 倍于 $f_\emptyset$的最大根，所需时间为</escape>

$$\left(\mathcal{T}_{\text{Coeff}}\left(\mathcal{F}, O(\log(n) m \delta^{-1})\right) + k^2\right) \cdot \mathcal{S}^{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m},$$

其中 $\mathcal{S} = \text{最大值}_{i \in [m]} |S_i|$。

算法 2 求解 Kadison-Singer 问题近似解的算法 **1: 过程 KadisonSinger**$(\delta, \mathcal{F} = \{f_{s_1 \cdots s_m}(x) : s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m\})$ **2: 前置条件:** $\delta > 0, S_1, \cdots, S_m$ **是有限集,** $\mathcal{F} = \{f_{s_1 \cdots s_m}(x) \in \mathbb{R}[x] : s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m\}$ **是一个次数为** n **的实根首一单变量多项式的交错族。 3: 输出:** $s'_1 \in S_1, \cdots, s'_m \in S_m$**, 使得** $f_{s'_1 \cdots s'_m}$ **的最大根至多为** $f_\emptyset$**的最大根的** $(1+\delta)$ **倍。 4:** $M \leftarrow \sqrt{m}$ **5:** $k \leftarrow {}^{M}\log_{\delta}{}^{n}$ **6:** $\lambda_{\max} \leftarrow -\infty$ **7: 对于** $i = 0$ **到** $\frac{m}{M} - 1$ **执行** $\triangleright \sqrt{m}$ **次迭代 8: 对于** $t_{iM+1} \in S_{iM+1}, \cdots, t_{iM+M} \in S_{iM+\overline{M}}$ **执行** $\triangleright$ **个元素上的暴力搜索 9:** $(c_1, \cdots, c_k) \leftarrow$ **MaxCoeff**$_{\mathcal{F}}(k, M(i+1)$ $s_1, \cdots, s_{iM}, t_{iM+1}, \overline{\cdots, t_{iM}}_{+M})$ **10:** $\lambda \leftarrow$ **MaxRoot**$(n, k, f_{s_1, \cdots, s_{iM}, t_{iM+1}, \cdots, t_{iM+M}}, c_1, \cdots, c_k)$ **11: 如果** $\lambda \leq \lambda_{\min}$ **则 12:** $\lambda_{\min} \leftarrow \lambda$ **13:** $s_{iM+1} \leftarrow t_{iM+1}, \cdots, s_{iM+M} \leftarrow t_{iM+M}$ **14: 结束 if 15: 结束 for 16: 结束 for 17: 返回** $(\overline{s_1}, \cdots, s_m)$ **18: 结束过程**

证明。注意，算法 2 在 $\frac{m}{M} = \sqrt{M}$ 次迭代内运行。在每次迭代中，它会对至多 $\mathcal{Q}^M = \mathcal{Q}^{\sqrt{m}}$ 个元素进行穷举搜索。对于每个元素（t_{iM+1}、$\overline{\cdots}$、t_{iM+M}），我们会查询预言机 MaxCoeff$_{\mathcal{F}}$和 MaxRoot，其耗时分别为 $\mathcal{T}_{\text{Coeff}}(\mathcal{F}, k) = \mathcal{T}_{\text{Coeff}}(\mathcal{F}, O(\log(n) m \delta^{-1})$ 和$O(k + k^2)$。因此，该算法的运行时间至多为

$$\left(\mathcal{T}_{\text{Coeff}}\left(\mathcal{F}, O(\log(n) m \delta^{-1})\right) + k^2\right) \cdot \mathcal{S}^{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m}.$$

现在，我们通过对迭代次数 i进行归纳法来证明该算法的正确性。对于任意 $0 \leq i \leq \frac{m}{M} - 1$，假设我们在之前的迭代中已选取 $s_1, \cdots, s_{iM}$，并假设

$$\lambda_{\max}\left(f_{s_1, \cdots, s_{iM}}\right) \leq (1 + \frac{\delta}{2M})^{i+1} \cdot \lambda_{\max}(f_\emptyset)$$

其中，$\lambda_{\max}(f)$ 表示单变量多项式 f 的最大根。

假设我们在第 i 次迭代中固定 s_{iM+1}，$\cdots$，s_{iM+M}。注意到 $k = {}^{2M}\log_{\delta}{}^{n} \Rightarrow \log n$，根据引理 D.5，算法的第 10 行返回最大值的 $1 + \log_k{}^{n} = (1 + \frac{\delta}{2M})$-近似值。

f_{s_1}的根，…，s_{iM}，t_{iM+1}，…，t_{iM+M}。因此，对于任意 $0 \le i \le \frac{m}{M}$，我们有

$$\lambda_{\max}\left(f_{s_1,\cdots,s_{iM+M}}\right) \le (1+\frac{\delta}{2M}) \cdot \min_{t_{iM+1}\in S_{iM+1},\cdots,t_{iM+M}\in S_{iM+M}} \lambda_{\max}\left(f_{s_1,\cdots,s_M i,t_{iM+1},\cdots,t_{iM+M}}\right)$$

由于 $\{f_{s_1\cdots s_m}(x)\colon\ s_1 \in S_1,\ \cdots,\ s_m \in S_m\}$ 是一个交错族，我们有

$$\min_{t_{iM+1}\in S_{iM+1},\cdots,t_{iM+M}\in S_{iM+M}} \lambda_{\max}\left(f_{s_1,\cdots,s_M i,t_{iM+1},\cdots,t_{iM+M}}\right) \le \lambda_{\max}\left(f_{s_1,\cdots,s_{iM}}\right).$$

这证明了归纳假设。 □

注 D.9。需要注意的是，我们的算法运行 $\mathcal{S}^{O(\sqrt{n})}$ 时间。*AOSS*[AOSS18]提供了一种运行时间更快的算法，为 $\mathcal{S}^{\widetilde{O}(\sqrt[3]{n})}$。不过，该算法仅限于行列式多项式的第 k 大根。

我们的算法面临着近似双曲多项式的第 k 大根这一挑战。为了达到 $(1+\epsilon)$ 近似，我们的亚指数算法必须运行 $O(\sqrt{n}\epsilon)$ 次迭代，并在每次迭代中搜索 $k = O(\sqrt{n}/\epsilon)$ 个元素。这确保累积误差不超过 ϵ。在每次迭代中，我们必须对 $O(\sqrt{n})$ 个元素进行穷举，这导致一个 $2^{O(n)}$ 搜索时间。

D.4 定理1.5的亚指数算法

本节将介绍构造定理1.5的亚指数算法。令 $\mathcal{P}$ 表示定义B.5中定义的交错族。

假设每个 $p_{\mathbf{s}}(x) \in \mathcal{P}$ 的次数为 d。令 $\mathsf{MaxCoeff}_{\mathcal{P}}(k,\ell,s_1,\cdots,s_\ell)$ 表示定义 D.7 中定义的预言机，即给定任意 $k \in [d]$, $\ell \in [n]$, $(s_1,\cdots,s_\ell) \in \{\pm 1\}^\ell$，在至多 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{P},k)$ 时间内输出 $p_{s_1,\cdots,s_\ell}$ 的前 k 个系数。下面的引理说明，若 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{P},k)$ 是关于 k 的多项式，则我们可以在亚指数时间内构造定理 1.5：

推论 D.10（定理 1.5的亚指数算法，命题 1.7的正式表述）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_m]$ 表示关于 $e \in \Gamma^h_{++}$的双曲多项式。设 $u_1,\ldots,u_n \in \Gamma^h_+$为 n 个向量，满足

$$\sigma = \left\| \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_h[u_i] u_i \right\|_h.$$

设 $\mathcal{P}$ 为定义 *B.5* 中定义的交错族。设 *B.5*。设 $\textsc{MaxCoeff}_{\mathcal{P}}$ 为定义 *D.7* 中定义的预言机*D.7*，其运行时间为 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{P},k)$。那么对于任意 $\delta > 0$，算法 $\mathrm{KadisonSinger}(\delta,\mathcal{P})$（算法 *2*）返回一个符号赋值 $(s_1,\cdots,s_n) \in \{\pm 1\}^n$，使得

$$\left\| \sum_{i=1}^n s_i u_i \right\|_h \le 4(1+\delta)\sigma$$

及时

$$\left(\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}\left(\mathcal{P}, O(\log(n) m \delta^{-1})\right) + \frac{m \log^2 n}{\delta^2} \right) \cdot 2^{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m}.$$

证明。对于所有 $i \in [n]$，令 $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sigma}}$。则有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}_h[v_i] v_i \right\|_h = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{tr}_h[u_i] u_i}{\sigma} \right\|_h = 1.$$

令 $s_1, \cdots s_m$ 表示 KadisonSinger$(\sigma, \mathcal{P})$ (算法 2)。那么我们有 e

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^{m} s_i v_i \|_h &= \lambda_{\max}(p_{s_1,\cdots,s_m}) \\ &\le (1+\delta) \cdot \lambda_{\max}(p_\emptyset) && \text{(由引理 D.8)} \\ &\le 4(1+\delta) && \text{(由引理B.14)} \end{aligned}$$

因此我们有

$$\| \sum_{i=1}^{m} s_i u_i \|_h \le 4\sigma(1+\delta) \le 8\sigma.$$

□

D.5 定理1.3的亚指数算法

特别地，我们可以明确计算定理1.3的亚指数算法的运行时间。我们首先用以下陈述定义定理 1.3的交错族：

引理 D.11 （定理1.3、命题 4.1 和 KLS [的 5.420]的交错族）。设ξ_1、 $\cdots$、 ξ_n 表示从 n 中均匀随机抽取的独立同分布随机变量 $\{\pm 1\}$。设 u_1，……， $u_n \in \Gamma_+^h$ 是满足 n 以下条件的 $\sigma^2 = \| \sum_{i=1}^{n}$向量（$u_i u_i^*$）$^2 \|$

对于每个 $\mathbf{s} \in \{\pm 1\}^n$，令 $f_{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}[x]$ 表示以下多项式：

$$f_{\mathbf{s}}(x) := (\prod_{i=1}^{n} p_{i,s_i}) \cdot \det \left(x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} (s_i - \lambda_i) u_i u_i^* \right)^2 \right).$$

其中 $\forall i \in [n]$、 $\lambda_i = \mathbb{E}[\xi_i]$，以及 $\forall i \in [n]$、 $\forall s_i \in \{\pm 1\}$、 $p_{i,\ s_i} = \Pr_{\xi_i}[\xi_i = s_i]$。令 $\mathcal{F}$ 表示以下多项式族：

$$\mathcal{F} := \left\{ f_{s_1 \cdots s_\ell}(x) = \sum_{t_{\ell+1} \in \{\pm 1\}, \cdots, t_n \in \{\pm 1\}} f_{s_1,\cdots,s_\ell,t_{\ell+1},\cdots,t_n} : \forall \ell \in [n], s_1, \cdots, s_\ell \in \{\pm 1\}^\ell \right\}.$$

那么， $\mathcal{F}$是一个交错族。此外，存在一组选取结果 s_1、 $\cdots$、 $s_n \in \{\pm 1\}^n$，使得

$$\| \sum_{i=1}^{n} (s_i - \lambda_i) u_i u_i^* \| = \lambda_{\max}(f_{s_1 \cdots s_n}) \le \lambda_{\max}(f_\emptyset) \le 4\sigma.$$

引理 D.12 （计算定理 k 中交错多项式的最高 1.3 次系数）。令 $\mathcal{F}$ 表示引理 *D.11* 中定义的交错族。给定具有有限支撑的独立随机变量 ξ_1、…、 $\xi_n \in \mathbb{R}$，并且已知每个随机变量的所有矩。存在一个算法 MaxCoeff$_{\mathcal{F}}(k, \ell, s_1, \cdots, s_\ell)$，使得对于任意 $1 \le \ell \le n$ 和 $1 \le k \le m$，以及分别属于 ξ_1、…、 ξ_ℓ 的支撑中的任意 s_1、…、 s_ℓ，都能在 $O(n^k \mathrm{poly}(m))$ 时间内返回 $f_{s_1,\ldots,s_\ell}$ 的最高 k 个系数。

证明。 首项常数 $\prod_{i=1}^{\ell} p_{i,s_i}$ 可以很容易地计算出来。容易看出，所有奇数次项都为零。因此，对于以下期望多项式：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n}\left[\det\left(x^2 I - \left(\sum_{i=1}^{\ell} s_i u_i u_i^* + \sum_{i=\ell+1}^{n} \xi_i u_i u_i^*\right)^2\right)\right],$$

考虑 $x^{2(n-k)}$ 的系数，它等于矩阵 $(\sum_{i=1}^{\ell} s_i u_i u_i^* + \sum_{i=\ell+1}^{n} \xi_i u_i u_i^*)^2$ 的所有主 $k\times k$ 子式之和的期望值乘以 $(-1)^k$。对于任意固定值 $\xi_{\ell+1}$、……、ξ_n，有

$$\begin{aligned}
&\sigma_k\left(\left(\sum_{i=1}^{\ell} s_i u_i u_i^* + \sum_{i=\ell+1}^{n} \xi_i u_i u_i^*\right)^2\right)\\
&= \sigma_k\left(\sum_{i,j\in[\ell]} s_i s_j \langle u_i, u_j\rangle u_i u_i^* + \sum_{i\in[\ell], j\in[n]\setminus[\ell]} s_i \xi_j \langle u_i, u_j\rangle (u_i u_j^* + u_j u_i^*) + \sum_{i,j\in[n]\setminus[\ell]} \xi_i \xi_j \langle u_i, u_j\rangle u_i u_i^*\right).
\end{aligned}$$

为简便起见，令

$$c_{i,j} := \begin{cases} s_i s_j \langle u_i, u_j\rangle & \text{if } i,j\in[\ell],\\ \xi_i s_j \langle u_i, u_j\rangle & \text{if } i\in[n]\setminus[\ell], j\in[\ell],\\ s_i \xi_j \langle u_i, u_j\rangle & \text{if } i\in[\ell], j\in[n]\setminus[\ell],\\ \xi_i \xi_j \langle u_i, u_j\rangle & \text{if } i,j\in[n]\setminus[\ell] \end{cases}, \quad \forall i,j\in[n]\times[n].$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma_k\left(\sum_{i,j\in[n]\times[n]} c_{i,j} u_i u_j^*\right) &= \sum_{S\in\binom{[n]\times[n]}{k}} \sigma_k\left(\sum_{(i,j)\in S} c_{i,j} u_i u_j^*\right)\\
&= \sum_{S\in\binom{[n]\times[n]}{k}} \prod_{(i,j)\in S} c_{i,j}\cdot \sigma_k\left(\sum_{(i,j)\in S} u_i u_j^*\right),
\end{aligned}$$

其中，第一步由 [MSS15b] 中的命题 3.11 得出，第二步由 [MSS15b]中的命题 3.10 得出。

因此，期望多项式的系数为

$$\sum_{S\in\binom{[n]\times[n]}{k}} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n}\left[\prod_{(i,j)\in S} c_{i,j}\right]\cdot \sigma_k\left(\sum_{(i,j)\in S} u_i u_j^*\right).$$

注意，求和中至多有 n^{2k} 项。对于每个 S，假设已知每个随机变量的所有矩，则期望值$\mathbb{E}_{\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n}\left[\prod_{(i,\ j)\in S} c_{i,\ j}\right]$ 可在 $O(k)$ 时间内计算；对于所有 $i,\ j\in[n]$，内积 $\langle u_i, u_j\rangle$ 可在 $O(n^2 m)$ 时间内预处理。子式之和 $\sigma_k(\sum_{(i,\ j)\in S} u_i u_j^*)$ 可在 poly(m) 时间内计算。

因此，可以在 $n^{2k}\cdot$poly(m) 时间内计算 $x^{2(m-k)}$ 的系数，这意味着可以在 $O(n^k$poly$(m))$ 时间内计算前 k 个系数。引理得证。 □

推论 D.10的类似证明可得出以下推论：

推论 D.13（定理 1.3的**亚指数算法**）。设 u_1，…，$u_n \in \Gamma_+^h$ 是 n 个向量，满足 $\sigma^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (u_i u_i^*)^2 \right\|$。设 $\mathcal{F}$ 为引理 *D.11*中定义的交错族。则对于任意 $\delta > 0$，算法 KadisonSinger$(\delta, \mathcal{F})$ 返回一个符号赋值 $(s_1, \cdots, s_n) \in \{\pm 1\}^n$，使得

$$\left\| \sum_{i=1}^n s_i u_i \right\|_h \leq 4(1+\delta)\sigma$$

在……时间内

$$\left(O(n^{O(\sqrt{m}\log n/\delta)}\,\mathrm{poly}(m)) + \frac{m\log^2 n}{\delta^2} \right) \cdot 2^{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m}.$$

D.6 定理1.6的亚指数算法

在本节中，我们将介绍构造定理1.6的亚指数算法。令 $\mathcal{Q}$ 表示定义 D.7 中定义的交错族C.6。

假设每个 $q_{\mathbf{s}}(x) \in \mathcal{Q}$ 的次数均为 d。令 MaxCoeff$_{\mathcal{Q}}(k, \ell, s_1, \cdots, s_\ell)$ 表示定义 D.7 中定义的预言机；也就是说，对于支撑 μ 中任意的 $k \in [d]$, $\ell \in [n]$, $(s_1, \cdots, s_\ell)$，它至多用 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{Q}, k)$ 时间输出 $q_{s_1,\cdots,s_\ell}$ 的前 k 个系数。下面的推论指出，如果 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{Q}, k)$ 关于 k 是多项式的，那么我们就可以构造定理 1.6。该推论的证明与推论 D.10 的证明类似。

推论 D.14（定理的亚指数算法1.6，命题的正式表述1.8）。设 $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ 是关于 $e \in \Gamma_{++}^h$的双曲多项式。设 μ 是定义在 $[n]$ 上的齐次强 *Rayleigh* 概率分布，且每个元素的边缘概率至多为 ϵ_1；再设 v_1、$\cdots$、$v_n \in \Gamma_+^h$ 是 n 向量，满足 $\sum_{i=1}^n v_i = e$，并且对所有$i \in [n]$, $\|v_i\|_h \leq \epsilon_2$ 且 秩$_h(v_i) \leq 1$。

设 $\mathcal{Q}$ 为定义 *C.6* 中的交错族*C.6*，并令 MaxCoeff$_{\mathcal{Q}}$ 为定义 *D.7* 中的预言机*D.7*，其运行时间为 $\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}}(\mathcal{Q}, k)$。那么，对于任意 $\delta > 0$，算法KadisonSinger$(\delta, \mathcal{Q})$ 返回集合 S，该集合属于 μ的支撑，且满足

$$\left\| \sum_{i \in S} u_i \right\|_h \leq (1+\delta) \cdot \left(4(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 \right)$$

及时

$$\left(\mathcal{T}_{\mathrm{Coeff}} \left(\mathcal{Q}, O(\log(n) m \delta^{-1}) \right) + k^2 \right) \cdot 2^{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{m}.$$

E 示例与讨论

实稳定多项式的例子

- 生成树多项式：设 $G = (V, E)$ 是一个连通无向图。那么它的生成树多项式

$$P_G(x) = \sum_{\substack{T \subset E, \\ T \text{ spanning tree}}} \prod_{e \in T} x_e \tag{24}$$

是实稳定的。

- 初等对称多项式：对于任意 $n, k > 0$，初等对称多项式

$$e_k(x) = \sum_{S \in \binom{[n]}{k}} \prod_{i \in S} x_i$$

是实稳定的。

- 顶点匹配多项式：设 $G = (V, E)$ 是一个无向图。那么它的顶点匹配多项式

$$M_G(x) = \sum_{\substack{M \subset E, \\ M \text{ matching}}} \prod_{\{u,v\} \in M} -x_u x_v \tag{25}$$

是实稳定的 [BB09]。

- *Vámos* 拟阵多项式：设 $\mathcal{B}$ 由所有 $B \subset [10]$ 大小为 4 的子集组成，但不包括$\{1,2,3,4\}$、$\{1,2,5,6\}$、$\{1,2,7,8\}$、$\{1,2,9,10\}$、$\{3,4,5,6\}$、$\{5,6,7,8\}$、$\{7,8,9,10\}$。那么，$\mathcal{B}$是 Vámos 拟阵的基的集合。图 1 展示了1 的示意图，$\mathcal{B}$。其生成多项式

$$f_{10}(x) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \prod_{i \in B} x_i$$

是实稳定的。此外，对于任意 $k > 0$，$(f_{10}(x))^k$ 不能表示为具有半正定 Hermitian 形式的线性矩阵的行列式 [BVY14]。

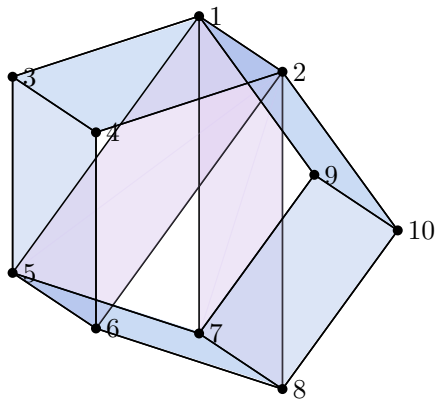

图 1：Vámos 拟阵的一个示例 $\mathcal{B}$。$\mathcal{B}$ 包含 $\binom{[10]}{4}$ 中的所有集合，但不包括由彩色面表示的大小为 4 的集合。

- *PSD* 矩阵混合的行列式：设 A_1、……、$A_n \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为 PSD 矩阵，且$B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为对称矩阵。那么，多项式

$$p(x) = \det(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n + B)$$

是实稳定的。

图2 和图3分别展示了生成树多项式（公式（24））和顶点匹配多项式（公式（25））的一个示例。

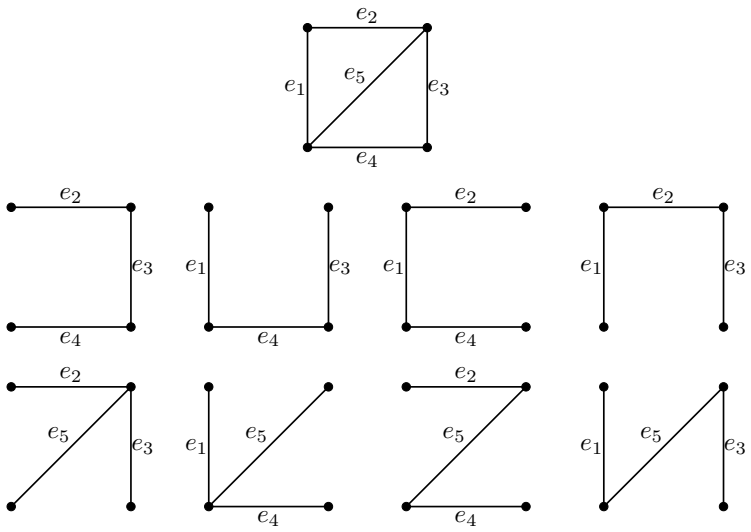

图2：生成树多项式的一个例子。上方：图 G；下方： G 的生成树集合。因此， G 的生成树多项式为 $P_G(x) = x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_4x_5 + x_1x_3x_5$.

双曲多项式的例子

- 洛伦兹多项式：

$$p(x) = x_n^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2$$

  关于 $e = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ 是双曲的。

- 行列式多项式：

$$p(x) = \det(\mathrm{mat}(x)) \in \mathbb{R}[\{x_{i,j}\}_{1 \le i \le j \le n}]$$

  关于 $e = \mathrm{vec}(I)$ 是双曲的，其中 $\mathrm{mat}(\cdot)$ 将一个 $(n(n+1)/2)$ 维向量打包为 $n \times n$ 对称矩阵，而 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 将对称矩阵向量化为向量。

- 多元匹配多项式：令 $G = (V, E)$ 为一个无向图。则

$$\mu_G(x, w) = \sum_{\substack{M \subset E, \\ M \text{ matching}}} (-1)^{|M|} \cdot \prod_{u \notin V(M)} x_u \cdot \prod_{e \in M} w_e^2$$

  是双曲的 [阿米19] 关于 $e = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_V & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top$。

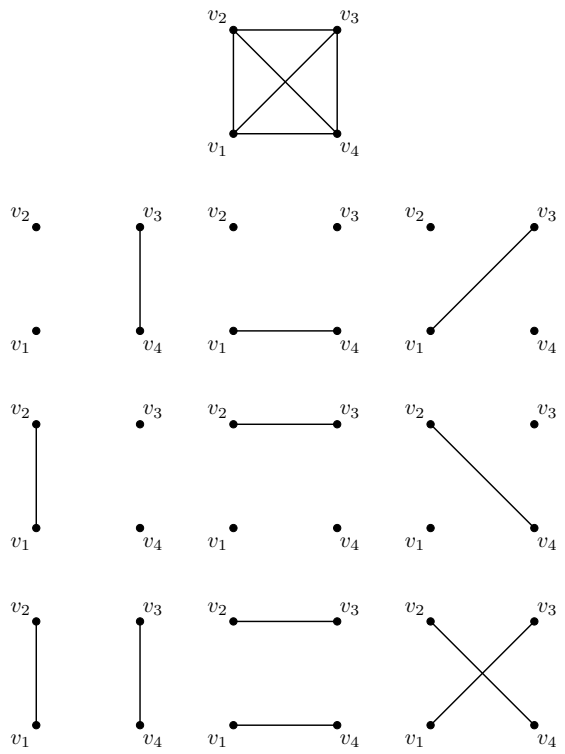

图 3：顶点匹配多项式示例。上方：图 G；下方：G 的匹配集合。因此，G 的匹配多项式为 $M_G(x) = -(x_1x_2 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_2x_4) + 3 \cdot x_1x_2x_3x_4$。