arXiv:2305.02576v1 [math.AP] 4 May 2023

复 Monge-Ampère 型方程的边界情形

WEI SUN

Abstract. 本文将在一定的几何假设下研究复 Monge-Amp`ère 型方程的边界情形。

1. Introduction

设 (M,ω) 是一个无边界的紧致连通 K¨ahler 流形，其复维数为 $n \geq 2$。本文关注以下复 Monge-Amp`ère 型方程：对于一个 K¨ahler 度量 χ,

$$(\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = c(\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m \wedge \omega^{n-m}, \quad \sup_M \varphi = 0 \tag{1.1}$$

其中 $0 \leq m < n$ 和 $c := \frac{\int_M \chi^n}{\int_M \chi^m \wedge \omega^{n-m}}$。称函数 φ 为可容许解或 χ-多重次调和函数，若 $\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \geq 0$。我们计划求解方程 (1.1) 的一个可容许解。在这种情况下，方程 (1.1) 是椭圆的。

复 Monge-Amp`ère 型方程在复几何与复分析中具有重要意义。关于以下问题，已有大量研究

$$(\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = g(\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m \wedge \omega^{n-m}, \quad \sup_M \varphi = 0, \tag{1.2}$$

满足锥条件 [15][27] （或 $\mathcal{C}$-次解 [34]）

$$n\chi^{n-1} > mg\chi^{m-1} \wedge \omega^{n-m}. \tag{1.3}$$

当 $m = 0$ 时，方程 (1.2) 正是复 Monge-Amp`ère 方程。自 Yau 的奠基性工作 [39]以来，该方程在复几何中发挥着重要作用。K¨ahler 度量 χ自然满足锥条件 (1.3)。当 $m = n-1$ 时，方程 (1.2)由 Donaldson [11] 和 Chen [5] 在不同问题中提出。

当 $g = c$ 时，Chen [6], Weinkove [37][38],Song-Weikove [27], 和 Fang-Lai-Ma [15] 首次通过抛物流研究了方程 (1.1)。后来，Li-Shi-Yao [24], Sun [29][30], Collins-Sz´ekelyhidi [9] 和 Sz´ekelyhidi [34] 分别提出了几种不同的椭圆型方法。

一个有趣的问题是，当锥条件 (1.3) 退化到边界情形时会发生什么。

$$n\chi^{n-1} \geq mc\chi^{m-1} \wedge \omega^{n-m}. \tag{1.4}$$

Fang、Lai、Song 和 Weinkove [16]研究了

$$(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^2=c(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)\wedge\omega$$

在边界情形 $2\chi\geq c\omega$下的 K¨ahler 曲面上。我们不考虑方程 (1.1)，而是在本文中考虑

$$(\chi+\tilde\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^n=c(\chi+\tilde\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi)^m\wedge\omega^{n-m},\quad \sup_M\varphi=0, \tag{1.5}$$

其中 $\tilde\chi$ 是半正且大（big）的，

$$\int_M(\chi+\tilde\chi)^n=c\int_M(\chi+\tilde\chi)^m\wedge\omega^{n-m}, \tag{1.6}$$

并且边界情形 (1.4) 成立。

以下定理是我们的主要结果。

定理 1.1. 设 (M,ω) 是一个无边界的复维数为 $n\geq 2$ 的紧 K¨ahler 流形，χ 也是一个 K¨ahler 度量，且 $\tilde\chi$ 是一个大半正形式。假设 χ 满足锥条件的边界情形 (1.4)。那么存在一个在多重势意义下的有界弱解 φ，满足方程 (1.5)。特别地，φ 在 $\tilde\chi$ 的丰部位上是光滑的。

为了构造弱解，我们将求解以下近似方程：对于$1\geq t>0$

$$\left(\chi+t\chi+\tilde\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_t\right)^n=c\left(\chi+t\chi+\tilde\chi+\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_t\right)^m\wedge\omega^{n-m}+b_tf\omega^n, \tag{1.7}$$

其中 $\sup_M\varphi_t=0$ 且 f 光滑并为正。此外，满足

$$\int_M f\omega^n=\int_M\omega^n,\qquad \int_M(\chi+t\chi+\tilde\chi)^n=c\int_M(\chi+t\chi+\tilde\chi)^m\wedge\omega^{n-m}+b_t\int_M\omega^n. \tag{1.8}$$

论证中的一个关键工具是对 L^∞ 估计 [28], 的一种新的 PDE 证明，该证明源自 Guo-Phong-Tong [21]的工作。Guo、Phong 和 Tong 结合了 Wang-Wang-Zhou [36] 与 Chen-Cheng [7] 的方法，证明了 Hessian 型方程的 L^∞ 估计。最近，Sui 和作者 [28] 将这一估计论证方法应用于 Hessian 商方程。

我们论证中的一个关键组成部分是半正定的大形式 $\tilde\chi$。文献[16] 指出，在 K¨ähler 曲面上，边界情形 (1.4) 通过一个简单的变换转化为复 Monge-Amp`ère 方程，从而蕴含 $\tilde\chi$ 的存在；但这种方法不适用于更高维情形。不过，我们有一个直接推论。

推论 1.2. 设 (M,ω) 是一个无边界、复维数为 $n\geq 2$ 的紧致 K¨ahler 流形，χ 也是一个 K¨ahler 度量。假设类 $\left[\chi-\left(\frac{mc}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}\omega\right]$ 是大类，并且具有

一个半正代表形式。那么存在一个有界弱解 φ，在多重势意义下满足方程 (1.1)。特别地，φ 在 $\tilde{\chi}$ 的丰部位上是光滑的。

一个直接的问题是：在什么样的几何条件下，我们能够在维数为 $n > 2$ 的 K¨ahler 流形上找到半正形式 $\tilde{\chi}$？近年来，关于 K¨ahler 类 [10][4] 的数值刻画已有一些重要成果。鉴于这些工作，我们希望今后能够找到相应的数值条件。

值得一提的是，我们可以将 $\tilde{\chi}$ 的光滑性要求弱化为 $C^{2,\alpha}$，并且只要求存在一个满足下式的 C^2 可容许函数 $\underline{u}$

$$n(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\underline{u})^{n-1} \geq mg(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\underline{u})^{m-1}\wedge\omega^{n-m}.$$

本文结构如下。在第 2 节中，我们将得到一个与 t 无关的 L^∞ 估计，用于近似方程 (1.7)。在第3节中，我们将证明，对于 $t > 0$，近似方程存在光滑解；当 t 趋近于 0 时，该解可能会发散。在第 4 节中，我们将进一步证明，$\tilde{\chi}$ 丰部位上的解的光滑性与 t 无关。第 5 节将给出一项稳定性估计。在第 6 节中，我们将根据前几节的估计构造一个多重势意义下的弱解。此外，该解在其他意义下也定义良好。在第 7 节中，我们将证明弱解的唯一性。在第 8 节中，我们将解释为何在定理 1.1 中只讨论常数右端项这一特殊情形。

2. L^∞ ESTIMATE

在本节中，我们将证明近似方程 (1.7) 的 L^∞ 估计，该估计与参数 t 无关。除非另有说明，本文中的常数 C 可能随行变化，且与参数 t 无关。

在论证过程中，De Giorgi 迭代是一种重要工具。关于其证明，请读者参阅 Gilbarg-Trudinger [17] 和 Chen-Wu [8] 的著作。

引理 2.1（De Giorgi 迭代）。假设 $\phi(s)$ 是定义在 $[s_0,+\infty)$ 上的非负递增函数，并且满足

$$s'^{\alpha}\phi(s'+s) \leq C\phi^{\beta}(s), \qquad \forall s'>0, s\geq s_0, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 1$。于是我们有

$$\phi(s_0+d)=0, \tag{2.2}$$

其中

$$d = C^{\frac{1}{\alpha}}\phi^{\frac{\beta-1}{\alpha}}(s_0)2^{\frac{\beta}{\beta-1}}. \tag{2.3}$$

在近似方程 (1.7) 中，必须有 $b_t > 0$ 对任意 $t > 0$，因为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\int_M(\chi+t\chi+\tilde{\chi})^n - c\int_M(\chi+t\chi+\tilde{\chi})^m\wedge\omega^{n-m}\right)\\=&\int_M\chi\wedge\left(n(\chi+t\chi+\tilde{\chi})^{n-1} - mc(\chi+t\chi+\tilde{\chi})^{m-1}\wedge\omega^{n-m}\right)\\>&0.\end{aligned}$$

于是，当 $0 < t \leq 1$ 时，我们得到以下与参数 t 无关的 L^∞ 估计。论证沿用 [28] 中的方法。为检验其一致依赖性，现给出证明。

定理 2.2. 假设对于 $q > 1$，有 $\|f\|_{L^q} < +\infty$。那么存在一个与参数 t 无关的常数 C，使得对所有 $t \in (0, 1]$，以及方程 (1.7) 的可容许解 φ_t，均有 $-\varphi_t < C$。

证明. 若 $\hat{\chi} \geq 0$ 且

$$(\chi+\hat{\chi})^n = c(\chi+\hat{\chi})^m\wedge\omega^{n-m} + b_t f\omega^n,$$

那么我们有

$$\begin{aligned}\hat{\chi}^n \leq&\sum_{i=1}^n C_n^i\hat{\chi}^i\wedge\chi^{n-i} - c\sum_{i=1}^m C_m^i\hat{\chi}^i\wedge\chi^{m-i}\wedge\omega^{n-m}\\=&(\chi+\hat{\chi})^n - c(\chi+\hat{\chi})^m\wedge\omega^{n-m} - (\chi^n - c\chi^m\wedge\omega^{n-m})\\\leq&(b_1 f + C_0)\omega^n.\end{aligned}$$

在本文中，$\hat{\chi}$ 是一个辅助记号，将用于表示后续各节中的不同项。

Let

$$V_t := \int_M(t\chi+\tilde{\chi})^n \geq \int_M\tilde{\chi}^n > 0.$$

我们求解辅助复 Monge-Amp`ere 方程

$$(t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_{t,k})^n = \frac{\tau_k(-\varphi_t - s)}{A_{s,k}}(b_1 f + C_0)\omega^n,$$

其中

$$A_{s,k} = \frac{1}{V_t}\int_M\tau_k(-\varphi_t - s)(b_1 f + C_0)\omega^n.$$

我们有

$$\lim_{k\to\infty} A_{s,k} = A_s := \frac{1}{V_t}\int_{M_s}(-\varphi_t - s)(b_1 f + C_0)\omega^n,$$

其中

$$M_s := \{\varphi_t \leq -s\}.$$

我们将研究函数

$$\Phi := -\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} A_{s,k}^{\frac{1}{n+1}} \left(-\psi_{t,k} + \frac{n}{n+1} A_{s,k}\right)^{\frac{n}{n+1}} - \varphi_t - s.$$

由最大值原理的论证 [21][22][28], 我们得到 $\Phi \leq 0$ 在 M上。我们可以找到一个常数 $\alpha_0 > 0$ 和一个常数 $C > 0$ ，使得

$$\int_M \exp\left(\frac{(n+1)\alpha_0}{n}\psi\right)\omega^n \leq C$$

对于任意光滑函数 ψ ，满足 $2\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$。因此

$$\int_M \exp\left(\frac{(n+1)\alpha_0}{n}\psi_{t,k}\right)\omega^n \leq C, \tag{2.4}$$

and

$$\begin{aligned} A_s &\leq \frac{1}{V_t}\int_M -\varphi_t(b_1 f + C_0)\omega^n \\ &\leq \frac{\|b_1 f + C_0\|_{L^q}}{V_t}\left(\int_M |\varphi_t|^{\frac{q}{q-1}}\omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{C(\alpha_0, q, \|f\|_{L^q})}{V_t}\left(\int_M \exp\left(-\frac{(n+1)\alpha_0}{n}\varphi_t\right)\omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{C(\alpha_0, q, \|f\|_{L^q})}{\int_M \tilde{\chi}^n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

由（2.4）可得,

$$\begin{aligned} &\int_{M_s} \exp\left(\frac{\alpha_0}{A_{s,k}^{\frac{1}{n}}}(-\varphi_t - s)^{\frac{n+1}{n}}\right)\omega^n \\ &\leq \int_{M_s} \exp\left(\frac{(n+1)\alpha_0}{n}\psi_{t,k} + \alpha_0 A_{s,k}\right)\omega^n \\ &\leq C\exp\left(\alpha_0 A_{s,k}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

令 $k \to \infty$ 代入 (2.6)，我们得到

$$\int_{M_s} \exp\left(\frac{\alpha_0}{A_s^{\frac{1}{n}}}(-\varphi_t - s)^{\frac{n+1}{n}}\right)\omega^n \leq C\exp\left(\alpha_0 A_s\right). \tag{2.7}$$

对于 $q>1$ 和 $p>n$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_0^p}{A_s^{\frac{p}{n}}}\int_{M_s}(-\varphi_t-s)^{\frac{(n+1)p}{n}}(b_1f+C_0)\omega^n\\
&\leq\left(\int_{M_s}\left(\frac{\alpha_0}{A_s^{\frac{1}{n}}}(-\varphi_t-s)^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{pq}{q-1}}\omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}}\|b_1f+C_0\|_{L^q}\\
&\leq C(p,q)\left(\int_{M_s}\exp\left(\frac{\alpha_0}{A_s^{\frac{1}{n}}}(-\varphi_t-s)^{\frac{n+1}{n}}\right)\omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}}\|b_1f+C_0\|_{L^q}\\
&\leq C(p,q,\|f\|_{L^q})\exp\left(\alpha_0\left(1-\frac{1}{q}\right)E\right),
\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中， E 是如（2.5）所示的 A_s 的一个一致上界。式（2.8）中的第一个不等式由关于测度 ω^n的 H¨older 不等式得出，第三个不等式则由式（2.7）得出。对于 $p>n$，应用关于测度（b_1f+C_0）ω^n的 H¨older 不等式,

$$\begin{aligned}
A_s&=\frac{1}{V_t}\int_{M_s}(-\varphi_t-s)(b_1f+C_0)\omega^n\\
&\leq\frac{1}{V_t}\left(\int_{M_s}(-\varphi_t-s)^{\frac{(n+1)p}{n}}(b_1f+C_0)\omega^n\right)^{\frac{n}{(n+1)p}}\left(\int_{M_s}(b_1f+C_0)\omega^n\right)^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}}\\
&\leq\frac{C(p,q,\|f\|_{L^q})}{V_t}\left(\frac{A_s^{\frac{p}{n}}}{a_0^p}\exp\left(\alpha_0\left(1-\frac{1}{q}\right)E\right)\right)^{\frac{n}{(n+1)p}}\left(\int_{M_s}(b_1f+C_0)\omega^n\right)^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}}\\
&\leq\frac{C(p,q,\alpha_0,E,\|f\|_{L^q})}{V_t}A_s^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_{M_s}(b_1f+C_0)\omega^n\right)^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}},
\end{aligned}\tag{2.9}$$

因此

$$A_s\leq C(p,q,\alpha_0,E,\|f\|_{L^q})\frac{1}{V_t^{\frac{n+1}{n}}}\left(\int_{M_s}(b_1f+C_0)\omega^n\right)^{\frac{(n+1)p-n}{np}}.$$

（2.9）中的第二个不等式由（2.8）得出，并且在此证明中我们可以选取 $p = n+1$。对于任意 $s' > 0$ 和 $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} s' \int_{M_{s+s'}} (b_1 f + C_0)\omega^n &\leq \int_{M_{s+s'}} (-\varphi_t - s)(b_1 f + C_0)\omega^n \\ &\leq \int_{M_s} (-\varphi_t - s)(b_1 f + C_0)\omega^n \\ &\leq C(p, q, \alpha_0, E, \|f\|_{L^q}) \frac{1}{V_t^{\frac{1}{n}}} \left(\int_{M_s} (b_1 f + C_0)\omega^n \right)^{\frac{(n+1)p-n}{np}} \qquad (2.10) \\ &\leq \frac{C(p, q, \alpha_0, E, \|f\|_{L^q})}{\left(\int_M \tilde{\chi}^n\right)^{\frac{1}{n}}} \left(\int_{M_s} (b_1 f + C_0)\omega^n \right)^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

结合引理 2.1 和不等式 (2.10)，可得】【。

$$\int_{M_s} (b_1 f + C_0)\omega^n = 0$$

when

$$s \geq s_\infty := \frac{C(p, q, \alpha_0, E, \|f\|_{L^q})}{\left(\int_M \tilde{\chi}^n\right)^{\frac{1}{n}}} 2^{\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}} \left(b_1 \left(\int_M \omega^n \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q} + C_0 \int_M \omega^n \right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.$$

□

3. Solvability of Approximation equations

在本节中，我们将证明当 $t > 0$ 时近似方程 (1.7) 的可解性。关键步骤是推导梯度估计和部分 C^2 估计。相关论证遵循 [31], 中的方法，实际上也适用于 Hermitian 流形。为了充分理解第3节和第4节中常数及系数对参数 t 的依赖关系，我们在此给出详细证明。在本节中，为了通过标准椭圆方法证明近似方程存在光滑可容许解，我们需要固定 $t > 0$ 下的全局估计。在下一节中，我们将证明丰部位中的一致光滑性，这需要与 t 无关的估计。遗憾的是，根据 [27] 中的反例，从全局角度来看，与 t 无关的估计并非全局成立。

我们用 ∇ 表示 ω 的 Chern 联络。与 [18][19][29], 中一样，我们有

$$\omega_{i\bar{j}} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right), \qquad \left[\omega^{i\bar{j}}\right] = \left[\omega_{i\bar{j}}\right]^{-1}, \tag{3.1}$$

在局部坐标（z^1, $\cdots$, z^n）中。为简便起见，我们记

$$X = \chi + t\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t. \tag{3.2}$$

本节中的实 (1,1) 形式若不会引起混淆，我们可以用同一个字母表示其在局部坐标图中的对应矩阵。因此，

$$X_{i\bar{j}} = X\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \chi_{i\bar{j}} + t\chi_{i\bar{j}} + \tilde{\chi}_{i\bar{j}} + \partial_i\bar{\partial}_j\varphi_t,$$

并记为 $[X^{i\bar{j}}] := X^{-1}$。在本文的推理中，我们用指标表示关于 ∇ 的协变导数。更多详情请参阅 [18][19][29]。

令 $S_k(\boldsymbol{\lambda})$ 表示 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ 的 k 次初等对称多项式，

$$S_k(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}.$$

特别地，$S_0(\boldsymbol{\lambda}) = 1$ 按惯例处理。此外，

$$S_{k;i_1\cdots i_s}(\boldsymbol{\lambda}) := S_k(\boldsymbol{\lambda}|_{\lambda_{i_1}=\cdots=\lambda_{i_s}=0}).$$

对于厄米矩阵 X，以下定义是良好的。

$$S_k(X) := S_k(\boldsymbol{\lambda}_*(X))$$

and

$$S_k(X^{-1}) := S_k(\boldsymbol{\lambda}^*(X))$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_*(X)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^*(X)$ 分别表示 X 关于 ω 和 ω^{-1} 的特征值。因此，近似方程 (1.7) 可以改写为以下两种形式，

$$S_n(X) = \frac{c}{C_n^m}S_m(X) + b_t f, \tag{3.3}$$

or

$$1 = \frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1}) + b_t f S_n(X^{-1}), \tag{3.4}$$

在局部坐标中。

3.1. 梯度估计。

定理 3.1（梯度估计）。设 $\varphi_t \in C^3(M)$ 是方程 (1.7) 关于 $t > 0$ 的一个可容许解。那么存在正常数 C 和 Λ，使得

$$\sup_M |\nabla\varphi_t|^2 \le Ce^{\Lambda(\varphi_t - \inf_M \varphi_t)},$$

其中 C 和 Λ 依赖于 t 及给定的几何量。

证明。我们将考察以下函数。

$$\ln|\nabla\varphi_t|^2_\omega - A\left(\varphi_t - \inf_M \varphi_t\right) + \frac{1}{\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1}, \tag{3.5}$$

其中 $A >> 1$ 将在后文中指定。在论证中，我们将采用 Phong-Sturm [25][26] 和 Blocki [1]的方法。常数 C 可能会随行而变化。不过它

若无特别说明，它与 A 无关。为了降低对函数f性质的依赖，我们将采用方程形式 (3.3) 来研究梯度估计。

存在一点 z_0，使 $\ln|\nabla\varphi_t|^2_\omega - A\varphi_t$ 在此处取得最大值。我们在 z_0 周围选取一个局部坐标图，使得 $\omega_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ 且 $X_{i\bar{j}}$ 在 z_0 处为对角矩阵。第一步是证明，在 z_0 处存在一个常数 $C(A,t) > 0$，使得

$$|\nabla\varphi_t|^2 \le C(A,t)\left(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1\right)^6. \tag{3.6}$$

我们在 z_0处有,

$$0 = \frac{\partial_l|\nabla\varphi_t|^2}{|\nabla\varphi_t|^2} - A\varphi_{t,l} - \frac{\varphi_{t,l}}{(\varphi_t - \inf_M\varphi_t + 1)^2}, \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned} 0 \ge\ & \frac{\bar\partial_l\partial_l|\nabla\varphi_t|^2}{|\nabla\varphi_t|^2} - \frac{\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\bar\partial_l|\nabla\varphi_t|^2}{|\nabla\varphi_t|^4} \\ & - \left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M\varphi_t + 1)^2}\right)\varphi_{t,l\bar l} + \frac{2\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar l}}{(\varphi_t - \inf_M\varphi_t + 1)^3}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

对 (3.3) 求导,

$$b_t f_l = \sum_i \left(S_{n-1;i}(X) - \frac{c}{C_n^m}S_{m-1;i}(X)\right)X_{i\bar i l}, \tag{3.9}$$

and

$$\begin{aligned} b_t f_{l\bar l} =\ & \sum_i \left(S_{n-1;i}(X) - \frac{c}{C_n^m}S_{m-1;i}(X)\right)X_{i\bar i l\bar l} \\ & + \sum_{i\ne j}\left(S_{n-2;ij}(X) - \frac{c}{C_n^m}S_{m-2;ij}(X)\right)X_{i\bar i l}X_{j\bar j\bar l} \\ & - \sum_{i\ne j}\left(S_{n-2;ij}(X) - \frac{c}{C_n^m}S_{m-2;ij}(X)\right)X_{i\bar j l}X_{j\bar i\bar l}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

直接计算可得,

$$\partial_l|\nabla\varphi_t|^2 = \sum_i(\varphi_{t,i}\varphi_{t,l\bar i} + \varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar i}), \tag{3.11}$$

and

$$\begin{aligned} \bar\partial_l\partial_l|\nabla\varphi_t|^2 =\ & \sum_i(\varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar i\bar l} + \varphi_{t,i\bar l}\varphi_{t,l\bar i}) + 2\sum_i\mathfrak{Re}\{X_{l\bar l i}\varphi_{t,\bar i}\} \\ & - 2\sum_i\mathfrak{Re}\{(\chi_{l\bar l i} + t\chi_{l\bar l i} + \tilde\chi_{l\bar l i})\varphi_{t,\bar i}\} + \sum_{i,j}R_{l\bar l i\bar j}\varphi_{t,j}\varphi_{t,\bar i}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

将 (3.12) 代入 (3.8),

$$\begin{aligned}0\geq\ &|\nabla\varphi_t|^2\sum_i(\varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar{i}\bar{l}}+\varphi_{t,i\bar{l}}\varphi_{t,l\bar{i}})+2|\nabla\varphi_t|^2\sum_i\mathfrak{Re}\{X_{l\bar{l}i}\varphi_{t,\bar{i}}\}\\&-C|\nabla\varphi_t|^3-C|\nabla\varphi_t|^4-\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\bar{\partial}_l|\nabla\varphi_t|^2\\&-|\nabla\varphi_t|^4\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\varphi_{t,l\bar{l}}+2|\nabla\varphi_t|^4\frac{\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

由（3.11），

$$\begin{aligned}\left|\sum_i\varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar{i}}\right|^2=\ &\left|\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\right|^2+\left|\sum_i\varphi_{t,i}\varphi_{t,l\bar{i}}\right|^2-2X_{l\bar{l}}\mathfrak{Re}\Big\{\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\varphi_{t,\bar{i}}\Big\}\\&+2\mathfrak{Re}\Big\{\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\sum_i(\chi_{i\bar{l}}+t\chi_{i\bar{l}}+\tilde{\chi}_{i\bar{l}})\varphi_{t,\bar{i}}\Big\}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

结合（3.14）和（3.7），

$$\begin{aligned}&|\nabla\varphi_t|^2\sum_i\varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar{i}\bar{l}}-\left|\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\right|^2\\\geq\ &\left|\sum_i\varphi_{t,il}\varphi_{t,\bar{i}}\right|^2-\left|\partial_l|\nabla\varphi_t|^2\right|^2\\=\ &\left|\sum_i\varphi_{t,i}\varphi_{t,l\bar{i}}\right|^2-2X_{l\bar{l}}|\nabla\varphi_t|^2\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}\\&+2|\nabla\varphi_t|^2\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\mathfrak{Re}\Big\{\varphi_{t,l}\sum_i(\chi_{i\bar{l}}+t\chi_{i\bar{l}}+\tilde{\chi}_{i\bar{l}})\varphi_{t,\bar{i}}\Big\}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

将 (3.15) 代入 (3.13)，并应用柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}0\geq\ &2|\nabla\varphi_t|^2\sum_i\mathfrak{Re}\{X_{l\bar{l}i}\varphi_{t,\bar{i}}\}-C|\nabla\varphi_t|^3-C|\nabla\varphi_t|^4\\&-|\nabla\varphi_t|^4\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\varphi_{t,l\bar{l}}+2|\nabla\varphi_t|^4\frac{\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\\&-2X_{l\bar{l}}|\nabla\varphi_t|^2\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}\\&-C|\nabla\varphi_t|^3\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\\&-|\nabla\varphi_t|^3\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

若 $|\nabla\varphi_t| \leq (A+|\nabla f|+1)\,(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3,$，则证明的第一步就完成了。接下来，我们可以假设

$$|\nabla\varphi_t| > (A+|\nabla f|+1)\left(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1\right)^3, \tag{3.17}$$

因此，不等式（3.16）可化简为

$$\begin{aligned}
0 \geq\ & 2|\nabla\varphi_t|^2 \sum_i \mathfrak{Re}\{X_{l\bar{l}i}\varphi_{t,\bar{i}}\} - C|\nabla\varphi_t|^3 - C|\nabla\varphi_t|^4 \\
& - |\nabla\varphi_t|^4\left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right)\varphi_{t,l\bar{l}} + |\nabla\varphi_t|^4 \frac{\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3} \\
& - 2X_{l\bar{l}}|\nabla\varphi_t|^2\left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\
& - C|\nabla\varphi_t|^3\left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

将（3.18）乘以 $S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)$，并对指标 l 求和，

$$\begin{aligned}
0 \geq\ & -|\nabla\varphi_t|^2\left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right)\sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l\bar{l}} \\
& + \frac{|\nabla\varphi_t|^2}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3}\sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\
& - 2\,(A+1)\sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) X_{l\bar{l}}\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\
& - C|\nabla\varphi_t|\,(A+1)\sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \\
& - C|\nabla\varphi_t|^2 \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) - 2b_t|\nabla\varphi_t||\nabla f|.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

由于 X 是正定的，

$$\begin{aligned}
\left(S_{n-1;i}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;i}(X)\right) X_{i\bar{i}} &\leq \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) X_{l\bar{l}} \\
&\leq n S_n(X),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

对于任意 $1 \leq i \leq n$，因此，

$$\begin{aligned}
0 \geq & -|\nabla\varphi_t|^2 \left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right) \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \varphi_{t,l\bar{l}} \\
& + \frac{|\nabla\varphi_t|^2}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3} \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\
& - 2|\nabla\varphi_t|^2 (A+1)\left((n-m)S_n(X) + mb_t f\right) \\
& - C|\nabla\varphi_t| (A+1) \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \\
& - C|\nabla\varphi_t|^2 \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) - 2b_t|\nabla\varphi_t||\nabla f|.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

如 [32], $\ln \frac{S_n(\boldsymbol{\lambda})}{S_m(\boldsymbol{\lambda})+a}$ 关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 是凹函数，若 $a \geq 0$。于是，

$$\begin{aligned}
& - \left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right) \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \varphi_{t,l\bar{l}} \\
& + \frac{1}{2(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3} \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\
\geq & \frac{t}{2} \left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right) \sum_l \left(S_{n-1;l}(X) - \frac{c}{C_n^m} S_{m-1;l}(X)\right) \chi_{l\bar{l}} \\
& + \left(A + \frac{1}{(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^2}\right) S_n(X) \ln \frac{S_n(\tilde{X})}{S_m(\tilde{X}) + \frac{b_t C_n^m}{c} f},
\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$\tilde{X} := \chi + \frac{t}{2}\chi + \tilde{\chi} + \frac{1}{2(A+1)(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3} \sqrt{-1}\partial\varphi_t \wedge \bar{\partial}\varphi_t.$$

现在我们来计算 $\frac{S_n(X)}{S_m(\tilde{X})+\frac{b_t C_n^m}{c} f}$。这里我们记

$$\hat{\chi} = \frac{t}{4}\chi + \tilde{\chi} + \frac{1}{2(A+1)(\varphi_t - \inf_M \varphi_t + 1)^3} \sqrt{-1}\partial\varphi_t \wedge \bar{\partial}\varphi_t.$$

由于 χ 满足锥条件的边界情形,

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}^n - \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m\wedge\omega^{n-m}+b_t f\omega^n\right)\\
&\geq \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}}\hat{\chi}^n+\chi^n-c\chi^m\wedge\omega^{n-m}-\frac{b_t}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{m}}f\omega^n\right)\\
&\geq \frac{n}{(A+1)(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sqrt{-1}\partial\varphi_t\wedge\bar{\partial}\varphi_t\wedge\left(\frac{t}{4}\chi+\tilde{\chi}\right)^{n-1}\\
&\quad-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}c\chi^m\wedge\omega^{n-m}-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}b_t f\omega^n.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

显然，存在一个常数 $C>1$，它依赖于 t，使得

$$\tilde{X}^n - \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m\wedge\omega^{n-m}+b_t f\omega^n\right)>0\tag{3.24}$$

只要

$$|\nabla\varphi_t|^2\geq C(A+1)(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3.\tag{3.25}$$

于是，不等式 (3.23) 推出

$$\ln\frac{S_n(\tilde{X})}{S_m(\tilde{X})+\frac{b_t C_n^m}{c}f}>\ln\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\geq\frac{4}{5}(n-m)t.\tag{3.26}$$

如果（3.25）成立。将（3.26）代入（3.22），

$$\begin{aligned}
&-\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l\bar{l}}\\
&+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}\\
>&\frac{At}{2}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\chi_{l\bar{l}}+\frac{4(n-m)At}{5}S_n(X)\\
&+\frac{1}{2(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}.
\end{aligned}\tag{3.27}$$

将（3.17）和（3.27）代入（3.21），

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{At}{2}\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\chi_{l\bar{l}}+\frac{4(n-m)At}{5}S_n(X)\\&+\frac{1}{2(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}\\&-2n\left(A+1\right)S_n(X)-C\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\\&-C\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)-2b_t.\end{aligned}\tag{3.28}$$

存在一个常数 $\sigma_0>0$，使得 $\chi>\delta_0\omega$，因此有

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{A\delta_0 t}{2}\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)+\frac{4(n-m)At}{5}S_n(X)\\&+\frac{1}{2(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}\\&-2n\left(A+1\right)S_n(X)-2C\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)-2b_t.\end{aligned}\tag{3.29}$$

若我们选取足够大的 A（其取值依赖于 t），则

$$\begin{aligned}&2n\left(A+1\right)S_n(X)\\\geq & \frac{A\delta_0 t}{4}\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)+\frac{(n-m)At}{2}S_n(X)\\\geq & \frac{A(n-m)\delta_0 t}{4n}S_{n-1}(X)+\frac{(n-m)At}{2}S_n(X),\end{aligned}\tag{3.30}$$

其中，上述不等式由牛顿-麦克劳林不等式推出。然而，不等式 (3.30) 表明

$$X^{i\bar{i}}\leq\frac{C}{t}.\tag{3.31}$$

于是我们得到了一个界限，

$$\begin{aligned}&\sum_{l}\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)X_{l\bar{l}}^2\\=&\ S_n(X)\left(b_t f S_{n-1}(X^{-1})+(m+1)\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1}(X^{-1})\right)\\\leq&\ C(t)S_n(X).\end{aligned}\tag{3.32}$$

回顾 (3.19) 和 (3.27),

$$\begin{aligned} 0 \geq & \frac{A\delta_0 t}{4}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)+\frac{(n-m)At}{2}S_n(X) \\ & +\frac{1}{2(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}} \\ & -\epsilon C(t)\,(A+1)\,S_n(X)-\frac{A+1}{\epsilon|\nabla\varphi_t|^2}\sum_l\left(S_{n-1;l}(X)-\frac{c}{C_n^m}S_{m-1;l}(X)\right)\varphi_{t,l}\varphi_{t,\bar{l}}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

当 $\epsilon>0$ 足够小时，使得

$$\frac{(n-m)At}{2}\geq\epsilon C(t)(A+1),$$

我们有

$$\frac{1}{\epsilon|\nabla\varphi_t|^2}\left(A+\frac{1}{(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^2}\right)\geq\frac{1}{2(\varphi_t-\inf_M\varphi_t+1)^3}. \tag{3.34}$$

梯度估计的第一步已经完成。

在第二步中，我们将推导全局梯度估计。不失一般性，我们可以假设

$$\ln|\nabla\varphi_t|^2+1\geq A\left(\varphi_t-\inf_M\varphi_t\right). \tag{3.35}$$

将 (3.35) 代入 (3.6),

$$|\nabla\varphi_t|^2\leq C(A,t)\left(\ln|\nabla\varphi_t|^2+1\right)^6, \tag{3.36}$$

这说明 $|\nabla\varphi_t|^2<C(A,t)$。因此，对于任意 $z\in M$,

$$\begin{aligned} \ln|\nabla\varphi_t(z)|^2 &\leq \ln|\nabla\varphi_t(z_0)|^2-A\left(\varphi_t(z_0)-\inf_M\varphi_t\right)+\frac{1}{\varphi_t(z_0)-\inf_M\varphi_t+1} \\ &\quad +A\left(\varphi_t(z)-\inf_M\varphi_t\right)-\frac{1}{\varphi_t(z)-\inf_M\varphi_t+1} \\ &\leq \ln|\nabla\varphi_t(z_0)|^2-A\varphi_t(z_0)+A\varphi_t(z)+1 \\ &\leq \ln C(A,t)+A\left(\varphi_t(z)-\inf_M\varphi_t\right)+1. \end{aligned}$$

□

3.2. Se 阶估计。由 [20][15]，我们得到以下强凹性 .

命题 3.2（强凹性）。对于任意 $\boldsymbol{\lambda}\in\Gamma_n$ 和 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$，有

$$\sum_{i=1}^n\frac{S_{m-1;i}(\boldsymbol{\lambda})}{\lambda_i}\xi_i\bar{\xi}_i+\sum_{i,j}S_{m-2;ij}(\boldsymbol{\lambda})\xi_i\bar{\xi}_j\geq\sum_{i,j}\frac{S_{m-1;i}(\boldsymbol{\lambda})S_{m-1;j}(\boldsymbol{\lambda})}{S_m(\boldsymbol{\lambda})}\xi_i\bar{\xi}_j. \tag{3.37}$$

由强凹性 (3.37)，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_l\partial_l S_m(X^{-1}) \geq &-\sum_i S_{m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X_{i\bar{i}l\bar{l}}\\ &+\sum_{i,j} S_{m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X^{j\bar{j}} X_{i\bar{j}l}X_{j\bar{i}\bar{l}}\\ &+\sum_{i,j}\frac{S_{m-1;i}(X^{-1})S_{m-1;j}(X^{-1})}{S_m(X^{-1})}(X^{i\bar{i}})^2(X^{j\bar{j}})^2 X_{i\bar{i}l}X_{j\bar{j}\bar{l}}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

我们引入一个量 w，用于 C^2 估计，其中

$$w := \ln tr_\omega(\chi + t\chi + \tilde{\chi} + i\partial\bar{\partial}\varphi_t).$$

引理 3.3. 设 $\varphi_t \in C^2(M)$ 是 $t>1$ 的方程 (1.7) 的可容许解。存在正常数 N 和 θ，使得当点 $z\in M$ 处 $w > N$ 时，

$$\begin{aligned}&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\ &>\theta\left(\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)+1\right),\end{aligned}$$

在 z 周围的坐标下，使得 $\omega_{i\bar{j}}=\delta_{ij}$ 且 $X_{i\bar{j}}$ 在 z 处为对角形式。常数 N 和 θ 可依赖于参数 t 和几何数据。

证明。无妨假设 $X_{1\bar{1}}\geq\cdots\geq X_{n\bar{n}}>0$。通过直接计算，

$$\begin{aligned}&\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\ &=\frac{c}{C_n^m}\left(S_{n-m}(X^{-1})S_1(X^{-1}) - (n-m+1)S_{n-m+1}(X^{-1})\right) + b_t f S_n(X^{-1})S_1(X^{-1})\\ &\leq\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1}) + b_t f S_n(X^{-1})\right)S_1(X^{-1})\\ &=S_1(X^{-1}).\end{aligned}$$

此外，根据牛顿-麦克劳林不等式，

$$\begin{aligned}&\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\ &\geq\frac{c}{C_n^m}\frac{n-m}{n}S_{n-m}(X^{-1})S_1(X^{-1}) + b_t f S_n(X^{-1})S_1(X^{-1})\\ &\geq\frac{n-m}{n}S_1(X^{-1}).\end{aligned}$$

于是，我们得到

$$
\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
&\geq(1+t)\delta_0\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\
&\quad-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})X^{i\bar{i}}+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})X^{i\bar{i}}\right)\\
&\geq(1+t)\delta_0\left(\frac{c}{C_n^m}\frac{n-m}{n}S_{n-m}(X^{-1})S_1(X^{-1})+b_tfS_n(X^{-1})S_1(X^{-1})\right)\\
&\quad-\left(\frac{c(n-m)}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1})+nb_tfS_n(X^{-1})\right)\\
&\geq\frac{(1+t)\delta_0}{n}\left(\frac{c(n-m)}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1})+nb_tfS_n(X^{-1})\right)S_1(X^{-1})\\
&\quad-\left(\frac{c(n-m)}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1})+nb_tfS_n(X^{-1})\right).
\end{aligned}
$$

若 $S_1(X^{-1})\geq\frac{2n}{\delta_0}$，则

$$
\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
&\geq\frac{(1+t)\delta_0}{2n}\left(\frac{c(n-m)}{C_n^m}S_{n-m}(X^{-1})+nb_tfS_n(X^{-1})\right)S_1(X^{-1})\\
&\geq\frac{(1+t)\delta_0(n-m)}{2n}S_1(X^{-1})\\
&\geq\frac{(1+t)\delta_0(n-m)}{2n}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right).
\end{aligned}
$$

否则，

$$
X_{1\bar{1}}\geq\cdots\geq X_{n\bar{n}}>\frac{\delta_0}{2n}. \tag{3.39}
$$

在 (3.39) 的情形下，我们改写为

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
\geq&\frac{t}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&-\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;1}(X^{-1})(X^{1\bar{1}})^2+b_tfS_{n-1;1}(X^{-1})(X^{1\bar{1}})^2\right)X_{1\bar{1}}\\
&+\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\left(\chi_{i\bar{i}}+\frac{t}{2}\chi_{i\bar{i}}+\tilde{\chi}_{i\bar{i}}\right)\\
&+\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;1}(X^{-1})(X^{1\bar{1}})^2+b_tfS_{n-1;1}(X^{-1})(X^{1\bar{1}})^2\right)X_{1\bar{1}}\\
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X_{i\bar{i}}.
\end{aligned}\tag{3.40}$$

我们记

$$\tilde{X}:=\chi+\frac{t}{2}\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}X_{1\bar{1}}dz^1\wedge d\bar{z}^1.$$

由凹性可知，根据 (3.40) 和 (3.39),

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
\geq&\frac{t}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&-\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;1}(X^{-1})+b_tfS_{n-1;1}(X^{-1})\right)X^{1\bar{1}}\\
&-\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(\tilde{X}^{-1})+b_tfS_n(\tilde{X}^{-1})\right)+1\\
>&\frac{t}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&-\left(\frac{c}{C_n^m}C_{n-1}^{n-m-1}\left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-m-1}+b_tf\left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-1}\right)X^{1\bar{1}}\\
&-\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(\tilde{X}^{-1})+b_tfS_n(\tilde{X}^{-1})\right)+1.
\end{aligned}\tag{3.41}$$

与 (3.23) 类似,

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}^n - \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m\wedge\omega^{n-m}+b_tf\omega^n\right)\\
&\geq \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}\left(\frac{\hat{\chi}^n}{(1+\frac{t}{4})^n}+\chi^n-c\chi^m\wedge\omega^{n-m}-\frac{b_t}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^m}f\omega^n\right)\\
&> n\sqrt{-1}X_{1\bar{1}}dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\left(\frac{t}{4}\chi+\tilde{\chi}\right)^{n-1}\\
&\quad-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}c\chi^m\wedge\omega^{n-m}-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}b_tf\omega^n,
\end{aligned}\tag{3.42}$$

其中

$$\hat{\chi}:=\frac{t}{4}\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}X_{1\bar{1}}dz^1\wedge d\bar{z}^1.$$

If

$$X_{1\bar{1}}\geq\frac{4^{n-1}}{t^{n-1}\delta_0^{n-1}}\left(\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n}\frac{c}{C_n^m}S_m(\chi)+\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}b_tf\right),$$

则不等式（3.42）意味着

$$\tilde{X}^n-\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m\wedge\omega^{n-m}+b_tf\omega^n\right)>0.\tag{3.43}$$

不等式（3.43）表明

$$\frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(\tilde{X}^{-1})+b_tfS_n(\tilde{X}^{-1})<\frac{1}{\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}}.\tag{3.44}$$

将（3.44）代入（3.41），

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
&>\frac{t}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&-\left(\frac{(n-m)c}{n}\left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-m-1}+b_tf\left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-1}\right)\frac{1}{X_{1\bar{1}}}+\frac{(n-m)t}{4\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
&>\frac{\delta_0t}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)+\frac{(n-m)t}{8\left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}},
\end{aligned}$$

when

$$X_{1\bar{1}} \geq \frac{4^{n-1}}{t^{n-1}\delta_0^{n-1}} \left(\left(1+\frac{t}{4}\right)^n \frac{c}{C_n^m} S_m(\chi) + \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m} b_t f \right) + \frac{8}{(n-m)t} \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m} \left(\frac{(n-m)c}{n} \left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-m-1} + b_t f \left(\frac{2n}{\delta_0}\right)^{n-1} \right).$$

□

现在我们将证明二阶估计。

定理 3.4（二阶估计）。设 $\varphi_t \in C^4(M)$ 是方程 (1.7) 关于 $t > 0$ 的一个可容许解。则存在正常数 C 和 A，使得

$$\sup_M w \leq C e^{A(\varphi_t - \inf_M \varphi_t)}.$$

常数 C 和 A 可能依赖于参数 t 和给定的几何数据。

证明。考虑函数

$$\ln w - A\varphi_t, \tag{3.45}$$

其中 $A >> 1$ 将在后面确定。存在一点 z_0，使 $\ln w - A\varphi_t$ 在该点取得最大值。我们在 z_0 周围选取一个局部坐标图，使得 $\omega_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ 和 $X_{i\bar{j}}$ 在z_0处为对角形式。

在 z_0 处对方程形式 (3.4) 求导，得到

$$0 = -\frac{c}{C_n^m} \sum_i S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X_{i\bar{i}l} + b_t f_l S_n(X^{-1}) - b_t S_n(X^{-1}) f \sum_i X^{i\bar{i}} X_{i\bar{i}l}, \tag{3.46}$$

and

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{c}{C_n^m}\sum_{i,j} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X^{j\bar{j}} X_{j\bar{i}l}X_{i\bar{j}\bar{l}} - \frac{c}{C_n^m}\sum_i S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X_{i\bar{i}l\bar{l}} \\ & + b_t f\sum_{i,j} S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X^{j\bar{j}} X_{j\bar{i}\bar{l}}X_{i\bar{j}l} - b_t f\sum_i S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 X_{i\bar{i}l\bar{l}} \\ & + b_t f\frac{1}{S_n(X^{-1})}\partial_l S_n(X^{-1})\bar{\partial}_l S_n(X^{-1}) \\ & + b_t f_{l\bar{l}} S_n(X^{-1}) + b_t f_l \bar{\partial}_l S_n(X^{-1}) + b_t f_{\bar{l}}\partial_l S_n(X^{-1}) \\ \geq & \left(\frac{c}{C_n^m}\sum_{i,j} S_{n-m-1;i}(X^{-1}) + b_t f\sum_{i,j} S_{n-1;i}(X^{-1})\right)(X^{i\bar{i}})^2 X^{j\bar{j}} X_{j\bar{i}\bar{l}}X_{i\bar{j}l} \\ & - \left(\frac{c}{C_n^m}\sum_{i,j} S_{n-m-1;i}(X^{-1}) + b_t f\sum_{i,j} S_{n-1;i}(X^{-1})\right)(X^{i\bar{i}})^2 X_{i\bar{i}l\bar{l}} \\ & + b_t f_{l\bar{l}} S_n(X^{-1}) - b_t\frac{f_l f_{\bar{l}}}{f} S_n(X^{-1}).\end{aligned} \tag{3.47}$$

(3.47) 中的第一个不等式由不等式 (3.38) 推得，而第二个不等式则由柯西-施瓦茨不等式得到。综上，

$$\begin{aligned}& \sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right) X_{i\bar{i}l\bar{l}} \\ \geq & \sum_{i,j}\left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right) X^{j\bar{j}} X_{j\bar{i}\bar{l}}X_{i\bar{j}l} \\ & - b_t S_n(X^{-1})\frac{f_l f_{\bar{l}}}{f} + b_t S_n(X^{-1}) f_{l\bar{l}}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

此外，我们知道在 z_0

$$0 = \sum_l X_{l\bar{l}i} - wA\varphi_{t,i}, \tag{3.49}$$

and

$$\begin{aligned}0 \geq & \sum_l X_{l\bar{l}i\bar{i}} - \frac{w_i w_{\bar{i}}}{w} - wA\varphi_{t,i\bar{i}} \\ = & \sum_l (X_{i\bar{i}l\bar{l}} - R_{l\bar{l}i\bar{i}}X_{i\bar{i}} + R_{i\bar{i}l\bar{l}}X_{l\bar{l}} + G_{i\bar{i}l\bar{l}}) - \frac{w_i w_{\bar{i}}}{w} - wA\varphi_{t,i\bar{i}}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{i\bar{i}l\bar{l}} = & (\chi+\tilde{\chi})_{l\bar{l}i\bar{i}} - (\chi+\tilde{\chi})_{i\bar{i}l\bar{l}} + \sum_k R_{l\bar{l}i\bar{k}}(\chi+\tilde{\chi})_{k\bar{i}} - \sum_k R_{i\bar{i}l\bar{k}}(\chi+\tilde{\chi})_{k\bar{l}} \\ & + t\chi_{l\bar{l}i\bar{i}} - t\chi_{i\bar{i}l\bar{l}} + t\sum_k R_{l\bar{l}i\bar{k}}\chi_{k\bar{i}} - t\sum_k R_{i\bar{i}l\bar{k}}\chi_{k\bar{l}}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

将 (3.50) 乘以 $\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2$,

$$\begin{aligned}0\geq&\sum_{i,l}\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X_{i\bar{i}l\bar{l}}\\&-C(w+1)\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w}\\&-wA\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}.\end{aligned}\tag{3.52}$$

直接计算可得,

$$\left|X_{i\bar{j}l}-X_{j\bar{l}}\frac{w_i}{w}\right|^2=X_{i\bar{j}l}X_{j\bar{i}\bar{l}}-2\mathfrak{Re}\left\{X_{i\bar{j}l}X_{l\bar{j}}\frac{w_{\bar{i}}}{w}\right\}+X_{j\bar{l}}X_{l\bar{j}}\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w^2},\tag{3.53}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_lX_{i\bar{j}l}X_{j\bar{i}\bar{l}}&\geq2\sum_l\mathfrak{Re}\left\{X_{i\bar{j}l}X_{l\bar{j}}\frac{w_{\bar{i}}}{w}\right\}-\sum_lX_{j\bar{l}}X_{l\bar{j}}\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w^2}\\&=2X_{j\bar{j}}\mathfrak{Re}\left\{X_{i\bar{j}j}\frac{w_{\bar{i}}}{w}\right\}-X_{j\bar{j}}^2\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w^2}\\&=2X_{j\bar{j}}\mathfrak{Re}\left\{X_{j\bar{j}i}\frac{w_{\bar{i}}}{w}\right\}-X_{j\bar{j}}^2\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w^2}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

将 (3.54) 乘以 $\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X^{j\bar{j}}$ 并求和,

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,l}\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X^{j\bar{j}}X_{i\bar{j}l}X_{j\bar{i}\bar{l}}\\\geq&\sum_{i,j}\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X^{j\bar{j}}\\&\qquad\cdot\left(2X_{j\bar{j}}\mathfrak{Re}\left\{X_{j\bar{j}i}\frac{w_{\bar{i}}}{w}\right\}-X_{j\bar{j}}^2\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w^2}\right)\\=&\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

将 (3.55) 代入 (3.48),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,l}\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)X_{i\bar{i}l\bar{l}}\\
\geq&\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\frac{w_iw_{\bar{i}}}{w}\\
&-b_tS_n(X^{-1})\sum_l\frac{f_lf_{\bar{l}}}{f}+b_tS_n(X^{-1})\sum_l f_{l\bar{l}}.
\end{aligned}\tag{3.56}$$

将 (3.56) 代入 (3.52),

$$\begin{aligned}
0\geq&-b_tS_n(X^{-1})\sum_l\frac{f_lf_{\bar{l}}}{f}+b_tS_n(X^{-1})\sum_l f_{l\bar{l}}\\
&-C(w+1)\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\
&-wA\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}.
\end{aligned}\tag{3.57}$$

根据引理 3.3，存在正常数 $N(t)$ 和 $\theta(t)$，使得

$$\begin{aligned}
0\geq&-b_tfS_n(X^{-1})\left|\sum_l\left(\frac{f_lf_{\bar{l}}}{f^2}-\frac{f_{l\bar{l}}}{f}\right)\right|\\
&-C(w+1)\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\
&+wA\theta(t)\left(\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)+1\right)\\
\geq&-C-C(w+1)\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\
&+wA\theta(t)\left(\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_tfS_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)+1\right).
\end{aligned}\tag{3.58}$$

when $w>N(t)$。如果我们取足够大的 A，则不等式 (3.58) 不可能成立。

因此，在任意 $z\in M$

$$\ln w-A\varphi_t\leq\ln w(z_0)-A\varphi_t(z_0)\leq\ln N(t)-A\inf_M\varphi_t.$$

□

3.3. 高阶估计与连续性方法。高阶估计可通过 Evans-Krylov理论 [12][23][35] 和 Schauder估计获得。为求解方程 (1.7)，我们可以采用作者 [29] 和 Sz´ekelyhidi [34]介绍的变体连续性方法。

4. Uniform Smoothness

第 3 节中的估计可能会随着 t趋近于 0 而发散。本节将研究近似方程 (1.7) 的一致光滑性。由于第 2 节中证明的 L^∞ 估计与 t无关，且高阶估计是局部的，因此只需证明 C^2 估计在某种意义下也与 t无关。

首先，我们需要修正引理 3.3。得益于 Boucksom [2], 的工作，我们知道存在一个函数 ρ 和一个常数 $\delta > 0$，使得 ρ 在丰部位 $Amp(\tilde{\chi})$ 上光滑，且具有解析奇点，并且 $\tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\rho \geq \delta\chi$。

引理4.1. 设 $\varphi_t \in C^2(M)$ 是方程 (1.7) 在 $t > 0$下的一个可容许解。存在正常数 N 和 θ，使得当 $w > N$ 在一点 $z \in Amp(\tilde{\chi})$ 处时，

$$\begin{aligned}&\sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\left(\rho_{i\bar{i}} - \varphi_{t,i\bar{i}}\right)\\ &> \theta\left(\sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right) + 1\right),\end{aligned}$$

在 z 附近的坐标下，使得 $\omega_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$，且 $X_{i\bar{j}}$ 在 z处为对角矩阵。常数 N 和 θ 与参数 t 无关。

证明。该证明只需对引理 3.3 的证明稍作修改。为阐明常数的依赖关系，我们省略一些中间步骤，再次给出论证。省略的细节请参阅引理 3.3 的证明。

我们有

$$\begin{aligned}\frac{n-m}{n} S_1(X^{-1}) &\leq \sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\ &\leq S_1(X^{-1}).\end{aligned}$$

然后直接计算可得,

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\left(\rho_{i\bar{i}} - \varphi_{t,i\bar{i}}\right)\\
&\geq (1+t+\delta)\,\delta_0 \sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\\
&\geq \frac{(1+\delta)\,\delta_0}{n}\left(\frac{c(n-m)}{C_n^m} S_{n-m}(X^{-1}) + n b_t f S_n(X^{-1})\right) S_1(X^{-1})\\
&\quad - \left(\frac{c(n-m)}{C_n^m} S_{n-m}(X^{-1}) + n b_t f S_n(X^{-1})\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

如果 $S_1(X^{-1}) \geq \underline{\quad \frac{2n}{(1+\delta)\,\delta_0} \quad}$，那么

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\left(\rho_{i\bar{i}} - \varphi_{t,i\bar{i}}\right)\\
&\geq \frac{(1+\delta)\delta_0(n-m)}{2n} \sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

否则，我们有

$$X_{1\bar{1}} \geq \cdots \geq X_{n\bar{n}} > \frac{(1+\delta)\delta_0}{2n}. \tag{4.3}$$

在 (4.3) 的情形下，我们如同在 (3.41) 中一样，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\left(\rho_{i\bar{i}} - \varphi_{t,i\bar{i}}\right)\\
&> \frac{\delta}{2} \sum_i \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2 + b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&\quad - \left(\frac{c}{C_n^m} C_{n-1}^{n-m-1}\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-m-1} + b_t f\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-1}\right) X^{1\bar{1}}\\
&\quad - \left(\frac{c}{C_n^m} S_{n-m}(\tilde{X}^{-1}) + b_t f S_n(\tilde{X}^{-1})\right) + 1,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$\tilde{X} := \chi + \frac{\delta}{2}\chi + \sqrt{-1} X_{1\bar{1}} dz^1 \wedge d\bar{z}^1. \tag{4.5}$$

类似于（3.42），

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}^n - \left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m \wedge \omega^{n-m} + b_t f \omega^n\right)\\
&> n\sqrt{-1} X_{1\bar{1}} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \left(\frac{\delta}{4}\chi\right)^{n-1} - \left(1+\frac{\delta}{4}\right)^n c\chi^m \wedge \omega^{n-m} - \left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m} b_t f \omega^n.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

If

$$X_{1\bar{1}} \geq \frac{4^{n-1}}{\delta^{n-1}\delta_0^{n-1}}\left(\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^n \frac{c}{C_n^m}S_m(\chi)+\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m} b_t f\right),$$

则（4.6）意味着

$$\tilde{X}^n - \left(1+\frac{t}{4}\right)^{n-m}\left(c\tilde{X}^m\wedge\omega^{n-m}+b_t f\omega^n\right)>0,$$

因此

$$\frac{c}{C_n^m}S_{n-m}(\tilde{X}^{-1})+b_t f S_n(\tilde{X}^{-1}) < \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}}. \tag{4.7}$$

将（4.7）代入（4.4），

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\varphi_{t,i\bar{i}}\\
>&\frac{\delta}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)\chi_{i\bar{i}}\\
&-\left(\frac{(n-m)c}{n}\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-m-1}+b_t f\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-1}\right)\frac{1}{X_{1\bar{1}}}+\frac{(n-m)\delta}{4\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)(\rho_{i\bar{i}}-\varphi_{t,i\bar{i}})\\
>&\frac{\delta_0\delta}{2}\sum_i\left(\frac{c}{C_n^m}S_{n-m-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2+b_t f S_{n-1;i}(X^{-1})(X^{i\bar{i}})^2\right)+\frac{(n-m)\delta}{8\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}}.
\end{aligned}$$

when

$$\begin{aligned}
X_{1\bar{1}} \geq& \frac{4^{n-1}}{\delta^{n-1}\delta_0^{n-1}}\left(\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^n\frac{c}{C_n^m}S_m(\chi)+\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}b_1 f\right)\\
&+\frac{8}{(n-m)\delta}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^{n-m}\left(\frac{(n-m)c}{n}\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-m-1}+\left(\frac{2n}{(1+\delta)\delta_0}\right)^{n-1}b_1 f\right).
\end{aligned}$$

□

在定理 3.4 的证明中，我们也可以考虑函数

$$\ln w + A(\rho-\varphi_t),$$

其中 A 待定。函数 $\ln\ w+A(\rho-\varphi_t)$ 在 $\tilde{\chi}$的丰部位中的某一点取得其最大值。在定理 3.4 的证明中用引理4.1替换引理 3.3，我们将得到一个与参数 t无关的 C^2 二阶估计。

定理 4.2（与 t无关的二阶估计）。设 $\varphi_t \in C^4(M)$ 是关于 $t>0$的方程 (1.7) 的可容许解。那么存在正常数 C 和 A，使得

$$w \leq Ce^{A(-\rho+\varphi_t-\inf_M \varphi_t)}.$$

特别地，常数 C 和 A与参数 t无关。

5. Stability estimate

假设

$$(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1)^n = c(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1)^m\wedge\omega^{n-m}+b_t f_1\omega^n, \quad \sup_M \varphi_1 = 0,$$

and

$$(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)^n = c(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)^m\wedge\omega^{n-m}+b_t f_2\omega^n.$$

本节将研究 φ_1 和 φ_2 在 L^∞ 范数下的差。

定理 5.1. 对于 $K>0$，若 φ_1 和 φ_2 满足 $\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q^*}} \leq K$，则有

$$\sup_M(\varphi_2-\varphi_1) \leq C(\chi,\tilde{\chi},\omega,K,q,\|f_1\|_{L^q})\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q^*}}^{\frac{1}{n+1}}.$$

其中 $q^* = \frac{q}{q-1}$。

证明。根据第3节的结果，我们可以求解

$$\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)^n = c\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)^m\wedge\omega^{n-m}+c_t\omega^n,$$

其中 $\sup_M v_t = 0$，且

$$\int_M\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}\right)^n = c\int_M\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}\right)^m\wedge\omega^{n-m}+c_t\int_M\omega^n.$$

由定理 2.2 易知，v_t 一致有界（与参数t无关），且 $c_t\geq 0$。因此，我们有

$$\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)^n \geq c\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)^m\wedge\omega^{n-m},$$

然后根据$\frac{S_n}{S_m}$的凹性,

$$\begin{aligned}&\left((1-r)(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)+r\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)\right)^n\\ \geq& c\left((1-r)(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)+r\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)\right)^m\wedge\omega^{n-m},\end{aligned} \tag{5.1}$$

对于任意 $r\in[0,1]$，我们可以分解

$$\begin{aligned}&\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1\\=&(1-r)\left(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2\right)+r\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)+\hat{\chi},\end{aligned}$$

其中

$$\hat{\chi}:=\frac{r}{2}\left(t\chi+\tilde{\chi}\right)-r\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t-(1-r)\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1.$$

在任意满足 $\hat{\chi}\geq 0$ 的点处，由（5.1）可得

$$\begin{aligned}b_tf_1\omega^n=&(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1)^n-c(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1)^m\wedge\omega^{n-m}\\\geq&\left((1-r)(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)+r\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)\right)^n\\&-c\Bigg((1-r)(\chi+t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2)\\&\qquad+r\left(\chi+\frac{t}{2}\chi+\frac{1}{2}\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t\right)\Bigg)^m\wedge\omega^{n-m}+\hat{\chi}^n\\\geq&\hat{\chi}^n,\end{aligned}$$

也就是说，

$$b_tf_1\omega^n\geq\frac{r^n}{2^n}\left(t\chi+\tilde{\chi}-2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}v_t-\frac{1-r}{r}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2+\frac{1}{r}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1\right)^n.$$

我们求解辅助的 Monge-Amp`ere 方程

$$\left(t\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_k\right)^n=\frac{\tau_k\left(2v_t+\frac{1-r}{r}\varphi_2-\frac{1}{r}\varphi_1-s\right)}{A_{s,k}}\frac{2^nb_tf_1}{r^n}\omega^n,\quad\sup_M\psi_k=0,$$

其中

$$V_t:=\int_M\left(t\chi+\tilde{\chi}\right)^n$$

and

$$A_{s,k}:=\frac{1}{V_t}\int_M\tau_k\left(2v_t+\frac{1-r}{r}\varphi_2-\frac{1}{r}\varphi_1-s\right)\frac{2^nb_tf_1}{r^n}\omega^n.$$

我们可以假设 $s\geq\|\varphi_1\|_{L^\infty}$，如第 2 节所示，它是一致有界的。对下列连续函数应用最大值原理

$$\Phi:=2v_t+\frac{1-r}{r}\varphi_2-\frac{1}{r}\varphi_1-s-\left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k+A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Let

$$M_s:=\left\{-2v_t-\frac{1-r}{r}\varphi_2+\frac{1}{r}\varphi_1\leq-s\right\}.$$

由于 M 的紧致性，函数 Φ 必定在 M 上的某一点取得最大值，设该点为 z_0。若 $z_0 \in M \setminus M_s$，则显然

$$\Phi(z_0) \leq 2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s \leq 0.$$

否则，我们在点 z_0 处有，

$$\begin{aligned}\frac{2}{r}\hat{\chi} \geq & \left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k + A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-\frac{1}{n+1}} A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\left(t\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(\psi_k)\right) \\ & + \left(1 - \left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k + A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-\frac{1}{n+1}} A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\right)(t\chi + \tilde{\chi}) \\ \geq & \left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k + A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-\frac{1}{n+1}} A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\left(t\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_k\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

考虑（5.2）的体积形式，

$$\frac{2^n}{r^n}b_t f_1\omega^n \geq \left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k + A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-\frac{n}{n+1}} \left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s\right)\frac{2^n}{r^n}b_t f_1\omega^n,$$

也就是说，

$$\left(-\frac{n+1}{n}A_{s,k}^{\frac{1}{n}}\psi_k + A_{s,k}^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} \geq 2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s.$$

由于 $\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_k > 0$，存在一个常数 $\beta > 0$，使得

$$\begin{aligned}& \int_{M_s} \exp\left(\frac{\beta}{A_{s,k}^{\frac{1}{n}}}\left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1\right)^{\frac{n+1}{n}}\right)\omega^n \\ \leq & \int_{M_s} \exp\left(-\frac{n+1}{n}\beta\psi_k + \beta A_{s,k}\right)\omega^n \\ \leq & Ce^{\beta A_{s,k}}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

令 $k \to +\infty$，我们得到

$$\int_{M_s} \exp\left(\frac{\beta}{A_s^{\frac{1}{n}}}\left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1\right)^{\frac{n+1}{n}}\right)\omega^n \leq Ce^{\beta A_s}, \tag{5.4}$$

其中

$$A_s := \lim_{k\to+\infty} A_{s,k} = \frac{1}{V_t}\int_{M_s}\left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s\right)\frac{2^n b_t f_1}{r^n}\omega^n.$$

现在我们尝试求出 A_s 的估计。由于 $s \geq \|\varphi_1\|_{L^\infty}$，

$$\frac{1-r}{r}(\varphi_2 - \varphi_1) \geq -2v_t + \varphi_1 + s \geq \varphi_1 + s \geq 0, \qquad \text{on } M_s.$$

通过方向计算,

$$\begin{aligned} A_s &\leq \frac{1}{V_t}\int_{M_s}\left(\frac{1-r}{r}(\varphi_2-\varphi_1)-\varphi_1-s\right)\frac{2^n b_t f_1}{r^n}\omega^n \\ &\leq \frac{1}{V_t}\int_{M_s}\frac{1-r}{r}(\varphi_2-\varphi_1)^+\frac{2^n b_t f_1}{r^n}\omega^n \\ &\leq \frac{2^n b_t}{V_t r^{n+1}}\int_{M_s}(\varphi_2-\varphi_1)^+ f_1\omega^n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

对 (5.5) 关于测度 ω^n 应用 H¨older 不等式,

$$A_s \leq \frac{2^n b_t}{V_t r^{n+1}}\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q*}}\|f_1\|_{L^q} \leq \frac{2^n b_1}{V_0 r^{n+1}}\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q*}}\|f_1\|_{L^q}.$$

由于 $\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q*}} < K$，我们可以选择

$$r := \frac{1}{2}\left(\frac{\|(\varphi_2-\varphi_1)^+\|_{L^{q*}}}{K}\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{2},$$

因此，我们将 A_s 的上界记为

$$E := \frac{2^{2n+1}b_1}{V_0}K\|f_1\|_{L^q}.$$

现在我们将采用 De Giorgi 迭代论证。对于任意 $p > n$ 和 $q > 1$,

$$\begin{aligned} A_s \leq & \frac{2^n b_t}{V_t r^n}\left(\int_{M_s} f_1\omega^n\right)^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}} \\ & \cdot\left(\int_{M_s}\left(2v_t+\frac{1-r}{r}\varphi_2-\frac{1}{r}\varphi_1-s\right)^{\frac{(n+1)p}{n}} f_1\omega^n\right)^{\frac{n}{(n+1)p}} \\ \leq & \frac{2^n b_t}{V_t r^n}\frac{A_s^{\frac{1}{n+1}}}{\beta^{\frac{n}{n+1}}}\phi^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}}(s)\|f_1\|_{L^q}^{\frac{n}{(n+1)p}} \\ & \cdot\left(\left(\int_{M_s}\left(\frac{\beta}{A_s^{\frac{1}{n}}}\left(2v_t+\frac{1-r}{r}\varphi_2-\frac{1}{r}\varphi_1-s\right)^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{pq}{q-1}}\omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n}{(n+1)p}} \\ \leq & C(p,q)\frac{b_t}{V_t r^n}\frac{A_s^{\frac{1}{n+1}}}{\beta^{\frac{n}{n+1}}}e^{\frac{n\beta}{(n+1)p}\left(1-\frac{1}{q}\right)A_s}\|f_1\|_{L^q}^{\frac{n}{(n+1)p}}\phi^{\frac{(n+1)p-n}{(n+1)p}}(s), \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中

$$\phi(s) := \int_{M_s} f_1\omega^n.$$

在上述计算中，第一个不等式应用关于测度 $f_1\omega^n$ 的 H¨older 不等式，第二个不等式应用关于测度 ω^n 的 H¨older 不等式。最后一个不等式

是由于 t 来自 (5.4)。与第 2 节一样，在此证明中我们可以选取 $p = n + 1$。重新整理 (5.6) ，

$$\begin{aligned} A_s \leq & C(p,q)\frac{b_t^{\frac{n+1}{n}}}{V_t^{\frac{n+1}{n}} r^{n+1}} \frac{1}{\beta} e^{\frac{\beta}{p}\left(1-\frac{1}{q}\right)A_s} \|f_1\|_{L^q}^{\frac{1}{p}} \phi^{\frac{(n+1)p-n}{np}}(s) \\ \leq & C(p,q)\frac{b_t^{\frac{n+1}{n}}}{V_t^{\frac{n+1}{n}} r^{n+1}} \frac{1}{\beta} e^{\frac{\beta}{p}\left(1-\frac{1}{q}\right)E} \|f_1\|_{L^q}^{\frac{1}{p}} \phi^{\frac{(n+1)p-n}{np}}(s) \\ \leq & C(p,q,\beta,\|f_1\|_{L^q},E)\frac{b_t^{\frac{n+1}{n}}}{V_t^{\frac{n+1}{n}} r^{n+1}} \phi^{\frac{(n+1)p-n}{np}}(s). \end{aligned}$$

对于任意 $s' > 0$ 和 $s \geq \|\varphi_1\|_{L^\infty}$,

$$\begin{aligned} s'\phi(s+s') &\leq \int_{M_{s+s'}} \left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s\right) f_1\omega^n \\ &\leq \int_{M_s} \left(2v_t + \frac{1-r}{r}\varphi_2 - \frac{1}{r}\varphi_1 - s\right) f_1\omega^n \\ &\leq C(p,q,\beta,\|f_1\|_{L^q},E)\frac{b_1^{\frac{1}{n}}}{V_0^{\frac{1}{n}} r}\phi^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}(s). \end{aligned} \tag{5.7}$$

结合引理 2.1 和不等式 (5.7)，我们可以得出结论：

$$\int_{M_s} f_1\omega^n = 0,$$

when

$$s \geq s_\infty := \|\varphi_1\|_{L^\infty} + C(p,q,\beta,\|f_1\|_{L^q},E)2^{\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}} \left(\left(\int_M \omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}} \|f_1\|_{L^q}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}.$$

因此

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\Bigg(& 2\|v_t\|_{L^\infty} + \|\varphi_1\|_{L^\infty} \\ & + C(p,q,\beta,\|f_1\|_{L^q},E)2^{\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}} \left(\left(\int_M \omega^n\right)^{1-\frac{1}{q}} \|f_1\|_{L^q}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\Bigg) r. \end{aligned}$$

□

6. The solution in the boundary case

本节将研究边界情形下方程 (1.5) 的解。边界情形与奇异复 Monge-Amp`ere 方程相似，其解是在多重势意义下获得的。如果不施加任何额外的几何条件，传统的粘性方法将会失效，因为我们只能证明 ` 的丰部位上具有一致光滑性,

无需任何额外的几何条件，因为我们只能证明 $\tilde{\chi}$ [13][14] 的丰部位上的一致光滑性。

为了构造多重势解，我们需要以下预紧性结果 [33]。为完整起见，我们在此给出证明。

引理 6.1. 对于 $0 < t \leq 1$，方程 (1.7) 的 L^∞ 有界可容许解集合在 L^{q^*} 范数下是预紧的，其中 $1 \leq q^* < +\infty$。

证明. 注意到 $2\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$，我们有

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty} \int_M (2\chi + \tilde{\chi}) \wedge \omega^{n-1} &\geq \int_M -\varphi(2\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi) \wedge \omega^{n-1} \\ &\geq \int_M -\varphi\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \omega^{n-1} \\ &= \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\omega^n)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

根据 Sobolev空间的紧嵌入，有界可容许解集合在 L^1 范数下是预紧的。对于一个 L^1-收敛序列 $\{\varphi_i\}$，存在一个子序列φ_{i_j}几乎处处收敛。于是对任意 $1 \leq q^* < +\infty$,

$$\begin{aligned} \int_M \left|\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k}\right|^{q^*} \omega^n &\leq \|\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k}\|^{q^*-1}_{L^\infty} \int_M \left|\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k}\right| \omega^n \\ &\leq C \int_M \left|\varphi_{i_j} - \varphi_{i_k}\right| \omega^n \\ &\to 0 \qquad (j, k \to \infty), \end{aligned} \tag{6.2}$$

也就是说，$\{\varphi_{i_j}\}$ 在 L^{q^*}中是柯西序列。因此，L^∞-有界的可容许解集合在 L^{q^*}中是预紧的。

□

现在我们将在边界情形下构造方程 (1.5) 的一个多重势意义下的弱解。

定理 6.2. 对于 $q > 1$ 和 $f \in L^q$，边界情形 (1.4) 下的方程 (1.5) 存在一个多重势意义下的有界解 φ。特别地,

$$\left(\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n \geq c^{\frac{n}{n-m}}\omega^n.$$

证明。对于 $0 < t \leq 1$，存在一组满足条件 (1.8) 的近似方程 (1.7) 的解。根据引理 6.1，该解集一致有界，因此在 L^{q^*} 范数下是相对紧的，其中 $q^* = \frac{q}{q-1}$。于是，我们可以选取一个递减序列 $t_i \to 0+$，使得 φ_{t_i} 在 L^{q^*} 范数下收敛。对于所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $i_j \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $i' > i_j$,

$$\|\varphi_{t'_i} - \varphi_{t_{i_j}}\|_{L^{q^*}} < \frac{1}{2^{(n+1)j}}.$$

对于 $0 < t' < t \leq 1$，我们有

$$\chi + t\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t'} > 0,$$

and

$$(\chi + t\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t'})^n = c(\chi + t\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t'})^m \wedge \omega^{n-m} + b_t g\omega^n$$

对于某个函数 $b_t g > b_{t'} f > 0$。根据定理 5.1,

$$\sup_M(\varphi_{t_{i_{j+1}}} - \varphi_{t_{i_j}}) < C(\chi, \tilde{\chi}, \omega, 1, q, \|f\|_{L^q})\frac{1}{2^j}. \tag{6.3}$$

因此 $\left\{\varphi_{t_{i_j}} + \frac{C}{2^{j-1}}\right\}$ 逐点递减且有界。所以序列 $\left\{\varphi_{t_{i_j}} + \frac{C}{2^{j-1}}\right\}$ 递减至某个有界函数 φ。令 $j \to \infty$ 属于

$$\left(\chi + t_{i_j}\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_{i_j}}\right)^n = c\left(\chi + t_{i_j}\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_{i_j}}\right)^m \wedge \omega^{n-m} + b_{t_{i_j}} f\omega^n,$$

可知，经过归一化后， φ 是方程 (1.5) 在多重势意义下的一个解。牛顿-麦克劳林不等式告诉我们

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\chi + t_{i_j}\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_{i_j}}\right)^n}{\omega^n} \\
&\geq \left(\frac{\left(\chi + t_{i_j}\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_{i_j}}\right)^n}{\left(\chi + t_{i_j}\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_{i_j}}\right)^m \wedge \omega^{n-m}}\right)^{\frac{n}{n-m}} \\
&\geq c^{\frac{n}{n-m}},
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\left(\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n \geq c^{\frac{n}{n-m}}\omega^n.$$

□

函数集 $\{\varphi_{t_i}\}$ 在 $W^{1,2}$中有界，因此根据阿劳格鲁定理，存在一个子列弱收敛于函数 $\tilde{\varphi} \in W^{1,2}$。由于 $W^{1,2}$ 紧嵌入于 L^2，故存在一个子列在 L^2 范数下收敛。再次取子列，可假设 $\{\varphi_{t_i}\}$ 几乎处处收敛于 $\tilde{\varphi}$，因此得到定理 6.2 中定义的 $\tilde{\varphi} = \varphi$。此外，采用与 [3], 类似的论证，可证明 φ_{t_i} 在 $W^{1,2}$ 中收敛于 φ。

此外，正如第 4 节所述， $\{\varphi_{t_i}\}$ 在 $Amp(\tilde{\chi})$ 中具有一致估计。必要时取一个子列，$\{\varphi_{t_i}\}$ 在 $Amp(\tilde{\chi})$ 中局部一致收敛到一个光滑函数。显然，该函数必定是定理 6.2 中定义的 φ。

7. Uniqueness

在上一节中，我们利用带有变分函数 f 的方程 (1.7) 的逼近构造了方程 (1.5) 的可容许解。本节将证明，这些可容许解在某种意义下是相同的。

我们将改用 Calabi 的技巧。假设有两个解 φ_1 和 φ_2，分别按照第 6 节中的构造得出，来自于

$$(\chi + t_i\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_i})^n = c(\chi + t_i\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_i})^m \wedge \omega^{n-m} + b_{t_i} f_1 \omega^n \tag{7.1}$$

and

$$(\chi + t'_j\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t'_j})^n = c(\chi + t'_j\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t'_j})^m \wedge \omega^{n-m} + b_{t'_j} f_2 \omega^n. \tag{7.2}$$

结合（7.1）和（7.2），

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(\varphi_{t'_j} - \varphi_{t_i}\right)\left(b_{t_i} f_1 - b_{t'_j} f_2\right)\omega^n \\
=&\int_0^1 \Bigg(\int_M \left(\varphi_{t'_j} - \varphi_{t_i}\right)\left((t_i - t'_j)\chi + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\varphi_{t_i} - \varphi_{t'_j}\right)\right) \\
&\qquad \wedge \Bigg(n\left(\chi + \left(\theta t_i + (1-\theta)t'_j\right)\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_{t_i} + (1-\theta)\varphi_{t'_j}\right)\right)^{n-1} \\
&\qquad\qquad - mc\left(\chi + \left(\theta t_i + (1-\theta)t'_j\right)\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_{t_i} + (1-\theta)\varphi_{t'_j}\right)\right)^{m-1} \\
&\qquad\qquad \wedge \omega^{n-m}\Bigg)\Bigg) d\theta.
\end{aligned}$$

应用斯托克斯引理，并令 $i, j \to \infty$,

$$\begin{aligned}
0 = &\int_M \sqrt{-1}\partial\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \wedge \bar{\partial}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \\
&\qquad \wedge \Bigg(\int_0^1 \Big(n\left(\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1 + (1-\theta)\varphi_2\right)\right)^{n-1} \\
&\qquad\qquad - mc\left(\chi + \tilde{\chi} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1 + (1-\theta)\varphi_2\right)\right)^{m-1} \wedge \omega^{n-m}\Big) d\theta \Bigg).
\end{aligned}$$

由于 $Amp(\tilde{\chi})$ 的补集余维至少为 2， $Amp(\tilde{\chi})$ 是连通的，且其补集测度为零。在丰部位，φ_1 和 φ_2 是光滑的，因此根据

凹性

$$\frac{\left(\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1+(1-\theta)\varphi_2\right)\right)^n}{\left(\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1+(1-\theta)\varphi_2\right)\right)^m\wedge\omega^{n-m}}\geq c.$$

由 $\frac{S_n}{S_m}$的单调性,

$$\begin{aligned}0<&n\left(\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1+(1-\theta)\varphi_2\right)\right)^{n-1}\\&-mc\left(\chi+\tilde{\chi}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\theta\varphi_1+(1-\theta)\varphi_2\right)\right)^{m-1}\wedge\omega^{n-m}.\end{aligned}$$

因此我们可以看到， $\varphi_1-\varphi_2$ 在 $Amp(\tilde{\chi})$中是常数。

8. 假边界情形

在 [29], 中，作者求解了

$$\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n=g\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m},\tag{8.1}$$

其中 g 是一个光滑函数，并且

$$g\geq c:=\frac{\int_M\chi^n}{\int_M\chi^m\wedge\omega^{n-m}}.$$

锥条件的边界情形似乎是

$$n\chi^{n-1}-mg\chi^{m-1}\wedge\omega^{n-m}\geq 0.\tag{8.2}$$

然而，我们没有考虑定理 1.1 中的一般情形 $g\geq c$ ，因为如果 $g\neq c$，条件 (8.2) 实际上是伪边界情形。在本节中，我们将证明方程 (8.1) 存在一个经典（光滑）解。

当 $g\neq c$ 在 M 上时，方程 (8.1) 的可解性意味着存在一个光滑函数 φ 和一个常数 b ，使其满足

$$\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n=e^bg\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m}.\tag{8.3}$$

由于 $g\geq c$，通过对方程 (8.3) 积分，很容易看出 $b\leq 0$ 。然而，我们无法先验地确定 b 的精确值。由于 g 连续， g 存在一个最大值 $\Lambda>c$ 。

如果 $\min_M g=\lambda>c$，那么我们转而考虑

$$\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n=\frac{c}{\lambda}g\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m}.$$

我们由 (8.2) 推导出

$$n\chi^{n-1}-m\frac{c}{\lambda}g\chi^{m-1}\wedge\omega^{n-m}>0.$$

根据 [29][30], ，方程 (8.1) 在 (8.3) 的意义下存在一个光滑可容许解 φ 。因此，在本节余下部分，我们只需考虑 $\min_M g=c$ 的情形。

8.1. 常数 b 的上界。假设我们有一个 C^2 可容许解满足方程 (8.3)。根据牛顿-麦克劳林不等式,

$$\left(\frac{\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m}}{\omega^n}\right)^{\frac{1}{m}}\geq\left(\frac{\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n}{\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m}}\right)^{\frac{1}{n-m}}\geq e^{\frac{b}{n-m}}c^{\frac{1}{n-m}}.$$

也就是说,

$$\left(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m\wedge\omega^{n-m}\geq e^{\frac{mb}{n-m}}c^{\frac{m}{n-m}}\omega^n. \tag{8.4}$$

对方程 (8.3) 积分,

$$\begin{aligned}\int_M\chi^n&=e^bc\int_M\chi^m\wedge\omega^{n-m}+e^b\int_M(g-c)(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m\wedge\omega^{n-m}\\&\geq e^bc\int_M\chi^m\wedge\omega^{n-m}+\frac{\Lambda-c}{2}e^b\int_{\left\{g\geq\frac{\Lambda+c}{2}\right\}}(\chi+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m\wedge\omega^{n-m}\\&\geq e^bc\int_M\chi^m\wedge\omega^{n-m}+\frac{\Lambda-c}{2}e^{\frac{nb}{n-m}}c^{\frac{m}{n-m}}\int_{\left\{g\geq\frac{\Lambda+c}{2}\right\}}\omega^n.\end{aligned} \tag{8.5}$$

存在一个常数 $\theta_0>0$ 使得

$$\frac{\Lambda-c}{2}c^{\frac{m}{n-m}}\int_{\left\{g\geq\frac{\Lambda+c}{2}\right\}}\omega^n\geq\theta_0c\int_M\chi^m\wedge\omega^{n-m}. \tag{8.6}$$

将 (8.6) 代入 (8.5),

$$1\geq e^b+\theta_0e^{\frac{nb}{n-m}}. \tag{8.7}$$

存在唯一解 $b'<0$ 满足 $1=e^x+\theta_0e^{\frac{nx}{n-m}}$，因此 $b\leq b'$。

8.2. 求解复 Monge-Amp`ere 型方程。现在，我们开始通过连续性方法求解复 Monge-Amp`ere 型方程，该方法已在 [29]中实施。按照 [29], 中的工作，我们需要两次应用这种连续性方法。

首先，我们定义一个光滑函数 g_1 ，使得

$$\chi^n=g_1\chi^m\wedge\omega^{n-m}. \tag{8.8}$$

Then

$$n\chi^{n-1}>m\left(\max\left\{e^{b'}g,g_1\right\}+2\delta_1\right)\chi^{n-1}\wedge\omega^{n-m}. \tag{8.9}$$

对于某个足够小的 $\delta_1>0$ 。我们可以找到一个光滑函数 g_2 ，满足

$$\max\left\{e^{b'}g,g_1\right\}<g_2<\max\left\{e^{b'}g,g_1\right\}+\delta_1.$$

因此，由（8.8）和（8.9）可得

$$\chi^n<g_2\chi^m\wedge\omega^{n-m}, \tag{8.10}$$

and

$$n\chi^{n-1}>m\left(g_2+\delta_1\right)\chi^{m-1}\wedge\omega^{n-m}. \tag{8.11}$$

根据 [29], 定理 1，存在一个光滑函数 $\tilde{\varphi}$ 和唯一的常数$b<0$ 满足

$$\chi_{\tilde{\varphi}}^n = e^{\tilde{b}} g_2 \chi_{\tilde{\varphi}}^m \wedge \omega^{n-m}.$$

其次， 我们再次从 $\chi_{\tilde{\varphi}}$ 采用连续性方法，并考虑以下路径

$$\chi_{\varphi_t}^n = e^{b_t+tb'} g^t g_2^{1-t} \chi_{\varphi_t}^m \wedge \omega^{n-m}, \qquad \text{for } t\in[0,1], \tag{8.12}$$

~其中 $b_0 = b$ 在第一阶段已经求得。因此

$$\chi_{\varphi_t}^n > e^{b_t+b'} g \chi_{\varphi_t}^m \wedge \omega^{n-m}. \tag{8.13}$$

重复第 8.1 小节中的论证，我们得到

$$1 > e^{b_t+b'} + \theta_0 e^{\frac{n(b_t+b')}{n-m}}, \tag{8.14}$$

因此 $b_t<0$。直接得到,

$$e^{b_t+tb'} g^t g_2^{1-t} < e^{tb'} g^t g_2^{1-t} < g_2. \tag{8.15}$$

因此，我们得到了如 [29], 中所示的与 φ_t 无关的估计，并由此通过连续性方法得到方程 (8.3) 的一个解对。

致谢 作者感谢姚成坚和张子宇提出的宝贵讨论与建议。作者获得上海科技大学提供的启动经费支持。

References

[1] Z. Blocki, *A gradient estimate in the Calabi-Yau theorem*, 《数学年刊》344（2009），第2期，317–327页。[2] S. Boucksom, *Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds*, 《高等师范学校科学年刊》，37（2004），第4期，45–76页。[3] U. Cegrell, *The gradient lemma*, 《波兰数学年刊》91（2007），143–146页。[4] G. Chen, *The J-equation and the supercritical deformed Hermitian-Yang-Mills equation*, 《数学发明》225（2021），529–602页。[5] X. Chen, *On the lower bound of the Mabuchi energy and its application*, 《国际数学研究通知》2000（2000），第12期，607—623页。[6] X. Chen, *A new parabolic flow in Kähler manifolds*, 《分析与几何通讯》12（2004），837–852页。[7] X. Chen 和 J. Cheng, *On the constant scalar curvature Kähler metrics I - a priori estimates*, 《美国数学会杂志》34（2021），909–936页。[8] Y.-Z. Chen 和 L.-C. Wu, *Second oder elliptic equations and elliptic systems*, 《美国数学会》174（1998）。[9] T.C. Collins 和 G. Sz´ekelyhidi, *Convergence of the J-flow on toric manifolds*, 《微分几何杂志》107（2017），47–81页。[10] J. P. Demailly 和 M. Paun *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold* **159** 2004 1247 1274 , 《数学年刊》， （），–。[11] S. K. Donaldson, *Moment maps and diffeomorphisms*, 《亚洲数学杂志》3（1999），第1期，1–15页。[12] L. C. Evans, *Classical solutions of fully nonlinear, convex, second order elliptic equations*, 《纯粹与应用数学通讯》35（1982），333-363页。[13] P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Zeriahi, *Viscosity solutions to degenerate complex Monge-Ampère equations* **64** 2011 1059 1094 , 《纯粹与应用数学通讯》 （），–。

[14] P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Zeriahi, *Corrigendum: Viscosity solutions to degenerate complex Monge-Ampère equations* **70** 2017 815 821 , 《纯粹与应用数学通讯》（），–。[15] H. Fang、M. Lai 和 X.-N. Ma, *On a class of fully nonlinear flows in Kähler geometry*, 《纯粹与应用数学杂志》653（2011），189-220页。[16] H. Fang、M, Lai、J. Song 和 B. Weinkove, *The J-flow on Kähler surfaces: a boundary case*, 《分析与偏微分方程》7（2014），215–226页。[17] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*，第二版，数学科学基础丛书224（1983），施普林格出版社，柏林-纽约。[18] B. Guan 和 Q. Li, *Complex Monge-Ampère equations and totally real submanifolds*, 《数学进展》225（2010），1185–1223页。[19] B. Guan 和 Q. Li, *A Monge-Ampère type fully nonlinear equations on Hermitian manifolds*, 《离散与连续动力系统 B 辑》17（2012），1991-1999页。[20] P.-F. Guan、Q. Li 和 X. Zhang, *A uniqueness theorem in Kähler geometry*, 《数学年刊》345（2009），377–393页[21]B. Guo、D. Phong 和 F. Tong, *On L^∞ estimates for complex Monge-Ampère equations*, arXiv:2106.03913。[22] B. Guo、D. Phong、F. Tong 和 C. Wang, *On L^∞ estimates for Monge-Ampère and Hessian equations on nef classes* 2111 14186 , arXiv: . . [23] N. V. Krylov, *Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations*, 《苏联科学院学报》46（1982），487-523页。[24] H. Li、Y. Shi 和 Y. Yao, *A criterion for the properness of the K -energy in a general Kähler class*, 《数学年刊》361（2015），135–156页。[25] D. Phong 和 J. Sturm, *The Dirichlet problem for degenerate complex Monge-Ampère equations*, 《分析与几何通讯》18（2010），第1期，145–170页。[26] D. Phong 和 J. Sturm, *On pointwise gradient estimates for the complex Monge-Ampère equation*, 载于《几何分析进展》, 87 96, **21**, 2012 C 数学高级讲座丛书，国际出版社，[27] J. Song 和 B. Weinkove, *On the convergence and singularities of the J-flow with applications to the Mabuchi energy* **61** 2008 2, 210 229 , 《纯粹与应用数学通讯》（），第–期，[28] Z. Sui 和 W. Sun, *On L^∞ estimate for complex Hessian quotient equations on compact Kähler manifolds* **33** 2023 165 , 《几何分析杂志》（），。[29] W. Sun, *On a class of fully nonlinear elliptic equations on closed Hermitian manifolds*, 《几何分析杂志》26（2016），第3期，2459—2473页。[30] W. Sun, *On a class of fully nonlinear elliptic equations on closed Hermitian manifolds II: L^∞ estimate*, 《纯粹与应用数学通讯》70（2017），172–199页。[31] W. Sun, *Generalized complex Monge-Ampère type equations on closed Hermitian manifolds*, 预印本。[32] W. Sun, *Parabolic flow for generalized complex Monge-Ampère type equations*, 预印本。[33] W. Sun, *The weak solutions to complex Hessian equations*, 预印本。[34] G. Sz´ekelyhidi, *Fully non-linear elliptic equations on compact Hermitian manifolds*, 《微分几何杂志》109（2018），337–378页。[35] V. Tosatti、Y. Wang、B. Weinkove 和 X.-K. Yang, *$C^{2,\alpha}$ estimates for nonlinear elliptic equations in complex and almost complex geometry* **54** 2015 1, 431 453 , , 《微分几何与变分学偏微分方程》（），第–期。[36] J. Wang、X.-J. Wang 和 B. Zhou, *A priori estimate for the complex Monge-Ampère equation*, 《北京数学杂志》4（2021），143–157页。[37] B. Weinkove, *Convergence of the J-flow on Kähler surfaces*, 《分析与几何通讯》12（2004），949–965页。[38] B. Weinkove, *On the J-flow in higher dimensions and the lower boundedness of the Mabuchi energy*, 《微分几何杂志》73（2006），351–358页。[39] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I* **31** 1978 339 411 , 《纯粹与应用数学通讯》（），–。

Institute of Mathematical Sciences, ShanghaiTech University, Shanghai, China
Email address: sunwei@shanghaitech.edu.cn