arXiv:2305.02580v1 [math.PR] 4 May 2023

论耦合的马尔可夫构造

Persi Diaconis† 和 Laurent Miclo‡

† 数学系 统计学系 斯坦福大学

‡ 图卢兹经济学院 图卢兹数学研究所
法国国家科学研究中心及图卢兹大学

摘要

对于 $N \in \mathbb{N}$，令 π_N 表示对 {1、2、.....、N} 的随机排列的不动点个数的分布。令 $\mathcal{P}$ 表示参数为 1 的泊松分布。一个经典结果表明，当 N 很大时，π_N 收敛于 $\mathcal{P}$，并且确实在全变差意义下收敛

$$\|\pi_N - \mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}} \leqslant \frac{2^N}{(N+1)!}$$

这意味着 π_N 和 $\mathcal{P}$ 可以以至少如此高的精度进行耦合。本文利用两个马尔可夫链的交织机制构造了这种耦合（这是一个长期未解的问题）。该方法有望应用于随机矩阵理论中的相关问题。

关键词： 均匀随机排列、不动点个数、泊松逼近、马尔可夫方法、交织、耦合。

2020年数学主题分类： 主要：60J10，次要：05A05、60E15、60J22、60J80、37A25。

1 引言

对于 $N \in \mathbb{N} \coloneqq \{1,2,\ldots\}$，设 π_N为{1、2、...、N}的一个随机排列的不动点个数的分布。设 $\mathcal{P}$为参数为 1 的泊松分布。一个经典结果（参见 de Montmort [5],）表明，当 N较大时， π_N 收敛于 $\mathcal{P}$ 。事实上，众所周知（下文将证明同阶的估计），在全变差意义下

$$\frac{N}{N+2}\frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \leqslant \|\pi_N - \mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}} \leqslant \frac{2^{N+1}-1}{(N+1)!} \tag{1}$$

全变差距离可以通过 π_N 和 $\mathcal{P}$ 的一种耦合来实现，参见 Levin、Peres 和 Wilmer [18], 的命题 4.7，而如何显式构造这种耦合一直是一个长期悬而未决的问题。式 (1) 中的超指数误差界也出现在其他问题中，例如随机排列中 k-循环的数量，其极限分布为参数为 $1/k$ 的泊松分布，且误差具有超指数衰减性质。对于紧致经典群 O_N、 U_N 和 SP_{2N} 的随机矩阵的幂的迹，也有类似的结果，参见 Courteaut、Johansson 和 Lambert [3]。本文介绍的方法有望为这些问题寻找耦合。关于 Montmort 定理的历史，请参见 Takacs [24]。关于其推广以及近期的文献综述，请参见 Diaconis、Fulman 和 Guralnick [9]。在本引言的末尾，我们将介绍若干尝试，包括成功和失败的尝试，以期通过耦合给出式 (1) 的证明。

为介绍我们的方法，对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和对称群 $\mathcal{S}_N$ 中的任意置换 σ，记 $\eta_1(\sigma)$ 为 σ 的不动点数：

$$\eta_1(\sigma) \coloneqq |\{x \in [\![N]\!] : \sigma(x) = x\}|$$

（其中 $[\![N]\!] \coloneqq \{1、2、...、N\}$，更一般地，对于任意 $n \leqslant n' \in \mathbb{Z}_+ \coloneqq \{0、1、2、...\}$，我们记作 $[\![n、n']\!] \coloneqq \{n、n+1、...、n'\}$）。 σ 的 2-循环数 $\eta_2(\sigma)$ 也将发挥重要作用：

$$\eta_2(\sigma) \coloneqq |\{(x,y) \in [\![N]\!]^2 : x < y,\, \sigma(x) = y \text{ and } \sigma(y) = x\}|$$

令 ν_N 表示 $\mathcal{S}_N$ 上的均匀分布，因此 π_N 是它在 $\mathbb{Z}_+$ 上经由 η_1 得到的像。为简化记号，提及这些概率测度时，我们常常省略指数 N 。如 (1) 中所述，不动点分布律 π 与泊松分布 $\mathcal{P}$ 非常接近。(1) 中的界例如记录在 Arratia、Barbour 和 Tavaré [1] 第 15 页的 (1.11) 中，它们是根据 David 和 Barton [4] 的计算推导而来，这些计算利用了由以下传统事实所导出的递减项交错级数的性质。

我们有

$$\forall\, x \in [\![0,N]\!], \qquad \pi(x) = \frac{D_{N-x}}{(N-x)!}\frac{1}{x!} \tag{2}$$

其中，对任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$， D_n 表示来自 $\mathcal{S}_n$ 的错排数，即 $\mathcal{S}_n$ 中没有不动点的排列（约定 $D_0 = 1$）。de Montmort 给出的公式 [5] 给出了错排数：

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{3}$$

从而得到显式公式：

$$\forall\, x \in [\![0,N]\!], \qquad \pi(x) = \frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{N-x} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{4}$$

如上所述，我们的目的是推导出关于 $\|\pi - \mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}}$ 的界，其对数阶与式 (1) 相同。下面简要介绍证明思路。我们利用随机换位在对称群 $\mathcal{S}_N$ 上构造一个马尔可夫链。然后，使用第 2 节介绍的交织-聚合过程，并作一些调整，构造一个单调生灭链，使不动点分布 π 成为其可逆分布。类似的构造可得到一个具有泊松平稳分布的单调生灭链。接着重新考察两个单调生灭链的经典耦合，便可得到我们的界。更具体地说，交织-聚合构造产生了五对角马尔可夫核 P，其定义在

$$V \;\coloneqq\; [\![0, N-2]\!] \sqcup \{N\}$$

给定为

$$\forall\, x \in V, \qquad \begin{cases} P(x,x-1) &= \frac{x(N-x)}{N(N-1)} \\ P(x,x-2) &= \frac{x(x-1)}{N(N-1)} \\ P(x,x+1) &= \frac{N-x-2p(x)}{N(N-1)} \\ P(x,x+2) &= \frac{2p(x)}{N(N-1)} \\ P(x,x) &= 1 - P(x,x-1) - P(x,x-2) - P(x,x+1) - P(x,x+2) \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$x \in V, \qquad p(x) \;\coloneqq\; \mathbb{E}_\nu[\eta_2 | \eta_1 = x] \tag{6}$$

（条件期望是相对于 ν 上的均匀测度 $\mathcal{S}_N$ 而言的）。正如下面第 2 节所解释的，该链是由随机对换的乘法所导出的共轭类上的马尔可夫链的一种投影。

注意， P无法使我们脱离 V：我们有 $P(0、-1) = P(0、-2) = P(1、-1) = P(N、N–1) = 0$ 以及 $P(N-3、N-1) = P(N-2、N-1) = P(N、N+1) = P(N、N+2) = 0$。对于后面这些等式，我们需要关于 p的以下观察：显然，我们有 $p(N) = 0$ ，且$p(N-2)$ 的值为 1，因为已知 $\eta_1 = N-2$，我们必然有 $\eta_2 = 1$。类似地， $p(N-3)$的值为 0，因为已知 $\eta_1 = N-3$，我们必然有 $\eta_2 = 0$ （并且 3-循环的数量等于 1）。

根据我们的构造，概率测度 π 自然会呈现为马尔可夫核 P 的可逆测度。此外， P 的可逆性（即使不知道可逆概率）结合 $p(N) = p(N-3) = 0$ 和 $p(N-2) = 1$，足以确定 P，进而确定 p 的其他取值以及 π 的取值。这些特征可以转化为关于 p 的便捷估计，从而得到定量耦合：一类是转移由 P 决定的马尔可夫链，另一类是其不变测度为 $\mathcal{P}$ 在 V 上的条件测度的马尔可夫链（为方便起见，我们将把注意力限制在状态空间 $[\![0、N-4]\!] \subset V$ 上）。第 (4) 节将给出这些界，并由此推导出收敛性。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\ln(N)} \ln(\|\pi - \mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}}) \;=\; -1 \tag{7}$$

具有正确对数阶的。

现在列出几种试图通过耦合论证证明 (1) 的方法，以及一些备注。

1.1 一次失败的尝试

本节介绍一种自然耦合，事实上，它可以推广到所有经典紧群及其魏尔群。根据“自然即正确”定律，这种耦合本应能给出良好的误差界，可惜并非如此！

设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是相互独立的 {0、1} 值随机变量，且满足

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}[X_n = 1] \;=\; \frac{1}{n} \;=\; 1 - \mathbb{P}[X_n = 0]$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$ 定义，

$$\begin{aligned} S_N &:= X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_N + X_N \\ S_\infty &:= X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots \end{aligned}$$

在 Diaconis 和 Mallows [6], 记录于 Diaconis 和 Forrester [8], 的未发表论文中，他们证明了对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{P}[S_N = k] \;=\; \pi_N(k) \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[S_\infty = k] \;=\; \mathcal{P}(k)$$

因此，$(S_N、S_\infty)$ 的联合分布构成了一种自然耦合。遗憾的是，$S_\infty - S_N \;=\; X_N(X_{N+1} - 1) + X_{N+1}X_{N+2} + X_{N+2}X_{N+3} + \cdots$ 的典型距离为 $1/N$ 量级。更多背景和细节请参阅 Diaconis 和 Forrester [8]。

1.2 A 来自计算机科学的成功且奇特的耦合

Jim Pitman 解释了一个由计算机科学家 Duchon 和 Duvignau 提出的迷人的超指数耦合构造 [13] 以及 Duchon 和 Duvignau [14]。Pitman 对这些思想的发展尚未发表 [22]。感谢他允许我们陈述其结果。该构造需要一个由 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 独立随机变量组成的可数集合，这些变量在 $[0,1]$ 上均匀分布。定义

$$\begin{aligned} S &:= \min\{n \geqslant 1 : U_n < U_{n+1}\}, \qquad \text{time of first ascent} \\ T &:= \min\{n \geqslant 2 : U_n > \max(U_{n-1}, U_{n+1})\}, \qquad \text{time of first peak} \\ M &:= S - \delta_{T-S \,\text{is odd}} \end{aligned}$$

定理 1 随机变量 M 的分布是参数为 *1* 的泊松分布。

进一步对于固定的 $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_N &:= \min(S, N) \\ T &:= \min(T, N) \\ M_N &:= S_N - \delta_{T_N - S_N \,\text{is odd}} \end{aligned}$$

定理 2 随机变量 M_N 的分布与从 $[\![N]\!]$中随机选取一个排列的不动点个数的分布相同。

由前两个定理可得，得到

推论 3 对于任意 $N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|\mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(M_n)\|_{\text{tv}} \;\leqslant\; \mathbb{P}[T > N] \;\leqslant\; \frac{2^N}{(N+1)!}$$

这个结果似乎颇具魔力，本文记录了我们尝试运用更标准的工具寻找证明的过程，这些工具或许有助于推广结果。我们也希望至少能将其推广到 k-循环数量的分布，并对这一问题本身进行研究。

1.3 超指数界的不稳定性

前面提到的超指数界非常精细。例如，考虑随机排列 $\llbracket N \rrbracket$ 的前 $N-1$ 个位置中的不动点数量。这个数量同样近似服从参数为 1 的泊松分布，但这两个分布之间的全变差距离的阶为 $1/N$。

类似地，对于任意 $\theta \in (0, 1)$，位置 $\llbracket \lfloor \theta N \rfloor \rrbracket$ 上的不动点个数以参数为 θ 的泊松分布为极限分布。事实上，在 $[0, 1]$ 上的点过程，若且唯若随机排列 σ 属于 $\mathcal{S}_N$ 并满足 $\sigma(k) = k$，则在 k/N 处出现一个事件；该点过程可由单位速率泊松过程很好地近似。不过，这些近似的精度仅达到 $1/N$阶。

1.4 前 N 阶矩相等

对于 $N \in \mathbb{N}$，考虑两个随机变量 X_N 和 X_∞，它们分别服从 π_N 和$\mathcal{P}$。这两个分布之间的高阶接触程度可用矩来刻画。事实上，Diaconis 和 Shahshahani [12]证明了

$$\forall\, k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \qquad \mathbb{E}[X_N^k] \;=\; \mathbb{E}[X_\infty^k]$$

k-循环个数的联合混合矩以及紧致经典群也有类似结果。

1.5 马尔可夫方法

这与 Stein 方法有关，参见例如 Diaconis 和 Holmes [10]，或 Chatterjee、Diaconis 和 Meckes 的第4节 [2], ，但其底层思想相当古老。假设我们想要研究给定概率测度 π 的某些特征。马尔可夫方法包括引入并研究一个马尔可夫过程（连续时间）或链（离散时间），以概括底层状态空间的“相关特征”，并使 π 成为不变概率测度（有时无需在引入这一步费力，因为 π 已被定义为不变概率测度）。这一情形的一个例子是研究 Gibbs 测度是否存在相变、相关性的指数衰减，或相关性的解析性；这些研究借助保持 Gibbs 测度不变的随机 Ising 过程完成，参见 Holley 和 Stroock [15]，或 Liggett 著作的第4章[19]。我们的目标是通过重新得到（1）的正确阶，来展示这一马尔可夫方法的新例子。

本文的安排如下。在下一节中，我们将介绍一种通过投影另一个马尔可夫链来构造马尔可夫链的一般方法。这种投影会保留可逆性。第3节中，我们将通过 η_1 将 $\mathcal{S}_N$ 上的换位随机游走以这种方式投影，从而得到定义在 V上的马尔可夫核 P。第4节中，我们推导出关于 p 的先验界，并在第5节中用它们来控制我们对马尔可夫链的耦合，从而得到用 $\mathcal{P}$逼近π 的所需上界。与第4节的思路类似，在附录A中，我们直接重新得到（4），为经典的容斥论证提供了另一种证明。附录B中则补充讨论了条件期望 p。

致谢： 我们感谢 Jim Pitman 告知我们第1.2节的相关内容。Diaconis 的研究经费来自美国国家科学基金会资助项目 1954042。Miclo 的研究经费来自 ANR-17-EURE-0010 和 AFOSR-22IOE016 资助项目。

2 马尔可夫链的投影

在本节中，我们将介绍一种马尔可夫链投影的一般方法。为简化论述，并且由于后续我们只会研究有限状态空间，因此我们将注意力限制在有限状态空间上，但其基本原理具有更广泛的适用性。

考虑一个取值于乘积状态空间 $V \times W$ 的马尔可夫链 $(X,Y) \coloneqq (X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$。假设 V 和 W 均为有限集，且 (X,Y) 的转移矩阵 Q 不可约。记其不变测度为 μ。考虑 $r_1 \colon V \times W \to V$ 和 $r_2 \colon V \times W \to W$ 这两个典范投影，并令 $\mu_1 \coloneqq r_1(\mu)$ 为 μ 的第一边缘分布。记 $\mu_{1,\,2}$ 为从 V 到 W 的马尔可夫核，对应于在已知 r_1 条件下 r_2 的条件分布。因此，我们有如下分解。

$$\forall\ (x,y) \in V \times W, \qquad \mu(x,y) \;=\; \mu_1(x)\mu_{1,2}(x,y)$$

考虑由以下方式在 V 上给出的马尔可夫核 P

$$\forall\ x,x' \in V \qquad P(x,x') \;\coloneqq\; \sum_{y,y'\in W} Q((x,y),(x',y'))\,\mu_{1,2}(x,y)$$

以及由以下方式给出的从 $V \times W$ 到 V 的马尔可夫核 Λ

$$\forall\ (x,y) \in V \times W, \forall\ x' \in V, \qquad \Lambda((x,y),x') \;\coloneqq\; \mu_1(x')$$

引理 4 我们有交织关系

$$Q\Lambda \;=\; \Lambda P$$

证明
一方面，Λ 可与 μ_1 等同，因此 $Q\Lambda = \mu_1$。
另一方面，对于任意 $(x、\ y) \in V \times W$ 和 $x' \in V$，我们有

$$\begin{aligned}
\Lambda P((x,y),x') &= \mu_1 P(x') \\
&= \sum_{x''\in V} \mu_1(x'')P(x'',x') \\
&= \sum_{x''\in V} \mu_1(x'') \sum_{y',y''\in W} Q((x'',y''),(x',y'))\,\mu_{1,2}(x'',y'') \\
&= \sum_{y'\in W} \sum_{(x'',y'')\in V\times W} \mu(x'',y'')Q((x'',y''),(x',y')) \\
&= \sum_{y'\in W} \mu(x',y') \\
&= \mu_1(x')
\end{aligned}$$

也就是说

$$\Lambda P \;=\; \mu_1 \;=\; Q\Lambda$$

■

特别地，$\mu\Lambda$ 是 P的不变分布，即 μ_1 是 P的不变分布（事实上，这就是上面的证明）。我们还有：

引理 5 假设 μ 对于 Q是可逆的，那么 μ_1 对于 P也是可逆的。

证明
考虑 $f, g \in \mathbb{R}^V$。我们有

$$\begin{aligned}
\mu_1[fP[g]] &= \sum_{x\in V} \mu_1(x)f(x) \sum_{y\in W} Q[g\circ r_1](x,y)\mu_{1,2}(x,y) \\
&= \sum_{(x,y)\in V\times W} f\circ r_1(x,y)Q[g\circ r_1](x,y)\mu(x,y) \\
&= \mu[f\circ r_1 Q[g\circ r_1]] \\
&= \mu[g\circ r_1 Q[f\circ r_1]] \\
&= \mu_1[gP[f]]
\end{aligned}$$

■

上述构造对应于一种聚合过程。更一般地，设 W 是一个有限（或可数）集合，$(Q(w、w'))_{w,w'\in W}$ 是定义在 W 上、具有 $(\pi(w))_{w\in W}$ 作为平稳分布的马尔可夫核。给定状态空间 $W=\bigsqcup_{v\in V}A_v$ 的一个划分，其中包含非空子集，报告马尔可夫链当前状态所属的 A_v，即可得到一个“聚合过程”。众所周知，参见 Kemeny 和 Snell [17] 的定理 6.3.2 或 Pang [21],，这未必是一个马尔可夫链。类似地，V 上的投影马尔可夫核 $(P(v、v'))_{v,v'\in V}$ 可定义为

$$\forall\ v,v'\in V,\qquad P(v,v')\ :=\ \sum_{w\in A_v,\,w'\in A_{v'}}\frac{\pi(w)}{\pi(A_v)}Q(w,w')$$

仿照上述论证，概率测度 $(\pi(A_v))_{v\in V}$ 对 P 不变（当 π 对 Q 可逆时，它也是可逆的）。定义

$$\forall\ w\in W,\forall\ v\in V,\qquad \Lambda(w,v)\ :=\ \pi(A_v)$$

我们得到交织关系 $Q\Lambda=\Lambda P$。若经典的 Dynkin 条件成立，即对任意 v，$v'\in V$，$Q(w,\ A_{v'})$ 不依赖于 $w\in A_v$ 的选取，则投影链 P 与通常的聚合链一致。

3 五对角与二生灭马尔可夫链

这里，我们将上一节的抽象投影方案应用于对称群 $\mathcal{S}_N$。这与 Stein 著作 [23], 的第 12 章相关，该章研究在对称群 $\mathcal{S}_N$ 上的均匀分布下，利用随机换位构造可逆马尔可夫链时，长度为 l 的循环数量的分布，其中所有 $l\in[\![N]\!]$ 均适用。

考虑对称群 $\mathcal{S}_N$ 上的换位随机游走，其转移矩阵 T 定义如下:

$$\forall\ \sigma,\sigma'\in\mathcal{S}_N,\qquad T(\sigma,\sigma')\ =\ \begin{cases}\frac{2}{N(N-1)} & \text{, if there exists a transposition } \tau \text{ such that } \sigma'=\tau\sigma\\ 0 & \text{, otherwise}\end{cases}$$

（其中，排列被视为从 $[\![N]\!]$ 出发的双射映射，乘积对应于复合。）

马尔可夫核 T 相对于均匀概率分布 ν 在 $\mathcal{S}_N$ 上是可逆的。

将 η_1 和 η_2 推广，对于任意 $l\in[\![N]\!]$ 和 $\sigma\in\mathcal{S}_N$，定义 $\eta_l(\sigma)$ 为 σ 中阶为 l 的循环数量（对应于不动点的单元素循环）。特别地，我们有

$$\forall\ \sigma\in\mathcal{S}_N,\qquad \eta_1(\sigma)+2\eta_2(\sigma)+\cdots+N\eta_N(\sigma)\ =\ N$$

设 $(\sigma(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 为一个马尔可夫链，其转移由 T 决定，并记.....

$$\forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\qquad \eta(n)\ :=\ (\eta_l(\sigma(n)))_{l\in[\![N]\!]}$$

众所周知，$\eta:=(\eta(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 也是一个马尔可夫链，其转移矩阵记为Q，并且关于映射 $\mathcal{S}_N\ni\sigma\mapsto(\eta_l(\sigma))_{l\in[\![N]\!]}$中 ν 的像 μ 可逆。事实上，这是统计力学中的经典凝聚-碎裂链，参见 Diaconis、Mayer-Wolf、Zeitouni 和 Zerner [11]。

马尔可夫链 η 可以写成如下形式 $(X,\ Y)$，其中

$$\begin{aligned}X\ &:=\ \eta_1\\ Y\ &:=\ \eta_{[\![2,N]\!]}\ :=\ (\eta_2,\eta_3,...,\eta_N)\end{aligned}$$

因此，我们现在可以应用引理4和引理5。

我们的下一个目标是描述相应的马尔可夫核 P。注意，相应的状态空间是

$$V \quad = \quad [\![0, N]\!] \backslash \{N-1\} \tag{8}$$

在 th 中已经出现过。e 引言（置换不可能有 $N-1$ 个不动点） .

考虑一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_N$。将其不动点记为 $f_1, f_2, ..., f_k$（因此 $\eta_1(\sigma) = k$），并将 σ 的其他循环记为 $C_1, C_2, ..., C_l$。

考虑一次对换 $\tau =: (i, j)$。我们用 $\sigma' := \tau\sigma$ 描述 $\eta_1(\sigma')$。

• 如果 i 和 j 都是 σ的不动点，那么 σ' 的不动点是 $\{f_1、 f_2、 ……、 f_k\} \backslash \{i、 j\}$，其非单元素循环为 $C_1、 C_2、 ……、 C_l$ 以及 $(i、 j)$。因此我们有 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma) - 2$。

• 若 i 是 σ 和 $j \in C_r$的不动点，且 $r \in [\![l]\!]$，那么 σ' 的不动点是 $\{f_1、 f_2、 ...、 f_k\} \backslash \{i\}$ 中的元素；其非单元素循环为 C_m，其中 $m \neq r$，此外还有一个包含 C_r 和 j的新循环。因此我们有 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma) - 1$。

• 若 $i \in C_r$ 和 $j \in C_s$，且 $r \neq s$，那么 σ' 的循环和不动点与 σ的相同，只是 C_s 和 C_r 合并成了一个新循环。特别地，我们有 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma)$。

• 最后一种情况是 i和 j 属于同一个循环 C_r。我们考虑三种子情况:

- 当 $C_r = (i、 j)$时， σ'的不动点为 $\{f_1、 f_2、 ...、 f_k、 i、 j\}$，其非单元素循环为 C_s，其中 $s \in [\![l]\!] \backslash \{r\}$。由此可得 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma) + 2$。

- 当存在 $x \in C_r$ 使得 $\{i, j\} = \{x, \sigma(x)\}$ 时，假设例如 $i = x$ 且 $j = \sigma(x)$且 $C_r \neq (i, j)$。那么 i 是 σ' 的一个新不动点，其非单点循环与 σ 的相同，只是点 i 已从 C_r 中移除。由此可得 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma) + 1$。

- 当不存在满足 $\{i, j\} = \{x, \sigma(x)\}$ 的 $x \in C_r$ 时（特别是， C_r 的基数至少为 4），那么 σ' 与 σ 有相同的不动点，其非单点循环的唯一区别是 C_r 被分成了两个新的非单点循环。由此可得 $\eta_1(\sigma') = \eta_1(\sigma)$。

对这些观察结果按 τ 在所有对换中均匀分布进行积分后，我们得到公式 (5) 中给出的核 P，其中

$$p(x) \quad = \quad \int \eta_2 \, \mu_{1,2}(x, d\eta_{[\![2,N]\!]})$$

即 η_2 在已知 $\eta_1 = x$ 且$\eta_{[\![1,\ N]\!]}$ 服从 μ 分布时的均值（上述积分实际上是求和，但积分记号更为方便）。注意，这种表述与 (6) 等价。

均匀置换的不动点个数的分布 π 等于 μ_1，采用第 2 节中的记号。根据引理 5， π 关于 P 可逆，正如引言中所述。

在下文中，有时使用三对角核比使用五对角核 P 更方便，因此我们从 P 中提取两个生灭核。

第一个，记为 $\widetilde{P}$，由.....给出。

$$\forall\ x \neq y \in V, \qquad \widetilde{P}(x, y) \quad := \quad \frac{1}{N(N-1)} \begin{cases} x(N-x) & \text{, if } x \neq N \text{ and } y = x-1 \\ N - x - 2p(x) & \text{, if } x \neq N-2 \text{ and } y = x+1 \\ 2 & \text{, if } x = N-2 \text{ and } y = N \\ N(N-1) & \text{, if } x = N \text{ and } y = N-2 \\ 0 & \text{, otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

这个马尔可夫核是通过从P中移除所有形如 $(x, x+2)$ 和 $(x, x-2)$ 的转移（但保留 $(N-2, N)$ 和 $(N, N-2)$），因为 $N-1$ 不是 η_1取值的范围），并将它们的权重放到对角线上得到的。对于相应的马尔可夫链，这相当于禁止大小为二的跳跃，并保持在当前位置（ $N-2$ 和 N之间的转移除外）。

~由 π 对于 P是可逆的这一事实，我们推知 π 对于 P也可逆，因为移除转移会保留可逆性（当沿~一条边的两个方向的转移同时被移除时）。如前所述， P 对应于 V上的一个生灭马尔可夫转移。

^第二个生灭马尔可夫转移 P 将在附录 A 中发挥作用。它通过将 V排列为 $N-3, N-5$, ..., 3, 1, 0, 2, 4, ..., $N-2, N$得到，其中 N为偶数。当 N为奇数时，则将V排列为 $N-3, N-5$, ..., 2, 0, 1, 3, ..., $N-2, N$；这种情况下，以下构造会导出类似的结果，因此我们仅考虑 N 为偶数的情形。

因此，我们对 $i \in [\![0, N-1]\!]$ 定义，

$$z_i \quad \coloneqq \quad \begin{cases} 2i & \text{, if } i \in [\![0, N/2-2]\!] \\ 2+2i-N & \text{, if } i \in [\![N/2-1, N-1]\!] \end{cases}$$

^马尔可夫核 P定义在 $[\![0, N-1]\!]$ 上，其形式为

$$\forall\ i \neq j \in V, \qquad \widehat{P}(i,j) \quad \coloneqq \quad \begin{cases} P(z_i, z_j) & \text{, if } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{, otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

^ ~这种 P 的构造在某种程度上是对 P的补充：仅保留大小为二的转移，移除所有大小为 1 的转移，但 0 和 1 之间的转移除外，以确保不可约性。

出于同样的原因 ，与 $\widetilde{P}$，该核 $\widehat{P}$ 满足 $\widehat{\pi} \coloneqq (\widehat{\pi}(i))_{i \in [\![0,\ N-1]\!]}$ 对于可逆测度，其中

$$\forall\ i \in [\![0, N-1]\!], \qquad \widehat{\pi}(i) \quad \coloneqq \quad \pi(z_i) \tag{11}$$

4 先验估计

马尔可夫核 P 的定义 (5) 有一个缺点：对于 $x \in V$，量 $p(x)$ 事先未知。我们将在附录 (A) 中给出它们的显式公式，但下一节中耦合的控制只需要对它们的一个先验界，该界将在下面的命题 6 中给出。

我们在引言中已经看到 $p(N-3) = p(N) = 0$ 且 $p(N-2) = 1$。这些等式以及 P 可逆这一事实，足以推出以下界：

命题 6 对于 (6) 中定义的映射 p ，有

$$\forall\ x \in [\![0, N-2]\!], \qquad |2p(x) - 1| \quad \leqslant \quad \frac{1}{(N-x-2)!}$$

证明

回顾一下 Kolmogorov可逆性判据，例如参见 Kelly 的著作 [16], 。该判据断言，对于来自 V 的任意有限序列 $(x_0, x_1, ..., x_n)$ ，若满足 $n \in \mathbb{N}$，则有

$$P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},x_n)P(x_n,x_0) \quad = \quad P(x_0,x_n)P(x_n,x_{n-1})\cdots P(x_2,x_1)\cdots P(x_1,x_0)$$

对于给定的 $x \in [\![0, N-4]\!]$，假设 $N \geqslant 4$，我们将此公式应用于

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x+1 \\ x_2 &= x+2 \end{aligned}$$

我们得到

$$P(x,x+1)P(x+1,x+2)P(x+2,x) \quad = \quad P(x,x+2)P(x+2,x+1)P(x+1,x)$$

即♀♀♀
♀♀♀

$$\begin{aligned}&(N-x-2p(x))(N-x-1-2p(x+1))(x+2)(x+1)\\ =\;& 2p(x)(x+2)(N-x-2)(x+1)(N-x-1)\end{aligned}$$

也就是说，由于 $x+1>0$,

$$(N-x-2p(x))(N-x-1-2p(x+1)) \;=\; 2p(x)(N-x-2)(N-x-1)$$

为简化记号，对任意 $x\in[\![0,N-2]\!]$，记 $k(x)=2p(x)$。上述公式等价于对 $x\in[\![0,N-4]\!]$ 进行向下迭代,

$$k(x) \;=\; \frac{(N-x)(N-x-1-k(x+1))}{(N-x-1)^2-k(x+1)} \tag{12}$$

从 $k(N-3)=2p(N-3)=0$ 出发，我们逐步推出 $k(N-4)$, $k(N-5)$, ... 直至 $k(0)$。

对于 $x\in[\![0,N-4]\!]$，记 F_x 为有理函数

$$\forall\, r\in\mathbb{R}\backslash\{(N-x-1)^2\},\qquad F_x(r) \;\coloneqq\; \frac{(N-x)(N-x-1-r)}{(N-x-1)^2-r}$$

使得 $k(x)=F_x(k(x+1))$。

对于任意 $x\in[\![0,N-4]\!]$，1 是 F_x 的不动点（事实上是唯一的不动点），因为

$$\begin{aligned}F_x(1) \;&=\; \frac{(N-x)(N-x-1-1)}{(N-x-1)^2-1}\\ &=\; 1\end{aligned}$$

因此，(12) 可以写成便于使用的形式

$$\begin{aligned}k(x)-1 \;&=\; F_x(k(x+1))-F_x(1)\\ &=\; \int_1^{k(x+1)} F_x'(s)\,ds\end{aligned} \tag{13}$$

这提示我们计算:

$$\forall\, s\in\mathbb{R}\backslash\{(N-x-1)^2\},\qquad F_x'(s) \;=\; -\frac{(N-x)(N-x-1)(N-x-2)}{((N-x-1)^2-s)^2} \tag{14}$$

这些观　　察引出了通过反向迭代证明命题 6 中界的思路。

事实上，对于 $x=N-2$ 和 $x=N-3$，该界成立，因为它分别由以下结论推出。

$$\begin{aligned}2p(N-2)-1 \;&=\; 2-1\\ &=\; 1\\ &=\; \frac{1}{0!}\\ &=\; \frac{1}{(N-2-(N-2))!}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}2p(N-3)-1 \;&=\; 0-1\\ &=\; -1\\ &=\; -\frac{1}{1!}\\ &=\; -\frac{1}{(N-2-(N-3))!}\end{aligned}$$

考虑 $x \in [\![0、\ N-4]\!]$，我们有

$$N-x \ \geqslant \ N-x-1 \ \geqslant \ N-x-2 \ \geqslant \ 2 \tag{15}$$

因此 $F'_x < 0$。这一观察与 (13) 表明，若 $k(x+1) > 1$，则 $k(x) < 1$；反过来，若 $k(x+1) < 1$，则 $k(x) > 1$，也就是说，序列 $(k(z)-1)_{z \in [\![0,\ N-2]\!]}$ 是交替的。

我们分别考虑第一种情形：$x = N-4$。由于 $k(N-3) = 0 < 1$，由 with $x = N-4$ 可得，对于 (14)
$s \in [k(N-3),\ 1] = [0,\ 1]$,

$$|F'_{N-4}(s)| \ \leqslant \ \frac{4 \times 3 \times 2}{(3^2-1)^2} \ = \ \frac{3}{8} \ \leqslant \ \frac{1}{2}$$

由 (13) 可得

$$|k(N-4)-1| \ \leqslant \ \frac{1}{2}|k(N-3)-1| \ \leqslant \ \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{(N-(N-4)-2)!}$$

现在假设命题 6 中的界对某个 $x+1 \in [\![1、\ N-4]\!]$ 成立，并证明它对 x也成立。

注意，我们有

$$k(x+1) \ \leqslant \ 1 + \frac{1}{(N-x-2)!} \ \leqslant \ 1 + \frac{1}{2!} \ = \ \frac{3}{2}$$

因此 (15) 和 (14) 意味着对于 $s \in [1, F_x(k(x+1))]$（或 $s \in [F_x(k(x+1)), 1]$，如果 $F_x(k(x+1)) \leqslant 1$ ），

$$|F'_x(s)| \ \leqslant \ \frac{(N-x)(N-x-1)(N-x-2)}{((N-x-1)^2-4/3)^2}$$

我们来证明右端不超过 $1/(N-x-2)$。为简化记号，记作$y \coloneqq N-x-1 \geqslant 3$，于是所需的上界等价于

$$\frac{(y+1)y(y-1)}{(y^2-4/3)^2} \ \leqslant \ \frac{1}{y-1} \tag{16}$$

即

$$(y^2-1)(y-1)y \ \leqslant \ (y^2-4/3)^2$$

i.e.

$$y^4-y^3-y^2+y \ \leqslant \ y^4-\frac{8}{3}y^2+\frac{16}{9}$$

或 $g(y) \geqslant 0$，其中

$$\forall\ y \geqslant 3, \qquad g(y) \ \coloneqq \ y^3-\frac{5}{3}y^2-y+\frac{16}{9}$$

我们计算

$$\forall\ y \geqslant 3, \qquad g'(y) \ = \ 3y^2-\frac{10}{3}y-1$$

且右侧的最大零点为

$$\frac{1}{18}(10+\sqrt{208}) \ < \ 3$$

由此可知， g 在 $[3,+\infty)$ 上递增，且我们计算得到

$$g(3) \quad = \quad 27-15+3+\frac{16}{9} \quad > \quad 0$$

从而证明了（16）的有效性。

由（13）可推得

$$\begin{aligned} |k(x)-1| &\leqslant \left|\int_1^{k(x+1)} \frac{1}{N-x-2}\,ds\right| \\ &\leqslant \frac{1}{N-x-2}|k(x+1)-1| \\ &\leqslant \frac{1}{(N-x-2)!} \end{aligned}$$

其中我们考虑了迭代假设，即 $|k(x+1)-1| \leqslant 1/((N-x-3)!)$。 ■

注 7 在（15）之后所作的观察更精确地意味着，对于 $x \in [\![0, N-2]\!]$, $2p(N-2-x)-1$，当 x 为偶数时为正，当 x 为奇数时为负。▫

这些计算，尤其是迭代关系（12），还表明，可逆对(π, P)由 $p(N-3)=0=p(N)$ 和 $p(N-2)=1$明确定义：研究它不需要更多信息，尤其不需要将 p 解释为较大空间 $\mathcal{S}_N$ 上的条件期望。也就是说，我们只需在 V 上进行研究。

下面正式陈述这一构造:

注 8 考虑在约束条件下，将（5）中定义的 P 里的 $p(x)$ 替换为某个 $\bar{p}(x) \geqslant 0$，使得 P是 $[\![0, N]\!]$上的马尔可夫核。再加上约束 $\bar{p}(N-1) = \bar{p}(N) = 0$（在我们之前的情形中， $N-1$成为一个暂留点，其中 $P(N-1, N) = 1/(N(N-1))$且 $P(N-1, N-1) = 1-P(N-1, N)$）。进一步假设数值 $\bar{p}(x)$满足迭代关系（12）。因此， P是 $\bar{p}(N-2)$ 和 $\bar{p}(N-3)$的函数。于是取 $\bar{p}(N-2) = 1/2$ 和 $\bar{p}(N-3) = 1/2$ （这意味着对所有 $x \in [\![0, N-4]\!]$，都有$\bar{p}(x) = 1/2$，因为 **1** 是 F_x的不动点），最终得到一个马尔可夫核 P，它关于限制在 $[\![0, N]\!]$上的泊松分布是可逆的。▫

这一观察是下一节所介绍的耦合的核心。

5 单调耦合

我们的目的是通过耦合，证明 π 的泊松逼近的一个上界，其对数阶与 **(1)** 的相同。虽然还可以进一步进行计算，但我们主要强调方法，而非精确估计。

更准确地说，我们只需利用 π 相对于（9）中定义的马尔可夫核 P 可逆，以及命题 6 中给出的先验估计，即可证明（7）。

与其在 V或 $\mathbb{Z}_+$上进行研究，我们可以将注意力限制在 $[\![0, N-4]\!]$（假设 $N \geqslant 4$）。事实上，记 ζ为将 $\mathcal{P}$条件化于 $[\![0, N-4]\!]$，因为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\ln(N)} \ln(\mathcal{P}([\![N-3, \infty[\![)) \quad = \quad -1$$

我们很容易推导出

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\ln(N)} \ln(\|\zeta - \mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}}) \quad = \quad -1 \tag{17}$$

此外，不难看出

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\pi(\{N-3,N-2,N\})) \quad = \quad -1$$

通过直接考察可得，

$$\begin{aligned}\pi(N) &= \frac{1}{N!}\\ \pi(N-2) &= \frac{1}{2}\frac{1}{N!}\\ \pi(N-3) &= \frac{1}{3}\frac{1}{N!}\end{aligned} \tag{18}$$

由此可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\pi-\check{\pi}\|_{\mathrm{tv}}) \quad = \quad -1 \tag{19}$$

其中 $\check{}\pi$ 是在 $[\![0、\ N-4]\!]$ 条件下对 π 的条件化。

这些极限行为意味着，(7) 相当于

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\check{\pi}-\zeta\|_{\mathrm{tv}}) \quad \leqslant \quad -1 \tag{20}$$

事实上，一方面，由（18）式可得

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\pi-\mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}}) &\geqslant \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln\left(\frac{1}{2}|\pi(N)-\mathcal{P}(N)|\right)\\ &= \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln\left((1-e^{-1})/(N!)\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

另一方面，由（17）、（19）和（20）可得，

$$\begin{aligned}&\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\pi-\mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}})\\ &\leqslant \max\left(\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\pi-\check{\pi}\|_{\mathrm{tv}}),\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\check{\pi}-\zeta\|_{\mathrm{tv}}),\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N\ln(N)}\ln(\|\zeta-\mathcal{P}\|_{\mathrm{tv}})\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

因此，只需证明（20）。

~由于 P 关于 π可逆，我们有，$\check{}\pi$ 关于由下式给出的生灭马尔可夫核 P 可逆

$$\forall\ x\neq y\in[\![0,N-4]\!],\qquad \check{P}(x,y) \ \coloneqq\ \frac{1}{N(N-1)}\begin{cases}x(N-x) & ,\text{ if } y=x-1\\ N-x-2p(x) & ,\text{ if } y=x+1\\ 0 & ,\text{ otherwise}\end{cases}$$

（和往常一样，对角项由各行之和为 1 这一事实确定）　　.

考虑由下式给出的生灭马尔可夫核 R

$$\forall\ x\neq y\in[\![0,N-4]\!],\qquad R(x,y) \ \coloneqq\ \frac{1}{N(N-1)}\begin{cases}x(N-x) & ,\text{ if } y=x-1\\ N-x-1 & ,\text{ if } y=x+1\\ 0 & ,\text{ otherwise}\end{cases}$$

这相当于在核 $\check{}P$ 中用 $1/2$ 替换 $p(x)$，见上文注 8。

这很　直接验证 ζ 对于 R 是可逆的，因为对于任意 $x \in [\![0、 N-5]\!]$，都有，

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(x)R(x,x+1)}{\zeta(x+1)R(x+1,x)} &= \frac{(x+1)R(x,x+1)}{R(x+1,x)} \\ &= \frac{(x+1)(N-x-1)}{(x+1)(N-x-1)} \\ &= 1\end{aligned}$$

ˇ 为简化记号，从现在起，ˇπ 和 P 将分别记作 π 和 P。希望这不会与之前的 π 和 P混淆。

考虑 $X := (X(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 一个平稳马尔可夫链，其转移由 P 给出，初始分布为 π。类似地，设 $Y := (Y(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个平稳马尔可夫链，其转移由 R 给出，初始分布为 ζ。我们以单调的方式将它们耦合：也就是说，在任意时刻 $n \in \mathbb{Z}_+$，从 $(X(n),Y(n))$ 到 $(X(n+1),Y(n+1))$ 的转移通过在 $[0,1]$ 上采样一个独立均匀随机变量 $U(n)$，并按以下规则决定：

$$X(n+1) = \begin{cases} X(n)-1 & \text{, if } U(n) < P(X(n),X(n)-1) \\ X(n) & \text{, if } P(X(n),X(n)-1) \leqslant U(n) < P(X(n),X(n)-1)+P(X(n),X(n)) \\ X(n+1) & \text{, if } P(X(n),X(n)-1)+P(X(n),X(n)) \leqslant U(n) \end{cases}$$

and

$$Y(n+1) = \begin{cases} Y(n)-1 & \text{, if } U(n) < R(Y(n),Y(n)-1) \\ Y(n) & \text{, if } R(Y(n),Y(n)-1) \leqslant U(n) < R(Y(n),Y(n)-1)+R(Y(n),Y(n)) \\ Y(n+1) & \text{, if } R(Y(n),Y(n)-1)+R(Y(n),Y(n)) \leqslant U(n) \end{cases}$$

$[\![0,N-2]\!]^2$ 上的相应马尔可夫核记作 S，即有

$$\begin{aligned}&\forall\ (x,y),(x',y') \in [\![0,N-2]\!]^2, \\ &\qquad S((x,y),(x',y')) = \mathbb{P}[(X(n+1),Y(n+1))=(x',y')|(X(n),Y(n))=(x,y)]\end{aligned}$$

按惯例，考虑 τ 耦合时间

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ : X(n) = Y(n)\}$$

但也包括辅助随机链 $Z := (Z(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+, \qquad Z(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X(k)=Y(k),\, X(k+1)\neq Y(k+1)\}}$$

它们的意义在于，对于任意时刻 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们都有

$$\begin{aligned}\|\pi-\zeta\|_{\mathrm{tv}} &\leqslant \mathbb{P}[X(n)\neq Y(n)] \\ &\leqslant \mathbb{P}[\tau > n] + \mathbb{P}[Z(n) > 0] \end{aligned} \tag{21}$$

通过选择阶为 $N^4 \ln(N)$ 的 n，我们将得到一个符合所需阶数的 $\|\pi-\zeta\|_{\mathrm{tv}}$ 估计。

这种借助耦合的方法，不同于传统上在定量研究趋于平衡时的用法；在传统用法中，同一转移核的不同行会被耦合。对于较短或较长的时间 n，界（21）都不理想；它只在某些特定时刻有意义，使我们能够估计两个不同转移核的不变概率分布之间的差异。

为了说明　为了看出这些方法之间的差异，让我们来评估（21）中的新项　　：

引理 9 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$\mathbb{P}[Z(n) > 0] \quad \leqslant \quad \frac{2^N n}{N!}$$

证明
对于任意给定的 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z(n) > 0] &\leqslant \mathbb{E}[Z(n)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k),\, X(k+1)\neq Y(k+1)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k)} S((X(k), Y(k)), A)] \qquad (22)
\end{aligned}$$

其中

$$A \quad \coloneqq \quad \{(x', y') \in [\![0, N-4]\!]^2 \,:\, x' \neq y'\}$$

考虑到命题 6，我们有

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in [\![0, N-4]\!], \qquad S((x,x), A) &\leqslant \frac{|1 - 2p(x)|}{N(N-1)} \\
&\leqslant \frac{1}{(N-x-2)!} \frac{1}{N(N-1)} \\
&\leqslant \frac{1}{(N-x)!}
\end{aligned}$$

由此可知，对于任意 $k \in [\![0、\ n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k)} S((X(k), Y(k)), A)] &= \sum_{x=0}^{N-4} \mathbb{P}[X(k) = x = Y(k)] S((x,x), A) \\
&\leqslant \sum_{x=0}^{N-4} \mathbb{P}[Y(k) = x] S((x,x), A) \\
&\leqslant \sum_{x=0}^{N-4} \frac{1}{Z_N x!} \frac{1}{(N-x)!} \\
&\leqslant \frac{1}{Z_N} \sum_{x=0}^{N} \frac{1}{x!} \frac{1}{(N-x)!} \\
&= \frac{1 \times 2^N}{Z_N N!}
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $(Y(k))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 是平稳的，其共同分布为 ζ，并且其中

$$Z_N \quad = \quad \sum_{x=0}^{N-4} \frac{1}{x!} \;\geqslant\; 1$$

所需结果可通过回顾式（22）得出。 ■

注意，即使我们选择的时间 n 比 N 指数级地大，上述引理中的界仍然会很小。

鉴于 (21) 和引理 9，我们接下来的任务是针对给定的 $n \in \mathbb{Z}_+$，对 $\mathbb{P}[\tau > n]$ 得到一个估计。为了朝着这个方向推进，我们还需要另外两条辅助随机链 $Z := (Z(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $Z := (Z(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$，它们分别定义为

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{Z}(n) & := & \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X(k)\leqslant Y(k),\, X(k+1)>Y(k+1)} \\ \widehat{Z}(n) & := & \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X(k)\geqslant Y(k),\, X(k+1)<Y(k+1)} \end{array} \right.$$

以及 X 和 Y 的零点命中时间：

$$\begin{array}{rcl} \tau_0^X & := & \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ \,:\, X(n) = 0\} \\ \tau_0^Y & := & \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ \,:\, Y(n) = 0\} \end{array}$$

确实，这一点很明显，

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \mathbb{P}[\tau > n] \ \leqslant\ \mathbb{P}[\tau_0^X > n] + \mathbb{P}[\tau_0^Y > n] + \mathbb{P}[\widetilde{Z}(n) > 0] + \mathbb{P}[\widehat{Z}(n) > 0] \tag{23}$$

仍需对右端各项分别进行估计。

我们先从最后两项说起。在这方面，值得指出的是，马尔可夫链Y是单调的，也就是说，对于 $x \leqslant y \in [\![0、\ N-4]\!]$，如果 $Y_x := (Y_x(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $Y_y := (Y_y(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是转移核为 R 的马尔可夫链，且分别从 x 和 y出发，那么我们可以用一种单调的方式将它们耦合起来（类似于上面 X 和 Y 的耦合），使得

$$\mathbb{P}[\forall\ n \in \mathbb{Z}_+,\, Y_x(n) \leqslant Y_y(n)] \ =\ 1$$

（例如参见 Lindvall 的书 [20]）。

让我们证明 Y 的这种单调性：

引理 10 马尔可夫链 Y 是单调的。

证明

由于 Y是生灭链，要证明它是单调的，只需验证

$$\forall\ x \in [\![0, N-5]\!], \qquad R(x, [\![x-1, x]\!]) \ \geqslant\ R(x+1, x)$$

（另见 Lindvall [20]）。

前面的界可化为

$$\forall\ x \in [\![0, N-5]\!], \qquad 1 - \frac{N-x-1}{N(N+1)} \ \geqslant\ \frac{(x+1)(N-x-1)}{N(N+1)}$$

or

$$\forall\ x \in [\![0, N-5]\!], \qquad N(N+1) \ \geqslant\ (x+2)(N-x-1) \tag{24}$$

当 x 在 $\mathbb{R}$ 中取值时，右端的最大值在点 $x = (N-3)/2$ 处取得。将其代入上面的右端，所需的不等式成立的条件是 $N \geqslant (N+1)/4,$，而只要$N \geqslant 1/3$，该条件便满足。■

~ ^现在回到量 $\mathbb{P}[Z(n) > 0]$ 和 $\mathbb{P}[Z(n) > 0]$，我们有：

引理 11 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}[\widehat{Z}(n) > 0] & \leqslant & \dfrac{2^{N+1} n}{N!} \\ \mathbb{P}[\widetilde{Z}(n) > 0] & \leqslant & \dfrac{2^{N+1} n}{N!} \end{array}$$

证明
我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\widehat{Z}(n)>0] &\leqslant \mathbb{E}[\widehat{Z}(n)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)\geqslant Y(k),\,X(k+1)<Y(k+1)}] \end{aligned} \tag{25}$$

固定某个 $k\in[\![0、\ n-1]\!]$。若 $X(k)\geqslant Y(k)$ 和 $X(k+1)<Y(k+1)$ 成立，则 $X(k)=Y(k)$ 或 $X(k)=Y(k)+1$。考虑后一种情况，有：

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k)+1,\,X(k+1)<Y(k+1)}] = \sum_{x=0}^{N-4}\mathbb{P}[X(k)=x+1,Y(k)=x]S((x+1,x),A_-) \tag{26}$$

其中

$$A_- := \{(x',y')\in[\![0,N-4]\!]:x'<y'\}$$

然而，要使从 $(x+1、\ x)$ 到 B 的转移发生，$[0、\ 1]$ 上的底层均匀随机变量必定利用了 $2p(x+1)$ 与 1 之间的差异；否则， Y 的单调性将导致矛盾。由此可得

$$\begin{aligned}S((x+1,x),A_-) &\leqslant \frac{|1-2p(x+1)|}{N(N-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{(N-x-1)!}\frac{1}{N(N-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{(N-x+1)!}\end{aligned}$$

并且如引理 9 的证明所示，可得

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{N-4}\mathbb{P}[X(k)=x+1,Y(k)=x]S((x+1,x),A_-) &\leqslant \sum_{x=0}^{N-4}\frac{1}{Z_N x!}\frac{1}{(N-x+1)!} \\ &\leqslant \frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \\ &\leqslant \frac{2^N}{N!}\end{aligned}$$

对 $X(k)=Y(k)$ 情形的处理与引理 9 的证明类似，从而得到

$$\sum_{x=0}^{N-4}\mathbb{P}[X(k)=x,Y(k)=x]S((x,x),A_-) \leqslant \frac{2^N}{N!} \tag{27}$$

因此，对于任意的 $k\in[\![0,n-1]\!]$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)\geqslant Y(k),\,X(k+1)<Y(k+1)}] \leqslant \frac{2^{N+1}}{N!}$$

并且 (25) 得出第一个所需的界。

第二个所需的界以类似方式获得，主要区别在于，对于 $k\in[\![0、\ n-1]\!]$，我们必须将（26）替换为

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k)-1,\,X(k+1)<Y(k+1)}] = \sum_{x=0}^{N-4}\mathbb{P}[X(k)=x+1,Y(k)=x]S((x+1,x),A_+)$$

其中

$$A_+ \;\coloneqq\; \{(x',y') \in [\![0, N-4]\!] \,:\, x' > y'\}$$

因此，我们改用

$$\begin{aligned} S((x-1,x), A_+) &\leqslant \frac{|1-2p(x-1)|}{N(N-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{(N-x-1)!}\frac{1}{N(N-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{(N-x+1)!} \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k)-1,\, X(k+1)<Y(k+1)}] &\leqslant \frac{2^{N+1}}{(N+1)!} \\ &\leqslant \frac{2^N}{N!} \end{aligned}$$

与（27）中一样，我们还有

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X(k)=Y(k),\, X(k+1)<Y(k+1)}] \;\leqslant\; \frac{2^N}{N!}$$

由此可以得出所需的第二个界。 ■

接下来只需估计（23）中 τ_0^X 和 τ_0^Y 的尾部。

我们先从最后一个开始:

引理 12 存在一个常数 $c>0$，使得对于任意足够大的 N 以及任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有

$$\mathbb{P}[\tau_0^Y > n] \;\leqslant\; e^{1-cn/N^3}$$

无论 $Y(0)$ 的初始分布如何。

证明

对于满足 $Y(k) = y \neq 0$ 的任意时刻 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们计算

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}-Y_k}{N}\right)\middle| Y_k = y\right] &= e^{-1/N}\frac{y(N-y)}{N(N-1)} + e^{1/N}\frac{N-y-1}{N(N-1)} + 1 - \frac{y(N-y)+N-y-1}{N(N-1)} \\ &= 1 + (e^{-1/N}-1)\frac{y(N-y)}{N(N-1)} + (e^{1/N}-1)\frac{N-y-1}{N(N-1)} \end{aligned}$$

记 $F_N(y)$ 为右端项，它是一个二次多项式，其最小值在

$$\underline{y} \;\coloneqq\; \frac{e^{1/N}-1+N}{2(1-e^{-1/N})}$$

处取得；当 N 足够大时，该点属于 $[\![1, N-4]\!]$。由此可知，$F_N(y)$ 在 $y \in [\![1, N-4]\!]$ 上的最大值在 $y=1$ 或 $y = N-4$ 处取得。

我们计算得出

$$\begin{aligned} F_N(1) &= 1 + \frac{(e^{-1/N}-1)(N-1) + (e^{1/N}-1)(N-2)}{N(N-1)} \\ F_N(N-4) &= 1 + \frac{4(e^{-1/N}-1)(N-4) + 3(e^{1/N}-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

并由此推得，存在一个常数 $c>0$，使得当 N 足够大时，

$$\max(F_N(1), F_N(N-4)) \leqslant 1-\frac{c}{N^3}$$

从而得到

$$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+,\qquad Y_k\neq 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\middle| Y_k\right] \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)\exp\left(\frac{Y(k)}{N}\right)$$

这意味着

$$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+,\qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\middle| Y_k\right]\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0} \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)\exp\left(\frac{Y(k)}{N}\right)$$

i.e.

$$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+,\qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0}\middle| Y(k)\right] \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)\exp\left(\frac{Y(k)}{N}\right)$$

或者，利用马尔可夫性质，

$$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+,\qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0}\middle| \mathcal{F}^Y(k)\right] \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)\exp\left(\frac{Y(k)}{N}\right)$$

其中，$\mathcal{F}^Y(k)$ 是由 $Y(0)$、$Y(1)$、.....、$Y(k)$生成的σ-域。

迭代此关系，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，可得

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k)\right]\mathbb{1}_{Y(k-1)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k-1)\right] \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)^2\exp\left(\frac{Y(k-1)}{N}\right)$$

进一步迭代，最终得到

$$\mathbb{E}\left[\cdots\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{Y_{k+1}}{N}\right)\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k)\right]\mathbb{1}_{Y(k-1)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k-1)\right]\cdots\mathbb{1}_{Y(0)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(0)\right] \leqslant \left(1-\frac{c}{N^3}\right)^k\exp\left(\frac{Y(0)}{N}\right)$$

考虑到 $Y_{k+1}\geqslant 0$ 以及 $Y(0)\leqslant N$，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\cdots\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Y(k)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k)\right]\mathbb{1}_{Y(k-1)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(k-1)\right]\cdots\mathbb{1}_{Y(0)\neq 0}\middle|\mathcal{F}^Y(0)\right] \leqslant e\left(1-\frac{c}{N^3}\right)^k$$

取期望并迭代化简条件期望（从 $\mathcal{F}^Y(0)$ 开始，接着是 $\mathcal{F}^Y(1)$，依此类推），最终得到

$$\mathbb{P}[Y(k)\neq 0, Y(k-1)\neq 0, ..., Y(0)\neq 0] \leqslant e\left(1-\frac{c}{N^3}\right)^k$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_0^Y > k] &\leqslant e\left(1-\frac{c}{N^3}\right)^k\\ &\leqslant e^{1-\frac{ck}{N^3}}\end{aligned}$$

取 $k=n$，这就是所需的界。 ■

τ_0^X的尾部也可以用类似的方法求得：

引理 13 定理　　存在一个常数 $\tilde{c}>0$，使得对于足够大的 N 以及任意 $n\in\mathbb{Z}_+$，我们有　　e

$$\mathbb{P}[\tau_0^X>n] \leqslant e^{1-\tilde{c}n/N^3}$$

无论 $X(0)$ 的初始分布如何。

证明

根据命题 6，对于所有 $x\in[\![0、N-4]\!]$，我们有 $2p(x)\geqslant 1/2$，这一事实促使我们考虑由转移核 R 给出的~　　~　　~马尔可夫链 $Y:=(Y(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$，其中

$$\forall\, x\neq y\in[\![0,N-4]\!],\qquad \widetilde{R}(x,y) := \frac{1}{N(N-1)}\begin{cases} x(N-x) & ,\text{ if } y=x-1\\ N-x-1/2 & ,\text{ if } y=x+1\\ 0 & ,\text{ otherwise}\end{cases}$$

它与 R 的区别仅在于将 $N-x-1$ 替换为 $N-x-1/2$。

考虑相应的 0 命中时间：

$$\tau_0^{\widetilde{Y}} := \inf\{n\in\mathbb{Z}_+ : \widetilde{Y}(n)=0\}$$

~　　~以单调方式进行耦合 X 和 Y，并从 $Y(0)=X(0)$ 开始，我们得到的是

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}_+,\qquad X(n) \leqslant \widetilde{Y}(n)$$

~至少在 Y 单调的情况下是如此。这一点成立，证明方法与引理 10 相同，只需将 (24) 替换为

$$\forall\, x\in[\![0,N-5]\!],\qquad N(N+1) \geqslant (x+2)(N-x-1/2)$$

我们由此推得

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}_+,\qquad \mathbb{P}[\tau_0^X>n] \leqslant \mathbb{P}[\tau_0^{\widetilde{Y}}>n]$$

因此，只需找到一个常数 $\tilde{c}>0$，使得对于任意 $N\geqslant 5$ 和任意 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有

$$\mathbb{P}[\tau_0^{\widetilde{Y}}>n] \leqslant e^{1-\tilde{c}n/N^3}$$

~无论 $Y(0)$ 的初始分布如何。

这与引理 12 的证明相同。 ■

总结前面的计算，我们已经证明存在两个常数 c、$\tilde{c}>0$，使得对于任意足够大的 N 和 $n\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|\pi-\zeta\|_{\mathrm{tv}} &\leqslant \frac{2^N n}{N!}+2\frac{2^{N+1}n}{N!}+e^{1-cn/N^3}+e^{1-\tilde{c}n/N^3}\\ &\leqslant \frac{5\times 2^N n}{N!}+2e^{1-\hat{c}n/N^3}\end{aligned}$$

其中 $\hat{c}:=c\wedge\tilde{c}$。

取 $n=N\ln(N)/\hat{c},$，我们得出结论 (20)。

通过马尔可夫方法恢复关于 π 的经典结果

沿用第4节的思路，可以从马尔可夫链 P（见 (5)）相对于π的可逆性，重新得到不动点数量的精确公式 $\pi(x)$（见 (4)），从而为蒙莫尔公式 (3) 提供另一种证明（传统论证采用容斥原理，参见例如 [25] 或 Arratia、Barbour 和 Tavaré 的第1章 [1]）。

$\widehat{}$我们将使用上文（10）中定义的生灭链 P 及（11）中定义的其平稳分布 $\widehat{\pi}$。用这一记号，可逆性表明

$$\forall\ i \in [\![0, N-1]\!], \qquad \widehat{\pi}(i)\widehat{P}(i,i+1) \ = \ \widehat{\pi}(i+1)\widehat{P}(i+1,i)$$

or

$$\forall\ i \in [\![0, N-1]\!], \qquad \pi(z_i)P(z_i,z_{i+1}) \ = \ \pi(z_{i+1})P(z_{i+1},z_i)$$

即

$$\pi(0)P(0,1) \ = \ \pi(1)P(1,0) \quad \text{and} \quad \forall\ x \in V\backslash\{N\},\ \pi(x)P(x,x+2) \ = \ \pi(x+2)P(x+2,x) \tag{28}$$

i.e.

$$\pi(0)(N-2p(0)) \ = \ \pi(1)(N-1) \quad \text{and} \quad \forall\ x \in V\backslash\{N\},\ 2\pi(x)p(x) \ = \ \pi(x+2)(x+2)(x+1)$$

最后一个条件意味着

$$\forall\ x \in V\backslash\{N\}, \qquad p(x) \ = \ \frac{\pi(x+2)}{2\pi(x)}(x+2)(x+1)$$

这个公式对 $x = N$ 也成立，因为两项都为零，因此我们已经证明：

引理14 我们有

$$\forall\ x \in V, \qquad p(x) \ = \ \frac{\pi(x+2)}{2\pi(x)}(x+2)(x+1)$$

$\widetilde{}$将此表达式代入第一个相关生灭核 P（定义见式（9））的定义中，我们将得到可逆概率 π 的如下表达式：

命题15 我们有

$$\forall\ x \in V, \qquad \pi(x) \ = \ \frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}$$

证明
由引理14可得，对任意 $x \neq y \in V$，

$$\widetilde{P}(x,y) \ = \ \frac{1}{N(N-1)}\begin{cases} x(N-x) & \text{, if } x \neq N \text{ and } y = x-1 \\ N-x-\frac{\pi(x+2)}{\pi(x)}(x+2)(x+1) & \text{, if } x \neq N-2 \text{ and } y = x+1 \\ 2 & \text{, if } x = N-2 \text{ and } y = N \\ N(N-1) & \text{, if } x = N \text{ and } y = N-2 \\ 0 & \text{, otherwise} \end{cases}$$

Thus ~ ~对于 $x \in [\![0, N-3]\!]$，关系 $\pi(x)P(x, x+1) = \pi(x+1)P(x+1, x)$ 变为

$$\pi(x)(N-x) - \pi(x+2)(x+2)(x+1) = \pi(x+1)(x+1)(N-x-1) \tag{29}$$

~ ~对于 $x = N-2$，关系 $\pi(N-2)P(N-2, N) = \pi(N)P(N, N-2)$ 变为

$$\pi(N-2)2 = \pi(N)N(N-1) \tag{30}$$

这些关系促使我们引入定义在 V 上的函数 f，其定义如下：

$$\forall\, x \in [\![0, N]\!], \qquad f(x) \coloneqq \frac{\pi(x)}{\mathcal{P}(x)}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是参数为 1 的泊松分布（约定 $f(N-1) = 0 = \pi(N-1)$）。事实上，(29) 和 (30) 化简为

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [\![0, N-3]\!], \qquad f(x)(N-x) - f(x+2) &= f(x+1)(N-x-1) \\ 2f(N-2) &= f(N) \end{aligned}$$

即

$$\forall\, x \in [\![0, N-2]\!], \qquad (f(x) - f(x+1))(N-x) = f(x+2) - f(x+1)$$

这个关系促使我们引入定义在 V 上的函数 g，其定义如下：

$$\forall\, x \in [\![0, N-1]\!], \qquad g(x) \coloneqq f(x+1) - f(x)$$

因为我们得到

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [\![0, N-2]\!], \qquad g(x) &= -\frac{g(x+1)}{N-x} \\ &= \frac{g(x+2)}{(N-x)(N-x-1)} \\ &= (-1)^{N-x}\frac{g(N-1)}{(N-x)!} \\ &= (-1)^{N-x}\frac{f(N)}{(N-x)!} \end{aligned}$$

考虑到 $g(N-2) = f(N-1) = 0$，我们推得

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [\![0, N-2]\!], \qquad f(x) &= -g(x) - g(x+1) - \cdots - g(N-2) \\ &= f(N)\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

一个对 $x = N$ 同样成立的公式，因此最终

$$\forall\, x \in V, \qquad \pi(x) = \frac{1}{A_N x!}\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}$$

其中 $A_N = e/f(N)$。该量也是归一化因子，因为 π是一个概率，因此我们计算

$$\begin{aligned}
A_N &= \sum_{x\in V}\frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}\\
&= \sum_{x=0}^{N-2}\frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{1}{N!}\\
&= \sum_{x=0}^{N}\frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{1}{(N-1)!}\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{1}{N!}\\
&= \sum_{x=0}^{N}\frac{1}{x!}\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^{N-x-l}}{(N-x-l)!}-\frac{1}{(N-1)!}(1-1)-\frac{1}{N!}+\frac{1}{N!}\\
&= \sum_{l=0}^{N}\sum_{x=0}^{N-l}\frac{(-1)^{N-x-l}}{x!(N-x-l)!}\\
&= \sum_{l=0}^{N}\frac{1}{(N-l)!}(1-1)^{N-l}\\
&= 1
\end{aligned}$$

■

根据这个公式，我们可以得到 π 与 $\mathcal{P}$之间的全变差距离上界，其精度几乎与 (1) 中的上界相同，但这一推导并未借助耦合。事实上，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\|\pi-\mathcal{P}\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(\pi(n)-\mathcal{P}(n))_+\\
&= \sum_{n\in[\![0,N]\!]}\left(\frac{D_{N-n}}{(N-n)!}-e^{-1}\right)_+\frac{1}{n!}\\
&= \sum_{n\in[\![0,N]\!]}\left(\frac{D_n}{n!}-e^{-1}\right)_+\frac{1}{(N-n)!}\\
&= \sum_{n\in[\![0,N]\!]}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}-e^{-1}\right)_+\frac{1}{(N-n)!}\\
&= \sum_{n\in[\![0,N]\!]}\left(\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\right)_+\frac{1}{(N-n)!}\\
&\leqslant \sum_{n\in[\![0,N]\!],\,n\,\mathrm{odd}}\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(N-n)!}
\end{aligned}$$

（这里用到了级数 $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k}!$ 各项的交错性）。

最后一项也等于

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in[\![0,N]\!],\,n\,\mathrm{even}}\frac{1}{n!}\frac{1}{(N+1-n)!} &\leqslant \sum_{n\in[\![0,N]\!]}\frac{1}{n!}\frac{1}{(N+1-n)!}\\
&= \frac{1}{(N+1)!}\sum_{n\in[\![0,N]\!]}\binom{N+1}{n}\\
&= \frac{2^{N+1}}{(N+1)!}
\end{aligned}$$

F为了完整起见，我们也回顾一下著名公式（2）的一个简单证明
):**引理16** 对于任意 $x \in V$，我们有

$$\pi(x) \quad = \quad \frac{D_{N-x}}{(N-x)!}\frac{1}{x!}$$

证明
固定 $x \in V$，并记 I_x 为 $[\![N]\!]$ 中基数为 x的子集所组成的集合。由对称性，记 σ 为一个任意置换，则有

$$\begin{aligned}
\pi[\eta_1 = x] &= \sum_{I \in I_x} \pi[\forall\ i \in I,\, \sigma(i) = i,\, \forall\ j \in [\![N]\!] \backslash I,\, \sigma(j) \neq j] \\
&= \binom{N}{x} \pi[\forall\ j \in [\![N-x]\!],\, \sigma(j) \neq j,\, \forall\ i \in [\![N-x+1, N]\!],\, \sigma(i) = i] \\
&= \binom{N}{x} \frac{D_{N-x}}{N!} \\
&= \frac{D_{N-x}}{(N-x)!}\frac{1}{x!}
\end{aligned}$$

■

蒙莫尔公式 (3) 现在可由上述引理和命题15推出：**推论17** 对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n \quad = \quad n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

注18
a) 从 (28) 看来，对于 $p(0)$ 我们似乎还有一个额外关系： $\pi(0)(N - 2p(0)) = \pi(1)(N-1)$，这相当于

$$p(0) \quad = \quad \frac{N}{2}\left(1 - \frac{D_{N-1}}{D_N}(N-1)\right)$$

与（31）比较，后者给出了 $x = 0$,

$$p(0) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{D_{N-2}}{(N-2)!}\frac{N!}{D_N}$$

我们由此得出

$$D_N \quad = \quad (N-1)(D_{N-1} + D_{N-2})$$

这是错排数的著名递推公式，参见例如 [25]。
b) 注意， π 与 $\mathcal{P}$ 不接近，这就是分离偏差。

$$\mathfrak{s}(\pi, \mathcal{P}) \quad = \quad \sup\left\{1 - \frac{\pi(x)}{\mathcal{P}(x)} \,:\, x \in \mathbb{Z}_+\right\}$$

因为右侧显然为 1。但采用第 5 节的记号，我们甚至有

$$\begin{aligned}
\liminf_{N\to\infty} \mathfrak{s}(\check{\pi}, \zeta) &\geqslant \liminf_{N\to\infty} 1 - \frac{\check{\pi}(N-4)}{\zeta(N-4)} \\
&= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{\pi(N-4)}{\mathcal{P}(N-4)} \\
&= 1 - e\frac{D_4}{4!} \\
&> 0
\end{aligned}$$

这一事实先验地排 除了通过强平稳时间给出的证明（参见 Diaconis 和 Fill [7]），见第 5 节。
□

B 关于条件期望 p 的补充 p

这里汇总了关于 p 的一些观察。

请注意，引理16还可根据引理14，得出用错排数量表示量 $p(x)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} \forall\ x \in V, \qquad p(x) &= \frac{1}{2}\frac{D_{N-x-2}}{(N-x-2)!}\frac{(N-x)!}{D_{N-x}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=0}^{N-x-2}\frac{(-1)^k}{k!}}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \end{aligned} \tag{31}$$

对于 $x \in [\![0、\ N-2]\!]$，该公式可对我们感兴趣的量 $|2p(x)-1|$ 给出一个估计，其阶与命题 6 的估计相同：

引理 19 我们有

$$\begin{aligned} \forall\ x \in [\![0, N-2]\!], \qquad |2p(x)-1| &\leqslant 3\frac{N-x-1}{(N-x)!} \\ &\leqslant \frac{3}{(N-x-1)!} \end{aligned}$$

特别地，对于 $N \geqslant 4$，我们得到，

$$\forall\ x \in [\![0, N-4]\!], \qquad \frac{1}{4} \leqslant p(x) \leqslant \frac{3}{4}$$

证明
由 (31) 可推得：

$$\begin{aligned} \forall\ x \in V, \qquad 2p(x) &= \frac{\sum_{k=0}^{N-x-2}\frac{(-1)^k}{k!}}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \\ &= 1 - \frac{\sum_{N-x-1}^{N-x}\frac{(-1)^k}{k!}}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \forall\ x \in V, \qquad |2p(x)-1| &= \frac{\left|\frac{1}{(N-x-1)!} - \frac{1}{(N-x)!}\right|}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \\ &= \frac{1}{(N-x-1)!}\frac{1-\frac{1}{N-x}}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \\ &= \frac{N-x-1}{(N-x)!}\frac{1}{\sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!}} \end{aligned}$$

注意， 在级数 $\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l}$！处为 e^{-1} 提供交替逼近，由此可得 t

$$\forall\ x \in [\![0, N-2]\!], \qquad \sum_{l=0}^{3}\frac{(-1)^l}{l!} \leqslant \sum_{l=0}^{N-x}\frac{(-1)^l}{l!} \leqslant \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l}{l!}$$

即

$$\forall\ x \in [\![0, N-2]\!], \qquad \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \ \leqslant\ \sum_{l=0}^{N-x} \frac{(-1)^l}{l!} \ \leqslant\ \frac{1}{2!}$$

i.e.

$$\forall\ x \in [\![0, N-2]\!], \qquad \frac{1}{3} \leqslant\ \sum_{l=0}^{N-x} \frac{(-1)^l}{l!} \ \leqslant\ \frac{1}{2}$$

其下界给出了所需的第一个估计。

对于第二个估计，注意到

$$\begin{aligned} \forall\ x \in [\![0, N-4]\!], \qquad \frac{3}{(N-x-1)!} \ &\leqslant\ \frac{3}{(N-(N-4)-1)!} \\ &\leqslant\ \frac{3}{3!} \ =\ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

引理 19 可 以类似第 5 节中的命题 6 的方式使用，从而得到相同的结论 n.

回到将 p 表述为 η_2 的条件期望的式 (6)，很自然会想，它是否可以通过对称性论证推导出来。需要指出的是，对于整体期望，这确实成立：$\mathbb{E}_\nu[\eta_2] = 1/2$ （见下文中取 $k = 0$ 时引理 22 的证明），同样也可以立即得到 $\mathbb{E}_\nu[\eta_1] = 1$。因此，为了完成本附录，我们来说明对称性论证导出了一个由 p 满足的自然线性方程，尽管我们尚未找到如何利用它推导出类似命题 6 或引理 19 中的先验界。

对于 $k \in [\![0、\ N]\!]$，记

$$\mathcal{A}_k \ \ =\ \ \{(i_1, i_2, ..., i_k) \in [\![N]\!]^k \ :\ m \neq n \in [\![k]\!] \Rightarrow i_m \neq i_n\}$$

特别地，我们有

$$|\mathcal{A}_k| \ \ =\ \ N(N-1)\cdots(N-k+1) \tag{32}$$

（按惯例， $\mathcal{A}_0 = \{\varnothing\}$ 和 $|\mathcal{A}_0| = 1$）。

对于 $k \in [\![0、\ N]\!]$，我们通过以下方式定义对称群 $\mathcal{S}_N$ 上的映射 F_k

$$\forall\ \sigma \in \mathcal{S}_N, \qquad F_k(\sigma) \ \coloneqq\ \sum_{(i_1,...,i_k)\in\mathcal{A}_k} \prod_{j\in[\![k]\!]} \mathbb{1}_{\{\sigma(i_j)=i_j\}}$$

我们来检查这些映射是否是 η_1 （不动点的数量）的函数 :

引理 20 对于任意 $k \in [\![0,\ N]\!]$，我们有

$$F_k \ \ =\ \ \eta_1(\eta_1 - 1)\cdots(\eta_1 - k + 1) \tag{33}$$

证明

I事实上，对于任意给定的 $\sigma \in \mathcal{S}_N$，记 $\mathcal{F}(\sigma)$ σ 的不动点集合。我们有

$$\begin{aligned} F_k(\sigma) \ &=\ |\mathcal{A}_k \cap \mathcal{F}(\sigma)^k| \\ &=\ \eta_1(\sigma)(\eta_1(\sigma) - 1)\cdots(\eta_1(\sigma) - k + 1) \end{aligned}$$

■

注 21 由于 F_k 是关于 η_1 的 k 阶多项式， η_1 的任意函数都可以表示为 F_k（其中 $k \in [\![0、 N]\!]$）的线性组合；实际上，只需考虑 $k \in [\![0、 N-1]\!]$，或者也可以考虑 $k \in V$，因为 η_1 取 N 个值，即 $V \coloneqq [\![0、 N]\!] \backslash \{N-1\}$。
□

由此可知，若要证明

$$\mathbb{E}_\nu[\eta_2|\eta_1] \quad = \quad f(\eta_1)$$

对于给定的函数 $f\colon V \to \mathbb{R}_+$，只需验证

$$\forall\ k \in [\![0, N]\!], \qquad \mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] \quad = \quad \mathbb{E}_\nu[f(\eta_1)F_k]$$

因此，我们需要计算左端项。

引理 22 对于任意 $k \in [\![0, N]\!]$，有

$$\mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] \quad = \quad \begin{cases} 1/2 & , \, if\, k \in [\![0, N-2]\!] \\ 0 & , \, if\, k \in \{N-1, N\} \end{cases}$$

证明
注意到

$$\begin{aligned} \forall\ \sigma \in \mathcal{S}_N, \qquad \eta_2(\sigma) \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_{m \in [\![N]\!]} \mathbb{1}_{\{\sigma(m) \neq m,\, \sigma^2(m) = m\}} \\ &= \quad \frac{1}{2} \sum_{m \neq n \in [\![N]\!]} \mathbb{1}_{\{\sigma(m) = n,\, \sigma(n) = m\}} \end{aligned}$$

因此

$$2\mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] \quad = \quad \sum_{m \neq n \in [\![N]\!]} \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{A}_k} \mathbb{E}_\nu \left[\mathbb{1}_{\{\sigma(m) = n,\, \sigma(n) = m\}} \prod_{j \in [\![k]\!]} \mathbb{1}_{\{\sigma(i_j) = i_j\}} \right]$$

注意，若 $m \in \{i_1, ..., i_k\}$ 或 $n \in \{i_1, ..., i_k\}$，则上述期望为零。因此，记 $i_{k+1} = m$和 $i_{k+2} = n$，我们得到

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] \quad &= \quad \sum_{(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}) \in \mathcal{A}_{k+2}} \mathbb{E}_\nu \left[\mathbb{1}_{\{\sigma(i_{k+1}) = i_{k+2},\, \sigma(i_{k+2}) = i_{k+1}\}} \prod_{j \in [\![k]\!]} \mathbb{1}_{\{\sigma(i_j) = i_j\}} \right] \\ &= \quad \sum_{(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}) \in \mathcal{A}_{k+2}} \pi[\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, ..., \sigma(i_k) = i_k, \sigma(i_{k+1}) = i_{k+2},\, \sigma(i_{k+2}) = i_{k+1}] \end{aligned}$$

对于任意 $(i_1, ..., i_k, i_{k+1}, i_{k+2}) \in \mathcal{A}_{k+2}$，上述概率可以通过以下方式计算：首先选择$\sigma(i_1) = i_1$，其概率为 $1/N,$ ；接着选择 $\sigma(i_2) = i_2$，其后续概率为$1/(N-1),$ ；依此类推，直到选择 $\sigma(i_{k+2}) = i_{k+1}$，其概率为 $1/(N-k-1)$。由此可得

$$\pi[\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, ..., \sigma(i_k) = i_k, \sigma(i_{k+1}) = i_{k+2},\, \sigma(i_{k+2}) = i_{k+1}] \quad = \quad \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-k-1)}$$

从而

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] \quad &= \quad \frac{|\mathcal{A}_{k+2}|}{N(N-1)\cdots(N-k-1)} \\ &= \quad 1 \end{aligned}$$

根据 (32)，至少在 $k+2 \leqslant N$ 时如此。显然，当 $k \in [\![0$ 时， $N-1]\!]$ 满足 $k+2 > N$，也就是说，当 $k \in \{N-1$ 时， $N\}$，最终得到 $2\mathbb{E}_\nu[\eta_2 F_k] = 0$。

■

引理 23 对于任意 $k \in [\![0,\ N]\!]$，我们有

$$\mathbb{E}_\nu[F_k] \quad = \quad 1$$

证明
事实上，正如上述证明中所述，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu[F_k] &= \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{A}_k} \pi[\sigma(i_1)=i_1, \sigma(i_2)=i_2, \dots, \sigma(i_k)=i_k] \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{A}_k} \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \\
&= \frac{|\mathcal{A}_k|}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

由此可知，如果 $f:\ V \to \mathbb{R}$ 是一个满足条件的函数

$$\forall\ k \in V, \qquad \mathbb{E}_\nu[f(\eta_1)F_k] \quad = \quad 1 \tag{34}$$

那么我们可以得出 $f = \mathbb{1}$，即只取值 1 的函数。

考虑由条件期望给出的 $V \to \mathbb{R}$：

$$f(\eta_1) \quad = \quad \mathbb{E}[2\eta_2|\eta_1]$$

根据引理 22，f 几乎满足（34），唯一的差异在于情形 $k = N$。当然，它不可能满足（34），否则根据第 5 节，我们将得到 η_1 的分布是参数为 1 的泊松分布在 V 上的条件分布，而这并不成立（例如由（4）可知）。

尽管如此，引理 22 给出了关于 f 的一个线性方程。记 $a \coloneqq (a_k)_{k\in V}$ 为下式中的系数向量

$$f(\eta_1) \quad =: \quad \sum_{k\in V} a_k F_k$$

我们有

$$Ga \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$a \quad = \quad G^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $G \coloneqq (G_{k,\ l})_{k,\ l\in V}$ 是由下式给出的格拉姆矩阵

$$\forall\ k,l \in V, \qquad G_{k,l} \quad \coloneqq \quad \mathbb{E}_\nu[F_k F_l] \tag{35}$$

根据注 21，族 $(F_k)_{k\in V}$ 在线性空间 $\mathbb{L}^2(\pi_1)$中线性无关，这是由于对所有 $x \in V$都有 $\pi_1(x) > 0$，这意味着 $\dim(\mathbb{L}^2(\pi_1)) = N$。因此， G 是可逆的。

如第 5 节所示，对我们而言更有意义的是定义在 V 上的函数 $g \coloneqq f - \mathbb{1}$。由于引理 23 表明

$$\mathbb{1} \quad = \quad \sum_{k\in V} b_k F_k$$

with

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} \quad = \quad G^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们推得 $g(\eta_1) = \sum_{k\in V} c_k F_k$，其中

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \quad = \quad G^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

更确切地说，第 5 节的计算表明，我们控制耦合构造所需的唯一先验信息，是关于如下表达式的估计

$$\sum_{x\in[\![0,N-2]\!]} |g(x)| \, \frac{1}{ex!} \tag{36}$$

下面我们通过对称性论证直接计算 G 的各项，而无需预先知道 π of η_1 的分布；不过，估计诸如 (36) 这样的表达式似乎并无太大帮助。

命题 24 矩阵 G 是对称的，并将定义 (35) 扩展到任意 k， $l \in [\![0,\ N]\!]$，我们有

$$\forall\ k \leqslant l \in [\![0, N]\!], \qquad G_{k,l} \quad = \quad k! \sum_{r=0}^{k\wedge(N-l)} \frac{1}{r!} \binom{l}{k-r}$$

证明

对于任意的 $i = (i_1, ..., i_k) \in \mathcal{A}_k$，将 $\{i\}$ 集合 $\{i_1, ..., i_k\} \subset [\![N]\!]$ 记为，同时

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_k \quad &\coloneqq \quad \{\{i\} \,:\, i \in \mathcal{A}_k\} \\ &= \quad \{S \subset [\![N]\!] \,:\, |S| = k\} \end{aligned}$$

我们对任意 $k \leqslant l \in [\![N]\!]$ 进行计算，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu[F_k F_l] \quad &= \quad k!l! \sum_{S\in\widetilde{\mathcal{A}}_k,\, T\in\widetilde{\mathcal{A}}_l} \mathbb{P}[\forall\ s \in S, \sigma(s) = s,\ \forall\ t \in T, \sigma(t) = t] \\ &= \quad k!l! \sum_{S\in\widetilde{\mathcal{A}}_k,\, T\in\widetilde{\mathcal{A}}_l} \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-|S\cup T|+1)} \\ &= \quad k!l! \sum_{u\in[\![l,(l+k)\wedge N]\!]} A_{k,l}(u) \frac{(N-u)!}{N!} \end{aligned}$$

其中

$$\forall\ u \in [\![l, (l+k)\wedge N]\!], \qquad A_{k,l}(u) \ \coloneqq\ |\{(S,T)\in \widetilde{\mathcal{A}}_k \times \widetilde{\mathcal{A}}_l\ :\ |S\cup T| = u\}|$$

~注意，对于任意固定的 $T\in\mathcal{A}_l$ 和 $r\in[\![0,\ k\wedge(N-l)]\!]$，我们有

$$|\{S\in\widetilde{\mathcal{A}}_k\ :\ |S\backslash T| = r\}| \ \ =\ \ \binom{N-l}{r}\binom{l}{k-r}$$

右侧对应于从 $[\![N]\!]\backslash T$ 中选取 r 个元素、从 T 中选取 $k-r$ 个元素的选择数。因此，令变量 $u=l+r$ 作如下替换，

$$A_{k,l}(l+r) \ \ =\ \ \binom{N}{l}\binom{N-l}{r}\binom{l}{k-r}$$

进而

$$\begin{aligned}
G_{k,l} &= k!l! \sum_{r\in[\![0,k\wedge(N-l)]\!]} \binom{N}{l}\binom{N-l}{r}\binom{l}{k-r}\frac{(N-l-r)!}{N!} \\
&= \frac{k!l!}{N!}\binom{N}{l}\sum_{r\in[\![0,k\wedge(N-l)]\!]}\binom{N-l}{r}\binom{l}{k-r}(N-l-r)! \\
&= \frac{k!l!}{(N-l)!}\sum_{r\in[\![0,k\wedge(N-l)]\!]}\frac{(N-l)!}{r!(N-l-r)!}\frac{l!}{(l-k+r)!(k-r)!}(N-l-r)! \\
&= k!\sum_{r\in[\![0,k\wedge(N-l)]\!]}\frac{1}{r!}\frac{l!}{(l-k+r)!(k-r)!} \\
&= k!\sum_{r=0}^{k\wedge(N-l)}\frac{1}{r!}\binom{l}{k-r}
\end{aligned}$$

■

参考文献

[1] Richard Arratia、A. D. Barbour 和 Simon Tavaré。对数组合结构：概率方法。EMS 数学专著。苏黎世：欧洲数学会（EMS），2003 年。[2] Sourav Chatterjee、Persi Diaconis 和 Elizabeth Meckes。可交换对与泊松逼近。概率调查，2：64–106，2005 年。[3]Klara Courteaut、Kurt Johansson 和 Gaultier Lambert。从 Berry-Esseen 到超指数。arXiv 预印本，2022 年。[4] F. N. David 和 D. E. Barton。组合概率。纽约：Hafner Publishing Co.，1962 年。[5] Pierre Rémond de Montmort。《论机会游戏的分析研究》。第 3 版，1713/14 年第 2 版的影印本。巴黎。纽约：Chelsea Publishing Company。xlii，414 页。39.50 美元（1980 年），1980 年。[6] P. Diaconis 和 C. Mallows。经典群中随机矩阵特征多项式的新表示。手稿草稿，2000 年。[7] Persi Diaconis 和 James Allen Fill。通过一种新的对偶形式构造强平稳时间。概率年刊，18(4)：1483–1522，1990 年。

[8] Persi Diaconis 和 Peter J. Forrester。Hurwitz 与随机矩阵理论在数学中的起源。《随机矩阵：理论与应用》，6(1)：26，2017 年。编号 1730001。[9] Persi Diaconis、Jason Fulman 和 Robert Guralnick。关于排列的不动点。代数组合学杂志，28(1)：189–218，2008 年。[10] Persi Diaconis 和 Susan Holmes（编）。*Stein* 方法：讲解性讲座与应用。*Stein* 方法研讨会论文集，美国加利福尼亚州斯坦福，*1998* 年。，第 46 卷，*IMS* 讲义、专著丛书。俄亥俄州比奇伍德：IMS，美国数理统计学会，2004 年。[11] Persi Diaconis、Eddy Mayer-Wolf、Ofer Zeitouni 和 Martin P. W. Zerner。泊松–狄利克雷定律是均匀分裂合并变换下唯一的不变分布。概率年刊，32(1B)：915–938，2004 年。[12] Persi Diaconis 和 Mehrdad Shahshahani。关于随机矩阵的特征值。第 31A 卷，第 49–62 页。1994 年。《应用概率研究》。[13] Philippe Duchon 和 Romaric Duvignau。一种保持不动点数量的排列新一代树。载于第 *26* 届国际形式幂级数与代数组合学会议论文集，*FPSAC 2014*，美国伊利诺伊州芝加哥，*2014* 年 *6* 月 *29* 日至 *7* 月 *3* 日，第 679–690 页。南锡：该协会。离散数学与理论计算机科学（DMTCS），2014 年。[14] Philippe Duchon 和 Romaric Duvignau。在不断增长的均匀排列中保持长度为 k 的循环数量。电子组合学杂志，23(4)：研究论文 p4.22，39，2016 年。[15] Richard A. Holley 和 Daniel W. Stroock。随机 Ising 模型在 Gibbs 态中的应用。数学物理通讯，48(3)：249–265，1976 年。[16] F. P. Kelly。可逆性与随机网络。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，2011 年。1979 年原版的修订版，新增序言。[17] John G. Kemeny 和 J. Laurie Snell。有限马尔可夫链。附有新附录“基本矩阵的推广”。第 *3* 次印刷。数学本科教材。Springer，Cham，1983 年。[18] David A. Levin、Yuval Peres 和 Elizabeth L. Wilmer。马尔可夫链与混合时间。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009 年。附有 James G. Propp 和 David B. Wilson 撰写的一章。[19] Thomas M. Liggett。相互作用粒子系统。数学经典。Springer-Verlag，柏林，2005 年。1985 年原版的重印本。[20] Torgny Lindvall。耦合方法讲义。概率与数理统计 Wiley 丛书：概率与数理统计。John Wiley & Sons Inc.，纽约，1992 年。Wiley-Interscience 出版物。[21] C. Y. Amy Pang。代数马尔可夫链的合并源自子商。理论概率杂志，32(4)：1804–1844，2019 年。[22] Jim Pitman。用于均匀更新、排列中的上升与峰以及泊松匹配分布的修正帕斯卡三角形。未发表草稿，私人通信，2020 年 4 月。[23] Charles Stein。期望的近似计算，第 7 卷，*IMS* 讲义、专著丛书。加利福尼亚州海沃德：美国数理统计学会，1986 年。[24] Lajos Takacs。巧合问题。精密科学史档案，21：229–244，1979 年。[25]维基百科贡献者。错排——维基百科，自由的百科全书。https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Derangement&oldid=1084547992，2022 年。[在线；访问日期：6 月 20 日，2022]。

diaconis@math.stanford.edu 数学系 统计系 斯坦福大学，美国

miclo@math.cnrs.fr 图卢兹数学研究所 保罗·萨巴捷大学，纳博讷路118号，31062图卢兹邮政信箱9号，法国 图卢兹经济学院，大学广场1号，31080图卢兹邮政信箱06号，法国