arXiv:2305.02581v2 [math.CT] 1 Feb 2024

´ ´ ´有限特征下´ ´ ´有限线性群的´ ´ ´一般表示

par Aurélien DJAMENT & Thomas GAUJAL

Résumé。——本文研究 ´在有限环 R `上、系数取自域 k 的线性群的 *représentations génériques*，其中 R 的基数在该域中可逆；也就是说，研究从有限型 R-投射模到 k向量空间的函子。特别地，我们得到这些表示的一个分类 *simples*，并据此证明了 Djament-Touzé-Vespa 关于此类函子所取维数的一个猜想。

Abstract (*Generic representations of finite general linear groups in nondescribing characteristic*)

我们研究 *generic representations* 有限环上的一般线性群 R，其系数取自域 k，且 R 的基数在该域中可逆；换言之，我们研究从有限生成的射影 R-模到 k-向量空间的函子。特别地，我们对这类 *simple* 表示进行了分类，从而得以证明 Djament-Touz´é-Vespa 关于此类函子所取维数的猜想。

Aurélien DJAMENT，法国国家科学研究中心，分析、几何与应用实验室（UMR7539），加利略研究所，索邦巴黎北大学，Jean-Baptiste Clément 大道 99 号，93430 VILLETANEUSE，法国 • *E-mail :* djament@math.cnrs.fr*Url :* https://djament.perso.math.cnrs.fr/

Thomas GAUJAL，里尔大学，Paul Painlevé 实验室（UMR8524），科学城 M2 楼，59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX，法国*E-mail :* thomas.gaujal@gmail.com2000 年数学主题分类。——18A25，18E05，18E10，18E35，19A99，20G99，20J99。关键词。——函子范畴，加性范畴，反多项式函子，单对象函子，阿贝尔范畴的粘合。

作者们获得了法国国家研究署的部分资助，具体来自 ANR ChroK 项目（ANR-16-CE40-0003）、Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01），以及第一作者参与的 ANR AlMaRe 项目（ANR-19-CE40-0001-01）。

引言

记号。——在整篇文章中，字母 $\mathcal{A}$ d′ 表示一个本质小的加性范畴。我们在一个交换域 k 上工作（特别地，未特别指定基域的张量积均取在 k 上）。

记 $k[-]$ 为从集合到 k-向量空间的 k-线性化函子。因此，若 E 是一个集合，则 $k[E]$ 这一 k-向量空间具有一个与 E相同的标准基；对于 $e \in E$，记 $[e] \in k[E]$ 为该基中对应的′元素。

前言：不等特征下有限线性群的表示。——设 R 是一个基数为有限 N的环。众所周知，GL$_n(R)$的 k-线性表示理论在以下两种情形中完全不同。

1. 等特征： N 是 k的特征 p的一个幂。此时所有这些表示都是多项式表示；若 J 表示 R的根基，则由模 J 约化诱导的群同态 GL$_n(R) \to$ GL$_n(R/J)$是满射，其核是一个 p-群，因此 GL$_n(R)$的不可约 k-线性表示与 GL$_n(R/J)$的不可约表示相同。这些表示可以通过代数群表示理论等方法加以分类（至少在 k 足够大时）。

2. 非等特征： N 在 k中可逆。当 R 为半单时，GL$_n(R)$ 的不可约′线性表示已得到充分理解；但在其他情况下则不再如此，至少对于任意的 n 而言是这样。因此，对于每个素数 l，所有群 GL$_n(\mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z})$ 的不可约复表示的分类构成了一个野性问题。

这种二分法在线性群的′一般表示中也有类似情形，即研究系数取自 k的′线性群；换言之，这些是函子范畴中的对象。下面我们将回顾这些函子范畴的定义及其起源。本文专门研究非等特征情形下的这类′一般表示。

小范畴的表示。——按照 B. Mitchell 的经典文章 [20], ，可以将预加性小范畴视为具有多个对象的环 ˋ，并将从这些范畴到阿贝尔群范畴 Ab 的加性函子视为其上的模。如果 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴（不一定是预加性的），那么从 $\mathcal{C}$ 到k-向量空间的函子，可以等同于从′的预加性范畴$k[\mathcal{C}]$（通过将 $\mathcal{C}$的态射线性化而得到）到 Ab 的加性函子；也可以等同于 $\mathcal{C}$的一个 k-线性表示。对这些函子的研究，其范畴记作 $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$，实际上构成了群线性表示的一种自然推广，并且与后者有着丰富的相互联系。

加性范畴的表示。——一个重要情形是以加性范畴 $\mathcal{A}$为源的函子。此时可以区分加性函子（尤其是 Auslander 在 $\mathcal{A}$ 具有足够有限性性质时所研究的函子）；它们构成了所有函子所在范畴的一个重要子范畴，而后者通常要难以理解得多。如果 R 是一个环，那么自 N. Kuhn 的系列文章 [16, 17, 18]（专门讨论 $R = k$ 为有限域的情形）以来，人们将取值于 k -模的、从有限型射影左 R-模范畴到 k-模的函子（不一定是加性的）称为系数取自 k 的 ´上线性群的泛表示。这些泛表示构成一个具有良好性质的阿贝尔范畴，记作 $\mathcal{F}(R, k)$。它们尤其出现在代数拓扑问题中（特别是上述 $R = k$为有限域的情形——参见 [14]），以及群同调问题中；例如参见综述 [11]。

多项式函子与反多项式函子。——Eilenberg 和 Mac Lane 引入的多项式函子概念，是研究从加性范畴到阿贝尔范畴的函子及其应用的基础，它是加性函子概念的一种推广。然而，也存在一些非平凡情形，其中不存在非恒定的多项式函子（见命题 2.2）；反多项式情形便是其中之一，现回顾其定义：

（参见定义 2.3）。——设有一个加性范畴。

1. 如果对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 x 和 y，阿贝尔群 $\mathcal{A}(x, y)$ 的阶有限且在 k 中可逆，则称 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。2. 若 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中的一个函子可通过一个从 $\mathcal{A}$ 到 k-平凡加性范畴的加性函子进行分解，则称其为反多项式函子。

此外，可以在一种精确定义的意义下，将对 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中具有足够多有限性性质的函子的研究，归结为对多项式函子和反多项式函子的研究；这一意义见 [8, § 4]（这也促使我们引入反多项式性的概念），并在第 2 节中作了简要回顾。

如果 R 是一个有限环，那么等特征情形恰好是指所有从 $\mathcal{F}(R, k)$ 出发的有限长度函子都是多项式函子；而不等特征情形（也称 R 是 k-平凡的）恰好是指所有从 $\mathcal{F}(R, k)$ 出发的函子都是反多项式函子。

多项式函子已得到大量研究，其结构也相当完善（例如参见 Pirashvili [23] ou，或更近一些的 [8, § 5], ，以及其他许多文章）；而我们这篇文章所关注的反多项式函子，迄今为止却鲜少受到关注。

前人的工作与启发。——2015年，Kuhn 根据 Kovács 关于有限矩阵幺半群表示的研究结果，证明了如下定理：

Théorème 1 (Kuhn)。——如果 $\mathbb{F}$ 是一个特征与 k的特征不同的有限 ´域，则存在一个 ´范畴等价关系 ´。

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \simeq \prod_{n\in\mathbb{N}} k[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})]\text{-}\mathbf{Mod}\ .$$

这一结果与特征不等的情形形成鲜明对比：特别是，它意味着范畴 $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ 是局部有限的（也就是说，由有限长度的对象生成），而 $\mathcal{F}(k, k)$ 则永远不会是局部有限的。

本文大部分内容源自第二作者在第一作者指导下完成的博士论文。该论文还包含 Kuhn 定理 1 的一种全新证明，完全基于函子方法（不借助 Kovács 的结果），但此处未予收录；与此同时，我们文章第 10.2 节和第 11 节的结果也未包含在 [13] 中。

Nagpal 近期的工作 ´ [21, 22] 给了我们启发 ´：这些工作 ´致力于 `研究一种与 Kuhn [19], 的情形颇为相似 `、但产生了更为微妙结构的情形 `, `即研究从有限域 $\mathbb{F}$ 上有限维向量空间的单态射范畴到 k-向量空间的函子，其中 k 与 $\mathbb{F}$ 的特征不同。Nagpal [21, § 4.2] 尤其引入了经典工具的变体，即移位函子与差分函子（其定义在第 2 节 ´开头重述 ´），它们在某种意义上构成了线性群表示理论中抛物限制的函子形式 ´（通常的移位函子 ´是经典限制的类比）。这些函子的定义 ´对于加性源范畴的函子同样有意义 ´，尽管它们的形式性质 ´与 Nagpal 的函子 ´并不完全相同 `。我们在加性 $k$-平凡源范畴的背景下研究这些函子¯，将它们记为 $\bar{\tau}_x$ 和 $\delta_x$（其中 $x$在此是一个对象），具体见第 7 节；它们是我们这项工作不可或缺的关键组成部分 `。

另一种灵感来源于 G. Powell 的文章 [25]，他在一个等特征的特殊情形下（范畴 $\mathcal{F}(k, k)$，其中 k 是一个有限域）引入了若干基本函子，他称之为余 Weyl 函子。这些函子的定义可以毫无困难地推广到任意加性源范畴，而且在我们所考虑的不等特征情形下，它们具有一些特定性质（尤其是上同调性质）（见第 4 节和第 5 节）。

定理 1 特别表明，当 k 是一个特征为零的域且 $\mathbb{F}$ 是一个有限域时，$\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ 是一个半单范畴。容易看出

另一方面，如果 R 是一个非半单环（参见例4.2），范畴 $\mathcal{F}(R,k)$ 显然不可能是半单的。特别是，对于从任意 k-平凡加性范畴到 k-向量空间的函子，不能期待像定理 1 中那样的分解具有同样简单的结构。通常，我们得到的不是直积分解，而是通过若干特殊的子范畴对函子范畴进行分层。

主要结果。——在第 8 节中，当加性范畴是 k-平凡时，我们定义了 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的双局部化子范畴 $\acute{}(^{(1)}\ \mathcal{F}_d;\mathcal{A})$，其中 d 是一个整数，并满足：

1. $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)\ \subset\ \mathcal{F}_{d+1}(\mathcal{A};\ k)$；当 $d<0$（分别为 $d=0$）时，$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)$ 退化为 0（分别为常值函子）；2. 若从 $\mathcal{A}$ 到 Ab 的加性函子范畴是局部有限的，则 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中的每个有限生成函子，对于某个整数 d，都属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$（特别地，这适用于 $\mathcal{F}(R,k)$，其中 R 是一个 k-平凡环）；3. 若 $A:\ \mathcal{A}\to$ Ab 是一个加性函子，则线性化函子 $\acute{}\,k[A]$ 属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$，当且仅当 A 的长度有限且至多等于 d。

子范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的显式定义借鉴了多项式函子的一种定义，并涉及上述抛物线移位函子。

我们将在第 9 节证明以下结构定理，它是定理 1 的一个类比，但其源范畴一般性强得多：

Théorème 2. — 假设加性范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。对任意 $d\in\mathbb{N}$，存在一个范畴等价

$$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)\simeq\prod k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod}$$

其中，乘积取遍有限长度加性函子 $A{:}\mathcal{A}\to$ Ab 的同构类 d。

事实上，我们将在定理 9.9 中证明一个更精确的结果，明确描述前述范畴等价，以及与之相关的截面函子和余截面函子。

前述定理的一个重要结果是：从 Aut(A) 群的不可约 k-线性表示出发，可以描述范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ `中的简单函子，其中 A 是 $\mathcal{A}$ 上的有限长度加性函子。在对 $\mathcal{A}$ 施加一个额外的有限性假设后，这就描述了 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的所有简单函子。由此可以证明，在

(1)子范畴 *bilocalisante* 的定义，以及本文中使用的阿贝尔范畴中的其他经典概念，均在附录 A 中予以回顾。

定理 10.17， [8] 中提出的一个猜想，涉及从 $\mathcal{F}(R,k)$ 出发的有限型函子的维数，其中 R 是一个 k- 平凡环。

另一个重要推论是以下有限性结果：

Théorème 3 （命题 10.6）。——假设加性范畴 $\mathcal{A}$ 是k-平凡的。设 $A:\mathcal{A}\to$ Ab 是一个有限长度的加性函子。那么函子 $k[A]$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的长度有限。

我们还在第 11 节探讨定理 2 的同调推论：我们证明， $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 中两个函子之间的扩张群，在该范畴和 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中计算所得相同（推论 11.4）；并且当 k 的特征为零时，范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的整体维数有限（命题 11.6）。

1. 加法范畴的表示

加性与非加性表示。——记 Rep($\mathcal{A}$) 为从 $\mathcal{A}$ 到阿贝尔群的加性函子范畴，其态射为自然变换。Rep($\mathcal{A}$) 的对象通常称为范畴 $'$的加性表示，或左 $\mathcal{A}$-模（参见 Mitchell）。

记 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 为从 $\mathcal{A}$ 到 $'$类别的 k 向量空间范畴中的函子范畴（不一定是加性的）。若 R 是一个环，则记 P(R) 为有限型射影左 R-模的范畴，并记 $\mathcal{F}(R,k):=\mathcal{F}(\mathrm{P}(R);k)$ 为系数取自 k 的线性群的泛表示范畴。注意，范畴 Rep(P(R)) 等价于右 R-模的范畴（一个方向的等价由在 R 处取值给出，另一个方向则由在 R 上的张量积给出）。

范畴 Rep($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 是具有良好性质的阿贝尔范畴（其中正合性可在目标处检验）：它们都是 Grothendieck 范畴，并且有足够多的投射对象。更准确地说，它们分别由可表函子 $\mathcal{A}(a,-)$ 和 $k[\mathcal{A}(a,-)]$ （其中 a 遍历 $\mathcal{A}$ 的一个骨架）生成。这些函子是有限型射影对象，因为根据 Yoneda 引理，它们表示在 a 处的求值。

F 上的每个函子 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 都自然地分解为其常值项 $F(0)$ 与一个约化函子的直和；所谓约化，即在 0 处取值为零，记作 F^{red}。

有限型函子。——由前述内容可知，阿贝尔范畴 Rep($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 是局部有限生成的（即由有限生成

对象[(2)]生成）。由于 $\mathcal{A}$ 是加性的，Rep($\mathcal{A}$) 中的一个对象是有限生成的，当且仅当它是可表示函子 $´(a, –)$ 的商对象。

NOTATION 1.1. — 给定 $\mathcal{A}$ 中的对象 a 和 Rep($\mathcal{A}$) 中的对象 A，以及 $A(a)$ 的一个元素 ξ，记 A_ξ 为由 ξ 生成的 A 的子函子，也就是说，它是与 $\xi \in A(a) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(a, –) A)$ 相关联的态射 $\mathcal{A}(a, –) \to A$ 的像。

因此，Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子 A 是有限型的，当且仅当存在 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 和 $\xi \in A(a)$，使得 $A_\xi = A$。

$\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的一个函子是有限型的，当且仅当它同构于由 $\mathcal{A}$ 中对象的形如 $k[\mathcal{A}(a_i, –)]$ 的函子构成的有限直和的一个商对象。

PROPOSITION 1.2. — 若 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的有限生成函子，那么 $k[A]$是 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的有限生成函子。

证明。 — 这是由函子 $k[–]$ 保持满态射以及前述观察得出的。 □

对偶。 — 记 $(–)^\sharp$ 为 $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(–, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \mathrm{Ab}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ 函子，它在有限阿贝尔群的全子范畴与其对偶范畴之间诱导出一个等价。再记 $(–)^\sharp : \mathrm{Rep}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Rep}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 为经此函子后复合。由此，它在有限值加性函子的全子范畴之间诱导出一个对合等价。

记 $(–)^\vee := \mathrm{Hom}(–, k)$ 为 k-向量空间的对偶函子。再记 $(–)^\vee : \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}; k)$ 为与前述函子的复合。它在取有限维值的函子全子范畴之间诱导出一个对合等价。

若 A（分别为 F）是 Rep($\mathcal{A}$)（分别为 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$）中的函子，且取有限值（分别为在 k 上有限维的值），那么 A（分别为 F）是有限型，当且仅当 $A^\sharp$（分别为 $F^\vee$）是余有限型；是诺特的，当且仅当 $A^\sharp$（分别为 $F^\vee$）是阿廷的；是有限的，当且仅当 $A^\sharp$（分别为 $F^\vee$）是有限的。

同态有限性条件 (FH)。——考虑加法范畴 $\mathcal{A}$ 上的以下条件：

(FH) 对于 $\mathcal{A}$ 中任意对象 a 和 b，群 $\mathrm{Hom}(a, b)$ 是有限的。

这保证了 Rep($\mathcal{A}$) 的所有有限型函子（分别为 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$）都是 ¨有限值（分别为有限维）。因此可以使用前述对偶函子´，并且可以不加区别地处理 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的有限型函子或 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}; k)$ 的余有限型函子，例如。

(2)有限型对象的概念以及本文中将出现的阿贝尔范畴中的其他有限性性质，均在附录 A 中回顾。

条件 (FH) 也意味着 Rep($\mathcal{A}$) 中有限型对象的自态射环（分别地，k-代数`）是有限的（分别地，维数有限）；特别地，命题 A.1 适用于 Rep($\mathcal{A}$) 中的所有有限对象。条件 (FH) 也能避免若干困难——例如，$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 只有在满足 (FH) 时才可能是局部诺特的 [8, 命题 11.1]。

2. 多项式函子与反多项式函子

移位函子与差分函子。——若 a 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，则记 τ_a 为 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子，它由对 $a\oplus -:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 的预复合给出，称为按 a 移位。与所有预复合函子一样，它是双连续的，特别是正合的。此外，$a\mapsto\tau_a$ 定义了一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子范畴的函子。特别地，态射 $0\to a\to 0$ 诱导自然变换 $\mathrm{Id}\simeq\tau_0\to\tau_a\to\mathrm{Id}$，其复合 ´等于恒等态射 ´。$\tau_a\to\mathrm{Id}$ 的核记作 δ_a，称为与 a 相关联的差分函子，因此给出一个自然分裂 $\tau_a\simeq\mathrm{Id}\oplus\delta_a$。因此，$\delta_a$ 本身也是一个双连续函子。与前面一样，$a\mapsto\delta_a$ 定义了一个从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子范畴的函子。

多项式函子。— ´给定一个整数 $d\geq -1$，记 $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{A};k)$ 为 $\mathcal{F}(A;\ k)$ 的满子范畴，其中包含满足对任意 $(a_0,\dots,a_d)\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^{d+1}$ 均有 $\delta_{a_0}\dots\delta_{a_d}(F)=0$ 的函子 F。由于差分函子是双连续的，这个子范畴是双局部化的。其对象称为次数至多为 d 的多项式函子。

Remarque 2.1. — 在我们的语境中，多项式函子的经典定义可追溯至 20 世纪 50 年代初；该定义由 Eilenberg 和 Mac Lane 提出，[10], 以交叉效应的形式给出。关于这一观点与本文采用的差分函子观点之间的等价性，相关证明较为简单，详见 [9, § 3.2]。

多项式函子具有许多显著的性质；尤其是，相较于一般的简单函子，我们拥有精确得多的简单多项式函子的分类结果；多项式函子的有限性性质也要优越得多。

´类范畴。——然而，在某些情况下，多项式函子理论对理解范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 毫无帮助，因为不存在非常数多项式函子。确切地说，有如下初等结果：

Proposition 2.2. — [8, 命题 2.13] 以下断言等价：

1. 范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 不存在非常值多项式函子；

2. 在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中不存在非零加性函子；3. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 x 和 y，有 $\mathcal{A}(x,y)\otimes_{\mathbb{Z}} k=0$；4. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 x，有 $\mathcal{A}(x,x)\otimes_{\mathbb{Z}} k=0$。

DÉFINITION 2.3. — [8, 定义 4.1] 若加性范畴 $\mathcal{A}$ 满足条件 (FH) 以及前一命题中的等价条件´，则称其为 k-平凡的。

若环 R 的范畴 P(R) 是 k-平凡的，即 R 是有限的且其阶在 k 中可逆，则称环 R 是 k- 平凡的。

在本文中，我们通常（甚至从第 8 节中部开始始终）假设范畴´是 k-平凡的。

反多项式函子。— 定义 4.2] 若一个从 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 出发的函子是反多项式的，是指它在同构意义下可经由一个加性函子 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 分解，而该函子的目标是一个 k-平凡的加性范畴。

D´斯坦伯格分解。——引入反多项式函子是由下述定理 [8, cor. 4.11]，所启发的，该定理构成了 [8] 的主要结果之一，也是 R. Steinberg 的分解定理的函子类比：

THÉORÈME 2.4 (Djament-Touz´e-Vespa). — $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中每个取值都是 k 上有限维向量空间的有限生成且余有限型函子，都同构于对角函子 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 与一个函子的复合；该函子在同构意义下唯一，属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}\times\mathcal{A};k)$，相对于第`一变量是多项式的，相对于第 `二变量是反多项式的。

由此特别推出 [8, 推论 4.13]: 若域 k 代数闭，则从 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 到有限维向量空间的简单函子，恰好是一个取有限维值的简单多项式函子与一个简单反多项式函子的张量积。尽管我们对取有限维值的简单多项式函子的结构已知甚多 [8, §5], ，但除源为半单对象的情形 [19] 外，简单反多项式函子的结构本质上仍然未知。

3. 加性函子的线性化

3.1. 态射。—— 以下线性化原理见于引理 C.´，简单却至关重要。

PROPOSITION 3.1. — 设 A 和 B 是 Rep($\mathcal{A}$) 的函子。典范的k-线´性映射

$$\Theta_{A,B}:k[\mathrm{Hom}(A,B)]\to\mathrm{Hom}(k[A],k[B])$$

是单射；若 A 为有限型，则它是双射。

以下结果将态射 $\Theta_{A,\ B}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[f_i])$ 的像（其中 λ_i 均非零，且 f_i 两两不同）与 f_i 的像联系起来。它将在重要命题 8.9 的证明中发挥作用。

PROPOSITION 3.2. — 设 (A_i) 和 (B_j) 为 Rep($\mathcal{A}$) 中的对象族，并且对于所有 i,j，$(\lambda_{i,\ j}(f))_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}$ 是 k 中一个几乎处处为零的 ′元 ′素族。假设这些 A_i 都是有限型的。记 F 为该态射的像。

$$\bigoplus_i k[A_i] \xrightarrow{\left(\Theta_{A_i,B_j}(\sum_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}\lambda_{i,j}(f)[f])\right)_{i,j}} \prod_j k[B_j]\ .$$

若 $\lambda_{i,\ j}(f)\ \in k^\times$，则存在一个对象 x 属于 $\mathcal{A}$，使得 $k[\mathrm{Im}\ f]$ 成为 $\tau_x(F)$ 的一个子商对象。

证明。——由于函子 τ_x 是双连续的，利用 Rep($\mathcal{A}$) 的函子 T 上的自然同构 $\tau_x k[T]\simeq k[T]\otimes k[T(x)]\simeq\bigoplus_{\xi\in T(x)}k[T]$，可见 $\tau_x(F)$可识别为态射的像

$$\bigoplus_{i,\xi\in A_i(x)} k[A_i]\to\prod_{j,\zeta\in B_j(x)} k[B_j]$$

其源端对应因子(i,ξ)、目标端对应因子(j,ζ)的分量，是Θ_{A_i,B_j} 对下式取像所得：

$$\sum_{\substack{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\\ f_*\xi=\zeta}}\lambda_{i,j}(f)[f].$$

由于 A 是有限型的，可以选取 x，使得 A_i 由 $A_i(x)$中的一个′el ′ement ξ 生成。因此，函数

$$\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\to B_j(x)\qquad f\mapsto f_*\xi$$

是单射。因此，前述态射的一个分量为$\lambda_{i,j}(f)[f]$，其像为 $k[\mathrm{Im}\ f]$，因为$\lambda_{i,j}\in k^\times$，由此得出结论。 □

3.2. 对偶性；应用。——以下两个陈述虽然初等，但非常重要，基本上见于引理 11.5]。

PROPOSITION 3.3. — 假设 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个有限生成函子，使得对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 a，$A(a)$ 都是一个有限且其阶在 k 中可逆的阿贝尔群。那么存在一个同构 $k[A]^\vee\simeq k[A^\sharp]$，它属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};k)$。

D ´emonstration。— 首先假设 k 包含所有单位根。那么，若 V 是一个满足 $V\otimes_{\mathbb{Z}}k=0$ 的有限阿´贝尔群，则 k-代`数 $k[V]$ 是半单分裂的；换言之，典范态射 $k$-代`数 $k[V]\to k^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V,k^\times)}$（其中 ` 或 k^E 表示由 k 个副本组成、以任意集合 E 为指标集的直积代数）是一个同构。此外，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V,k^\times)$ 自然同构于 $V^\sharp$。由此可得一个 $\mathcal{F}$（$\mathcal{A};k$）中的自然同构 $k[A]\simeq k^{A^\sharp}$，进而通过取对偶得到所需结论。

在一般情形下，设 K 是一个包含单位根的域 k 的扩张。根据前文，函子 $k[A]^\vee\otimes K$ 和 $k[A^\sharp]\otimes K$ de($\mathcal{A};K$)同构。此外，将 K替换为域 k 的一个有限子扩张后，这个同构仍然成立——这是因为对于 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};k$)中的任意函子 F 和 G，只要 F 是有限型，典范态射 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)\otimes K\to\mathcal{F}(\mathcal{A};K)(F\otimes K,G\otimes K)$ 就是一个同构（先将这个同构用于 $F=k[A]$ 和 $G=k^{A^\sharp}$，再用于 $F=k^{A^\sharp}$ 和 $G=k[A]$—— $k[A]$ 在 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};k$)中是有限型，因为它在Rep($\mathcal{A}$)中是有限型；而 $k^{A^\sharp}$ 在 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};k$)中是有限型，因为根据前文，它在 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};K$)中是有限型）。换言之，可以假设 K 在 k上是有限次的。将标量限制从 K `到 $k$后复合，由此可得，在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$中，$(k[A])^{\oplus d}\simeq(k^{A^\sharp})^{\oplus d}$。现在，根据命题 3.3（以及 $A$ 是有限型且 `取有限值这一事实），$k[A]$ 的自同态环在 k 上有限维；同样，$k^{A^\sharp}$ 也是如此（因为它是一个取有限维值的有限生成函子 `），因此 Krull–Schmidt 性质（例如参见 [24, § 5.1]）给出了结论。

□

Remarque 3.4. —— 证明的最后部分依赖于 § 2 中定理 3] 所涉及的函子范畴的一种变体。

Remarque 3.5。——当 k 包含足够多的单位根时，可以在前述命题中去掉 A 为有限型的假设，并且所得同构还对加性函子 A（取值于 k 中的有限值且可逆元素）具有函子性。

Corollaire 3.6. — 如果加法范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，那么对于 Rep($\mathcal{A}$) 的任意有限生成函子 A，都存在一个自然同构 $k[A]^\vee\simeq k[A^\sharp]$，位于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};k)$ 中。

Corollaire 3.7. — 假设加性范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。如果 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的余有限型函子，那么 $k[A]$ 是 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};k$) 的余有限型函子。

证´明。——由于条件 (FH)，Rep($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{F}$($\mathcal{A};k$) 上的对偶函子会交换有限型函子与余有限型函子。因此，结论由命题 1.2 和推论 3.6 得出。

□

我们将大量运用命题 3.3 的以下推论。

Corollaire 3.8. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。给定一个从 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 到 F 的函子，以下断言等价：

(a) F 是有限型且余有限型的；(b) 存在一个有限族 (A_i)，其元素是 Rep($\mathcal{A}$) 中的有限型函子；一个有限族 (B_j)，其元素是 Rep($\mathcal{A}$) 中的余有限型函子；以及若干族 $(\lambda_{i,j}(f))_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}$ 的 k 元素，使得

$$F=\mathrm{Im}\bigoplus_i k[A_i]\xrightarrow{\left(\Theta_{A_i,B_j}\left(\sum_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}\lambda_{i,j}(f)[f]\right)\right)_{i,j}}\bigoplus_j k[B_j]\ ;$$

(c) 存在有限族 (A_i) 和 (B_j)，它们分别是 Rep($\mathcal{A}$) 的有限型和余有限型函子；还存在族 $(\lambda_{i,\ j}(f))_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}$ 中的 ′元 ′素，属于k ，使得

$$F=\mathrm{Im}\bigoplus_i k[A_i]\xrightarrow{\left(\Theta_{A_i,B_j}\left(\sum_{f\in\mathrm{Hom}(A_i,B_j)}\lambda_{i,j}(f)[f]\right)\right)_{i,j}}\bigoplus_j k[B_j].$$

（由于 $\mathcal{A}$ v ′erifie l'hypoth`ese (FH)，对于有限型 A 和余有限型 B ，Hom(A, B) 是有限的。）

证明。— (a)⇒(b)：若 F 是有限型的，则它是形如 Hom(A, B) 的有限个函子的直和的商对象，而这些 Hom(A, B) 都是 Rep(C) 中的有限型函子。若 F 是余有限型的，则它是形如 Hom(B, A)* 的有限个函子的直和的子函子；根据命题 3.3，这些函子同构于 Hom(A, B)。由于 Hom(A, B) 是 Rep(C) 中的余有限型函子（因为 V 满足 (FH)），应用命题 3.1 即得 (b)。

(*b*) ⇒(*c*)：如果 (A_i)、(B_j) 和 $(\lambda_{i,j}(f))$ 如 (b) 中所述，则可以将每个 B_j 替换为其子函子 B'_j ，即所有满足 $\lambda_{i,j}(f)\neq 0$ 的 $f\in$Hom(A_i,B_j) 的像之和。这样的 f 只有有限多个，而 Im f 是有限型的，因为它是 A_i 的商对象。因此，B'_j 是有限型的；此外，该函子作为 B_j 的子函子，也是余有限型的。对偶论证表明，可以将每个 A_i 替换为一个既是有限型又是余有限型的商对象 A'_i，由此得到 (c)。

(*c*) ⇒ (*a*)：这是因为有限型函子（分别地，余有限型函子）的类在有限直和和商对象（分别地，子对象）运算下保持稳定，并且线性化函子 ′：Rep($\mathcal{A}$) $\to\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ ′保持有限生成对象（命题 1.2 ）以及余有限型对象（推论 3.7 ）□

3.3. 扩张群。——以下基本结果建立在 Dold-Kan 对应之上，专家们对此十分熟悉；它依据 [5], 中的相关回顾，而本身则是其一种变体。

PROPOSITION 3.9。——假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 和 B 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的函子， $n>0$ 是一个整数。假设 B 具有有限值。那么 $\mathsf{Ext}^n(k[A],k[B])=0$。

证明。——由于 B 具有有限值，我们有 $k[B]\simeq(k^B)^\vee$，因此 k-向量空间 $\mathsf{Ext}^n(k[A],k[B])$ 是 $\mathsf{Tor}_n^{k[\mathcal{A}]}(k^B,k[A])$ 的对偶（例如参见 [5, 命题 2.12]）。 记 $B^\sharp\simeq\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}}T_i$ 为 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 中的对象，其中 $\mathcal{I}$ 是一个小的滤过范畴，各 T_i 为有限型，且结构态射 $T_i\to T_j$ 为单态射。这个余极限按点平凡，意思是：对 $\mathcal{A}$ 的每个对象 a，余极限 $\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}}T_i(a)$ 都是平凡的，即存在 $i\in\mathsf{Ob}\mathcal{I}$，使得 $\mathcal{I}$ 中的每个态射 $i\to j$ 都诱导出一个同构 $T_i(a)\to T_j(a)$，因为 $B(a)$ 是有限的。由此可得 $B\simeq\lim_{i\in\mathcal{I}}T_i^\sharp$，进而有 $k^B\simeq\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}}k^{T_i^\sharp}$。现在，根据推论 3.6，我们有 $k^{T_i^\sharp}\simeq k[T_i]$。由于 Tor 函子与滤过余极限交换，最终得到 $\mathsf{Tor}_n^{k[\mathcal{A}]}(k^B,k[A])\simeq\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}}\mathsf{Tor}_n^{k[\mathcal{A}]}(k[B_i^\sharp],k[A])$。

换言之，我们可以假设 B 是有限型的，因而只需证明 $\mathsf{Tor}_n^{k[\mathcal{A}]}(k[B^\sharp],k[A])$ 为零。设 $P_\bullet$ 是 $B^\sharp$ 在 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$中的一个单纯射影分解。那么， $k[P_\bullet]$ 是 $k[B^\sharp]$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};k)$中的一个单纯射影分解（参见引理 9.8]）。由此，利用引理 5.3],可知， $\mathsf{Tor}_n^{k[\mathcal{A}]}(k[B^\sharp],k[A])$同构于以 k 为系数的单纯阿贝尔群 $P_\bullet\underset{\mathcal{A}}{\otimes}A$的同调；根据关于 $\mathcal{A}$ 的 k-平凡假设以及推论 3.6]，该同调为零。

□

REMARQUE 3.10. — 如果 A 具有有限型投射分解（例如，如果 A是有限型的，且 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 是局部诺特的），那么我们便可以不对 B 作任何假设，并避免使用对偶性，从而省去前一个证明第一部分所涉及的内容。事实上，我们可以利用命题 3.3，直接从 k-（余）单纯向量空间出发进行推理，就像证明第二部分中所做的那样。

4. 函子 $\mathsf{Q}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathsf{Q}^{\mathcal{A}}$

4.1. 一般性。 —

NOTATION 4.1。— 设 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子。记 Q_A 为典范态射的余核

$$\bigoplus_{B\subsetneq A}k[B]\to k[A]$$

$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$，其分量为包含，并记 Q^A 为典范态射的核

$$k[A] \to \prod_{0\neq B\subset A} k[A/B]$$

其分量是投影。

EXEMPLE 4.2. — 函子 Q_0 和 Q^0 在 k 上是常值的。若 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 中的简单函子，则 $\mathrm{Q}_A \simeq \mathrm{Q}^A \simeq k[A]^{\mathrm{red}}$。

若 $A \in \mathsf{ObRep}(\mathcal{A})$ 具有一个极大真子函子 B，则有短正合列

$$0 \to k[B] \to k[A] \to \mathrm{Q}_A \to 0. \tag{1}$$

若 A 不是简单的，由于 A 是有限型的，且 B 不是 A 的直因子，命题 3.1 表明该正合列不分裂。

下面的对偶性质由推论 3.6 得出，它解释了为什么在本文后续部分我们将专注于函子 Q_A，而将其所能推出的关于 Q^A 的论述留给读者去写。

PROPOSITION 4.3. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，且 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 上的有限生成函子。那么存在一个同构 $(\mathrm{Q}_A)^\vee \simeq Q^{A^\sharp}$，属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};k)$。

NOTATION 4.4. — 若 x 和 y 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象，则记 $\mathsf{Surj}_{\mathcal{C}}(x,y)$；若不会产生歧义，也记作 $\mathsf{Surj}(x,y)$，表示 $\mathcal{C}$ 中从 x 到 y 的满态射集合。我们将 $x \mapsto k[\mathsf{Surj}(x,y)]$ 定义为一个 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to k$-模函子：对于 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\varphi : x' \to x$，对应的线性映射为 $k[\mathsf{Surj}(x,y)] \to k[\mathsf{Surj}(x',y)]$；它将 $[f]$（对于 $f \in \mathsf{Surj}(x,y)$）映为 $[f\circ\varphi]$，当且仅当 $f\circ\varphi$ 是满态射，否则映为 0。此定义是合理的，因为若 ψ、φ 和 f 是 $\mathcal{C}$ 中可复合的箭头，则 $f\circ\varphi\circ\psi$ 只有在 $f\circ\varphi$ 是满态射时才可能是满态射。注意，函子 $k[\mathsf{Surj}(-,y)] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to k$-模带有群 $\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(y)$ 的典范作用。

以下三个 ′简单的′命题留作′练习。

PROPOSITION 4.5。 — 设 A 为 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子， a为 $\mathcal{A}$的一个对象。存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} k[A(a)] & & & & \\ \downarrow & \searrow & & & \\ \mathrm{Q}_A(a) & \xrightarrow{\simeq} & k[\{\xi \in A(a) \mid A_\xi = A\}] & \xrightarrow{\simeq} & k[\mathrm{Surj}(\mathcal{A}(a,-),A)] \end{array}$$

其中左侧的竖直箭头是典范投影$k[A] \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_A$ 在 a处的取值，而斜箭头是将 $[\xi] \in k[A(a)]$,映射为 $[\xi]$ （当 $\xi \in A(a)$ 时），否则映射为 0 的线性映射。

Exemple 4.6. — 对于 $\mathcal{A}$中的任意对象 x 和 t ，$\mathrm{Q}^{\mathcal{A}(x,-)}(t)$可识别为 $k[\mathcal{A}(x,t)]$ 对由 $[f]$张成的向量子空间取商所得的商对象，其中`： $x \to t$不是分裂单态射。

Corollaire 4.7. — 设 A 是Rep(A)中的一个函子， a是 $\mathcal{A}$中的一个对象。

1. 向量空间$\mathrm{Q}_A(a)$非零，当且仅当 A 由 $A(a)$的一个 ´el ´ement生成；也就是说，它同构于 $\mathcal{A}(a,-)$的一个商对象。2. $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$的函子$\mathrm{Q}_A$ 是有限生成的。当且仅当 A 是Rep($\mathcal{A}$)中的有限生成函子时，它才非零。

Proposition 4.8 （´Q $A \mapsto$ 的函子性）。——设 $\alpha : A \to A'$ 是 Rep($\mathcal{A}$) 中的一个态射，则存在唯一的态射 Q_α ，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} k[A] & \xrightarrow{k[\alpha]} & k[A'] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Q}_A & \xrightarrow{\mathrm{Q}_\alpha} & \mathrm{Q}_{A'} \end{array}$$

其中，竖直箭头是典范投影，当且仅当以下两个条件之一得到验证：

1. α 不是满态射——此时有 $\mathrm{Q}_\alpha = 0$；2. α 是本质满态射——此时 Q_α 是满态射。

特别地，Q_A 带有群 Aut(A) 的典范作用。

4.2. 基本分解。——对于 Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子 A 和一个整数 $d \in \mathbb{N}$，记 $\mathcal{N}_d(A)$为满足条件 $T_0 \subsetneq \cdots \subsetneq T_d$ 的 $d+1$ 元组 $T = (T_0, \ldots, T_d)$ 的集合，其中各项都是 A 的真子对象。因此，(3)， $\ell(A) \leq d$ 当且仅当 $\mathcal{N}_d(A) = \varnothing$。如果 A 具有有限长度且 $\mathcal{A}$ 满足 (FH)，那么根据命题 A.1，每个集合 $\mathcal{N}_d(A)$ 都是有限的。

Proposition 4.9。— 设 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子。存在一个正合列

$$\cdots \to \bigoplus_{T \in \mathcal{N}_d(A)} k[T_0] \to \cdots \to \bigoplus_{T \in \mathcal{N}_0(A)} k[T_0] \to k[A] \to \mathrm{Q}_A \to 0.$$

D ´证明。— ´给定 a 中的一个对象 ´ A 和 ´中的一个´元素 ξ $A(a)$，我们考虑满足 $\xi \in T(a)$ 的 A 的严格子函子 E_ξ T 的集合，并按包含关系排序。若 ξ 生成 A，则 E_ξ 为空；否则，该有序集合´具有一个最小 ´元素``，即 A_ξ，因此它是可缩的。对于任意 $d \in$

(3)提醒一下， $\ell(A)$ 表示 A 的长度——参见附录 A。

$\mathbb{N}$, d-单纯形的神经 E_ξ 中非退化单纯形的集合为 $\{T \in \mathcal{N}_d(A) \,|\, \xi \in T_0\}$。因此，我们得到一个形如以下的复形：´´

$$\cdots \to \bigoplus_{\substack{T\in\mathcal{N}_d(A)\\ \xi\in T_0}} k \to \cdots \to \bigoplus_{\substack{T\in\mathcal{N}_0(A)\\ \xi\in T_0}} k$$

其同调集中在次数 0，此时若 $A_\xi \neq A$，则它经由增广映射与 k 同构；若 $A_\xi = A$，则恒为零。

考虑这些复形在所有 $\xi \in A(a)$ 上的直和，可推得一个正合列

$$\cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_d(A)} k[T_0(a)] \to \cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_0(A)} k[T_0(a)] \to k[\{\xi \in A(a) \,|\, A_\xi \neq A\}]$$

然后利用命题 4.5，得到一个正合列

$$\cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_d(A)} k[T_0(a)] \to \cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_0(A)} k[T_0(a)] \to k[A(a)] \to \mathrm{Q}_A(a) \to 0$$

显然，这是所需形式的一个 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 正合列在 a 处的取值：态射 $k[A(a)] \to \mathrm{Q}_A(a)$ 由典范投影 $k[A] \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_A$ 诱导，而其他态射的分量要么对所有 a 均为零，要么由 $k[T_0] \hookrightarrow k[U]$ 中 A 的子函子的典范包含诱导。证明至此完成。

□

对于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的函子 X 和 $d \in \mathbb{N}$，记 $\mathcal{Q}_d(X)$ 为满足 $N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq$ 的 X 的子函子的 $(d+1)$ 元组 $N = (N_0, \ldots, N_d)$ 的集合 $\cdots \supsetneq N_d \neq 0$。以下结果由命题 4.9 和 4.3 得出。

Corollaire 4.10。— 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。若 X 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的余有限型函子，则有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Q}^X \to k[X] \to \prod_{N\in\mathcal{Q}_0(X)} k[X/N_0] \to \cdots \to \prod_{N\in\mathcal{Q}_d(X)} k[X/N_0] \to \cdots .$$

4.3. 扩张群。—

Théorème 4.11。— 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 是有限函子， X 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的有限生成函子。

1. 存在一个同构 $\mathrm{Hom}(k[X], \mathrm{Q}_A) \simeq k[\mathrm{Surj}(X, A)]$，它关于 X 和 ´是自然的，并且相对于 $\mathrm{Aut}(A)$ 的作用 `具有等变性。更确切地说，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(k[X], k[A]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k[X], \mathrm{Q}_A) \\ {\scriptstyle \Theta_{X,A}}\uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ k[\mathrm{Hom}(X, A)] & \twoheadrightarrow & k[\mathrm{Surj}(X, A)] \end{array}$$

其中，上方的水平箭头由典范投影$k[A] \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_A$诱导，下方的水平箭头在 f 是一个满态射时将 $[f] \in k[\mathrm{Hom}(X, A)]$ 映到 $[f] \in k[\mathrm{Surj}(X, A)]$，否则映到 0。2. 对任意 $n > 0$，均有 $\mathrm{Ext}^n(k[X], \mathrm{Q}_A) = 0$。3. 对任意 $n > \ell(A)$，均有 $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{Q}_A, k[X]) = 0$。

证明。——命题 4.9 给出一个正合复形 $C^\bullet$ 使得$C^{\ell(A)+1} = \mathrm{Q}_A$, $C^{\ell(A)} = k[A]$, $C^{\ell(A)-1} = \bigoplus_{B \subsetneq A} k[B]$, C^i 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中函子线性化的有限直和，其中 ´，当 $i \in \{0, \dots, \ell(A)\}$ 时成立，否则 $C^i = 0$。由此可得一个收敛于零的超上同调谱序列，其第一页为`，由 ´给出

$$E_1^{i,j} = \mathrm{Ext}^j(k[X], C^i).$$

根据命题 3.9，有 $E^{i,j}_1 = 0$，当 $j > 0$ 时成立，且 $i \neq \ell(A) + 1$。由此可知 $E^{\ell(A)+1,j}_1 = 0$，当 $j > 0$ 时成立（没有微分可以进入或离开这一项，且收敛项为零），因此得到定理的第二个断言，并且该序列

$$\bigoplus \mathrm{Hom}(k[X], k[B]) = E^{\ell(A)-1,0}_1 \to \mathrm{Hom}(k[X], k[A]) = E^{\ell(A),0}_1 \to E^{\ell(A)+1,0}_1 \to 0^{B \subsetneq A}$$

是正合的，因此利用命题 3.1 可得一个正合列

$$\bigoplus_{B \subsetneq A} k[\mathrm{Hom}(X, B)] \to k[\mathrm{Hom}(X, A)] \to \mathrm{Hom}(k[X], \mathrm{Q}_A) \to 0$$

其中第一个箭头由包含 $B \hookrightarrow A$ 诱导，因此其像是 $k[\mathrm{Hom}(X, A)]$ 中由下列元素生成的向量子空间：$[f]$ o`u $f\colon X \to A$是一个像为 A 的真子对象的态射，也就是说，它不是一个满射。这 ´证明了第一个断言。

对于最后一点，命题 3.9 表明，$\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中函子的线性化是 $\mathrm{Ext}^*(-, k[X])$-无循环的，命题 4.9 因而推出 $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Q}_A, k[X])$ 同构于复形 $\mathrm{Hom}(C_\bullet, k[X])$ 的同调，其中 $C_0 = k[A]$ 和 $C_i = \bigoplus_{T \in \mathcal{N}_{i-1}(A)} k[T_0]$ 对于 $i > 0$。由于 $\mathcal{N}_i(A)$ 对于 $\ell(A) \leq i$ 为空，这就完成了定理的证明。 □

Théorème 4.12. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 和 B 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的有限函子，满足 $\ell(B) \leq \ell(A)$ 且 $n \in \mathbb{N}$。那么，除非 $n = 0$ 且 A 和 B 同构，否则 $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{Q}_B, \mathrm{Q}_A)$ 为零。此外，典范环同态 $k[\mathrm{Aut}(A)] \to \mathrm{End}(\mathrm{Q}_A)$ 是一个同构。

D ´证明。——命题 4.9 给出了一个超上同调谱序列

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{B_j \subsetneq \cdots \subsetneq B_0 = B} \mathrm{Ext}^i(k[B_j], \mathrm{Q}_A) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(\mathrm{Q}_B, \mathrm{Q}_A)$$

定理 4.11 表明 $E^{i,j}_2$ 为零；当对所有 $B_j \subsetneq \cdots \subsetneq B_0 = B$，$\mathrm{Surj}(B_j, A)$ 也为空时，同样如此。由于 $\ell(B_j) \leq \ell(B) - j \leq \ell(A) - j$，除非 $j = 0$ 且 B 同构于 `aA，否则总是如此。于是可得典范态射 $\mathrm{Hom}(\mathsf{Q}_B, \mathsf{Q}_A) \to E^{0,0}_2 = \mathrm{Hom}(k[B], \mathsf{Q}_A) \simeq k[\mathrm{Surj}(B, A)]$ 是一个同构，由此得到该定理。 □

Remarque 4.13。—— 当范畴 $\mathcal{A}$ ′始终假设为 k-平凡时，$\mathrm{Ext}^1(\mathsf{Q}_B, \mathsf{Q}_A)$ 的消失若 $\ell(B) > \ell(A)$，一般不再成立，只要范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 不是半单的。事实上，设 $0 \to S \to T \to S' \to 0$ 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中一个不分裂的正合列，其中 S 和 S' 为单对象。那么，根据例4.2，$\mathrm{Ext}^1(\mathsf{Q}_T, k[S]) \neq 0$；由于根据同一个例子，$\mathsf{Q}_S \simeq k[S]^{\mathrm{red}}$，因此也有 $\mathrm{Ext}^1(\mathsf{Q}_T, \mathsf{Q}_S) \neq 0$。

需要指出的是，也可能存在一个非零态射 $\mathsf{Q}_A \to \mathsf{Q}_B$，其中 A 与 B 不同构；例如，当 A 为有限型且存在一个 ′本质满态射 $A \twoheadrightarrow B$ 时就是如此，因为根据命题 4.8，此时有一个满态射 $\mathsf{Q}_A \twoheadrightarrow \mathsf{Q}_B$。

我们还将得到湮灭定理 4.12 的如下变体：

命题。——假设范畴是平凡的。设和是 Rep() 中的有限函子，且 () ()。那么 Ext(Q, Q) 0。

证明。——这一结果的证明与定理 4.12 完全类似，只需使用推论 4.10 给出的 Q 的余解消。该余解消是有限的，并且由于有限，只涉及有限乘积。

□

5. 函子 Q,和 Q,

现在我们引入本工作的几个核心角色。它们构成了范畴 (;) 的基本构件，至少当平凡时如此；后续结果（尤其是定理 9.9 和命题 10.5）将阐明其含义。

Définition 5.1. — 设 A 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子，M 为一个 $\mathrm{Aut}(A)$]-模。我们将 $\mathsf{Q}_{A,M}$（分别将 $\mathsf{Q}^{A}_{,M}$）记为函子 $M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \mathsf{Q}_A \simeq (M \otimes \mathsf{Q}_A)^{\mathrm{Aut}(A)}$ (分别为 $(M \otimes \mathsf{Q}_A)^{\mathrm{Aut}(A)}$)，属于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$，其中指数（分别为上标）表示 $\mathrm{Aut}(A)$ 中对角作用下的余不变量（分别为不变元）。

REMARQUE 5.2. — 这些构造直接受到 Powell [25] 相关工作的启发。具体而言，在范畴 $\mathcal{F}(k,k)$ 中，当 k 是特征为 p 的有限域时，若 λ 是一个长度为 n 的 p-正则分拆，且 M_λ 是相应的、系数取自 k 的 $\mathrm{GL}_n(k)$ 不可约表示，那么$Q_{\mathrm{Hom}_k(k^n,\ -)\ M_\lambda}$ 正是定义 3.0.1] 中的函子 DJ_λ 。

此外，Powell 以伴随的形式给出了这些函子的概念性描述；这一描述基本上无需改变即可推广到所有使阿贝尔范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 为半单的情形。然而，将这一观点推广到一般情形似乎会遇到实质性困难。

以下对偶性质源自命题4.3（无需对 A 作有限性假设，因为 $\mathrm{Q}_A = 0$ si 不是有限型——参见推论4.7），这说明我们应将重点放在研究函子 $\mathrm{Q}_{A,\ M}$ 上。

PROPOSITION 5.3. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的， A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 上的有限生成函子，且 M 是一个 $k[\mathrm{Aut}(A)]$-模。在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};\ k)$ 中有一个同构 $(\mathrm{Q}_{A,\ M})^\vee \simeq \mathrm{Q}_{A^\sharp,\ \mathrm{Hom}_k(M,\ k)}$，它关于 A 和 M 自然。

PROPOSITION 5.4. —— 函子

$$k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k) \qquad M \mapsto \mathrm{Q}_{A,M}$$

是正合的。当 A 是 `有限值时，它是双连续的。当 A 是有限型时，它是忠实的。

D´证明。——设 a 为 $\mathcal{A}$的一个对象。$\mathrm{Aut}(A)$-集合

$$\Gamma(a) := \{\xi \in A(a) \mid A_\xi = A\}$$

是自由的。事实上，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ 和 $\xi \in A(a)$ 满足 $\varphi_*\xi = \xi$，则 φ 在 A_ξ 上诱导恒等映射，因此 $\varphi = \mathrm{Id}_A$ ，若 $A_\xi = A$。此外，若 A 取有限值，则 $\Gamma(a)$ 有限；若 A 为有限型，则存在 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 使得 $\Gamma(a)$ 非空。因此结论由命题 4.5 得出。 □

以下结果由命题 5.3 和 5.4 推出。

COROLLAIRE 5.5. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子，M 为群 $\mathrm{Aut}(A)$ 的一个表示。

1. 函子

$$k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k) \qquad M \mapsto \mathrm{Q}^{A,M}$$

是双连续的。

2. M 中的自然态射

$$M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \mathrm{Q}^A \simeq (M \otimes \mathrm{Q}^A)_{\mathrm{Aut}(A)} \to (M \otimes \mathrm{Q}^A)^{\mathrm{Aut}(A)} = \mathrm{Q}^{A,M}$$

由范数给出的是一个同构。

3. 将函子 $M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} -$ 作用于典范态射 $\mathsf{Q}^A \hookrightarrow k[A] \twoheadrightarrow \mathsf{Q}_A$，可得到在 M 附近的自然同构 $\mathsf{Q}^{A,} \hookrightarrow M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} k[A] \twoheadrightarrow \mathsf{Q}_{A,M}$，其中第一个是单态射，第二个是满态射。

下面的定义在本节后续内容中不会用到，但它对于分类 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的简单函子将会很重要（参见下文定理 10.2）。

NOTATION 5.6. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子，M 是群 $\mathsf{Aut}(A)$ 的一个表示。记 $\mathsf{Q}(A, M)$ 为态射 $\mathsf{Q}^{A,} \hookrightarrow M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} k[A] \twoheadrightarrow \mathsf{Q}_{A,M}$ 的像，该态射来自前一推论。

前述推论。

我们简单地将 $\mathsf{Q}(A)$ 记作 $\mathsf{Q}(A, k[\mathsf{Aut}(A)])$。

在第 6 节研究函子 $\mathsf{Q}(A, M)$ 之前，我们先给出函子 $\mathsf{Q}_{A,M}$ 的一些一般性质。

PROPOSITION 5.7. — 设 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子。设 A 是 $\mathsf{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个有限生成函子，且 M 是一个非零的 $k[\mathsf{Aut}(A)]$-模。存在一个对象 $x \in \mathcal{A}$，使得 $k[A]$ 是 $\tau_x(\mathsf{Q}_{A,M})$ 的直因子。

D ′明。— 选取 x，使得 A 是 $\mathcal{A}(x, -)$ 的商对象。由于函子 τ_x 是正合的，$\tau_x(\mathsf{Q}_A)$ 是下列态射的余核

$$\bigoplus_{\substack{B \subsetneq A \\ \zeta \in B(x)}} k[B] \to \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A]$$

其源为 ζ 、目标为 ξ 的 $k[B] \to k[A]$ ′分量，是包含 $B \hookrightarrow A$ 的线性化；当 $\zeta = \xi \in A(x) \supset B(x)$ 时如此，否则为 0。特别地，当 $A_\xi = A$时，这个分量恒为零。因此，$k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}] \otimes k[A]$ 是 $\tau_x(\mathsf{Q}_A)$ 的直因子。

由于 τ_x 是余连续的，$\tau_x(\mathsf{Q}_{A,M}) \simeq M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \tau_x(\mathsf{Q}_A)$，因此

$$M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \big(k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}] \otimes k[A]\big)$$

是 $\tau_x(\mathsf{Q}_{A,M})$ 的直因子。而 $k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}]$ 是一个 $k[\mathsf{Aut}(A)]$-自由模（参见命题 5.4 的证明），其秩非零，这是由 x 的选取所致，因此 $M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \big(k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}] \otimes k[A]\big)$ 是若干个 $k[A]$ 的严格正数个副本的直和，由此得出该命题。 □

现在我们给出特征不等式中所特有的基本同调结果。

THÉORÈME 5.8。——假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 和B 是 Rep($\mathcal{A}$) 上的有限函子，满足 $\ell(A) \leq \ell(B)$，并分别设 N 和k[是 Aut(A)]-模范畴与 Aut(B)]-模范畴中的对象。

1. 若 A和 B不同构，则 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,\ M}, \mathrm{Q}_{B,\ N})$ 为零。2. 若 $A = B$，则自然态射

$$\mathrm{Ext}^*_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M, N) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M}, \mathrm{Q}_{A,N})$$

由正合函子 $\mathrm{Q}_{A,\ -}$ 诱导的态射是一个同构。

证明。——由于函子 $\mathrm{Q}_{A,\ -}$ 是正合的（命题 5.4），

$$(M, N) \mapsto \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M}, \mathrm{Q}_{B,N})$$

它在 k[Aut(A)]-模范畴与 Aut(B)]-模范畴之间定义了一个双函子，该函子对每个变量都是上同调的。定理 4.12 表明，当 $M = k$[Aut(A)] 和 $N = k$[Aut(B)], 时，该函子为零，除非 A 和 B 同构；并且若 $A = B$，自然态射 $\mathrm{Ext}^*_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M, N) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M}, \mathrm{Q}_{A,N})$ 在 $M = N = k$[Aut(A)]时是同构。由于$Q_{A,-}$ 是双连续的（命题 5.4），且一个 k[Aut(B)]-模是内射对象当且仅当它是投射的，因此可推得，对于 M 投射且 N内射的情形，$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M}, \mathrm{Q}_{B,N}) = 0$，除非 $A \simeq B$；并且对于 $A = B$，自然态射 $\mathrm{Ext}^*_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M, N) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M}, \mathrm{Q}_{A,N})$ 是同构（当 M 投射且 N 内射时）。通过比较上同调函子，消失或同构结论可推广`到所有模M 和 N，由此得到该定理。 □

下面的命题将有助于´建立另一个上同调消去结果，即重要的命题 9.10。

PROPOSITION 5.9.— 假设范畴 ´是 k-平凡的。设A 和 B 是 Rep($\mathcal{A}$) 的有限函子，满足 $\ell(B) < \ell(A)$，并设 M 和 N分别是 k[Aut(A)]-模和 k[Aut(B)]-模中的对象。那么 $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Q}^{B,\ N}, \mathrm{Q}_{A,\ M}) = 0$。

证明。— 该结果可通过与定理 5.8 的证明`类似的形式论证´得到，其依据是命题 4.14、5.4 以及推论 5.5 的第一个断言。

□

6. 函子 Q(A, M)

本节旨在根据形如 $\mathrm{Q}_{A,M}$ 或 $\mathrm{Q}_{A,M}$ 的函子的结构，`a 精确描述函子 Q($A$, $M$) `a 的结构。本节的结果——更确切地说，命题 6.1 和推论 6.5（当 k 的特征为零时，该推论显然成立）——将在重要命题 10.6 的证明中发挥关键作用。它们还将用于证明命题 9.8 的第一个

断言，但该断言并非本质（特别是，即使没有这一点，也可以证明定理 9.9；该定理是这篇文章的主要结果之一）。

下文中，记 Rad(A) 为 Rep(A) 中函子 A 的根基，也就是它的极大真子函子的交。在假设 (FH) 下，若 A 是有限型，则 $A/\mathrm{Rad}(A)$ 是有限半单的（它是 A 的最大半单商对象，即余顶）；若 N 是 A 的子函子，则态射 $A \twoheadrightarrow A/N$ 是本质的，当且仅当 $N \subset \mathrm{Rad}(A)$。

PROPOSITION 6.1. — 假设 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，且 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 中一个有限生成且余有限型的函子。那么序列

$$0 \to \mathrm{Q}(A) \to \mathrm{Q}_A \to \prod_{0 \neq N \subset \mathrm{Rad}(A)} \mathrm{Q}_{A/N}$$

其中态射 $\mathrm{Q}(A) \to \mathrm{Q}_A$ 是典范包含，而最后一个态射的分量是由投影 $A \twoheadrightarrow B$ 诱导的态射 $\mathrm{Q}_A \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_{A/N}$（参见命题 4.8），该序列是正合的。

证明。——对于 $0 \neq N \subset \mathrm{Rad}(A)$，考虑交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Q}^A & \xrightarrow{\subset} & k[A] & \twoheadrightarrow & k[A/N] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Q}(A) & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Q}_A & \twoheadrightarrow & \mathrm{Q}_{A/N} \end{array}$$

其中竖直箭头是典范投影，左侧的水平箭头是包含，右侧的箭头由 $A \twoheadrightarrow A/N$ 诱导。根据 Q^A 的定义，上方的水平复合为零，因此复合 $\mathrm{Q}(A) \to \mathrm{Q}_A \to \mathrm{Q}_{A/N}$ 为零。

反过来，利用同一化

$$\mathrm{Q}_A(x) \simeq k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}] \simeq k[\mathrm{Surj}(\mathcal{A}(x,-), A)]$$

命题 4.5 的同一化，并考虑一个分解 $A \simeq S_1^{\oplus i_1} \oplus \cdots \oplus S_n^{\oplus i_n} \oplus A'$ o`，其中 S_j 是两两不同构的单对象，$i_j > 0$ 是整数，而 A' 满足：对于 A' 的任意单子对象 S，满射 $A' \twoheadrightarrow A'/S$ 都是本质的。考虑复合态射

$$\theta : \mathrm{Q}_A(x) \simeq k[\{\xi \in A(x) \mid A_\xi = A\}] \hookrightarrow k[A(x)] \to k[A(x)]\,,$$

其中第二个箭头是.....的自同态

$$k[A(x)] \simeq k[S_1(x)^{\oplus i_1}] \otimes \cdots \otimes k[S_n(x)^{\oplus i_n}] \otimes k[A'(x)]$$

由 $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_n \otimes$ 恒等态射 给出，其中 ε_j 是 Kov ´acs 的 [15] 自同态环 $k[\mathcal{M}_{i_j}(\mathrm{End}(S_j))]$, 中的幂等元，也就是说，它是满足 $[1] - \varepsilon_j \in$的中心幂等元

$k[\mathcal{M}_{i_j}(\mathrm{End}(S_j)) \setminus \mathrm{GL}^{i_j}(\mathrm{End}(S_j))]$和 $\varepsilon_j.k[\mathcal{M}_{i_j}(\mathrm{End}(S_j)) \setminus \mathrm{GL}^{i_j}(\mathrm{End}(S_j))] = 0$。那么复合映射〞

$$\mathrm{Q}_A(x) \xrightarrow{\theta} k[A(x)] \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_A(x)$$

〞等于恒等映射，这归因于条件 $[1]-\varepsilon_j \in k[\mathcal{M}_{i_j}(\mathrm{End}(S_j))\setminus\mathrm{GL}^{i_j}(\mathrm{End}(S_j))]$。考虑 θ 在映射 $\mathrm{Q}_A \to \prod_{0\neq N\subset}\mathrm{Rad}(A)\ \mathrm{Q}_{A/N}$〞处取值后，限制到其核上的映射 θ'，并验证其取值落在 $k[A(x)]$ 的子空间 $\mathrm{Q}^A(x)$ 中。为此，由于 A 是余有限型（因此，A 的每个非零子函子都包含一个简单函子），只需验证：若 S 是 A 的一个简单子函子，那么 θ' 与投影 $k[A(x)] \twoheadrightarrow k[A(x)/S(x)]$ 的复合为零。若包含 $S \hookrightarrow A$ 是可分裂的，则 $S \subset S_j^{\oplus i_j}$ 对某个整数 $1 \leq j \leq n$ 成立；这一零性由如下事实得出：幂等元 ε_j 属于 $k[\mathcal{M}_{i_j}(\mathrm{End}(S_j))]$，并且对于 $\mathrm{End}(S_j)$-向量空间 $\mathrm{End}(S_j)$ 中的任一直线 D，它都会消去投影$k[\mathrm{End}(S_j)^{\oplus i_j}] \twoheadrightarrow k[\mathrm{End}(S_j)^{\oplus i_j}/D]$。否则，$0 \neq S \subset \mathrm{Rad}(A)$，此时消去性由定义可得，证明至此完成。 □

提醒一下，下文命题中出现的记号 $\mathcal{Q}_d$（分别为 $\mathcal{N}_d$）已在推论 4.10（分别为命题 4.9）之前引入。我们也记 $\mathrm{Soc}(A)$ 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中某个函子 A 的根基（即所有单对象子对象之和）；若 T 是 $\mathrm{Soc}(A)$ 的一个子函子，则记 T 为与之规范关联、包含 $\mathrm{Soc}(A)$ 的子函子（因此，若 A 是余有限型，则它是 A 的本质子对象）。

Proposition 6.2. — 假设 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，且 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的有限函子。那么在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$中存在正合列。

$$(2)\quad 0 \to \mathrm{Q}(A) \to \bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_0(\mathrm{Rad}(A))} \mathrm{Q}_{A/N_0} \to \cdots \to \bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))} \mathrm{Q}_{A/N_0} \to \cdots$$

et

$$(3)\quad \cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_d(A/\,\mathrm{Soc}(A))} \mathrm{Q}^{\tilde{T}_0} \to \cdots \to \bigoplus_{T\in\mathcal{N}_0(A/\,\mathrm{Soc}(A))} \mathrm{Q}^{T_0} \to \mathrm{Q}^A \to \mathrm{Q}(A) \to 0$$

〞对于 $\mathrm{Aut}(A)$ 的典范作用是等变的。

D 〞证明。——由于 A，进而 $\mathrm{Rad}(A)$ 和 $A/\mathrm{Soc}(A)$ 都是有限的，且 $\mathcal{A}$ v〞满足 (FH)，集合 $\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))$ 和 $\mathcal{N}_d(A/\mathrm{Soc}(A))$ 都是有限的，因此可以将陈述和本证明中出现的所有直和一概替换为直积。特别地，根据命题4.3，只需构造第一个正合列，第二个正合列可由对偶性推得。

正合列（2）的开头由命题 6.1 给出。

考虑按包含关系排序的 Rad(A) 的非零子函子集合，将其视为一个小范畴，记为 $\mathcal{C}$：根据命题 4.8，可得到一个函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ $N \mapsto \mathrm{Q}^{A/N}$。对于任意 $d \in \mathbb{N}$,$\bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))}\mathrm{Q}^{A/N_0}$，它无非是与 d 对应的余单纯对象 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的非退化 d- 余单纯形。因此得到一个上链复形

$$\bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_0(\mathrm{Rad}(A))} \mathrm{Q}_{A/N_0} \to \cdots \to \bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))} \mathrm{Q}_{A/N_0} \to \cdots \tag{4}$$

′对于规范作用 Aut(A) 是等变的，其在零次′度的同调为 Q(A)；我们要证明其在严格正的′次度同调为零。

设 x 是 $\mathcal{A}$的一个对象。固定阿贝尔群的满射态射 $A(x) \twoheadrightarrow (A/\mathrm{Rad}(A))(x)$的一个集合截面，记作 $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$。若 N 是Rad(A)的一个子函子，则Rep(A)中的一个态射 $\mathcal{A}(x, -) \to A/N$ 是满态射，当且仅当它与投影 $A/N \twoheadrightarrow A/\mathrm{Rad}(A)$的复合是一个满态射。因此，命题 4.5 给出了一个向量空间同构。

$$\mathrm{Q}_{A/N}(x) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Surj}(\mathcal{A}(x,-),A/\mathrm{Rad}(A))} k[(\mathrm{Rad}(A)/N)(x)] \tag{5}$$

将双射线性化，该双射将 ` 关联到 (A/N)(x) 的一个 ξ 元素 ′，使得相应的态射 $\mathcal{A}(x, -)$ $\to A/N$ 是满射；该元素对应于由其与 $A/N \twoheadrightarrow A/\mathrm{Rad}(A)$ 的复合构成的有序对 ′（也可不加区别地视为 ($A/\mathrm{Rad}(A)$)(x) 的 ′元素）以及 $\xi - \pi(\tilde{\alpha})$，其中 $\pi\colon A(x) \twoheadrightarrow (A/N)(x)$ 表示投影。

同构 (5) 表明，复形 (4) 在 x 处的取值与在 $\alpha \in \mathrm{Surj}(\mathcal{A}(x, -)\ A/\mathrm{Rad}(A))$ 上的直和同构，该直和由以下上链复形在 x 处的取值构成

$$\bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_0(\mathrm{Rad}(A))} k[\mathrm{Rad}(A)/N_0] \to \cdots \to \bigoplus_{N\in\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))} k[\mathrm{Rad}(A)/N_0] \to \cdots$$

根据推论 4.10，这些复形的同调在严格正次数上为零。由此即得该命题。 □

Lemme 6.3. — 假设范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。设 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子，$d \in \mathbb{N}$ 和 $N \in \mathcal{Q}_d$(Rad(A))。记 G 为 Aut(A) 中 N 的稳定子子群。那么函子

$$k[\mathrm{Aut}(A/N_0)]\text{-}\mathbf{Mod} \to k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod}$$

由群典范态射 $G \to$ Aut(A/N_0) 诱导的限制函子 k[Aut(A/N_0)]-Mod $\to k[G]$-Mod 与诱导函子 $k[G]$-Mod $\to k$[Aut(A)]-Mod 的复合保持投射模。

证明。— 任意诱导函子都保持投射模，因此只需验证限制函子 $k[\mathrm{Aut}(A/N_0)]$-Mod $\to k[G]$-Mod 保持投射模。为此，只需验证典范态射 $G \to \mathrm{Aut}(A/N_0)$ 的核的阶（涉及的群均为有限群）在 k 中可逆。令 G' 为 $\mathrm{Aut}(A)$ 中 N_0 的稳定子群： G 是 G' 的子群，因此只需证明典范态射 $G' \to \mathrm{Aut}(A/N_0)$ 的核 H 的阶在 k 中可逆。又， H 同构于阿贝尔群 $\mathrm{Hom}(A/N_0, N_0)$，其同构通过将 ` 对应到 $\mathrm{Hom}(A/N_0, N_0)$ 中 $\varphi \in$ 与恒等态射 ′ 的复合 ′ $A \twoheadrightarrow A/N_0 \xrightarrow{\varphi} N_0 \hookrightarrow A$ 而得到。由于 A/N_0 （分别地， N_0 ）是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 上的有限生成（分别地，有限余生成）函子，它是一个可表函子 $\mathcal{A}(x, –)$ 的商对象（分别地，是一个 $\mathcal{A}(–, y)^\sharp$ 的子函子），因此 H 同构于 $\mathcal{A}(x, y)^\sharp$ 的一个子群，其阶在 k 中可逆，因为 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，由此得引理。

□

Corollaire 6.4. — 假设 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，且 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 上的有限函子。那么，$\mathrm{Q}(A)$ 在 $k[\mathrm{Aut}(A)]$ 上取投射值。

证明。— 由于 A，因而 $\mathrm{Rad}(A)$ 是有限的，所以当 d 充分大时， $\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A)) = \varnothing$: 正合列 (2) 是有限的。$\bigoplus_{N \in \mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))} \mathrm{Q}^{A/N_0}$ 上的 $k[\mathrm{Aut}(A)]$- 模结构可通过将 ` 应用于 $\bigoplus_N \mathrm{Q}^{A/N_0}$ 得到，其中求和遍历 ′ 等价类的一个完备代表元集合，这些等价类是 $\mathcal{Q}_d(\mathrm{Rad}(A))$ 在 $\mathrm{Aut}(A)$ 的作用下的等价类。函子

$$k[\mathrm{Aut}(A/N_0)]\text{-}\mathbf{Mod} \to k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod}$$

根据引理 6.3。由于 Q_{A/N_0} 是 ` 取值于 $k[\mathrm{Aut}(A/N_0)]$-投射模中的函子（参见命题 5.4），引理 6.3、命题 6.2 以及一个$k[\mathrm{Aut}(A)]$-模是投射模当且仅当它是内射对象这一事实（k ′是一个域，而 $\mathrm{Aut}(A)$ 是一个有限群）表明，$\mathrm{Q}(A)$ 的取值具有有限内射分解，因此作为 $k[\mathrm{Aut}(A)]$-模是投射模，这正是所希望的结果。 □

以下结果（当 k 的特征为零时显然成立）由 $\mathrm{Q}(A, M)$ 的定义和推论 6.4 得出。

Corollaire 6.5. — 假设 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，且 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的有限函子。那么我们有同构关系。

$$\mathrm{Q}(A, M) \simeq (\mathrm{Q}(A) \otimes M)_{\mathrm{Aut}(A)} \simeq (\mathrm{Q}(A) \otimes M)^{\mathrm{Aut}(A)}$$

群 $\mathrm{Aut}(A)$ 表示中的自然元素 ′ M 。

特别地，函子 $\mathrm{Q}(A, –) : k[\mathrm{Aut}(A)]$-模 $\to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 是双连续的。

Remarque 6.6。—— 根据本节的结果，很容易验证：如果 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的， A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的有限函子，并且 M 是一个

k[Aut(A)]-模，那么包含 Q(A, M) $\hookrightarrow$ Q$_{A,\ M}$ 是同构，当且仅当对于 Rad(A) 的每个简单子函子 S，Hom($A/S, S$) 中的指标 $'$ 表示在该群作用下的余不变量，并且按照引理 6.3 的证明，将其嵌入 Aut(A) 中。

7. 抛移函子与抛物差分函子

7.1. 函子 $\bar{\tau}_x$。——设 x 和 a 为 $\mathcal{A}$ 中的对象，F 为一个从 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 出发的函子。阿贝尔群 $\mathcal{A}(x,a)$ 通过群单态射作用于 $F(x \oplus a)$】【。

$$\mathcal{A}(x,a) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(x \oplus a) \qquad u \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_x & 0 \\ u & \mathrm{Id}_a \end{pmatrix}.$$

此外，如果 $f\colon a \to b$ 是 $\mathcal{A}$中的一条态射，那么存在唯一一条态射 f_*，使得以下 k-模图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus a) & \xrightarrow{F(x\oplus f)} & F(x \oplus b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(x \oplus a)_{\mathcal{A}(x,a)} & \xrightarrow{f_*} & F(x \oplus b)_{\mathcal{A}(x,b)} \end{array}$$

因为该图表

$$\begin{array}{ccc} x \oplus a & \xrightarrow{x\oplus f} & x \oplus b \\ \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_x & 0 \\ u \text{ 恒等} & \\ \text{态射}_a & \end{smallmatrix}\right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_x & 0 \\ fu \text{ 恒等} & \\ \text{态射}_b & \end{smallmatrix}\right) \\ x \oplus a & \xrightarrow{x\oplus f} & x \oplus b \end{array}$$

对任意 $u \in \mathcal{A}(x,a)$，$\mathcal{A}$ 都可交换。

因此，典范投影 $\tau_x(F)(a) = F(x \oplus a) \twoheadrightarrow F(x \oplus a)_{\mathcal{A}(x,a)}$ 使 $(F(x \oplus a)_{\mathcal{A}(x,a)})_{a\in\mathcal{A}}$ 成为 $\tau_x(F)$ 的一个商函子。我们将此函子记作$\bar{\tau}_x(F)$。显然，$\bar{\tau}_x$ 定义了 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 上自函子 τ_x的一个商对象。我们称之为与 x相关联的抛物移位函子。该术语源于它与代数群表示论的类比：作为 Aut(a) 的表示，$\bar{\tau}_x(F)(a)$ 是将 Aut($x \oplus a$) 的表示 $F(x \oplus a)$ 限制到抛物子群$\big(\mathrm{Aut}(a) \times \mathrm{Aut}(x)\big) \ltimes \mathcal{A}(x,a)$，再取其在 $\mathcal{A}(x,a)$作用下的余不变量而得到的。Nagpal 在与我们类似的函子范畴框架中引入了这一工具（记作 Σ 而非 $\bar{\tau}$），见 Nagpal [21, § 4.2]（在 Nagpal 的工作中，源范畴是有限域上有限维向量空间范畴的单态射子范畴）。不过，我们将以与 Nagpal 相当不同的方式使用这些

以一种与 Nagpal 所采用的方法相当不同的方式构造抛物偏移函子。

PROPOSITION 7.1. — 对于 x 中的任意对象 $\mathcal{A}$，$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子 $\bar{\tau}_x$ 是余连续的。若 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，则 $\bar{\tau}_x$ 是双连续的，因而特别是正合的。

证明。— 群作用下的余不变量函子是余连续的；当该群是有限群，且其阶在它所作用的阿贝尔范畴上可逆时，此函子是双连续的，由此得证。 □

稍后我们将看到（注 7.12），当 $\mathcal{A}$ 未假设为 k-平凡时，函子 $\bar{\tau}_x$ 通常并非左正合。

还需注意，$x \mapsto \bar{\tau}_x$ ne d´efinit 并不定义函子 $x \mapsto \tau_x$ 的商对象——否则，关于 $x \in \mathcal{A}$ 的自然性将导致 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的恒等态射是 $\bar{\tau}_x$ 的直因子，而事实并非如此（参见下文注记 7.3）。不过，构造$\bar{\tau}_x$ 关于 x 的一种弱函子性仍然成立：若 $\varphi : x \to y$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个分裂单态射，则 φ 的任意分裂 $\psi : y \to x$ 都会对任意 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 和任意 $u \in \mathcal{A}(x,a)$ 给出一个交换图。

$$\begin{array}{ccc} x \oplus a & \xrightarrow{\varphi \oplus a} & y \oplus a \\ \Big\downarrow \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_x & 0 \\ u & \text{恒等态射}_a \end{smallmatrix}\right) & & \Big\downarrow \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_y & 0 \\ u\psi & \text{恒等态射}_a \end{smallmatrix}\right) \\ x \oplus a & \xrightarrow{\varphi \oplus a} & y \oplus a \end{array}$$

在 $\mathcal{A}$ 中，因此存在一条（唯一的）虚线箭头，使下图中的图表交换。

$$\begin{array}{ccc} F(x \oplus a) & \xrightarrow{F(\varphi \oplus a)} & F(y \oplus a) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ F(x \oplus a)_{\mathcal{A}(x,a)} & \dashrightarrow & F(y \oplus a)_{\mathcal{A}(y,a)} \end{array}$$

因此，$x \mapsto \bar{\tau}_x$ d´定义了从 $\mathcal{A}$ 到态射分裂的子范畴的 $x \mapsto \tau_x$ `的限制的一个子函子。

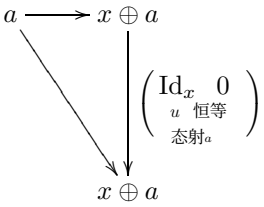
¯7.2. 函子 $\delta_{x\circ}$ ——特别地，唯一的态射 $0 \to x$ 诱导出¯一个自然变换 $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)} \simeq \bar{\tau}_0 \to \bar{\tau}_x$，其余核记作 ´为 $\delta_{x\circ}$ ¯我们将其称为与 x相关联的抛物差分函子 `。我们的函子 δ¯与 Nagpal [21, § 4 中的函子 Δ 类似2]。

_PROPOSITION 7.2。— 对于 $\mathcal{A}$ 的任意对象 x，$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子 δ_x ¯是余连续的。如果 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，那么 δ_x 是双连续的，特别地是正合的。

此外，自然变换 $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)} \to \bar{\tau}_x$ 是一个单态射，¯并且 $\delta_x(F)(a)$ 可识别为 $\delta_x(F)(a)$ 关于由典范单态射 $\delta_x(F)(a) \hookrightarrow \tau_x(F)(a) = F(x \oplus a)$ 诱导的 $\mathcal{A}(x,a)$ 作用下的不变元。

证明。——第一个断言显然成立。现在假设 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。

典范单态射 $F(a) \hookrightarrow F(x \oplus a)$ 对 $\mathcal{A}(x,a)$ 的作用是 ′等变的，其中该群在 $F(a)$ 上的作用取为平凡作用，因为图表



$\mathcal{A}$（其水平箭头和斜箭头均为典范单态射）对任意 $u \in \mathcal{A}(x,a)$ 都交换。因此，我们有一个 $\mathcal{A}(x,a)$-′等变正合列

$$0 \to F(a) \to \tau_x(F)(a) \to \delta_x(F)(a) \to 0\,,$$

因此，结论可由 $\mathcal{A}$ 为 k-平凡时，群 $\mathcal{A}(x,a)$ 作用下不变元的正合性（及连续性）得出。 □

Remarque 7.3. — 请注意，与典范单态射 $\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_x$ 不同，典范单态射 $\mathrm{Id} \hookrightarrow \bar{\tau}_x$ 通常并不分裂 — 参见下文注记 7.9，其中甚至将说明通常不存在任何满态射 $\bar{\tau}_x \twoheadrightarrow \mathrm{Id}$。特别地，$\bar{\tau}_x$ 并非自对偶：通常不存在同构 $\bar{\tau}_x(F^\vee) \simeq \bar{\tau}_x(F)^\vee$，它在函子 F 上是从 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 自然的。

7.3.（不）交换性。——通常的函子 τ_x 和 δ_y 具有许多交换性质：我们有 $\tau_x \circ \tau_y \simeq \tau_{x\oplus y} \simeq \tau_y \circ \tau_x$ 和 $\tau_x \circ \delta_y \simeq \delta_y \circ \tau_x$。对于函子 $\bar{\tau}_x$ 和 δ_y，这些性质不再成立。不过，下面我们将给出一个关于函子复合的性质，该性质将在第 8 节中用到。

Proposition 7.4. — 设 x 和 y 是 $\mathcal{A}$的对象。存在一个交换图。

$$\begin{array}{ccc} \bar{\tau}_y \circ \tau_x & \twoheadrightarrow & \tau_x \circ \bar{\tau}_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\delta}_y \circ \tau_x & \twoheadrightarrow & \tau_x \circ \bar{\delta}_y \end{array}$$

$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的自函子，其中所有态射都是 ′满射。

证明。——设 t 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象。我们有 $(\tau_y \circ \tau_x)(F)(t) = F(x \oplus y \oplus t)$，以及 $(\bar{\tau}_y \circ \tau_x)(F)(t) = (\tau_x F)(y \oplus t)_{\mathcal{A}(y,t)} = F(x \oplus y \oplus t)^{\mathcal{A}(y,t)}$；另一方面，$(\tau_x \circ \tau_y)(F)(t) = F(y \oplus x \oplus t)$，且 $(\tau_x \circ \bar{\tau}_y)(F)(t) = \bar{\tau}_y(F)(x \oplus t) = F(y \oplus x \oplus t)^{\mathcal{A}(y,x\oplus t)}$。由于典范同构 $x \oplus y \oplus t \xrightarrow{\simeq} y \oplus x \oplus t$ 的共轭将 $\mathrm{Aut}(x \oplus y \oplus t)$ 中的子群 $\mathcal{A}(y,t)$ 映到 $\mathrm{Aut}(y \oplus x \oplus t)$ 中的子群 $\mathcal{A}(y, x \oplus t)$，因此可以找到一条虚线态射，使图表交换

$$\begin{array}{ccc} \tau_y \circ \tau_x & \xrightarrow{\simeq} & \tau_x \circ \tau_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\tau}_y \circ \tau_x & \dashrightarrow & \tau_x \circ \bar{\tau}_y \end{array}$$

其中上方箭头是典范同构，竖直箭头是典范满态射。由此得到一个满态射，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \tau_x & = & \tau_x \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id} \hookrightarrow \bar{\tau}_y) \circ \tau_x} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \tau_x \circ (\mathrm{Id} \hookrightarrow \bar{\tau}_y)} \\ \bar{\tau}_y \circ \tau_x & \twoheadrightarrow & \tau_x \circ \bar{\tau}_y \end{array}$$

交换，因为图表

$$\begin{array}{ccc} \tau_x & = & \tau_x \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_y) \circ \tau_x} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \tau_x \circ (\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_y)} \\ \tau_y \circ \tau_x & \xrightarrow{\simeq} & \tau_x \circ \tau_y \end{array}$$

其自身也进行交换。考虑垂直箭头的余核，即可推出该命题。

□

我们将在例 7.7 中看到，前一个命题中的 ′满态射并不是同构（事实上，甚至不存在从 $\bar{\tau}_y \circ \tau_x$ 到 $\tau_x \circ \bar{\tau}_y$的同构，例如）。

7.4. 关于 $\boldsymbol{k}[\boldsymbol{A}]$ 的计算。

PROPOSITION 7.5. — 设 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子， x 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象。在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中存在一个同构

$$\bar{\tau}_x(k[A]) \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi]$$

在 A 中是自然的，意即对于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的任意态射 $f : A \to B$ ，态射

$$\bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi] \simeq \bar{\tau}_x(k[A]) \xrightarrow{\bar{\tau}_x(k[f])} \bar{\tau}_x(k[B]) \simeq \bigoplus_{\zeta \in B(x)} k[B/B_\zeta]$$

– – 的分量为态射 $k[f]$，其中 $f: A/A_\xi \to B/B_\zeta$ 在 $f_*\xi = \zeta$ 时由 f 诱导，否则为 0；并且在 x 中弱自然，意即对于 $\mathcal{A}$ 中任意分裂单态射 ´ $\varphi: x \to y$，态射

$$\bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A/A_\xi] \simeq \bar\tau_x(k[A]) \xrightarrow{\bar\tau_\varphi(k[A])} \bar\tau_y(k[A]) \simeq \bigoplus_{\zeta\in A(y)} k[A/A_\zeta]$$

其分量为恒等态射 $k[A/A_\xi] \to k[A/A_\zeta]$ l'identit´e，当 $A(\varphi)(\xi) = \zeta$（这蕴含 $A_\xi = A_\zeta$）时；否则为 0。

证明。— 设 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$。$\mathcal{A}(x,a)$ 对

$$\tau_x(k[A])(a) = k[A(x\oplus a)] \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A(a)] \tag{6}$$

由 $f.(\xi,[\alpha]) = (f,[f_*\xi+\alpha])$ 给出，其中 `u $(\xi,[\alpha])$ 表示 $[\alpha]\in k[A(a)]$ 的像，该像由标记为 ξ 的因子注入得到。由此可得一个同构

$$\bar\tau_x(k[A])(a) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A(a)]/ < [f_*\xi+\alpha]-[\alpha] \,|\, (f,\alpha)\in \mathcal{A}(x,a)\times A(a) >$$

$$\simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A(a)]/ < [\beta]-[\alpha] \,|\, \beta-\alpha\in A_\xi(a) > \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A(a)/A_\xi(a)].$$

这些同构关于 A、a 和 x 的函子性可直接由公式 (6) 的函子性推出。 □

Corollaire 7.6. — 设 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 上的一个函子，x 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象。在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中存在一个同构

$$\bar\delta_x(k[A]) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)\setminus\{0\}} k[A/A_\xi].$$

Exemple 7.7. — ´在 $k[A]$ 上取值时，命题 7.4 的 ´满态射 $\bar\tau_y\circ\tau_x \twoheadrightarrow \tau_x\circ\bar\tau_y$（分别为 _ $_\delta_y\circ\tau_x \twoheadrightarrow \tau_x\circ\delta_y$）可识别为关于 $\xi\in A(x)$（分别为 $\xi\in A(x)\setminus\{0\}$）的直和，即由典范满态射 $k[A/A_\xi]\otimes k[A(x)] \twoheadrightarrow k[A/A_\xi]\otimes k[(A/A_\xi)(x)]$，组成；这些态射通常不是同构（而且它们的目标与源之间通常甚至不存在任何同构）。

7.5. 关于 QA 的计算。—

Proposition 7.8. — 设 A 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子，x 为 $\mathcal{A}$ 的一个对象。在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中存在 $\mathrm{Aut}(A)$-等变同构

$$\bar\tau_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi} \qquad et \qquad \bar\delta_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)\setminus\{0\}} \mathrm{Q}_{A/A_\xi},$$

o `u $\varphi\in\mathrm{Aut}(A)$ 对右侧各项的作用，其分量为 $\mathrm{Q}^{A/A_\xi} \to \mathrm{Q}^{A/A_\zeta}$ 由 φ 诱导的同构（当 $\varphi_*\xi=\zeta$ 时），否则为 0。

D ´emonstration. — 函子的余连续性 $\bar{\tau}_x$ (命题 7.1) 和命题 7.5 给出了一个同构

$$\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{\substack{B\subsetneq A\\ \zeta\in B(x)}} k[B/B_\zeta] \to \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A/A_\xi]\Big) \tag{7}$$

其中，分量 $k[B/B_\zeta] \to k[A/A_\xi]$ 是由包含映射 $B \hookrightarrow A$ （若 $\zeta = \xi$ 属于 $A(x)$，则.....）所诱导的态射 $B/B_\zeta \to A/A_\xi$ 的线性化，若不满足则为 0。另一方面，对于 $B \subset A$ 和 $\xi \in A(x)$，关系 $\xi \in B(x)$ 等价于 $A_\xi \subset B$，于是有 $B_\xi = A_\xi$，因此可由式 (7) 推得同构

$$\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{A_\xi\subset B\subsetneq A} k[B/A_\xi] \to k[A/A_\xi]\Big)$$

$$\simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)} \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{T\subsetneq A/A_\xi} k[T] \to k[A/A_\xi]\Big) = \bigoplus_{\xi\in A(x)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi}.$$

等变性 ´源于命题 7.5 中同构关于 A 的自然性；第二个同构的证明完全类似，只需从推论 7.6 出发。 □

下面的注记说明，命题 7.8 对函子 Q^A 并无直接对应的结论，即使源范畴是 k-平凡的也如此；特别是，函子 $\bar{\tau}_x$ 和 δ_x 并非自对偶（参见注记 7.3）。

Remarque 7.9。——假设 $\mathcal{A}$ 是 k平凡的，并且 $0 \to S \to A \to T \to 0$ 是 Rep($\mathcal{A}$) 中不分裂 ´的正合列，其中 S 和 T 是非同构的单对象。

`从正合列开始

$$0 \to \mathrm{Q}^A \to k[A] \to k[T] \to 0\,, \tag{8}$$

命题 7.1 和 7.5 给出了一个正合列。

$$0 \to \bar{\tau}_x(\mathrm{Q}^A) \to \bigoplus_{\xi\in A(x)} k[A/A_\xi] \to \bigoplus_{\zeta\in T(x)} k[T/T_\zeta] \to 0\,;$$

对于 $\xi \in A(x)\backslash\{0\}$，若 $A_\xi \neq A$，则 $A_\xi = S$，而从右侧态射到由 ξ 标记的因子 ´的限制，是到相应直因子 `的注入$\zeta = 0$。由此可推得一个正合列。

$$0 \to \bar{\tau}_x(\mathrm{Q}^A)^{\mathrm{red}} \to k[A]^{\mathrm{red}} \oplus (k[T]^{\mathrm{red}})^{\oplus n} \to k[T]^{\mathrm{red}} \to 0$$

o`u $n$ 是 $S(x) \setminus \{0\}$ 的基数，而右侧直线的分量是投影 $A \twoheadrightarrow T$经线性化后取约化部分，以及在每个 $n$ 因子上的恒等态射 $k[T]$ 。如果 $n > 0$ （即若 $S(x) \neq 0$），那么这个正合列分裂，从而给出一个同构 $\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}^A)^{\mathrm{red}} \simeq k[A]^{\mathrm{red}} \oplus (k[T]^{\mathrm{red}})^{\oplus n-1}$。然而，借助 `，不存在从 $k[T]$ 到 Q^A 的非零态射

命题 3.1 表明，Hom($k[T]$, Q^A) 可识别为线性映射的核：Hom(T, A)] $\to$ k[Hom(T, T)]，该映射是由投影 $A \twoheadrightarrow T$诱导的 Hom(T, A) $\to$Hom(T, T) 态射的线性化。事实上，由于正合列 (8)，这个态射是内射对象（S 和 T 是单对象且不同构）。类似地可见（利用 (8) 不分裂），Hom($k[A]$, Q^A) $= 0$。

由此可知，不存在非零态射 $\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}^A) \to \mathrm{Q}^A$；特别地，正合列 $0 \to \mathrm{Q}^A \to \bar{\tau}_x(\mathrm{Q}^A) \to \bar{\delta}_x(\mathrm{Q}^A) \to 0$ 不是分裂的。

7.6. 关于 $\mathrm{Q}_{A,M}$ 的计算。——首先明确本段后文用到的一些记号。若 ξ 是商集 $A(x)/\mathrm{Aut}(A)$ 中的一个元素（其中 ` 和 $x$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 Rep($\mathcal{A}$) 中的对象），则 $A_{\tilde{\xi}}$ 的子函子 $A$ 不依赖于 ´ 在 $A(x)$ 中所选的提升，因此简记为 $A_\xi$。此外，记 $\Pi(\xi)$ 为 Aut($A$) 中 $\xi$ 的稳定子子群，它仅取决于 $\xi$ ` 的共轭类。 $\Pi(\xi)$ 的每个元素都诱导出 A/A_ξ 的一个自同构，从而得到群同态 $\Pi(\xi)$ $\to$Aut(A/A_ξ)，其核可识别为加法群 Hom($A/A_\xi, A_\xi$)；该群通过将 g 映为 A 的恒等态射与态射 $A \twoheadrightarrow A/A_\xi \xrightarrow{g} A_\xi \hookrightarrow A$ 之和的态射，嵌入 Aut(A)。记 R_ξ : k[Aut(A)]-模范畴 $\to$ k[Aut(A/A_ξ)]-模范畴为抛物限制函子，它由限制函子 k[Aut(A)]-模范畴 $\to$ k[$\Pi(\xi)$]-模范畴 到 $\Pi(\xi)$，再复合函子 $k[\mathrm{Aut}(A/A_\xi)] \underset{k[\Pi\ \xi(\ )]}{\otimes}$ 得到；根据观察，该函子可识别为

前述结论是将 Hom($A/A_\xi, A_\xi$) 作用下的余不变量函子与将 $\Pi(\xi)$ 的像从 Aut(A/A_ξ) 诱导到 Aut(A/A_ξ) 复合而得的。

Proposition 7.10. — 设 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子， M 是一个 k[Aut(A)]-模， x 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象。在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中存在自然同构

$$\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_{A,M}) \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)/\mathrm{Aut}(A)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi, \mathrm{R}_\xi(M)} \qquad et$$

$$\bar{\delta}_x(\mathrm{Q}_{A,M}) \simeq \bigoplus_{\xi \in (A(x)\setminus\{0\})/\mathrm{Aut}(A)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi, \mathrm{R}_\xi(M)}$$

它们关于 M 自然。

证明。— 我们只证明第一个同构，第二个可用类似方法证明（或由此推出）。

命题 7.8 给出了一个 Aut(A)-´等变同构

$$\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)/\mathrm{Aut}(A)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi} \uparrow_{\Pi(\xi)}^{\mathrm{Aut}(A)},$$

因此，由于 $\bar{\tau}_x$ 是余连续的（命题 7.1），得到同构。

$$\bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_{A,M}) \simeq M \underset{k[\mathrm{Aut}(A)]}{\otimes} \bar{\tau}_x(\mathrm{Q}_A) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)/\mathrm{Aut}(A)} (M\downarrow^{\mathrm{Aut}(A)}_{\Pi(\xi)}) \underset{k[\Pi(\xi)]}{\otimes} \mathrm{Q}_{A/A_\xi}$$

$$\simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)/\mathrm{Aut}(A)} \mathrm{R}_\xi(M) \underset{k[\mathrm{Aut}(A/A_\xi)]}{\otimes} \mathrm{Q}_{A/A_\xi} = \bigoplus_{\xi\in A(x)/\mathrm{Aut}(A)} \mathrm{Q}_{A/A_\xi,\mathrm{R}_\xi(M)}$$

在 Aut(A)-模 M 中自然地。 □

。——若范畴 ′是 k-平凡的，且函子 A 为有限型，则 Hom(A/A_ξ, A_ξ) 是一个阶在 k 中可逆的有限群，因此函子 Rξ 是正合的。但它通常并非忠实的。

然而，命题 7.10 表明，若 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个非零有限生成函子，且 M 是 Aut(A) 的一个非零表示，则存在一个对象 x 属于 $\mathcal{A}$，使得 δ_x(Q$_A$, $_M$) 非零，因为可以找到 ξ，使得若 x 选取得当，则因子 Q$_{A/A_\xi}$,Rξ($_M$) = Q0,$_M$ 是一个非零常值函子。尽管如此，仍可找到 Rep($\mathcal{A}$) 中长度有限且任意大的函子（若 $\mathcal{A}$ 是非零的 k-平凡范畴），使得存在 Aut(A) 的一个不可约表示 M，满足对所有 $x \in$ Ob $\mathcal{A}$， δ_x(Q$_{A,M}$) 都是常值的。因此，若 $\mathcal{A} =$ P($\mathbb{F}$), 其中 $\mathbb{F}$ 是特征不同于 k 的有限域，并将 Rep($\mathcal{A}$) 认作 $\mathbb{F}$-向量空间；对于 $A := \mathbb{F}^d$，以及 GL$_d$($\mathbb{F}$) 的一个 k-线性不可约尖点表示 M，则对所有满足 $A_\xi \neq 0$, ¯的 $\xi \in A(x)$，都有 Rξ(M) $= 0$，从而 δ_x(Q$_{A,M}$) 归结为其常值项（对应于命题 7.10 的同构中满足 $A_\xi = A$ 的那些 ξ）。通过在源端作加性换基，这个例子很容易推广到任意非零的 k-平凡范畴 $\mathcal{A}$。

Remarque 7.12。— 假设 $\bar{\tau}_x$ 或 δ_x 是一个正合函子。那么，命题 7.10 表明，对于 Rep($\mathcal{A}$) 中的任意函子 A 以及任意$\xi \in (A(x) \setminus \{0\})$/Aut($A$)，函子

$$k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k) \qquad M \mapsto \mathrm{Q}_{A/A_\xi,\mathrm{R}_\xi(M)}$$

是正合的，因此，若 A 是有限型，则根据命题 5.4，函子 Rξ : k[Aut(A)]-模范畴 $\to k$[Aut(A/A_ξ)]-模范畴也 ′是正合的。当 $\mathcal{A}$ 不是平凡作用时，通常并非如此。例如，若 R 是一个有限环，且其特征是 k的特征的幂，则取底层加法群在 R 上的作用的不变元的函子 k[GL$_2$(R)]-模范畴 $\to k$-模范畴并非左正合（例如，对角嵌入 $k \hookrightarrow k^{\mathrm{GL}_2(R)}$是等变的，其中 GL$_2$($R$)在源对象上平凡作用，但它在余不变量之间诱导出零态射，而这些余不变量非零）。由此可轻易推出，若 $\mathcal{A}$ 满足条件 (FH) 但并非平凡作用，

¯则存在一个 $\mathcal{A}$ 中的对象 x，使得 $\bar{\tau}_x$ 和 δ_x 都不是 `在$\mathcal{F}(\mathcal{A};\, k)$中左正合的。

8. 子范畴 $\mathbf{F}_d(\mathcal{A};\, k)$

Définition 8.1. — 设 $d \geq -1$ 为一个整数。记 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 为 $\mathcal{F}(\mathcal{A};\, k)$ 的满子范畴，由满足以下条件的函子 F 构成：对于任意 $(a_0, \ldots, a_d, x) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^{d+2}$，均有 $\delta_{a_0} \ldots \delta_{a_d} \tau_x (F) = 0$。

请注意，上述复合中出现的 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的最后一个自函子是 τ_x，而非 $\bar{\tau}_x$；很容易看出（例如，依据下文的注记），省略项 τ_x（或将其替换为 $\bar{\tau}_x$）会导致一种不等价且较无趣的概念。

Remarque 8.2. —— 前面的定义与第 2 节开头回顾的次数至多为 d 的多项式函子定义非常相似，`只是定义 8.1 中多加了项 τ_x。不难看出，函子 F de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的次数至多为 d，当且仅当对于任意 $(a_0, \ldots, a_d, x) \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^{d+2}$，都有 $\delta_{a_0} \ldots \delta_{a_d} \tau_x (F) = 0$：在多项式函子的定义中加入额外项 τ_x 并无影响，因为函子 τ_x 和 δ_a 可交换。然而，前面的定义并非如此。

因此，假设 $\mathcal{A}$ 是一个非零的´类别 k-平凡对象。注记 7.11 表明，存在长度为 d¯ ¯的有限函子 A，它们属于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$，以及 $\mathrm{Aut}(A)$ 的不可约表示 M_A，使得对于任意大的 d，对所有 $(a_0, a_1) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^2$，都有 $\delta_{a_0}\delta_{a_1}(Q_A, {}_{M_A}) = 0$；然而，依照下文推论 8.5，$\mathrm{Q}_{A,M_A}$ 只有在 $d \leq 1$ 时才属于 $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)$。因此，消去固定个数的形如 δ_x 的函子，并不能为 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中的函子提供恰当的“大小”概念，这与定义 8.1 相反，以下命题 8.4 将说明这一点。

Proposition 8.3。——设 $d \in \mathbb{N}$, F 为 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的一个函子，y 为 $\mathcal{A}$ 的一个对象¯。则 $\tau_y(F)$ 属于 `$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\, k)$，且 $\delta_y(F)$ 属于 `$\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\, k)$。

证明。——关于 `$\tau_y(F)$ 的断言由规范同构 $\tau_x \circ \tau_y \simeq \tau_{x\oplus y}$ 得出。关于 `$\delta_y(F)$ 的断言则来自命题 7.4 给出的满态射_ _$\delta_y \circ \tau_x \twoheadrightarrow \tau_x \circ \delta_y$´。 □

Proposition 8.4。——设 A 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 的一个函子，$d \geq -1$ 为一个整数。当且仅当 $\ell(A) \leq d$ 时，函子 $k[A]$ 属于 `$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$。

证明。——由于 $\tau_x(k[A])$是 $k[A]$ 的非零个数个副本的直和，且 δ_a 是连续的，因此，$k[A]$ 属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$，当且仅当对于所有（$a_0, \ldots, a_d$）$\in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^{d+1}$，$\bar{\delta}_{a_0} \ldots \bar{\delta}_{a_d}(k[A])$都为零。La

结论由推论 7.6 出发，通过对 d `进行归纳即可得到。事实上， A 的每个非零有限型子函子都具有如下形式： A_ξ ，其中 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ ，且 $\xi \in A(a) \setminus \{0\}$。如果 A 不是有限长度的，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，它都存在一个非零有限型子函子 B_n ，使得 A/B_n 的长度不超过 n 时仍不是有限的。 □

Corollaire 8.5. — 设 A 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的一个有限生成函子， M 是一个非零的 $k[\mathrm{Aut}(A)]$-模， $d \geq -1$ 是一个整数。函子 $\mathrm{Q}_{A,M}$ 属于` $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 当且仅当 $\ell(A) \leq d$。

D´证明。——函子 $\mathrm{Q}_{A,\ M}$ 是 $k[A]$ 的副本的一个直和（´可能是无限的）的商对象。由于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 对¯直和及商对象封闭（因为函子 τ_x 和 δ_a 是连续的），命题 8.4 表明 $\mathrm{Q}_{A,\ M}$ 属于 ` $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$，如果 $\ell(A) \leq d$。

命题 5.7 还表明，如果 $\mathrm{Q}_{A,M}$ 属于 `a $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$（其中 A 为有限型且 M 非零），那么 $k[A]$ 也在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中，这由命题 8.4 推出 $\ell(A) \leq d$ 。 □

Corollaire 8.6。——以下断言等价： ´

1. 对于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中任意有限生成函子 F ，存在 $d \in \mathbb{N}$ 使得 $F \in \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$；2. 阿贝尔范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 是局部有限的。

证明。——由命题 8.4 应用于可表加性函子 $\mathcal{A}(a, –)$，可知第一个条件蕴含第二个条件。反向蕴含则由同一命题得出，因为 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 对任意直和及商对象封闭。 □

Hypothèse 8.7。——除非另有明确说明，在本文余下部分中，均假设加性范畴 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的。(4)

Proposition 8.8. — 对任意整数 $d \geq -1$， $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的子范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 都是双局部化的。

证明。— 移位函子始终是双连续的。当 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡时，抛物差分函子也如此（命题 7.2），由此得出结论。 □

在下文中，若 f 是一个阿贝尔范畴之间的态射，则记 $\mathrm{rg}(f) := \ell(\mathrm{Im}\ f)$。

Proposition 8.9. — 设 $d \geq -1$ 为一个整数， F 为 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的有限型且余有限型函子。以下断言等价：

(4)这一例外仅涉及注释 10.16 和 10.18。

(1) F属于 `$(\mathcal{A}; k)$；(2) 存在有限函子族 (A_i) 和 (B_j)，它们属于 Rep($\mathcal{A}$)，以及若干族 $(\lambda_{i,\ j}(f))_{f\in \mathrm{Hom}(A_i,B_j)}$中的 ´元 ´，属于 k，使得

$$F \simeq \mathrm{Im} \bigoplus_i k[A_i] \xrightarrow{\left(\Theta_{A_i,B_j}(\sum_{f\in \mathrm{Hom}(A_i,B_j)} \lambda_{i,j}(f)[f])\right)_{i,j}} \bigoplus_j k[B_j] \tag{9}$$

并且对于满足 $\lambda_{i,\ j}(f) \neq 0$ 的任意 $f \in \mathrm{Hom}(A_i, B_j)$，$\mathrm{rg}(f) \leq d$；

(3) F是形如$k[A]$ 的函子的有限直和的一个子商，其中 A 属于 Rep($\mathcal{A}$)，且满足 $\ell($ $A) \leq d$。

证 ´明。——若 F 是有限型且余有限型，由于 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，根据推论 3.8 的 (b) 部分，如同其中所示，我们可以将 F 写成一个态射的像，该态射介于 Rep($\mathcal{A}$) 中有限函子的线性化的有限直和之间。设 $f \in \mathrm{Hom}(A_i, B_j)$ 满足 $\lambda_{i,\ j}(f) \neq 0$：根据命题 3.2，存在一个属于 $\mathcal{A}$ 的对象 x，使得 $k[\mathrm{Im}\ (f)]$ 是 $\tau_x(F)$ 的子商。若 F 属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)$，则可推出 $k[\mathrm{Im}\ (f)]$, 也属于其中，因为 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 对子商封闭（参见命题 8.8），显然也对 τ_x 封闭。于是命题 8.4 表明 $\mathrm{rg}(f) \leq d$，从而得到蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)。

蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的。至于 (3) $\Rightarrow$ (1)，它由命题 8.4 和 8.8 推出。□

前一个命题立即导出围绕推论 8.6 中某个蕴含关系的如下变体：

Corollaire 8.10. — 假设 Rep($\mathcal{A}$) 中每个同时为有限型和余有限型的函子都是有限函子。那么，对于某个 $d \in \mathbb{N}$，$\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中每个有限型且余有限型的函子（特别是每个有限函子）都属于 `a$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$。

Remarque 8.11. — 借助 Auslander 的经典结果，可以（用一种初等的方式，但需要一些工作）看出前一个推论的逆命题成立；更确切地说，若 Rep($\mathcal{A}$) 中存在一个有限型且余有限型但非有限函子，那么 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中存在一个不属于任何 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 子范畴的简单函子。此外，存在满足这些条件的很小的 k-平凡加性范畴；当 $\mathcal{A}$ 中的幂等元可分裂时，这等价于以下条件：若 a 和 b 是 $\mathcal{A}$ 的对象，则 $\mathcal{A}$ 中仅有有限多个不可分解对象的同构类，使得存在一个非零复合 ´ $a \to t \to b$ 。

Corollaire 8.12. — 对任意整数 $d \geq -1$，$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中包含 $k[A]$ pour A dans Rep($\mathcal{A}$) tel que $\ell(A) \leq d$ 的最小双局部化子范畴。

证明。— 命题 8.4 和 8.8 表明， $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中包含 $k[A]$ pour A dans Rep($\mathcal{A}$) tel que $\ell(A) \leq d$ 的双局部化子范畴。反过来， $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中包含这些函子的双局部化子范畴 $\mathcal{E}$，根据命题 8.9 中蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (3)，包含 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的所有有限型和余有限型对象。由于每个余有限型函子都是其同时为有限型和余有限型的子函子的余极限， $\mathcal{E}$ 包含 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的所有余有限型函子。由此便得到所需结论，因为 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 中的每个函子都是其所有余有限型商对象之积的子对象。

□

¯下面的结果并非显然，因为自函子 δ_x de$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 并非自对偶。

Corollaire 8.13. — 设 $d \geq -1$ 为一个整数， F 为 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中的一个函子。那么， F属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)$，当且仅当 $F^\vee$ 属于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};\ k)$。

证明。— 若 F 是有限型且余有限型，则等价性由命题 8.9 和 3.3 得出。现在假设 F 是有限型：由于 F 取有限维值（这归功于条件 (FH)）， F 是其有限型且余有限型商对象 G_i 的逐点平凡滤过极限（参见命题 3.9 证明的开头），这意味着 $F^\vee$ 是其有限型且余有限型子对象 $G_i^\vee$ 的余极限。因此，前述情形表明，对于有限型的 F，等价性成立。一般情形可由此推出：将一个函子写成其有限型子函子的余极限，并利用对偶函子 $(-)^\vee$ 的连续性： $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};\ k)$。

□

下面关于滤过 $(\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k))_{d\in\mathbb{N}}$ 的性质，类似于多项式滤过相对于张量积的著名性质。

Corollaire 8.14. — 设 n、 $m \in \mathbb{N}$、 F和 G分别是 $\mathcal{F}_n(\mathcal{A};\ k)$ 和$\mathcal{F}_m(\mathcal{A};k)$ 的函子。那么函子 $F \otimes G$ 属于 `a $\mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{A};k)$。

证明。——由于张量积对每个变量都与余极限交换，并且子范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 是局部化的，只需在 F 和 G 为有限型时证明该结论（一般情形可通过将一个函子写成其有限型子函子的余极限得到）。特别地，由假设 (FH)， F 和 G 在 k 上取有限维值。这意味着 $F \otimes -$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的双连续自函子。因此， $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中满足 $F \otimes T \in \mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{A};k)$ 的函子 T 所构成的满子范畴，与 $\mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{A};k)$ 一样是双局部化的。于是，根据推论 8.12，只需证明对于 Rep($\mathcal{A}$) 中满足 $\ell(B) \leq m$ 的有限对象 B， $F \otimes k[B]$ 属于 $\mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{A};k)$。对张量积的另一个变量以同样方式推理可知，只需证明对于 Rep($\mathcal{A}$) 中的有限对象 A 和 B， $k[A] \otimes k[B]$ 属于 $\mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{A};k)$，使得

$\ell(A) \leq n$ 和 $\ell(B) \leq m$。这由命题 8.4 和典范同构 $k[A] \otimes k[B] \simeq k[A \oplus B]$ 得出。□

REMARQUE 8.15。——我们不知道这个结果有更直接的证明，因为函子 δ_a 似乎不具备与张量积相容的简单性质。

9. 结构定理

9.1. 函子 S_d、C_d 和 T_d。——

NOTATION 9.1。——对于 $d \in \mathbb{N}$，我们选取 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中长度等于 d 的有限函子的同构类的一个完备代表系 $\mathcal{L}_d(\mathcal{A})$。

作出这一选择后，我们引入下文结构定理 9.9 的主角：

NOTATION 9.2. — 对于 $d \in \mathbb{N}$，记作：

1. $\pi_d : \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 典范函子 [12, 第 III 章，§1]；2. $S_d, C_d, T_d : \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(A)]$-模范畴 $\to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 由下式给出的函子

$$S_d : (M_A)_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mapsto \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A, M_A},$$

$$C_d : (M_A)_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mapsto \bigoplus_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}^{A, M_A};$$

et

$$T_d : (M_A)_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mapsto \bigoplus_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}(A, M_A);$$

3. $\Phi_d := \pi_d \circ S_d : \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(A)]$-模范畴 $\to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$。

（推论 8.5 和命题 8.8 保证 S_d、C_d 和 T_d 的取值确实都在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中。）

NOTATION 9.3. — 设 X 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的一个对象。记 (FE(X)) 为以下性质：

$$(\mathrm{FE}(X)) \qquad \textit{le groupe abélien} \bigoplus_{S \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A})} \mathrm{Ext}^1(X, S) \textit{ est fini.}$$

将以下性质记为 (FE($\mathcal{A}$))：

$$(\mathrm{FE}(\mathcal{A})) \qquad (\mathrm{FE}(X)) \textit{ est vérifiée pour tout } X \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A}).$$

PROPOSITION 9.4. — 设 X 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的一个对象。

1. 若性质 (FE(X)) 成立，则满足存在一个非分裂短正合列 $0 \to S \to Y \to X \to 0$，其中 S 是单对象的条件的 Rep($\mathcal{A}$) 中对象的等价类只有有限个；2. 若 X 是单对象，且满足存在一个非分裂短正合列 $0 \to S \to Y \to X \to 0$，其中 S 是单对象的条件的 Rep($\mathcal{A}$) 中对象的等价类只有有限个，则 (FE(X)) 成立；3. Rep($\mathcal{A}$) 中满足 (FE(X)) 成立的对象类在扩张下封闭；4. 若 (FE($\mathcal{A}$)) 成立，则对 Rep($\mathcal{A}$) 中任意有限对象 (FE(X)) 均成立；5. 若 X 是有限表示的，则 (FE(X)) 成立。

证明。——第一个断言是显然的。

若 X 和 S 是单对象，且 $0 \to S \to Y \to X \to 0$ 是一个不分裂的短正合列，那么 S 是 Y 的根基，而 X 是其余顶。因此，Y 的每个自同构都保持 S 和 X。由此可见，若 Rep($\mathcal{A}$) 中满足存在一个以 S 为单对象的不分裂短正合列 $0 \to S \to Y \to X \to 0$ 的对象 Y 的等价类只有有限多个，那么集合

$$\bigsqcup_{S \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A})} \mathrm{Aut}(S) \backslash \mathrm{Ext}^1(X, S)_{/\mathrm{Aut}(X)}$$

是有限的。由于当 S 为单对象时，群 Aut(S) 是有限的（由条件 (FH)），因此可推出第二个断言。

第三个断言由与一个短正合列相关联的 Ext 中的长正合列得出；第四个断言则通过对长度 X 进行归纳而得出。

最后，如果 X 具有有限表示，则存在 a 和 b 这两个 $\mathcal{A}$ 中的对象，以及一个正合列 $\mathcal{A}(a, –) \to \mathcal{A}(b, –) \to X \to 0$，其中位于 Rep($\mathcal{A}$) 中，因此 $\mathrm{Ext}^1(X, S)$ 是 $S(a)$ 的一个子商。由于 $\mathcal{A}$ v′ 满足 (FH)，对于简单对象 S，$S(a)$ 是一个有限群，并且满足 $S(a) \neq 0$ 的简单对象 S 只有有限多个同构类，至此证明完成。 □

Exemple 9.5. — 上一个命题的最后一条断言表明，当 Rep($\mathcal{A}$) 局部诺特时，条件 (FE($\mathcal{A}$)) 得到满足。Auslander [1] 的工作给出了这样的例子：一些小型阿贝尔 k-平凡范畴 $\mathcal{A}$，其中 Rep($\mathcal{A}$) 的所有单对象都有限呈现，但该范畴并非局部诺特。

Remarque 9.6。—— 存在一些 k-平凡的加性范畴 $\mathcal{A}$，使得 (FE($\mathcal{A}$)) 不成立。举例来说，考虑一个特征不同于 k 的有限域 $\mathbb{F}$，以及从与集合 E 相关联的小范畴出发的函子范畴，其中 E 按如下方式排序：使得 0 是

最小元素，并且 ′中的所有元素两两不可比较。取 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{E}$ 中有限型投射对象的全子范畴的对偶范畴：于是 $\mathcal{A}$ 是 k-平凡的，并且 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{E}$。若将 S_i 定义为 $\mathcal{E}$ 中的对象，其在 $i \in E$ 上的取值为 $\mathbb{F}$ ′，在其他处为零，则$(S_i)_{i\in E}$ 是 $\mathcal{E}$中简单对象同构类的一个完备代表集。容易验证，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，$\mathrm{Ext}^1(S_0, S_n) \simeq \mathbb{F}$ ，因此条件 (FE(S_0)) 不成立。

我们省略下面这个简单断言的证明。

Lemme 9.7. — 设 E 为一个集合，并且对每个 $i \in E$， R_i 为一个环，且Ξ_i : R_i-模范畴 $\to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 为一个双连续函子。以下断言等价：

1. 函子 $\prod_{i\in E} R_i$-模范畴 $\to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ $(X_i) \mapsto \bigoplus_{i\in E} \Xi_i(X_i)$ 是双连续的；
2. 函子 $\prod_{i\in E} R_i$-模范畴 $\to \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ $(X_i) \mapsto \prod_{i\in E} \Xi_i(X_i)$ 是双连续的；3. 对任意一族 R_i-模 (X_i)，典范单态射 $\bigoplus_{i\in E} \Xi_i(X_i) \to \prod_{i\in E} \Xi_i(X_i)$ 是同构；
4. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 a ，满足 $\Xi_i(R_i)(a) \neq 0$ 的 $i \in E$ 的集合是有限的。

Proposition 9.8. — 设 $d \in \mathbb{N}$。

1. 函子 T_d 是双连续的。2. 函子 S_d 是正合且连续的。当且仅当条件 (FE($\mathcal{A}$)) 得到验证或 $d \leq 1$ 时，它是双连续的。3. 函子 C_d 是正合且余连续的。当且仅当条件 (FE($\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$)) 得到验证或 $d \leq 1$ 时，它是双连续的。4. 有 $\Phi_d \simeq \pi_d \circ C_d \simeq \pi_d \circ T_d$。5. 函子 π_d 和 Φ_d 是双连续的。

证明。— 设 a 是 $\mathcal{A}$的一个对象。当且仅当存在一个 ′满态射 $\mathcal{A}(a, -) \twoheadrightarrow A$（分别地，存在一个单态射 $A \hookrightarrow \mathcal{A}(-, a)^\sharp$）时，向量空间 $\mathrm{Q}_A(a)$（分别地，$\mathrm{Q}^A(a)$）才非零，这是由命题 4.5 和 4.3 得出的。

命题 5.4 和引理 9.7 因此表明，′是正合且连续的，并且当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a，作为 $\mathcal{A}(a, -)$ 的商对象的 $A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})$ 的集合是有限的时，它是双连续的。对于 $d = 1$，这总是成立，因为 $\mathcal{A}(a, -)$ 是有限型的，借助假设 (FH)，它具有有限的余顶 `。对于 $d = 2$，第二个断言的充要条件由该余顶的有限性、命题 9.4 以及以下观察得出：如果 $0 \to Y \to X \to 0$ 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中一个不分裂的正合列，其中 S 为单对象，并且存在一个满态射 $\mathcal{A}(a, -) \twoheadrightarrow X$，那么存在一个满态射 $\mathcal{A}(a, -) \twoheadrightarrow Y$。一般情况下， $d \geq 2$ 可通过归纳获得，再次使用命题 9.4 以及前面的观察。

以及这样一个事实：如果存在无限多个 $\mathcal{L}_d(\mathcal{A})$ 的元素（满足 $d \geq 1$），使得 $\mathcal{A}(a, -)$ 可以满射到这些元素上，那么就存在无限多个 $\mathcal{L}_{d+1}(\mathcal{A})$ 的元素，使得 $\mathcal{A}(a^{\oplus 2}, -)$ 可以满射到这些元素上。由此完成了第二个断言的证明。

第三个断言是第二个断言的对偶。

第一个也可由引理 9.7 以及本证明开头的观察推出，使用推论 6.5：$\mathrm{Q}(A)(a)$ 非零意味着 $\mathrm{Q}_A(a)$ 和 $\mathrm{Q}^A(a)$ 非零（因为 $\mathrm{Q}(A)$ 是 Q_A 的子对象，也是 Q^A 的商对象），因此 A 是一个态射 $\mathcal{A}(a, -) \to \mathcal{A}(-, a)^\sharp$ 的像。由于 $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}(a, -), A(-, a)^\sharp) \simeq \mathcal{A}(a, a)^\sharp$ 有限，这就证明了第一个断言。

第四个断言由以下事实得出：对于 $A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})$ 和 $M \in \mathrm{Ob}\, k[\mathrm{Aut}(A)]$-模，典范态射 $\mathrm{Q}^{A,M} \twoheadrightarrow \mathrm{Q}(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Q}_{A,M}$ 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 中成为同构。

第五个断言由第一个和第四个断言得出。 □

9.2. 范畴 $\mathrm{F}_d(\mathrm{A}; k)/\mathrm{F}_{d-1}(\mathrm{A}; k)$。—

Théorème 9.9. — 对任意 $d \in \mathbb{N}$，函子

$$\Phi_d : \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$$

是范畴等价。此外，逆等价与函子 S_d（分别为 C_d）$\prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(A)]$-模 $\to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 的复合，是截面函子（分别为余截面函子）$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$，也就是说，是典范函子的右伴随函子（分别为左伴随函子）。

这个定理构成了本文的主要结果，将在本截面函子后续部分分几个步骤予以证明。为此，我们引入一些记号。

我们将 $HR(d)$ 记为定理 ´eor` 的结论。该结论（尤其是 Φ_d 的完全忠实性）将通过以下两个命题，利用关于 d 的归纳法予以部分证明：

Proposition 9.10. — 假设对所有 $i < d$，$HR(i)$ 都成立。那么，对于 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 中的任意函子 T，以及属于 S_d 的本质像的任意函子 F，$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(T, F) = 0$。

证明。——通过对 $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ 进行归纳，证明对于所有属于 $\mathcal{F}_i(\mathcal{A}; k)$ 的 T、任意 $A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})$ 以及 $\mathrm{Aut}(A)$ 的任意表示，$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(T, \mathrm{Q}_{A,\ M}) = 0$。假设 $HR(i)$ 意味着存在一个正合列

$$0 \to X \to \bigoplus_{B \in \mathcal{L}_i(\mathcal{A})} \mathrm{Q}^{B, N_B} \to T \to Y \to 0$$

其中 N_B 是 Aut(B) 的表示，而 X 和 Y 是从 $\mathcal{F}_{i-1}(\mathcal{A};k)$ 出发的函子。由关于 i 的归纳假设，扩张群 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(X, \mathrm{Q}_{A,M})$ 和 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(Y, \mathrm{Q}_{A,M})$ 均为零；而根据命题 5.9，对于 $B \in \mathcal{L}_i(\mathcal{A})$，$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}^{B,N_B}, \mathrm{Q}_{A,M})$ 为零。因此，$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(T, \mathrm{Q}_{A,M})$ 也为零，结论得证。

□

Gabriel 在第 III 章第 2 节第 371 页引理 2] 之前定义了阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$ 中的 $\mathcal{C}$-封闭对象的概念，其中 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个厚子范畴。下面的推论由命题 9.10 以及 [12, 第 III 章第 2 节引理 1] 得出。

Corollaire 9.11. — 若对所有 $i < d$，$HR(i)$ 都成立，则 ˋ属于 S_d 本质像的 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 中的每个对象都是 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$-封闭的。

在陈述下一个结果之前，我们回顾一下定义 3.6] ： 若一个函子 $\Phi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 作用于两个 Grothendieck 范畴之间，且 Φ 是正合的，并且它诱导的分次阿贝尔群态射 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}'}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}}(\Phi(X)\ \Phi(Y))$ 对 $\mathcal{E}'$ 中任意对象 X 和 Y 都是同构，则称该函子为同调嵌入。

Proposition 9.12。—— 假设对于所有 $i < d$，$HR(i)$ 均已被 ´验证。

1. 函子 Φ_d 是全忠实的。2. 复合函子 ´】

【。

$$\prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \xrightarrow{S_d} \mathcal{F}_d(\mathcal{A};k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$$

是一个同调嵌入。

证明。— 设 F 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的一个函子，属于 S_d 的本质像。推论 9.11 和 [12, 第 III 章，第 2 节，引理 1] 推出，对于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 中的任意函子 Y，态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)}(\pi_d(Y), \pi_d(X))$$

由 π_d 诱导的映射是一个同构。因此，只需证明断言 2。

设 $(M_A)_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})}$ 和 $(N_A)_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})}$ 是群 Aut(A) 的 ´表´示 k - 线´性表示族。存在典范同构

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}\Big(\bigoplus_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,M_A}, \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,N_A}\Big) \simeq$$

$$\prod_{(A,B) \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})^2} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(\mathrm{Q}_{A,M_A}, \mathrm{Q}_{B,N_B}) \simeq \prod_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Ext}^*_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M_A, N_A)$$

根据定理 5.8。

此外，命题 9.8 的断言 1. 和 4.、引理 9.7 以及命题 8.8 表明，典范单态射的余核

$$\bigoplus_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,M_A} \hookrightarrow \prod_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,M_A}$$

属于 `到 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$。利用命题 9.10，可推得

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}\Big(\prod_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,M_A}, \prod_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,N_A}\Big) \simeq$$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}\Big(\bigoplus_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,M_A}, \prod_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_{A,N_A}\Big) \simeq$$

$$\simeq \prod_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Ext}^*_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M_A, N_A)\ ,$$

该同构由 S_d 与包含 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的复合诱导，这就完成了证明。□

9.3. 定理 9.9 的证明。——我们先引入一些记号，以便分几个步骤证明函子 Φ_d 的本质满射性。

我们将函子 F 从 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的形如（9）（第 36 页）的任一同构称为 D_d 型分解，其中对满足 $\lambda_{i,j}(f) \neq 0$ 的每个 $f \in \mathrm{Hom}(A_i, B_j)$，都有 $\mathrm{rg}(f) = d$。如果进一步对满足 $\lambda_{i,j}(f) \neq 0$ 的每个 $f \in \mathrm{Hom}(A_i, B_j)$，映射均为同构（分别为单态射、满态射），则称这种分解为 I_d 型（分别为 M_d、E_d 型）分解。

任何余有限型函子都是有限型且余有限型，并且属于 `$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$（参见命题 8.9）；反之：

Lemme 9.13。——设 F 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的有限生成函子且为余有限型。那么存在一个函子 G，它具有一种 D_d 型的分 ′解，使得$\pi_d(F) \simeq \pi_d(G)$。

证明。——这由命题 8.9 以及以下事实得出：若 $f\colon A \to B$ 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的一个态射，且 $\mathrm{rg}(f) < d$，则 $k[f]\colon k[A] \to k[B]$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 中为零。□

Lemme 9.14. — 如果 F 是一个函子，并且具有I_d类型的分解，那么 $\pi_d(F)$ 属于函子 Φ_d 的本质像。

证明。——对于长度为 d 的 $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ 中的 A，典范满态射 $k[A] \twoheadrightarrow \mathrm{Q}_A$ 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 中诱导出一个同构。由此可得

F 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 中同构于某个形如以下形式的态射的像

$$\bigoplus_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_A^{\oplus n(A)} \xrightarrow{\bigoplus_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})}(\sum_{f\in\mathrm{Aut}(A)}\lambda_{i,j}(f).f_*)_{1\leq i\leq n(A),1\leq j\leq m(A)}} \bigoplus_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})} \mathrm{Q}_A^{\oplus m(A)}$$

其中，$n(A)$ 和 $m(A)$ 是自然数，除有限多个 $A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})$ 外均为零，而 $\lambda_{i,j}(A)$ 是 k 的元素。若记 M_A 为态射的像

$$k[\mathrm{Aut}(A)]^{\oplus n(A)} \xrightarrow{(\sum_{f\in\mathrm{Aut}(A)}\lambda_{i,j}(f)[f])_{1\leq i\leq n(A),1\leq j\leq m(A)}} k[\mathrm{Aut}(A)]^{\oplus m(A)}$$

在 $k[\mathbf{Aut}(A)]$-模范畴中，命题 5.4 表明 $\pi_d(F)\simeq\Phi_d\big((M_A)_{A\in\mathcal{L}_d(\mathcal{A})}\big)$。

□

NOTATION 9.15. — 设 A, B 是 $\mathbf{Rep}(\mathcal{A})$ 中的函子，A' 和 B' 分别是 A 和 B 的子函子。记

$$\Upsilon_{A',B'} : k[\mathrm{Hom}(A,B)] \to k[\mathrm{Hom}(A/A', B/B')]$$

$\bar{}$ 为线性映射：若 $f(A')=B'$，则将 $[f]$ 映为 $[f]$，否则映为 0；对于 $\bar{f}\in\mathbf{Hom}(A,B)$，其中 $f: A/A'\to B/B'$ 表示由 f 诱导的态射。

对于 $x\in\mathbf{Ob}\ \mathcal{A}$, $\xi\in A(x)$ 和 $\zeta\in B(x)$，记作 $\Upsilon_{\xi,\zeta}$ 对于 Υ_{A_ξ,B_ζ}。

对于 $A'\subset A''\subset A$，记作 $r_{A',A''}: k[\mathbf{Hom}(A/A'',B)]\to k[\mathbf{Hom}(A/A',B)]$ 由投影 $A/A'\twoheadrightarrow A/A''$ 诱导的态射。

下文中，记 $\mathbf{Hom}_d(A,B)$ 为 $\mathbf{Hom}(A,B)$ 的子集，由满足 $\mathbf{rg}(f)=d$ 的 $f: A\to B$ 构成。

LEMME 9.16. — 设 A 和 B 是 $\mathbf{Rep}(\mathcal{A})$ 的函子，其中 A 有限，且 A' 是 A 的一个子函子。那么线性映射

$$\Upsilon_{A',0} \quad et \quad \sum_{\substack{A''\subset A\\ A''\supset A',\,\ell(A/A'')=d}} r_{A',A''}\circ\Upsilon_{A'',0} : k[\mathrm{Hom}(A,B)]\to k[\mathrm{Hom}(A/A',B)]$$

在 $k[\mathbf{Hom}_d(A,B)]$ 上重合。

证明。— 设 $f\in\mathbf{Hom}_d(A,B)$，且 N 是 f 的核；因此有 $\ell(A/N)=d$。有 $\Upsilon_{A',0}([f])=[f]$，若 $N\supset A'$；否则为 0，而

$$\sum_{\substack{A''\supset A'\\ \ell(A/A'')=d}} r_{A',A''}\circ\Upsilon_{A'',0}([f]) = \sum_{\substack{N\supset A''\supset A'\\ \ell(A/A'')=d}} [\bar{f}]\,;$$

由于 $N\supset A''\supset A'$ 蕴含 $A''=N$，且 $\ell(A/A'')=d=\ell(A/N)$，这就证明了该引理。 □

以下陈述是形式化的，且显然成立。

Lemme 9.17. — 设 A, B 是 Rep($\mathcal{A}$) 中的有限函子， x 是 $\mathcal{A}$,$\xi \in A(x)$ 和 $\zeta \in B(x)$ 的一个对象，且 $f\colon A \to B$ 是一个态射，满足 $f_*(\xi) = \zeta$。那么 $\tilde{f}$ ¯诱导出态射 $f\colon A_\xi \to B_\zeta$ 和 $f\colon A/A_\xi \to B/B_\zeta$，它们构成一个交换图，且各行正合

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\xi & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/A_\xi & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_\zeta & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/B_\zeta & \longrightarrow & 0 \end{array} ;$$

¯此外，$\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f)$，且当且仅当 $\zeta = 0$ 时取等号。

Lemme 9.18. — 设 F 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的一个函子，且具有 D_d 型分解：

$$F \simeq \mathrm{Im} \bigoplus_{i\in I} k[A_i] \xrightarrow{(\Theta_{A_i,B_j}(f_{i,j}))_{(i,j)\in I\times J}} \bigoplus_{j\in J} k[B_j]$$

o ˋu I 和 J 是有限集合， A_i 和 B_j 是 Rep($\mathcal{A}$) 和 $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_d(A_i, B_j)$ 的有限函子。

因此存在一个对象 x，它属于 $\mathcal{A}$，使得 F 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中同构于 $/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 的像 of

$$\bigoplus_{\substack{i\in I\,,\, T\subset A_i \\ \ell(A_i/T)=d}} k[A_i/T] \xrightarrow{(\Theta_{A_i/T,B_j}(\Upsilon_{T,0}(f_{i,j})))_{i,T,j}} \bigoplus_{j\in J} k[B_j]$$

证 ´明。— 选取 $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$，使得任意一个 A_i 的子函子都是 $\mathcal{A}(x, –)$ 的商对象（这样的 x 存在，因为这些 A_i 都是有限的）。

根据命题 8.3， F与 $\bar{\tau}_x(F)$中的 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\ k)$同构。此外，命题 7.5（以及 $\bar{\tau}_x$ 的正合性——参见命题 7.1）表明， $\bar{\tau}_x(F)$与以下对象的像同构：

$$\bigoplus_{\substack{i\in I \\ \xi\in A_i(x)}} k[A_i/(A_i)_\xi] \xrightarrow{(\Theta_{A_i/(A_i)_\xi,B_j/(B_j)_\zeta}(\Upsilon_{\xi,\zeta}(f_{i,j})))_{(i,\xi),(j,\zeta)}} \bigoplus_{\substack{j\in J \\ \zeta\in B_j(x)}} k[B_j/(B_j)_\zeta].$$

引理 9.17 以及我们对 x 的选择表明， F 在$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$中与以下对象的像同构：

$$\bigoplus_{\substack{i\in I \\ T\subset A_i}} k[A_i/T] \xrightarrow{(\Theta_{A_i/T,B_j}(\Upsilon_{T,0}(f_{i,j})))_{i,T,j}} \bigoplus_{j\in J} k[B_j].$$

因此，只需证明，对于所有 $i \in I$ 和 $A' \subset A_i$，其像包含于

$$\alpha_{A'} : k[A_i/A'] \xrightarrow{(\Theta_{A_i/A',B_j}(\Upsilon_{T,0}(f_{i,j})))_j} \bigoplus_{j\in J} k[B_j]$$

所有满足$\ell(A_i/t) = d$的 α_T 到 $T \subset A_i$ 的态射的像之和中。这由引理 9.16 得出，该引理表明

$$\alpha_{A'} = \sum_{\substack{T\subset A_i \\ T\supset A',\, \ell(A/T)=d}} \left(k[A_i/A'] \twoheadrightarrow k[A_i/T] \xrightarrow{\alpha_T} \bigoplus_{j\in J} k[B_j] \right),$$

由此得出结论。 □

Lemme 9.19. — 设 F 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 的一个函子，具有类型为 D_d （分别为 E_d）的分解。那么， F 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中同构于 $/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ `的一个函子，该函子具有类型为 M_d （分别为 I_d）的分解。

证明。— 对于 $f \in \mathrm{Hom}_d(A, B)$，以及满足 $\ell(A/T) = d$ 的 $T \subset A$，有 $\Upsilon_{T,0}([f]) = [f]$，当 $\mathrm{Ker}\, f = T$ 时；否则为 0，其中 $f\colon A/T \to B$ 表示由 f 诱导的单态射；若 f 是满态射，则该单态射是同构。因此，结论由引理 9.18 得出。 □

´定理 9.9 的证明。— 对 d 进行归纳，证明 $HR(d)$，因此可以假设 $HR(i)$ ´已对 $i < d$ 成立（如果 $d = 0$，这一条件为空）。由此，根据命题 9.12.1， Φ_d 是全忠实的。

我们来证明 Φ_d 是本质满的：也就是说，要证明 F 中任意一个从 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 出发的函子，在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 中都同构于 Φ_d 的本质像中的某个对象。如果 F 有一个 I_d 型分解，结论由引理 9.14 得出。若 F 有一个 E_d 型分解，则由引理 9.19 可将此情形归结为前一种情形。若 F 有一个 M_d 型分解，则可将其归结为 E_d 型（参见推论 8.13——`在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中有一个 $M_d$ 型分解，当且仅当 `在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}; k)$ 中有一个 E_d 型分解）。若 F 有一个 D_d 型分解，则由引理 9.19 可将此情形归结为它有一个 M_d 型分解的情形。现在，引理 9.13 表明，若 F 是有限型且余有限型，则 F 属于 Φ_d 的本质像。一般而言，我们将 F 写成一些同时具有有限型和余有限型的函子的极限的余极限，并利用 Φ_d 的双连续性（命题 9.8）及其此前已证明的全忠实性 ´，从而得出结论。

最后，函子 S_d 同构于截面函子$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ r´，这一点由推论 9.11 及 [12, 第 III 章 § 2 命题的推论 3] 得出； C_d 同构于余截面函子这一点，则可用类似方法验证。 □

10. 单对象函子与有限性´质´ 10.1. $\mathrm{F}_d(\mathrm{A}; k)$ 中单对象函子的描述。—

NOTATION 10.1。——若 $\mathcal{E}$ 是一个 Grothendieck 范畴，则记 Irr($\mathcal{E}$) 为 $\mathcal{E}$ 中简单对象的同构类所成的集合。此类对象 S 在 Irr($\mathcal{E}$) 中的类记作 ´ $[S]$。

记 G_0^f ($\mathcal{E}$) 为 $\mathcal{E}$ 中有限对象的格罗滕迪克群，即以 $\mathcal{E}$ 中有限对象的同构类为基的自由阿贝尔群，模去由以下元素生成的子群：对于 $\mathcal{E}$ 中每个满足 X 有限的短正合列 $0 \to Y \to X \to Z \to 0$，取 $[Y] + [Z] - [X]$ ；有限对象 X 在 $\mathcal{E}$ 中的类在 $G_0^f(\mathcal{E})$ 中记作 $\{X\}$。因此， $\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(\mathcal{E})] \to G_0^f(\mathcal{E})[S] \mapsto \{S\}$ 定义了一个群同构。

若 R 是一个环，则简记 Irr(R)（分别记 G_0^f (R)）表示 Irr(R-模范畴)（分别表示 G_0^f (R-模范畴)）。

下面的结果是定理 9.9 最重要的推论之一。

THÉORÈME 10.2. — 1. 如果 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的有限函子，而 M 是一个 k[Aut(A)]-模简单对象，那么 Q(A, M) 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 的简单函子。

2. 对任意 $d \in \mathbb{N}$，存在一个双射

$$\bigsqcup_{\substack{n \le d \\ A \in \mathcal{L}_n(\mathcal{A})}} \mathrm{Irr}(k[\mathrm{Aut}(A)]) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Irr}(\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)) \qquad (n, A, [M]) \mapsto [\mathrm{Q}(A, M)].$$

3. 假设 Rep($\mathcal{A}$) 中每个有限型且余有限型的函子都是有限的（例如，Rep($\mathcal{A}$) 是局部有限的）。那么存在一个双射

$$\bigsqcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ A \in \mathcal{L}_n(\mathcal{A})}} \mathrm{Irr}(k[\mathrm{Aut}(A)]) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)) \qquad (n, A, [M]) \mapsto [\mathrm{Q}(A, M)].$$

证明。— 对于任意 $A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})$，函子

$$\mathrm{Q}(A, -) : k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$$

同构于包含函子的复合 `a ´。

$$k[\mathrm{Aut}(A)]\text{-}\mathbf{Mod} \hookrightarrow \prod_{B \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k[\mathrm{Aut}(B)]\text{-}\mathbf{Mod}\,,$$

定理 9.9 中的 ´等价 $\prod_{B \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})} k$[Aut($B$)]-模范畴 $\simeq$ $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$ 以及中间延拓 [17, § 4]

$$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$$

(这´是由定理 9.9 中对截面函子和余截面函子´的`描述，以及 Q(´,A) M的定义得出的）。由此可知，存在一个双射 Irr($\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)$) $\sqcup$ $\bigsqcup$ Irr(k[Aut(A)]) $\xrightarrow{\simeq}$ Irr($\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$)$_{A \in \mathcal{L}_d(\mathcal{A})}$

其到 Irr($\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$) 的限制 ` 由包含 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 诱导，而到 Irr($k$[Aut($A$)]) 的限制 ` 则由 $[M] \mapsto$[Q(A,M)] 给出。通过对 d 进行归纳，我们立即得到第二个断言。第一个断言也由此得出，因为包含 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 保持单对象。

最后一个断言由第二个断言和推论 8.10 得出。 □

Remarque 10.3. — 若幂等元在 $\mathcal{A}$ 中分裂，则同样可以用一种初等且经典的方式（例如参见命题 1.15]）得到一个显式双射（也可通过中间延拓给出）

$$\bigsqcup \mathrm{Irr}(k[\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(a)]) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Irr}(\mathcal{F}(\mathcal{A};k)) \ ,$$

其中并集取遍 $\mathcal{A}$ 中对象同构类的一个完备代表集。

因此，当 Rep($\mathcal{A}$) 中每个有限生成且余有限型的函子都是有限的，且 $\mathcal{A}$ 中的幂等元分裂时——例如，当 k 是一个 R -平凡环且满足 $\mathcal{A} =$P(R) 时——我们便有 Irr($\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$) 的两种不同参数化方式，它们都表示为若干形如 Irr($k[G]$) 的集合的不交并，其中 G 是有限群。这两种参数化并不等价（除非 Rep($\mathcal{A}$) 是半单的，这可由 [19] 推得），而且两者之间的对应关系似乎难以理解（这是一个有限群表示论问题），尽管它们都是显式的。

Remarque 10.4。——如果 Rep($\mathcal{A}$) 中存在一个既是有限生成函子又是余有限型、但不是有限的函子，那么在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中就存在不属于前述分类的简单函子（参见注记 8.11）。这类简单函子的分类似乎难以实现。

我们还有自由阿贝尔群 $G_0^f(\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k))$ 的另一个重要基，它不同于由 Q(A, M) 的类构成的基：

Proposition 10.5。——对于任意 $d \in \mathbb{N}$，阿贝尔群态射

$$\bigoplus_{\substack{n\leq d \\ A\in\mathcal{L}_n(\mathcal{A})}} G_0^f(k[\mathrm{Aut}(A)]) \to G_0^f(\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k))$$

其分量 G_0^f(k[Aut(A)]) $\to G_0^f(\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k))$ 是 $\{M\} \mapsto \{\mathrm{Q}_{A,\ M}\}$ 是一个同构。

证明。——该命题可由定理 10.2 结合命题 6.2 及其推论得出，也可直接由定理 9.9 对 d 进行归纳得出。

□

10.2. F(A; k) 和 F_d(A; k) 的局部有限性。—

PROPOSITION 10.6. — 设 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的一个函子。以下断言彼此 ′等价:

1. A 是 Rep($\mathcal{A}$) 的有限函子; 2. $k[A]$
是 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的有限函子。

此外，在这些条件成立时， $k[A]$ 的合成因子恰为 Q(B, M)，其中 B 是 A 的子商，且 M 是一个简单的 k[Aut(B)]-模。

证明。—由于线性化函子 Rep($\mathcal{A}$) $\to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 保持真子对象，显然若 $k[A]$ 是有限函子，则 A 必为有限函子。此外，若 B 是 A 的子商，且 M 是一个简单的 k[Aut(B)]-模，则 $k[B]$，因此 Q_B，进而 Q(B) 和 Q(B, M) 都是 $k[A]$ 的子商。

现在对整数 d 作归纳证明：若 A 有限且长度至多为 d，则 $k[A]$ 有限，其合成因子均为 Q(B, M)，其中 B 是 A 的一个子商，而 M 是一个 k[Aut(B)]-单模。

首先，推论 6.5 表明 Q(A) 有限，且其合成因子为 Q(A, M)，其中 M 遍历所有 k[Aut(A)]-单模。由命题 6.1 和归纳假设可推出，Q_A 有限，其合成因子均为 Q(B, M)，其中 B 是 A 的一个子商，而 M 是一个 k[Aut(B)]-单模。

然后再次利用归纳假设和正合列得出结论

$$\bigoplus_{B\subsetneq A} k[B] \to k[A] \to Q_A \to 0$$

定义 Q_A 的 ′。 □

REMARQUE 10.7。——这一结果与不等特征的情形形成鲜明对比，也就是说，在这种情形下，阿贝尔群 $\mathcal{A}(x, y)$ 是 p-有限群，其中 p 是 k 的特征。此时很容易看出，若 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 上的有限函子，则 $k[A]$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 上的维数至少为 $\ell(A)$，特别是，只有当 A 为零时，它才是有限的。

COROLLAIRE 10.8。——范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 局部有限，当且仅当 Rep($\mathcal{A}$) 局部有限。

证明。——范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$（分别地，Rep($\mathcal{A}$)）局部有限，当且仅当对每个 $x \in$Ob $\mathcal{A}$，函子 $k[\mathcal{A}(x, –)]$ （分别地， $\mathcal{A}(x, –)$）都是有限的。因此结论由命题 10.6 得出。 □

REMARQUE 10.9. — 特别地，若 R 是 k-平凡环，则范畴 $\mathcal{F}(R, k)$ 是局部有限的。′此结果也见于 [8,

第 11.7] 条，作为推论 3.6 和 Putman-Sam-Snowden 的一个（困难的）定理的（简单）推论：该定理断言，对于任意有限环 A （不一定是 k-平凡的）， $\mathcal{F}(A,k)$ 都是局部诺特的。

还要注意，也可以利用 Auslander 关于 Rep($\mathcal{A}$) 中有限函子的经典结果，从前面的特殊情形推出推论 10.8。

为了给出命题 10.6 的其他推论，我们需要以下结果，它是对推论 8.12 的改进：

Proposition 10.10. — 对于任意 $d \in \mathbb{N}$， $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中包含 $k[A]$ （其中 A 属于 Rep($\mathcal{A}$) 且满足 $\ell(A) \leq d$）的最小局部化子范畴。

D ′证明。— 设 $\mathcal{C}_d$ 为包含 $k[A]$ 的 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的最小局部化子范畴，其中 $\ell(A) \leq d$。显然有 $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$。通过对 d进行归纳，证明包含关系的逆向成立。

函子 C_d 的取值落在 $\mathcal{C}_d$中，因为 Q^A 是 $k[A]$ 的子函子，而函子 $M \mapsto \mathrm{Q}^A{}_{,\ M}$ 是余连续的（由命题 5.4 和 5.3 得出）。定理 9.9 对 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 中的任意函子 F 给出一个正合列 $C_d(\pi_d(F)) \to F \to G \to 0$，其中 G属于 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\ k)$；由归纳假设可得 $= \mathcal{C}_{d-1} \subset \mathcal{C}_d$，因此 `u $F \in \mathcal{C}_d$，证明至此完成。 □

Corollaire 10.11. — 对任意 $d \in \mathbb{N}$，Grothendieck 范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的 Krull-Gabriel 维数为零，也就是说，它等于包含其所有简单对象的最小局部化子范畴。

证明。——结合命题 10.10 和 10.6。 □

Proposition 10.12. ——设 $d \in \mathbb{N}$。

1. 若 $d \leq 1$，则范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 局部有限。2. 若 $d \geq 2$，则以下断言等价：(a) 范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 局部有限；(b) 范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 局部诺特；(c) 范畴 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 局部诺特，且函子S_d 双连续；(d) 范畴 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 局部诺特，且函子 π_d 保有限生成对象；(e) 条件 (FE($\mathcal{A}$))（参见记号 9.3）成立。

证 ′明。—— 根据定理 9.9，范畴 $\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_0(\mathcal{A};k)$ 是局部有限的；由于 $\mathcal{F}_0(\mathcal{A};\ k)$ 归约为常值函子，并且

$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 中的每个函子都自然地分解为其常值项与其约化部分的直和，该范畴

(10)
$$\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)\simeq(\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_0(\mathcal{A};k))\times\mathcal{F}_0(\mathcal{A};k)\simeq(\mathcal{F}_1(\mathcal{A};k)/\mathcal{F}_0(\mathcal{A};k))\times(k\text{-}\mathbf{Mod})$$

同样是局部有限的，因此得到第一个断言。

现在我们将对 d 作归纳，证明第二个断言。

蕴含关系（a）⇒（b）显然成立。若（b）成立，则 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的局部化闭子范畴，且局部为诺特范畴。根据定理 9.9，截面函子可识别为 `a S_d ，因此必与滤过余极限交换（第 III 章，§4，命题 9] 的推论 1）。由于 S_d 是正合且连续的（命题 9.8），它是双连续的。因此，（b）推出（c）。

蕴含关系 (c) ⇒ (d) r´是由于 π_d 是函子 S_d的一个同构函子的 `左伴随函子 `。

如果范畴 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 是局部诺特的，那么根据归纳假设，或者根据命题 si $d=2$ 的第一个断言，它必然是有限的。

因此，等价关系 (c) ⇔ (e)´ 是由命题 9.8 推出的。

假设 (d) v´erifi´e。由于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 是局部有限生成的（如$\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$），为了 ´建立 ($a$)，只需证明 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)$ 中的每个有限型函子F都是有限的。$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\ k)$ 中的对象 $\pi_d(F)$ 是有限型的，因此是有限的，因为根据定理 9.9，该范畴是局部有限的。同一定理 9.9 给出了一个正合列 $C_d(\pi_d(F))\to F\to G\to 0$，其中 G 属于$\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\ k)$。作为 F 的商对象，G 是有限型的，因此是有限的，因为根据上述观察，$\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};\ k)$ 是局部有限的。此外，$\pi_d(F)$ 的有限性以及命题 10.6 表明 $C_d(\pi_d(F))$ 是有限的。因此，F 是有限的，由此得到蕴含关系 (d) ⇒(a)，命题得证。

□

Remarque 10.13. — 命题 10.12 和注记 9.6 表明，范畴 $\mathcal{F}_2(\mathcal{A};k)$ 不一定是局部有限的。

10.3. 有限函子的维数函数。— 命题 10.5 使我们能够在稍微一般一些的框架下解决 [8]，的一个猜想。我们先引入一些记号：

Notation 10.14. — 令 $k_0(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中对象的同构类所构成的交换幺半群（关于直和）。若 F 是一个取有限维值的 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 函子（例如有限生成函子），记 $\mathsf{d}_F:\ k_0(\mathcal{A})\ \to\mathbb{Q}$ 为函数，它将 $\mathcal{A}$ 中 $a\in$ Ob 的同构类映到 $F(a)$ 的 k-维向量空间的维数。

记 $\chi(\mathcal{A})$ 为 $\mathbb{N}^*$ 中由整除阿贝尔群 $\mathcal{A}(x,y)$ 的阶的自然数组成的子集合。由于 $\mathcal{A}$ 是可加的，它是 $\mathbb{N}^*$ 的一个乘法子幺半群。记 $\Xi(\mathcal{A})$ 为 ..... 的子 -$\mathbb{Q}$- 向量空间

由 $k_0(\mathcal{A})$ 到 $\mathbb{Q}$ 的函数构成的向量空间 $\mathbb{Q}^{k_0(\mathcal{A})}$，由以下复合函数生成：从阿贝尔群 $k_0(\mathcal{A})$ 到乘法幺半群 $\chi(\mathcal{A})$ 的幺半群态射与包含 $\chi(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 的复合。因此，它是 $\mathbb{Q}^{k_0(\mathcal{A})}$ 的一个子代数，其乘法取自陪域。

′( ) 的元素称为 Ξ-多项式。

Remarque 10.15。——由于 $\mathcal{A}$ 中对象的自同态环都是有限的，经典的 Krull-Schmidt 定理蕴含：若进一步假设幂等元在 ′ 中可分裂，则 `( $\mathcal{A}$) 是一个自由交换幺半群。特别地，当 $k_0$P($\mathcal{A}$) 时（即 ¨ 是一个 $\mathcal{A} =$ -平凡环），情况便是如此；此时，$R$(`) 中的群可识别为 R (P(k)) 的群完备化。我们有一个规范的幺半群态射 K(P(′))（将 K_0 映到自由模 R 的类），当 ` 非零时它是单射，而当 ′ 是局部环时它是双射。

Remarque 10.16. — 前面引入的定义对任意加法范畴（不一定是平凡的）都有意义。在这一一般框架下，值得注意的是，一个取有限维值的函子 F de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ ` 是次数为 ′ 的多项式函子，当且仅当函数 $\mathrm{d}_F : k_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}$ 按 Eilenberg–MacLane § 的意义是次数为 ′ 的多项式函数，因为对 $\mathcal{A}$ 中任意对象 x 和 a，均有 $\delta_{x(F)}([a]) = \mathrm{d}_F([x]+[a]) - \mathrm{d}_F([a])$。

然而，$\mathcal{F}(F)$ 不能表示为 F 的函数，因此下面的结果（其中我们回到类别 $\mathcal{A}$ 为 k-平凡的情形）并非显然。

Théorème 10.17. — 若 F 是属于范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ ` ′ 的有限函子，则函数 d_F 是一个 χ-多项式。

证明。— 若 A 是 Rep($\mathcal{A}$) 中的有限函子，则 $\mathrm{d}^{k[A]}$ 是交换幺半群态射，从阿贝尔群 $k_0(\mathcal{A})$ 到 $\mathbb{Q}$ 上的乘法幺半群 ¨；此外，其取值属于 $\chi(\mathcal{A})$ `，因为 A 是可表示函子 $\mathcal{A}(a, –)$ ′ 的商对象。因此 $\mathrm{d}_{k[A]} \in \Xi(\mathcal{A})$。由命题 4.9 可推出关系 $\mathrm{d}_{\mathrm{Q}_A} \in \Xi(\mathcal{A})$ ′。由于群 Aut(A) 在 $\mathrm{Q}_{\mathcal{A}}$ 上自由作用（见命题 5.4），若 M 是 Aut(A) 在 k 上的有限维表示，则有

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Q}_{A,M}} = \frac{\dim_k(M)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(A))}\, \mathrm{d}_{\mathrm{Q}_A}\ , \tag{11}$$

因此 `，$\mathrm{Q}_{A,\ M} \in \Xi(\mathcal{A})$。现在由命题 10.5 可得结论，因为 $\{F\} \mapsto_F$ ′ 定义了一个阿贝尔群同态 $G_0^f(\mathcal{F}_d(\mathcal{A};\ k)) \to_{\mathbb{Q}^{k_0(\mathcal{A})}}$。

□

Remarque 10.18. — 在这条注记中，我们回到加法范畴 $\mathcal{A}$ 任意（不一定是 k-平凡）的情形，并假设每个

从 Rep($\mathcal{A}/\mathcal{I}$) 到 $\mathcal{A}$ 的有限型且余有限型函子，当 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 k-余平凡理想时都是有限函子（例如，任意环 R 上的 $\mathcal{A} = \mathrm{P}(R)$）。由前述定理、推论 8.10、关于多项式函子维数函数的注记 10.16 以及 [8, 推论 4.11] 可得：若 F 是一个取值于 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中有限维对象的有限函子，则存在函数 $P\colon k_0(\mathcal{A}) \times k_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}$，它关于第一个变量是多项式的，关于第二个变量是 χ-多项式的，并且对任意 $x \in k_0(\mathcal{A})$，都有 $\mathrm{d}_F(x) = P(x, x)$。

Corollaire 10.19. — 设 p 为一个与 k 的特征不同的素数，R 为一个基数是 p 的幂的环。如果 F 是从 $\mathcal{F}(R, k)$ 到有限生成函子的函子，那么存在一个多项式 $P \in \mathbb{Q}[X]$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\dim_k(F(R^n)) = P(p^n)$。

这个结果由定理 10.17 以及推论 8.6 和 10.8 得出，证明了 [8] 的猜想 6.8——更确切地说，是一个略微弱化的版本，其中将取整数值的多项式函数替换为取有理数值的多项式函数（[8, 猜想 6.8] 的取整数值版本并不正合，因为式（11）中出现了分母）。

11. $\mathrm{F}_d(\mathrm{A}; k)$范畴的同调性质

对于任意 $d \in \mathbb{N}$，范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 都是 Grothendieck 范畴；特别地，它具有内包络。还可得：

Proposition 11.1.——设 $d \in \mathbb{N}$。范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 具有足够多的射影对象。此外，$\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中的每个有限型对象都具有射影覆盖。

证明。——设 F 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 中的一个有限生成函子。那么 $F^\vee$ 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}; k)$ 中的余有限型对象（推论 8.13）。因此，若 J 是 $F^\vee$ 在 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}; k)$ 中的一个内包络，则 J 是余有限型的，因而是一个取有限维值的函子。由此可知，$J^\vee$ 是 F 在 $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ 中的一个射影覆盖。由于范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 是局部有限生成的，其有限型对象具有射影覆盖这一事实，意味着它具有足够多的射影对象。□

Remarque 11.2。— ´(´; $\mathcal{F}_d$) 的一组射影对象生成元，出于形式上的原因，可以通过对函子 $\mathcal{A}(k, \grave{}\,)\mathcal{F}_d$ 应用包含 $\mathcal{A}(k; \hookrightarrow \mathcal{F})\,\mathcal{A}(k; k[\mathcal{A}]$ 的左伴随函子 a 来获得（也就是说，考虑它们属于 –[] ; `) 的最大商对象），其中 ´遍历 ` 的一个骨架。不过，我们尚不知道对这个伴随函子的简单描述。

然而，利用定理 9.9，可以看出，当 ´ 是 Rep(ˋ) 中满足 ^{A} (A) $\mathcal{F}_d$ 的一个函子时，Q$\mathcal{A}$（分别为 Q k）在 A ($\mathcal{A}$; ℓ) 中是射影对象（分别为内射对象）。

本截面函子关于 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 类别的下一个结果（推论 11.4）取决于阿贝尔类别的以下一般性质。

Proposition 11.3。——设 $\mathcal{F}$ 为一个 Grothendieck 范畴， $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个局部化子范畴，且其具有足够多的投射对象； $\mathcal{E}'$ 为 $\mathcal{E}$ 的一个双局部化子范畴。假设：

1. 包含 $\mathcal{E}' \to \mathcal{F}$ 是一个同调嵌入；2. 截面函子 $s : \mathcal{E}/\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 是正合的；2^*. 余截面函子 $c : \mathcal{E}/\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 是正合的；3. 由 s 和包含 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 复合而成的函子 $\mathcal{E}/\mathcal{E}' \to \mathcal{F}$ compos ´ 是一个同调嵌入；3^*. 由 c 和包含 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 复合而成的函子 $\mathcal{E}/\mathcal{E}' \to \mathcal{F}$ compos ´ 是一个同调嵌入；4. 如果 X 是 $\mathcal{E}'$ 的一个对象，且 T 是 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 的一个对象，那么 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(X, s(T)) = 0$ ；4^*. 如果 X 是 $\mathcal{E}'$ 的一个对象，且 T 是 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 的一个对象，那么 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(c(T)$ $X) = 0$。因此，包含 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是一个同调嵌入。

.

证明。——首先证明包含 $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 是一个同调嵌入。设 $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ 是包含函子 ˋ的右伴随函子：形如$\alpha(J)$的对象，其中ˋu J 是 $\mathcal{E}'$中的内射对象，构成 $\mathcal{E}'$ 的一类内射余生成元，因此只需验证，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$、 $\mathcal{E}'$ 中的任意对象 X 以及 $\mathcal{E}$中的任意内射对象 J ，均有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(X, \alpha(J)) = 0$。

此外，若记 $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 为典范函子，则对 $\mathcal{E}$ 中的任意对象 T ，都有一个自然正合列

$$0 \to \alpha(T) \to T \to s\pi(T) \to \beta(T) \to 0 \tag{12}$$

其中 $\beta(T)$属于 $\mathcal{E}'$（例如参见 [26, 命题 2.6 (ii)]）。记 $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{E}}(\beta(T)\ \alpha(T)$中的扩张 (12) 的类为 $h(T)$。若 $n > 0$是一个整数，且 J是 $\mathcal{E}$中的内射对象，则 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}$ $(-, J) = 0$，而 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(-, s\pi(J))$ 到 $\mathcal{E}'$的限制也为零，这是因为同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(X, s\pi(J)) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}/\mathcal{E}'}(\pi(X), \pi(J)) \tag{13}$$

对象 X 的自然性由 $\mathcal{E}$ d´eduitde 正合函子 π 和 s 之间的伴随（假设 ˋ2.）推出。因此，与 $h(J)$ 进行复合乘积定义了一个同构

$$\cdot h(J) : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(X, \beta(J)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathcal{E}}(X, \alpha(J)) \tag{14}$$

对于 X 中的任意对象 $\mathcal{E}'$、 $\mathcal{E}$ 中的任意内射对象 J 以及任意整数 $n > 0$。但由于 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个厚子范畴，典范态射 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(X, \alpha(J)) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(X, \alpha(J))$ 对 $i \leq 1$ 是双射，对 $i = 2$ 是内射的。

根据假设 1，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(X,\alpha(J)) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}'}(X,\alpha(J))$，因此，对于 $\mathcal{E}$ 中的内射对象J以及 $\mathcal{E}'$ 中的 X，有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(X,\alpha(J)) = 0$，其中 $i \in \{1,2\}$。特别地，$h(J) = 0$，因此由 (14) 可知，对于 $n>0$，也有 $\mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathcal{E}}(X,\alpha(J)) =0$。最后，当 X 属于 $\mathcal{E}'$ 且 J 是 $\mathcal{E}$ 中的一个内射对象时，对于任意整数 $i>0$，确实有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(X,\alpha(J)) = 0$。这就完成了对包含 $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ 是一个同调嵌入的证明。

利用假设 1.，可知典范态射 $\mathrm{i}(X,Y) : \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(X,Y)$ 在 X和 Y属于 $\mathcal{E}'$ 时是双射。

此外，当 Y属于 s 的本质像时，$\mathrm{i}(X,Y)$ 是双射；设该本质像为 $Y \simeq s(A)$。这由以下一系列同构可得：

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}}(X,s(A)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{E}/\mathcal{E}'}(\pi(X),A) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(s\pi(X),s(A)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(X,s(A))$$

其中，第一个由假设 2. 推出，第二个由假设 3. 推出，第三个由假设 4. 和正合列 (12)（取 $T=X$ 应用）推出。

现在，当 X 属于 $\mathcal{E}'$ 时，$\mathrm{i}(X,Y)$ 是双射。这可由以下情形及正合列 (12)（取 $T=Y$ 应用）得出：Y 也属于 $\mathcal{E}'$ 的情形、Y 属于 s 的本质像的情形；这两种情形此前均已处理。

用对偶方式证明（分别使用假设 2^*、3^* 和 4^*，代替 2、3 和 4），当 Y 属于 $\mathcal{E}'$ 时，$\mathrm{i}(X,Y)$ 是双射。

一般情形可由 Y 属于 $\mathcal{E}'$ 的情形，以及 Y 属于函子 s `的本质像的情形推出；利用正合列 (12)（取 $T=Y$ 应用）即可得到命题。

□

Corollaire 11.4. — 对任意 $d \in \mathbb{N}$，包含 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 是一个同调嵌入。

证明。— 对 d 作归纳推理（当 $d<0$ 时断言为空，当 $d=0$ 时断言显然），可以假设已证明包含 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 是一个同调嵌入。

证明命题 11.3 的假设对于 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$、$\mathcal{E} = \mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 和 $\mathcal{E}' = \mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 成立。首先，根据命题 8.8 和 11.1，$\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ 的一个双局部化子范畴，且具有足够多的射影对象；$\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A};k)$ 是 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)$ 的一个双局部化子范畴。命题 11.3 的第一个假设正是我们的归纳假设；接下来，我们只验证命题 11.3 的假设 2、3 和 4，因为假设 2^*、3^* 和 4^* 的证明完全类似。

假设 2. 根据定理 9.9 和命题 5.4 得到验证。命题 9.12.2 和定理 9.9 推出假设 3. 也得到验证。最后，命题 9.10 和定理 9.9 表明假设 4. 得到验证，由此得出结论。

□

Remarque 11.5. — 前一个命题应与某一特定次数的多项式函子嵌入到从一个小型加性范畴（我们不假设它是 k-平凡的！）到 k-向量空间的所有函子范畴中的同调行为相对照：如果 k 的特征为零，那么该包含总是一个同调嵌入，但一般而言并非如此，参见 [3]。另一方面，将次数为 ´ 的多项式函子嵌入到定义在有限生成自由群上的所有函子范畴中，总是一个同调嵌入，参见 [4]。

我们回顾一下，Grothendieck 范畴的全局维数是由下式定义的元素 gldim($\mathcal{E}$)：$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中的 ´el´ément

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n > \mathrm{gldim}(\mathcal{E})) \Leftrightarrow (\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}} = 0) \ .$$

Proposition 11.6. — 假设域 k 的特征为零。那么对任意整数 $d \geq 1$，范畴 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 的全局维数有限，且至多等于 $2(d-1)$。

证明。— 阿贝尔范畴的粘合

$$(\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k), \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k), \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k))$$

v´ 满足 [26] 中命题 4.15 的假设 (iv)。事实上，包含函子 $\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k) \hookrightarrow \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 由推论 11.4 可知是一个同调嵌入，而截面函子 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)) \to \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 根据定理 9.9 和命题 5.4 是正合的。因此，只需使用 [26, 命题 4.12]，即可看出 [26, 命题 4.15] 适用于我们的粘合，由此

$$\mathrm{gldim}(\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)) \leq \mathrm{gldim}(\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)) + \mathrm{gldim}(\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)) + 2 \ ,$$

或者，当 k 的特征为零时，由定理 9.9 可得 $\mathrm{gldim}(\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)/\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{A}; k)) = 0$。结合等价关系 (10)，这也给出了等式 $\mathrm{gldim}(\mathcal{F}_1(\mathcal{A}; k)) = 0$，从而可以通过对 d 作归纳来完成证明。 □

Remarque 11.7. — 前述命题可与一个关于有限型自由群到 k-向量空间的次数至多为 d 的多项式函子的结果相比较：当 k 的特征为零时，它们构成一个整体维数为 $d-1$ 的范畴，参见命题 4.6]。不过，与 [4], 的情形相反，要通过确定 $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ 的确切整体维数来具体说明命题 11.6，似乎并不容易；无论如何，该维数取决于 $\mathcal{A}$。例如，对于 $d > 1$，整体维数为零当且仅当范畴 Rep($\mathcal{A}$) 是半单的；这可由推论 1.3] 得出（反向结论则见例4.2）。

附录 A. 阿贝尔范畴的回顾

本附录汇集了阿贝尔范畴中的一些经典定义和性质；更多细节可参阅，尤其是 [12, 24], 。

（双）局部化子范畴与粘合。——格罗滕迪克范畴是余完备的阿贝尔范畴，其中滤过余极限是正合的，且具有一个生成元；这类范畴是完备的，并且存在内包，尤其可以在其中进行同调代数。本文中出现的所有函子范畴都是格罗滕迪克范畴。

阿贝尔范畴 的子范畴 称为厚子范畴，若它是满子范畴，且对子对象、商对象和扩张封闭；此时可定义商范畴 ，它本身也是阿贝尔范畴，是通过形式地将 的核和余核属于 的态射取为可逆态射而得到的局部化。于是有一个典范正合函子 ；若此函子有右伴随函子（分别有左伴随函子），则 称为局部化（分别称为余局部化），该伴随函子称为截面函子（分别称为余截面函子）。厚子范畴 称为双局部化的，若它既是局部化的，又是余局部化的。格罗滕迪克范畴的厚子范畴是局部化的，当且仅当它对任意余积封闭；此时它也是格罗滕迪克范畴， 与 也如此。格罗滕迪克范畴的厚子范畴是余局部化的，当且仅当它是双局部化的，这又等价于它对任意积封闭。

一个阿贝尔范畴的粘合 $(\mathcal{E}', \mathcal{E}, \mathcal{E}/\mathcal{E}')$ 是指一个阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$、一个双局部化子范畴 $\mathcal{E}'$ ，以及连接范畴 $\mathcal{E}'$、 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 的各个典范函子；关于此事的更多细节，参见 § 2]。阿贝尔范畴的粘合似乎最早明确出现在文章 [17], 中，该文讨论了有限域 k 上的范畴 (k, k)。粘合的用途之一在于：若 $\mathcal{E}'$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$ 的一个双局部化子范畴，则可以根据 $\mathcal{E}'$ 和 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 的简单对象，描述 $\mathcal{E}$ 、的简单对象（即非零但没有非平凡子对象的对象）。

阿贝尔范畴中的有限性性质（参见 [24, § 5.7]）。——Grothendieck 范畴中的对象 X 称为有限型对象，若函子 $\mathrm{Hom}(X, -)$ 与单态射的滤过余极限可交换；这′等价于说，任意递增滤过子对象族，其上确界为 X ，都包含 X [24, 第 3 章，命题 5.6]。

若阿贝尔范畴中的对象 X 的每个交为 0 的递降滤过子对象族都包含 0，则称 X 为余有限型对象。若每个递增（分别为

递降）子对象列最终稳定，则称对象为诺特对象（分别为阿廷对象）。若一个对象既是阿廷对象又是诺特对象，则称其具有有限长度，或简称为有限对象。若一个对象非零且不含非零真子对象，则称其为单对象。经典结论是，对象 X 有限，当且仅当它存在一个有限滤过，其子商均为单对象；这种滤过的长度称为 X 的长度，记作 $\ell(X)$。因此，$\ell(X) = 0$（分别为 1）当且仅当 X 为零（分别为单对象）。若 X 不是有限对象，则约定 $\ell(X) = \infty$。

若一个阿贝尔范畴由其诺特对象（分别为有限型对象）生成，则称其为局部诺特的（分别为局部有限的）。

以下结果可通过对 $\ell(X)$ 进行归纳轻易证明。

PROPOSITION A.1. —— 设 $\mathcal{E}$ 为一个阿贝尔范畴，X 为 $\mathcal{E}$的一个对象。假设 X 是有限的，并且 X 的所有单对象子商的自同态环都是有限的。那么，X 的子对象集合是有限的。

参考文献

[1] M. AUSLANDER – ≪Artin代数的表示理论。I、II ≫，《交换代数通讯》1（1974），第177–268页；同上，1（1974），第269–310页。
[2] N. BOURBAKI – ′数学基础。代数。第8章。半单模与环，Springer，柏林，2012年；1958年版的第二次修订版。[3] A. DJAMENT – ≪ 扩张群与多项式函子 ≫，《伦敦数学会杂志》第二辑，92（2015），第1期，第63–88页（法文）。[4] A. DJAMENT, T. PIRASHVILI & C. VESPA – ≪自由群上多项式函子的上同调 ≫，《数学文献》21（2016），第205–222页（英文）。
[5] A. DJAMENT & A. TOUZÉ – ≪加性范畴上的函子同调 ≫，预印本，见 https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal- 03432824。[6] A. DJAMENT & A. TOUZÉ – ≪加性范畴上函子的同调有限性及其应用 ≫，《美国数学会汇刊》376（2023），第2期，第1113–1154页（法文）。[7] A. DJAMENT & A. TOUZÉ – ≪关于多项式函子局部诺特性的研究 ≫，《突尼斯数学杂志》6（2024），第1期，第97–113页。[8] A. DJAMENT, A. TOUZÉ & C. VESPA – ≪加性范畴上的Steinberg型分解 ≫，《高等师范学校科学年刊》（第4辑）56（2023），第2期，第427–516页。[9] A. DJAMENT & C. VESPA – ≪ 弱多项式函子 ≫，《国际数学研究通知》IMRN（2019），第2期，第321–391页。

[10] S. Eilenberg & S. Mac Lane – ≪ 关于群 $H(\Pi, n)$。II. 计算方法 ≫, 《数学年刊》（第2辑）60（1954），第49–139页。[11] V. Franjou & A. Touzé（编）– 函子同调讲义。2012年4月在法国南特举行的函子同调会议论文集，《数学进展》，第311卷，Cham：Birkhäuser/Springer，2015年（英文）。[12] P. Gabriel – ≪ 阿贝尔范畴 ≫, 《法国数学会通报》90（1962），第323–448页。[13] T. Gaujal – ≪非等特征下有限线性群的泛表示研究 ≫，博士论文，里尔大学，2022年。[14] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – ≪Steenrod代数上的不稳定模范畴与不稳定代数范畴（模掉幂零对象） ≫, 《美国数学杂志》115（1993），第5期，第1053–1106页。[15] L. G. Kovács – ≪有限域上全矩阵半群的半群代数 ≫, 《美国数学会会刊》116（1992），第4期，第911–919页。[16] N. J. Kuhn – ≪有限一般线性群与Steenrod代数的泛表示。I ≫, 《美国数学杂志》116（1994），第2期，第327–360页。[17] , ≪有限一般线性群与Steenrod代数的泛表示。II ≫, K-理论 8（1994），第4期，第395–428页。[18] , ≪有限一般线性群与Steenrod代数的泛表示。III ≫, K-理论 9（1995），第3期，第273–303页。[19] , ≪非定义特征下有限域的泛表示理论 ≫, 《数学进展》272（2015），第598–610页。[20] ~~B. Mi~~tchell – ≪ 具有多个对象的环 ≫, 《数学进展》8（1972），第1–161页。[21] R. Nagpal – ≪ 非定义特征下的VI-模。I ≫, 《代数与数论》13（~~2019~~），第9期，第2151–2189页（英文）。[22] , ≪非定义特征下的VI-模。II ≫, 《莱茵应用数学杂志》781（2021），第187–205页（英文）。[23] T. I. Pirashvili – ≪ 多项式函子 ≫, 《格鲁吉亚苏维埃社会主义共和国科学院拉兹马泽数学研究所学报》91（1988），第55–66页。[24] N. Popescu– 阿贝尔范畴及其在环与模中的应用，学术出版社，伦敦-纽约，~~1973~~年，伦敦数学会专著，第3号。[25] G. M. L. Powell – ≪泛表示理论中不可分解内射对象的结构 ≫, 《美国数学会汇刊》350（1998），第10期，第4167–4193页。[26] C. Psaroudakis – ≪阿贝尔范畴拼接的同调理论 ≫, 《代数杂志》398（2014），第63–110页（英文）。[27] A. Putman & S. V. Sam – ≪表示稳定性与有限线性群 ≫, 《杜克数学杂志》166（2017），第13期，第2521–2598页。

[28] S. V. Sam & A. Snowden – ≪Gr¨组合范畴表示的 Gröbner 方法 ≫, 《美国数学会杂志》30（2017），第1期，第159–203页。