arXiv:2305.02585v1 [math.OC] 4 May 2023

$\mathbb{L}^\infty/\mathbb{L}^1$ 最优控制问题中的对偶性结果

Dan Goreac[1,2] 和 Alain Rapaport[3]

[1]山东大学数学与统计学院，中国山东威海 264209[2]古斯塔夫·埃菲尔大学 LAMA 实验室、巴黎东克雷泰伊大学（UPEM）、法国国家科学研究中心（CNRS），法国马恩拉瓦莱 F-77447 电子邮箱：dan.goreac@univ-eiffel.fr

[3]蒙彼利埃大学、法国国家农业食品与环境研究院（INRAE）、农业研究院（Institut Agro），法国蒙彼利埃 34060 电子邮箱：alain.rapaport@inrae.fr

2023年5月5日

摘要

我们给出一个对偶性结果，将带有上确界成本 H 且满足等周不等式 $G \leq g_{max}$的控制问题的值函数，与具有相同受控动力学、成本为 G 且带有状态约束 $H \leq h_{max}$ 的问题的值函数联系起来。对于能够保证值函数下半连续性的初始条件，我们证明了这一对偶性，并进一步讨论了最优性。此外，我们给出了动力学的结构性假设，在这些假设下可以建立这种正则性。作为附带结果，我们阐明了近期关于在峰值或预算限制下非药物干预控制的传染病研究之间的部分等价性。

关键词。 最优控制， L^∞ 成本，等周不等式，状态约束，值函数，对偶性。

1 引言

本文中，给定一个定义在某个欧几里得空间上的受控系统，其解记为 $x^{x_0,\ u}$ 初始条件为 x_0 ，控制为 $u(\cdot)$，我们重点研究满足等周（或面积）不等式的 $\mathbb{L}^\infty$-成本问题的对偶性

$$\overline{V}(x_0;g_0) := \inf_{u(\cdot)} \sup_{t\geq 0} h(x^{x_0,u}(t)) \quad \text{subject to} \quad \int_0^\infty g(x^{x_0,u}(t))dt \leq g_0,$$

以及状态约束下总面积的优化，即。

$$\underline{V}(x_0;h_0) := \inf_{u(\cdot)} \int_0^\infty g(x^{x_0,u}(t))dt \quad \text{subject to} \quad \sup_{t\geq 0} h(x^{x_0,u}(t)) \leq h_0.$$

The 将在以下各节中给出精确的表述和假设。
即使不施加等周约束， $\mathbb{L}^\infty$ 问题仍然特别难以处理，尤其是在寻求最优控制时。对于有限时域，已有研究提出动态规划方法（例如 [2]），将值函数刻画为相应 Hamilton-Jacobi 方程的黏性解。另一方面，处理运行成本问题或许更为容易，即使存在状态约束也是如此，尽管这需要对描述约束的区域施加结构条件（例如参见 [12], [6], [8], [7], [4]）。此外，这类问题属于庞特里亚金最大值原理的适用范围，因此更有可能找到最优性的候选解。

从这一角度来看，建立上述两个问题的值函数之间的联系具有重要意义，尤其是在此基础上还能建立最优控制之间的联系时。

有鉴于此，我们在定理 4 中陈述的主要结果表明，值函数V 和 $\overline{V}$ 互为（广义）逆函数。这一结论是在自然的下半连续性假设下得出的。此外，其中一个问题的最优控制若具有唯一性，则同一控制量对于另一个问题也具有最优性。由此便确立了这两种表述之间的对偶性。

本研究确实受到两项互补研究成果的启发，这些成果均致力于研究一种流行病学模型。

1. 在近期论文 [1], 中，作者结合 SIR 模型，考虑了一个预算泛函最小化问题，该泛函对应于某个 g 运行成本函数，同时将感染峰值限制在与 ICU 相关的某个上限约束之下，即 $h(s,\ i) := i \leq i_{\max}$ （另见 [10]）。控制参数取自某个紧集 $U := [0, u]$ ，该集合涵盖从不实施限制到实施最大可接受限制的政策u。对于运行成本 $g(s,\ i,\ u) := u$的一种特定选取，文献 [1] 证明，只有当轨迹到达与 $i_{\max}$ 约束相关的可行核边界时才起作用的“贪心”控制，是唯一的最优控制。关于几何性质和 Hamilton–Jacobi 方法的进一步见解见 [9]。

2. 另一方面，在 [11], 中，作者考虑了一个互补的对偶问题。他们旨在给定预算约束的情况下，尽可能降低感染峰值。利用受 Green 启发的技术， [11, 命题 2] 的主要结果直接证明了同类型贪心策略的最优性。分析仅限于矩形区域$\left[0, \beta^{\gamma}/(1-a)\right] \times [0, i_{\max}]$；其角点（$\beta^{\gamma}/(1-a)\, i_{\max}$）大致对应于最大限制环境下的无病平衡（DFE）（对应于政策 u）。

作为我们对偶性结果的一个副产品，我们在第 4 节中为以下问题中的贪心控制的最优性提供了另一种证明：在给定预算约束的情况下，控制感染峰值。 这仅仅是对我们在开篇论述中所强调范式的一种说明：先验上更难的控制问题 V 可以约化为 $\overline{V}$，从而可以应用庞特里亚金论证。如果最优控制是唯一的，那么根据定理 4，它同样也是 V 的一个最优控制。

本文结构如下。第2节将明确动力学、关于数据的假设以及控制问题的精确定式。特别强调根据值函数的支撑域刻画生存核。主要

成果见第3节。一方面，在下半连续性假设下，我们在定理 4中给出了连接两个问题的值函数与最优控制的对偶性结果。另一方面，我们在第3.2节中明确了动力学所需满足的具体假设，在这些假设下可以实现这种下半连续性。第4节将通过带有非药物干预的SIR模型，说明主要结果的影响。

2 预备知识

2.1 动力学与假设

在本文中，我们将研究受控动力学

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \text{a.e. } t \geq 0; \\ x(0) = x_0 \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $n \in \mathbb{N}^*$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集，并且我们假设 Ω 的内部非空。我们要求满足以下标准假设。

假设 1

1. 控制空间 U 是一个紧度量空间（的子集）。博雷尔可测函数族 $\mathbb{L}^0(\mathbb{R};\ U)$ $u\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow U$ 将称为可容许控制策略。

2. 映射 $f\colon \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$ 是连续的，并且关于状态变量 x 是 $[f]_1$-*Lipschitz* 连续的，且相对于控制 u 一致，即

$$[f]_1 := \sup_{u\in U} \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|f(x,u) - f(y,u)|}{|x-y|} < +\infty.$$

3. 函数 $h : \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $g : \Omega \times U \to \mathbb{R}_+$ 有界一致连续，且关于状态变量 x 是 *Lipschitz* 连续的，并且关于控制 u 一致，即。

$$\sup_{u\in U} \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|g(x,u) - g(y,u)| + |h(x) - h(y)|}{|x-y|} < +\infty.$$

我们将用 $g_\infty :=$ 上确界 $g(x,\ u)$。$_{(x,u)\in\Omega\times U}$

4. 集合 Ω 是正向不变的，即方程 (1) 的任意解 $x(\cdot)$ 满足 $x_0 \in \Omega$ 验证 $x(t) \in \Omega$，对于任意 $t \geq 0$。

在此假设下，系统 (1) 存在唯一的绝对连续解，记为 $x^{x_0,\ u}(\cdot)$，适用于 $x_0 \in \Omega$ 和 $u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R};\ U)$。

2.2 控制问题

考虑带有额外标量分量 z 的扩展动力学，该分量对运行成本进行积分，即

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ \dot{z}(t) = g(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0 \in \Omega,\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R} \end{cases}
$$

其解记为 $(x^{x_0,\ u}(\cdot)\ z^{x_0,\ z_0,\ u}(\cdot))$。

我们再次说明，我们的目标是处理这样一类问题：在满足面积上界的同时最小化运行最大值，或者反过来，在对轨迹施加运行约束的同时最小化面积量。在此背景下，针对新引入的控制系统，我们将参数化可行核定义如下。

(3)
$Viab_h(h_0) := \{x_0 \in \Omega :\ \exists u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+;\ U);\ h(x^{x_0,u}(t)) \le h_0,\ \forall t \ge 0\}$,$Viab_g(g_0) := \{x_0 \in \Omega :\ \exists u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+;\ U);\ z^{x_0,0,u}(t) \le g_0,\ \forall t \ge 0\}$,$Viab_{hg}(h_0, g_0) := \big\{x_0 \in \Omega :\ \exists u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+;\ U);\ h(x^{x_0,u}(t)) \le h_0,\ z^{x_0,0,u}(t) \le g_0,\ \forall t \ge 0\big\}$.

注 1

1. 读者会注意到，$Viab_h$（h_0）是使 h上的上界 h_0 得以保持的最大初始 x_0 集合。此类集合是正向时间可行的。

2. 第二个集合 $Viab_g$（g_0）本身并不是可行性核。要使其成为可行性核，应将 z 与初始数据 z_0 一并考虑，而不是与0一并考虑。但是，

$$
Viab_g(g_0) = \big\{x_0 \in \Omega :\ \exists u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U), \exists z_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ s.t. } z^{x_0,z_0,u}(t) - z_0 \le g_0,\ t \ge 0\big\}.
$$

从这个角度来看，初始数据 z_0 也起到控制的作用。

3. 对于 $Viab_{hg}$，类似的断言同样成立。

4. 尽管这显而易见，我们还是要指出，$Viab_h, Viab_g$ 作为集值映射具有单调性（偏序由集合包含关系给出）。若考虑由$h_0 \le h_0'$和$g_0 \le g_0'$定义的序关系 $(h_0, g_0) \prec (h_0', g_0')$，那么对于集值映射 $Viab_{hg}$ 也可以给出类似的断言。

我们首先考虑带有状态约束的最优问题。

问题 1 给定 $x_0 \in \Omega$ 和 $h_0 \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{array}{rlll} \underline{\mathcal{P}}(x_0; h_0): & \text{minimize} & \underline{J}(x_0, u) := \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x^{x_0,u}(t), u(t))dt \\ & \text{over} & u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U), \\ & \text{s.t.} & h(x^{x_0,u}(t)) \le h_0,\ \forall t \ge 0. \end{array}
$$

值函数记为 $V(x_0; h_0)$，当满足约束的控制量集合为空时，将其设为 $+\infty$。

我们考虑带有积分约束的对偶问题。

问题2 给定 $x_0 \in \Omega$ 和 $g_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}(x_0; g_0): \quad \text{minimize} \quad & \overline{J}(x_0, u) := \sup_{t \geq 0} h(x^{x_0,u}(t)) \\ \text{over} \quad & u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U), \\ \text{s.t.} \quad & \int_0^{+\infty} g(x^{x_0,u}(t), u(t))dt \leq g_0. \end{aligned}$$

值函数记为 $V(x_0; g_0)$；当满足约束的控制量集合为空时，将其设为 $+\infty$

以下将可行核映射 V_{hg} 的偏逆记为

$$\begin{aligned} Viab_{hg}^{-g}(x_0; h_0) &:= \{g_0 \in \mathbb{R}_+ \,;\, x_0 \in Viab_{hg}(h_0, g_0)\}, \\ Viab_{hg}^{-h}(x_0; g_0) &:= \{h_0 \in \mathbb{R} \,;\, x_0 \in Viab_{hg}(h_0, g_0)\} \end{aligned}$$

于是，可以提出以下几点观察。

备注 2

1. 使用可行核的记号，并将 $Viab_{hg}$ 解释为集值映射，我们的问题归结为求解

$$\begin{cases} \underline{V}(x_0; h_0) & = \inf Viab_{hg}^{-g}(x_0; h_0), \\ \overline{V}(x_0; g_0) & = \inf Viab_{hg}^{-h}(x_0; g_0). \end{cases} \tag{4}$$

这也使得如下事实变得合理：当要对其应用 下确界 算子的集合为空时，我们将 $+\infty$ 设为函数值。

2. 此外，我们还有

$$\begin{cases} Dom(\underline{V}(x_0; \cdot)) & = \bigcup_{h_0 \in \mathbb{R}} Dom\big(Viab_{hg}^{-g}(x_0; h_0)\big), \\ Dom\big(\overline{V}(x_0; \cdot)\big) & = \bigcup_{g_0 \in \mathbb{R}_+} Dom\big(Viab_{hg}^{-h}(x_0; g_0)\big), \end{cases} \tag{5}$$

其中，按照惯例，集值映射 $F: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ 的定义域 $Dom(F)$ 是满足 $F(\theta) \neq \emptyset$ 的点 $\theta \in \mathbb{R}$ 所构成的集合。特别地，前面引入的可行性核 $Viab_{hg}$ 对这两个定义域给出了完整的描述。为了方便读者，我们选择保留诸如 $Dom(V(x_0; \cdot))$ 这样的记号。

3. 由于 g 和 h 是有界函数，因此函数 $V(x_0; \cdot)$、 $\overline{V}(x_0; \cdot)$ 在其定义域上有界。

让我们开始吧。并介绍这两个值函数的一些基本且显而易见的性质。

命题 3 设 $x_0 \in \Omega$。

1. $\overline{V}(x_0; \cdot)$ 和 $\underline{V}(x_0; \cdot)$ 均为非增函数。

2. 如果 $V(x_0;\ \cdot)$，分别地，$V(x_0;\ \cdot)$是下半连续的，那么它在其定义域上是右连续的。

证明。设 $g_0 \le g_{0'}$ 和 $u(\cdot)$ 是一个可测控制，满足 $\int_0^{+\infty} g(x^{x_0,u}(t)\ u(t)) \le g_0$，则必有 $\int_0^{\infty} g(x^{x_0,u}(t)\ u(t)) \le g_{0'}$，这意味着 $V(x_0; g_{0'}) \le V(x_0; g_0)$。类似的论证表明，$V(x_0;\cdot)$是非递增的。

由单调性可知，若 $h_0 \in Dom(\underline{V}(x_0;\ \cdot))$，则 $[h_0, \infty) \subset Dom(\underline{V}(x_0;\cdot))$，并且有

$$\liminf_{h \to h_0+} \underline{V}(x_0; h) \le \underline{V}(x_0; h_0).$$

在进一步假设 $V(x_0;\cdot)$ 在 h_0 处下半连续的条件下，可得

$$\liminf_{h \to h_0+} \underline{V}(x_0; h) = \underline{V}(x_0; h_0),$$

也就是说，$V(x_0;\cdot)$ 在 h_0 处右连续。关于 $V(x_0;\cdot)$ 的性质可用同样的方法证明。

■

3 主要结果

我们首先证明，当值函数 V、$\underline{V}$ 下半连续时，问题 $\overline{\mathcal{P}}$ 与 $\mathcal{P}$ 之间可以建立对偶性。接着，我们给出这些值函数半连续的充分条件。

3.1 对偶性结果

本文中联系问题 $\mathcal{P}$ 与 $\overline{\mathcal{P}}$ 的主要结果归纳如下。

定理 4 设 $x_0 \in \Omega$。

1. 若 $\overline{V}(x_0;\cdot)$ 在 $g_0 \in \mathbb{R}_+$ 处右连续，则对于任意满足 $V(x_0; h_0) \le g_0$ 的 $h_0 \in \mathbb{R}$，有 $V(x_0; g_0) \le h_0$。若 $V(x_0;\ \cdot)$ 在 $h_0 \in \mathbb{R}$ 处右连续，则对于任意满足 $V(x_0; g_0) \le h_0$ 的 $g_0 \in \mathbb{R}_+$，有 $V(x_0; h_0) \le g_0$。

2. 如果函数 $\overline{V}(x_0;\cdot)$ 和 $\underline{V}(x_0;\cdot)$ 在其定义域(5)上是下半连续的，那么 V 和 $\overline{V}$ 互为广义逆，即

$$(6) \qquad \begin{cases} \underline{V}(x_0; h_0) = \inf\left\{g_0 :\ \overline{V}(x_0; g_0) \le h_0\right\},\ \ h_0 \in Dom(\underline{V}(x_0;\cdot)); \\ \overline{V}(x_0; g_0) = \inf\left\{h_0 :\ \underline{V}(x_0; h_0) \le g_0\right\},\ \ g_0 \in Dom\big(\overline{V}(x_0;\cdot)\big). \end{cases}$$

3. 设 h_0 满足 $V(x_0; h_0) < +\infty$ 且 $V(x_0;\ \cdot)$ 是下半连续的。设

$$\underline{h}_0 := \inf\left\{h_0' :\ \underline{V}(x_0; h_0') = \underline{V}(x_0; h_0)\right\}, \quad g_0 := \underline{V}(x_0; h_0) = \underline{V}(x_0; \underline{h}_0).$$

如果 u^* 是问题 $\mathcal{P}(x_0; h_0)$ 的最优解，那么 u^* 是问题 $\mathcal{P}(x_0; g_0)$ 的最优解。

4. 特别地，如果问题 $\mathcal{P}(x_0;h_0)$ 存在唯一的最优控制 u^*，那么 u^* 对问题 $\mathcal{P}(x_0;g_0)$ 是最优的，其中

$$g_0 := \underline{V}\left(x_0; \sup_{t\geq 0} h\big(x^{x_0,u^*}(t)\big)\right)$$

5. 设 g_0 使得 $V(x_0;g_0) < +\infty$ 和 $V(x_0;\cdot)$ 是下半连续的。假设

$$\underline{g}_0 = \inf\left\{g_0' \geq 0 \ : \ \overline{V}(x_0;g_0') = \overline{V}(x_0;g_0)\right\}, \quad h_0 := \overline{V}(x_0;g_0) = \overline{V}(x_0;\underline{g}_0).$$

若 u^* 是问题 $\mathcal{P}(x_0;g_0)$ 的最优解，则 u^* 是问题 $\mathcal{P}(x_0;h_0)$ 的最优解。

6. 特别地，若问题 $\mathcal{P}(x_0;g_0)$ 存在唯一的最优控制 u^*，则 u^* 是问题 $\mathcal{P}(x_0;h_0)$ 的最优解，其中

$$h_0 := \overline{V}\left(x_0; \int_0^{+\infty} g\big(x^{x_0,u^\star}(t),u^\star(t)\big)dt\right).$$

证明。

1. 假设 $V(x_0;h_0) \leq g_0 < +\infty$ 对于 $h_0 < +\infty$。特别地，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个可容许控制 u^ε，使得 $\int_0^\infty g\big(x^{x_0,u^\varepsilon}(t),u^\varepsilon(t)\big)dt \leq V(x_0;h_0) + \varepsilon \leq g_0 + \varepsilon$，且 $h\big(x^{x_0,u^\varepsilon}(t)\big) \leq h_0$, 对所有 $t \geq 0$ 均成立。于是，根据定义，$V(x_0;g_0+\varepsilon) \leq h_0$。由 $V(x_0;\cdot)$ 在 g_0 处的右连续性可得结论。其余断言的证明方式相同。

2. 根据命题 3 和第 1 点，$g_0 = V(x_0;h_0)$ 蕴含 $V(x_0;g_0) \leq h_0$。因此，要证明

$$\underline{V}(x_0;h_0) = \inf\left\{g_0' : \ \overline{V}(x_0;g_0') \leq h_0\right\}$$

我们只需证明不等式 $\geq$。我们用反证法，假设 $V(x_0;h_0) = g_0 < g^0 := \inf\left\{g_0' : V(x_0;g_0') \leq h_0\right\}$。根据下确界的定义，有 $h^0 := V(x_0;\frac{g_0+g^0}{2}) > h_0$，并且根据单调性，$V(x_0;g_0') \geq h^0$, $\forall g_0' \in \left[g_0, \frac{g_0+g^0}{2}\right]$。这与 $V(x_0;g_0) \leq h_0$ 矛盾。关于 V 的断言也类似，故略去证明。

3. 令 u^* 如陈述中所述。显然，u^* 对问题 $\mathcal{P}(x_0;h_0)$ 是可容许的。事实上，由于 u^* 的最优性，面积约束达到饱和，即 $\int_0^\infty g\big(x^{x_0,\,u^*}(t),u^*(t)\big)dt = V(x_0;h_0) = g_0$，因此（由命题 3 和第 1 点）可得

$$\overline{V}(x_0;g_0) \leq \underline{h}_0.$$

假设存在一个控制 $\tilde{u}$，使得 $h_0 := J(x_0,\tilde{u},g_0) < h_0$。那么 $V(x_0;g_0) \leq h_0$，因此，$V(x_0;h_0) \leq g_0 = V(x_0;h_0)$。根据第一个断言，结合 $V(x_0;\cdot)$ 的右连续性，可以得到这一不等式（参见命题 3）。根据单调性，只有当 $V(x_0;h_0) = V(x_0;h_0)$ 时，这种情况才可能发生，而这与 h_0 的选取相矛盾。

4. 当最优控制 $u^\star$ 唯一时，有 $V(x_0;h_0) = V(x_0;\inf_{t\geq 0} h\big(x^{x_0,u^*}(t)\big)) = g_0$且

$$\underline{h}_0 = \inf_{t\geq 0} h\big(x^{x_0,u^*}(t)\big).$$

那么， $u^\star$ 是问题 $\mathcal{P}(x_0;h_0)$的最优解，因此也是问题$\mathcal{P}(x_0;g_0)$的最优解，其中 $g_0 = V(x_0;h_0)$。

第 5 点和第 6 点的证明是类似的，故略去。 ■

另一个备注涉及一种等价的表述方式，即仅通过式 (3) 中引入的生存核来书写这些陈述。

备注 5 定理 *4* 的第二个断言也可以改写如下。设$x_0 \in \Omega$ 使得 $V(x_0,\cdot)$，以及 $V(x_0,\cdot)$分别在

$$\bigcup_{\bar{h}\in\mathbb{R}} Dom\Big(Viab_{hg}\big(\bar{h},\cdot\big)^{-1}(x_0)\Big),\ \textit{respectively}\ \bigcup_{\bar{g}\in\mathbb{R}_+} Dom\big(Viab_{hg}(\cdot,\bar{g})^{-1}(x_0)\big)$$

那么，二者等价

$$\inf Viab_{hg}^{-g}(x_0,\bar{h}) \leq \bar{g} \iff \inf Viab_{hg}^{-h}(x_0,\bar{g}) \leq \bar{h}.$$

事实上，如果 h和 $\bar{g}$满足下确界 $Viab_{hg}^{-g}(x_0,h) \leq \bar{g}$，则根据式 (4) 中的第一个等式，有 $V(x_0,h) \leq \bar{g}$，并结合式 (6)中的第一个等式，可得 下确界$\{g:\ V(x_0,g) \leq h\} \leq \bar{g}$，这意味着 下确界 $Viab_{hg}^{-h}(x_0,\bar{g}) \leq \bar{h}$。逆向推导可类似地利用式 (4)和式 (6)中的第二个等式得到。

我们认为，在初始表述中，对偶性更为清晰；而可行核表述似乎暗示着一种隐藏的博弈式行为。关于这一方向，请读者参阅 *[3]*。

最后，作为定理 4 的推论，我们得到函数 $V(x_0;\cdot)$、 $V(x_0;\cdot)$ 的以下显著性质。

引理 6 若 $V(x_0;\ \cdot)$ 和 $V(x_0;\ \cdot)$ 均为下半连续函数，则有

$$(7)\qquad \begin{cases} \overline{V}(x_0;\cdot) \text{ is constant on } \big[\underline{V}\big(x_0;\overline{V}(x_0;g_0)\big),g_0\big],\ \forall g_0\in\mathbb{R}_+;\\ \underline{V}(x_0;\cdot) \text{ is constant on } \big[\overline{V}(x_0;\underline{V}(x_0;h_0)),h_0\big],\ \forall h_0\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

证明。 由命题 3 可知， $V(x_0;\ \cdot)$和 $V(x_0;\cdot)$ 处处右连续，因此对任意 $h_0\in\mathbb{R}$, $g_0\in\mathbb{R}_+$，有 $V(x_0;\ V(x_0;\ \underline{h}_0)) \leq \underline{h}_0$且 $\underline{V}\big(x_0;V(x_0;g_0)\big) \leq g_0$。

取 $h_0 := V(x_0;V(x_0,h_0))$。于是有 $\underline{h}_0 \geq h_0$，并且由 $V(x_0;\ \cdot)$ 的单调性可得

$$\underline{V}(x_0;h_0) \leq \underline{V}(x_0;\tilde{h}_0) = \underline{V}(x_0;\overline{V}(x_0,\underline{V}(x_0;h_0))).$$

On 另一方面，取 $\tilde{g}_0 := V(x_0;\ h_0)$。于是有 $V(x_0;V(x_0;\ \tilde{g}_0)) \leq \tilde{g}_0$即 i s

$$\underline{V}(x_0;\overline{V}(x_0,\underline{V}(x_0;h_0))) \leq \underline{V}(x_0;h_0).$$

于是可得

$$\underline{V}\big(x_0;\overline{V}(x_0;\underline{V}(x_0;\cdot))\big) = \underline{V}(x_0;\cdot),$$

同理，

$$\overline{V}\big(x_0;\underline{V}\big(x_0;\overline{V}(x_0;\cdot)\big)\big) = \overline{V}(x_0;\cdot).$$

因此， $V(x_0;\ \cdot)$，以及 $V(x_0;\ \cdot)$ 分别在 $\big[\underline{V}\big(x_0;V(x_0;g_0)\big),g_0\big]$和 $\big[V(\underline{x}_0;V(\overline{x}_0;\ h_0))\ h_0\big]$上为常数。 ■

3.2 下半连续性的判据

正如我们在定理 4 的证明以及命题 3 中所看到的，值函数的下半连续性是获得对偶性的关键要素。因此，有必要明确问题数据所需满足的假设，以确保这一性质。

为此，我们将考虑折扣成本的最优控制问题族，其中折扣因子为 $q > 0$。

问题 3 给定 $x_0 \in \Omega$ 和 $h_0 \in \mathbb{R}$，

$$\begin{array}{rlll} \underline{\mathcal{P}}_q(x_0; h_0): & \text{minimize} & \underline{J}(x_0, u) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-qt} g(x^{x_0,u}(t), u(t)) dt \\ & \text{over} & u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U), \\ & \text{s.t.} & h(x^{x_0,u}(t)) \le h_0, \ \forall t \ge 0. \end{array}$$

对于这些问题，我们用 $V_q(x_0; h_0)$ 表示值函数（当满足约束的控制量集合为空时，取值为 $+\infty$）。

我们还要求最优控制理论中的经典假设，即关于问题 $\mathcal{P}$ 的扩展速度集的假设。

假设 2 对于任意 $x \in \Omega$，均有

$$\bigcup_{u \in U, r \ge 0} \begin{bmatrix} f(x,u) \\ g(x,u) + r \end{bmatrix} \text{ is closed and convex.}$$

为方便起见，对于任意子集 $L \subset \Omega$ 以及 $(x_0, u) \in \Omega \times \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U)$，定义命中时间函数

$$\tau_L^{x_0,u} := \begin{cases} +\infty, & \text{if } x^{x_0,u}(t) \notin L, \ \forall t \ge 0, \\ \inf\{t; \ x^{x_0,u}(t) \in L\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 7 设 $x_0 \in \Omega$ 和 $h_0 \in \mathbb{R}$ 满足 $x_0 \in Viab_h(h_0)$。

1. 对于任意 $q > 0$，映射 $V_q(x_0, \cdot)$ 在 $[h_0, +\infty)$ 上有界且下半连续。此外，如果 $V(x_0; \cdot) = \text{上确界}_{q>0} V_q(x_0; \cdot)$，那么它也是有界且下半连续的。

2. 此外，若存在一个正向不变紧集 $L \subset \Omega$，使得对于任意控制 $u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U)$ 以及某个数 $\varepsilon > 0$，

$$(8) \qquad \begin{cases} \min_{u \in U} g(y,u) = 0, \ \forall y \in L, \\ T^\star := \sup_{\bar{h} \in [h_0, h_0+\varepsilon)} \ \sup_{u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}; U)} \ \sup_{x^{x_0,u} \in Viab(\bar{h})} \tau_L^{x_0,u} < +\infty, \end{cases}$$

则 $V(x_0; \cdot)$ 在 $[h_0, h_0 + \varepsilon)$ 上有界且下半连续。

对于 $V(x_0; \cdot)$，也有类似的结论。

证明。 固定 $x_0 \in \Omega$，并暂且固定 $q > 0$。对于任何满足 $x_0 \in Viab_h(h_0)$ 的 h_0，$V_q(x_0;\cdot)$ 在 $[h_0, \infty)$ 上定义良好且有界。此外，$V_q(x_0;\cdot)$ 在$[h_0, \infty)$ 上单调不增。因此，只需证明 $V_q(x_0;\cdot)$ 在 h_0 处对递减序列 $h_n \to h_0$ $(n \geq 1)$下半连续。设...

$$\underline{v} := \liminf_{n\to\infty} \underline{V}_q(x_0; h_n) < +\infty,$$

并且对每个 $n \geq 1$，考虑一个可容许控制 u_n，使得

$$\int_0^{+\infty} e^{-qt} g(x^{x_0,u_n}(t), u_n(t))dt \leq \underline{V}_q(x_0; h_n) + \frac{1}{n};$$
$$\text{with } \sup_{t\geq 0} h(x^{x_0,u_n}(t)) \leq h_n.$$

于是我们定义函数序列

$$v_n(t) := \int_0^{+\infty} e^{-qs} g(x^{x_0,u_n}(s+t), u_n(s+t))ds,\ t \geq 0.$$

注意，$v_n(\cdot)$ 是方程的唯一有界解

$$\dot{v}_n(t) = qv_n(t) - g(x^{x_0,u_n}(t), u_n(t)),\ t \geq 0.$$

我们还定义集值映射

$$F(x,v) := \bigcup_{u\in U, \alpha\in[0,1]} \begin{bmatrix} f(x,u) \\ qv - \alpha g(x,u) - (1-\alpha)g_\infty \end{bmatrix},\ (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

根据假设 1、2，该映射是 Lipschitz连续的，且取紧凸值。显然，$(x^{x_0,u_n}(\cdot)\ v_n(\cdot))$ 是微分包含 $(\dot{x}, \dot{v}) \in F(x,v)$ 的解。取某个子序列并令其趋于极限，对于每个紧时间区间 $[0,T]$，(x^{x_0,u_n}, v_n) 一致收敛到 $(\dot{x}, \dot{v}) \in F(x,v)$ 的某个解 (x,v)，其中 $x(0) = x_0$ 且 $v(0) = v$（根据微分包含解紧性定理，例如参见 [5]）。此外，v 有界，因为 v_n 被 $\frac{1}{q}\|g\|_\infty$一致有界。重复这一过程即可得到一个定义在任意 $t \in \mathbb{R}_+$ 上的解 (x,v)。此外，根据 Filippov选择引理，存在可容许控制 $(u(\cdot)\ \alpha(\cdot))$，使得

$$x(t) = x^{x_0,u}(t),\ \dot{v}(t) = qv(t) - \alpha(t)g(x(t), u(t)) - (1-\alpha(t))g_\infty,\ \text{ a.e. } t \geq 0.$$

注意，v 是一个有界解

$$\dot{v}(t) = qv(t) - g(x^{x_0,u}(t), u(t)) - r(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

其中，r 是有界非负函数

$$r(t) := (1-\alpha(t))(g_\infty - g(x^{x_0,u}(t), u(t)), \quad t \geq 0,$$

并且，方程 (9) 的唯一有界解由表达式给出

$$v(t) = \int_0^{+\infty} e^{-qs} g(x^{x_0,u}(s+t), u(s+t))ds + \int_0^{+\infty} e^{-qs} r(s+t)ds. \tag{10}$$

此外，对于任意 $T \in (0, +\infty)$ 和 $p \geq 2$，解 $x^{x_0,\, u_n}$ 的收敛性以及 h y 的连续性和有界性给出

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T h^p(x^{x_0,u_n}(t))\, dt \geq \int_0^T h^p(x^{x_0,u}(t))\, dt,$$

由此可推得

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} h(x^{x_0,u}(t)) &= \sup_{p\geq 2} \|h(x^{x_0,u})\|_{\mathbb{L}^p([0,T];\mathbb{R})} \\
&\leq \sup_{p\geq 2} \liminf_{n\to\infty} \|h(x^{x_0,u_n})\|_{\mathbb{L}^p([0,T];\mathbb{R})} = \sup_{p\geq 2} \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} \|h(x^{x_0,u_m})\|_{\mathbb{L}^p([0,T];\mathbb{R})} \\
&\leq \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} \sup_{p\geq 2} \|h(x^{x_0,u_m})\|_{\mathbb{L}^p([0,T];\mathbb{R})} = \liminf_{n\to\infty} \|h(x^{x_0,u_n})\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T];\mathbb{R})} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{t\geq 0} h(x^{x_0,u_n}(t)) \leq h_0,
\end{aligned}$$

由于这一最后的不等式对任意 $T > 0$ 都成立，因此可推出不等式

$$\sup_{t\geq 0} h(x^{x_0,u}(t)) \leq h_0. \tag{11}$$

最后，由 (10) 和 (11) 可得

$$\underline{v} = v(0) = \int_0^{+\infty} e^{-qs} g(x^{x_0,u}(s), u(s)) ds + \int_0^{+\infty} e^{-qs} r(s) ds \geq \underline{V}_q(x_0; h_0),$$

即

$$\liminf_{n\to\infty} \underline{V}_q(x_0; h_n) \geq \underline{V}_q(x_0; h_0),$$

这证明了 $V_q(x_0; \cdot)$ 在 h_0 处的下半连续性和有界性。由于上包络 $\sup_{q>0} V_q(x_0; \cdot)$ 是下半连续的，我们推得，当值函数 $V(x_0; \cdot)$ 满足 $V(x_0; \cdot) = \sup_{q>0} V_q(x_0; \cdot)$ 时，它也下半连续（并且由于 g 有界，它也是有界的）。

在假设 (8) 下，显然有

$$\underline{V}_q(x_0; \bar{h}) = \inf_{\substack{u\in\mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+;U) \\ \sup h(x^{x_0,u}(\cdot))\leq \bar{h}}} \int_0^{T^\star} e^{-qt} g(x^{x_0,u}(t), u(t)) dt,$$

因此，

$$\underline{V}(x_0; \bar{h}) = \inf_{\substack{u\in\mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+;U) \\ \sup h(x^{x_0,u}(\cdot))\leq \bar{h}}} \int_0^{T^\star} g(x^{x_0,u}(t), u(t)) dt = \sup_{q>0} \underline{V}_q(x_0; \bar{r}),\ h \in [h_0, h_0 + \varepsilon).$$

■

4 流行病学模型示例

我们有 将其称为带有非药物干预的经典流行病学 SIR模型 1.

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\beta(1-u(t))s(t)i(t)dt, \\ \dot{i}(t) = \beta(1-u(t))s(t)i(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t), \end{cases} \tag{12}$$

其中， $s(t)$、 $i(t)$ 和 $r(t)$ 分别表示易感人群、感染人群和康复人群的密度。可以验证，对于任意 $t \geq 0$，性质 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$ 均成立。控制变量 $u(t)$ 取值于 $U = [0, u]$ ，且满足 $u \leq 1$。为简化起见，这里取 $n = 2$ ，状态变量为（s， i） $\in \Omega$，其中

$$\Omega := \left\{(s,i) \in \mathbb{R}^2;\ s > 0,\ i > 0,\ s + i \leq 1\right\},$$

并考虑

$$h(s,i) := i, \quad g(s,i,u) = \lambda(s,i)u$$

其中， λ 是一个光滑函数。为保持一致，我们不写作 h_0，而写作 $i^* \in [0,1]$。

对于该系统以及上述泛函 g 和 h，文献 [1] 和 [11] 分别针对问题 1 和问题2 在 $\lambda = 1$这一特定情形下给出了不同的处理方法。基于经典的庞特里亚金最大值原理论证，文献[1] 在主要结果 [1, 定理 5.6] 中表明，问题 1 中的唯一最优控制是仅作用于可行区域边界上的“贪婪”控制。在 [11, 命题 2] 中，利用基于格林定理的替代方法也证明了同类型的控制对问题2是最优的（例如，参见图1，其中展示了坐标（s， i， z）下的一个最优解及其对应的最优控制）。

我们将 在第4.3节中看到如何将这些结果推广到更一般的函数 λ .

4.1 问题1的值函数定义域的几何结构

我们假设 $\bar{u}$ 满足

$$\bar{u} < 1 - \frac{\gamma}{\beta} \tag{13}$$

注8 对于问题2， *[11]* 已证明，“零-奇异-零”（*NSN*）策略满足最大值$_t\, u(t) < 1 - \frac{\gamma}{\beta}$。这意味着当 $\bar{u}$满足条件(13)时，该策略是可容许的。此外，在此条件下，*NSN*策略与 *[1],* 中定义的贪心策略一致；我们将在下文回顾该策略，并在第*4.3*节证明其最优性。这也证明了假设(13)的合理性。

设 $i^* \in [0,1]$ 固定。则根据 [1, 定理 2.3], ，且在满足 $i^* + \beta\, \frac{\gamma}{1-u)} \leq 1$ 的条件下，有

$\overline{(\quad -}$

$$(s_0, i_0) \in Viab_h(i^*) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} s_0 \leq \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})} \text{ and } i_0 \leq i^*, \\ \text{ or} \\ s_0 > \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})} \text{ and } i_0 \leq \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}\left(1 + \log\left(\frac{\beta(1-\bar{u})s_0}{\gamma}\right)\right) - s_0 + i^*. \end{cases} \tag{14}$$

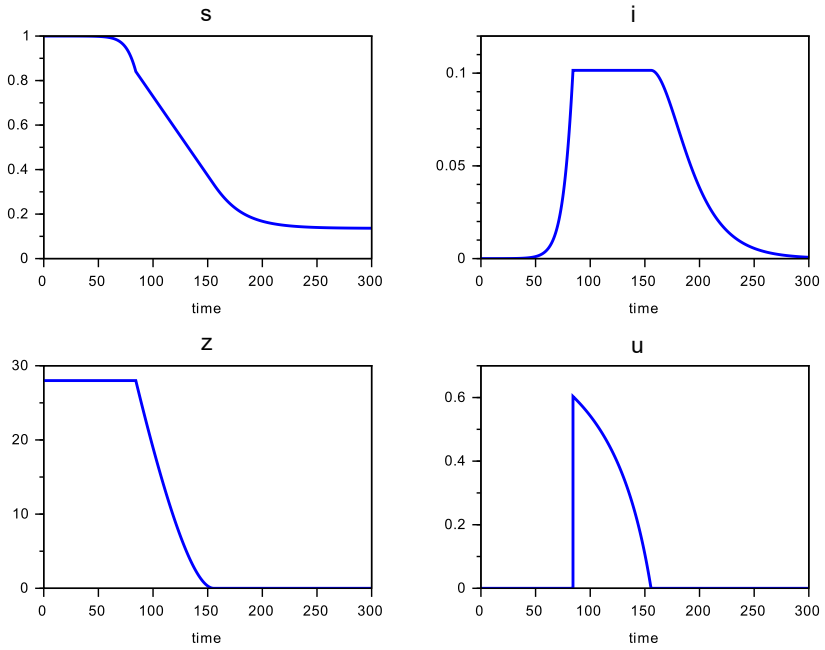

图1： [11]中的 $\lambda = 1$ 时，带有 $i^* = 0.0115$ 和$g_0 = 28$ 的 $\beta = 0.21$、 $\gamma = 0.07$ 的最优解示例。

这一后续条件可等价地表示为

$$Dom(\underline{V}(s_0, i_0); \cdot)) = \begin{cases} [i_0, \infty), \text{ if } s_0 \leq \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}; \\ \left[i_0 + s_0 - \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\left[1 + \log\left(\frac{\beta(1-\overline{u})s_0}{\gamma}\right)\right], \infty\right), \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{15}$$

请注意，通过将后一个项中的 s_0 替换为表达式 $\max\left(s_0, \frac{\gamma}{\beta(1-u)}\right)$，可以将其写成单位形式。

为进一步发展，我们还引入与 i^*相关的不变核

$$Inv_h(i^\star) := \left\{(s_0, i_0) \in \Omega : \ \forall u \in \mathbb{L}^0(\mathbb{R}_+; U); \ i^{(s_0,i_0),u}(t) \leq i^\star, \ \forall t \geq 0\right\}$$

与 $Viab_h(i^*)$类似（形式上取$u = 0$），有

$$(s_0, i_0) \in Inv_h(i^*) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} s_0 \leq \frac{\gamma}{\beta} \text{ and } i_0 \leq i^*, \\ \text{or} \\ s_0 > \frac{\gamma}{\beta} \text{ and } i_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}\left[1 + \log\left(\frac{\beta s_0}{\gamma}\right)\right] - s_0 + i^*. \end{cases} \tag{16}$$

关于主要假设，读者会注意到，这里处理的是控制仿射结构，即

1. 集合 $Viab_h(i^*) \subset Viab_h(1)$是紧的；

2. 假设 2（扩展速度集的凸性）始终成立。

在图 2 中，集合 $Viab_h(i^*)$ 的（边界）由黄色所示的函数ψ 的图像表示，而集合 $Inv_h(i^*)$ 的边界则以绿色表示为函数 ϕ的图像。中间集合 $B(i^*)$（在下文公式 (19)(a) 中定义）的边界为蓝色（∂B），位于上部屏障 $i = i^*$ 的补集内。此外， $u = 0$ （分别为 $u = u$）的 DFE（无病平衡）表示在图形的上部。

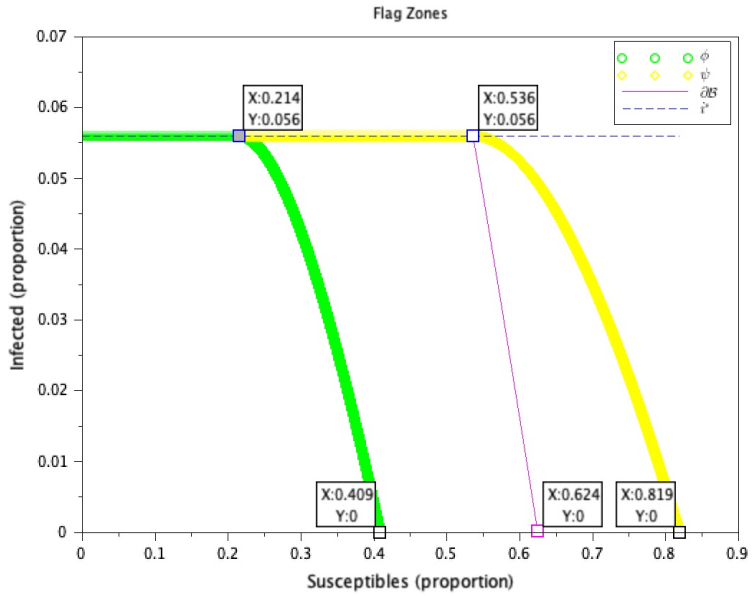

图 2: $\beta = \frac{1}{3}$、$1-u=0.4$、$\gamma = \frac{1}{14}$、$i^* = 14 \times \frac{400}{100}$ 的几何区域，000（摘自 [1]）.

4.2 最优成本的正则性

取 $i^* \in Dom(V((s_0,\ i_0);\ \cdot))$，使得 $i^* + \beta\ \frac{\gamma}{(1-u)} < 1$，并定义贪心反馈策略

$$u^*(s,i) := \begin{cases} \overline{u}, & \text{if } s > \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})},\ i = i^* - s + \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\left[1 + \log\left(\frac{\beta(1-\overline{u})s}{\gamma}\right)\right]; \\ 1 - \frac{\gamma}{\beta s}, & \text{if } s \in \left[\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\right] \text{ and } i = i^*; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{17}$$

其中，仅当轨迹到达 $\partial Viab_h(i^*)$ 时才采取非零动作。相关成本满足（见 [9, 引理 1]）

$$\underline{J}(s_0,i_0;i^*) = \begin{cases} 0,\ \text{if } (s_0,i_0) \in Inv_h(i^*); \\ \dfrac{1}{\gamma i^*}\displaystyle\int_{\frac{\gamma}{\beta}}^{s_1(s_0,i_0;i^*)} \lambda(l,i^*)\left(1 - \frac{\gamma}{\beta l}\right) dl,\ \text{if } (s_0,i_0) \in B(i^*) \setminus Inv_h(i^*); \\ \dfrac{1}{\beta(1-\overline{u})}\displaystyle\int_{\frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}}^{s_2(s_0,i_0;i^*)} \dfrac{\lambda\left(s, \left(\theta(i^*) - s + \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\log s\right)\right)\overline{u}}{s\left(\theta(i^*) - s + \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\log s\right)} ds + \\ \qquad\qquad \underline{J}\left(\frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}, i^*; i^*\right),\ \text{otherwise,} \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} (a):\ B(i^*) := \left\{(s,i) \in Viab_h(i^*):\ s + i \le i^* + \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})} + \frac{\gamma}{\beta}\log\left(\frac{\beta(1-\overline{u})s}{\gamma}\right)\right\}; \\ (b):\ s_1(s_0,i_0;i^*) > \frac{\gamma}{\beta} \text{ is the solution of } s_1 - s_0 - i_0 + i^* - \frac{\gamma}{\beta}\log\frac{s_1}{s_0} = 0; \\ (c):\ \theta(i) := i + \frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\left(1 - \log\frac{\gamma}{\beta(1-\overline{u})}\right); \\ (d):\ s_2(s_0,i_0;i^*) := \exp\left(\frac{\beta(1-\overline{u})}{\gamma\overline{u}}\left(s_0 + i_0 - \frac{\gamma}{\beta}\log s_0 - \theta(i^*)\right)\right). \end{cases} \tag{19}$$

成本 $J\left(_{\beta}{}^{\gamma_{(1-u)}}\, i^*;\ i^*\right)$ 在表达式 (18) 中使用，取决于函数 λ，不一定有显式表达式，除非 λ 为常数，如 [1, 11] 中所示。

我们断言以下性质成立。

引理 9 取 $(s_0, i_0) \in \Omega$ 以及 $(i^n)_n$, $n \in \mathbb{N}$，一个收敛于 i^* 的递减序列。则有

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{J}(s_0, i_0; i^n) = \underline{J}(s_0, i_0; i^*). \tag{20}$$

证明。

1. 读者很容易看出，有 $Inv_h(i^*) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Inv_h(i^n)$（递减极限）。

2. 将 (19)(a) 中给出的 $B(i^*)$ 定义为 $B(i^*) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(i^n)$，其中 $(B(i^n))_n$ 是一个非递增序列，则同样的断言成立。

3. 若 $(s_0, i_0) \in Inv_h(i^*)$，则由对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有的包含关系 $Inv_h(i^*) \subset Inv_h(i^n)$，并回想起值函数在这些点处为零，即可轻易推出等式 (20)。

4. 如果 $(s_0, i_0) \in B(i^*) \setminus Inv_h(i^*)$，那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(s_0, i_0) \in B(i^n)$。如果存在一个子序列 $(\phi(n))_n$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$(s_0, i_0) \in Inv_h\left(i^{\phi(n)}\right)$，那么我们就会有 $(s_0, i_0) \in Inv_h(i^*)$，但事实并非如此。

由此可得，当某个足够大的 $n_0 > 0$ 以及每个 $n \geq n_0$ 时，有 $(s_0, i_0) \in B(i^n) \setminus Inv_h(i^n)$。容易看出，函数

$$i \mapsto s_1(s_0, i_0; i)$$

对于 $i > 0$ 是右连续的，因此在该框架下我们得到等式 (20)。

由于函数 θ 和 s_2的连续性，可以应用相同的论证来证明 $Viab_h(i_{max}) \setminus B(i^*)$ 上的 (20)。

■

最后，我们得到以下结果。

命题 10 设 $(s_0, i_0) \in \Omega$。那么，值函数 $i^* \mapsto J(s, i; i^*)$ 在满足 $i^* \leq 1 - {}_{\beta}{}^{\gamma_{(1-u)}}$ 的每个点 $i^* \in Dom(V(s_0, i_0; \cdot))$ 处均右连续，其中 $Dom(V(s_0, i_0; \cdot))$ 由(15)给出。 —

因此，我们可以应用定理 4 来证明：如果式 (17) 给出的（贪心）反馈策略是问题 1 的唯一最优控制，那么它也是问题2的最优策略，反之亦然。

4.3 关于 λ 的微分条件与贪心控制的最优性

现在，我们强调为了使式 (17) 给出的反馈控制 u^* 达到最优，λ 需要满足的条件。我们介绍两种方法。

方法 I 由 [11] 构成，具体做法是写出

$$udt = \left(\frac{\gamma}{\beta s} - 1\right)\frac{ds}{\gamma i} - \frac{di}{\gamma i}.$$

因此，可以得到

$$\lambda(s,i)udt = \frac{\lambda(s,i)\left(\frac{\gamma}{\beta s}-1\right)}{\gamma i}ds - \frac{\lambda(s,i)}{\gamma i}di =: P(s,i)ds + Q(s,i)di.$$

计算可得

$$\partial_s Q(s,i) - \partial_i P(s,i) = -\frac{\partial_s \lambda(s,i)}{\gamma i} + \left(\frac{\gamma}{\beta s}-1\right)\frac{\partial_i \lambda(s,i) - \gamma\frac{\lambda(s,i)}{\gamma i}}{\gamma i}.$$

于是，基于格林定理，[11] 中的最优性条件要求施加 $\partial_s Q - \partial_i P \le 0$，以处理 $\frac{\gamma}{\beta} < s_0 \le \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}$的情形。

由 [9]可得**方法 II**。现在来看（16）中给出的条件。可写为

$$\tilde{l}_1(s,i,u) := \frac{\lambda(s,i)u}{\gamma i u}.$$

于是，

1. [9, 式（15）] 中的第一个条件（适用于前文所述的初始条件）要求

$$\frac{\lambda(s_1(s_0,i_0;i^*),i^*)}{\gamma i^*} \le \frac{\lambda(s_0,i_0)}{\gamma i_0}. \tag{21}$$

提醒读者，$(s_1(s_0,i_0;i^*)\ i^*) \in \{(s^{s_0,i_0,0}(t)\ i^{s_0,i_0,0}(t));\ \ t\ge 0\}$。于是，例如当函数 $t \mapsto \phi(t) := \lambda(s^{s_0,i_0,0}(t)\ i^{s_0,i_0,0}(t))\ \gamma i^{s_0,i_0,0}(t)$非递增时，即可得到条件（21）。显然可计算得（采用显然的记号（s,i）$= (s^{s_0,i_0,0}, i^{s_0,i_0,0})$）

$$\phi'(t) = \frac{1}{\gamma i}\partial_s\lambda(s,i)(-\beta s i) + \left[\frac{\partial_i\lambda(s,i)}{\gamma i} - \frac{\lambda(s,i)}{\gamma i^2}\right](\beta s - \gamma)i = \beta s i(\partial_s Q - \partial_i P).$$

只要 $\partial_s Q - \partial_i P \le 0$，后一个量就非正。由此可得，在 $s_0 \le \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}$ 的情况下，“0-奇异弧-0”控制用这两种方法都是最优的。当然，这生动地展示了本文的主要结果。

2. 第二个条件 (16) 等价于满足

$$\frac{\lambda(s_2(s_0,i_0;i^*),\theta^* - s_2(s_0,i_0;i^*) + \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}\log s_2(s_0,i_0;i^*))}{\gamma\left(\theta^* - s_2(s_0,i_0;i^*) + \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}\log s_2(s_0,i_0;i^*)\right)} \le \frac{\lambda(s_0,i_0)}{\gamma i_0}. \tag{22}$$

和之前一样，$(s_2(s_0,\ i_0;i^*)\ i^*)$ 属于可达集

$$\left\{\left(s^{s_0,i_0,0}(t), i^{s_0,i_0,0}(t)\right):\ t\ge 0\right\}.$$

如同我们对情形 1 的推理，条件 (22) 可由相同条件$\partial_s Q - \partial_i P \le 0$ 推出（但这次是在空间的另一部分，即 $s \ge \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}$）。请读者注意，在条件 (22) 下，得益于对偶性结果，我们能够将 [11] 中的最优性结果扩展到 DFE（无病平衡点）之外的任意可容许（s_0, i_0），适用于 $\beta := \beta(1-\bar{u})$ 接触驱动的 SIR 模型（即将其扩展到满足 $s_0 > \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta(1-\bar{u})}$ 的配置）。

参考文献

[1] F. Avram、L. Freddi 和 D. Goreac。具有重症监护病房约束和目标目标函数的 SIR 疫情最优控制。应用数学与计算，418:126816，2022年。[2] E. Barron 和 H. Ishii。最小化最大成本的 Bellman方程。非线性分析：理论、方法与应用，13(9):1067–1090，1989年。[3] P. Bettiol。将状态约束 l^∞ 最优控制问题解释为微分博弈。离散与连续动力系统，35(9):3989–4017，2015年。[4] O. Bokanowski、N. Forcadel 和 H. Zidani。无需可控性假设的确定性状态约束最优控制问题。*ESAIM: COCV*，17(4):995–1015，2011年。[5] F. Clarke。优化与非光滑分析。SIAM 应用数学经典丛书，1990年。[6] H. Frankowska 和 S. Plaskacz。具有状态约束的 Hamilton-Jacobi-Bellman方程的半连续解。微分包含与最优控制，第 *2* 卷，非线性分析讲义，第 145–161 页，1998年。[7] H. Frankowska 和 S. Plaskacz。具有退化状态约束的 Hamilton-Jacobi-Bellman方程的半连续解。数学分析与应用杂志，251:818–838，2000年。[8] H. Frankowska 和 R. Vinter。邻近轨线的存在性：在状态约束最优控制问题动态规划中的应用。优化理论与应用杂志，104(1):20–40，2000年。[9] L. Freddi、D. Goreac、J. Li 和 B. Xu。具有状态依赖成本和重症监护病房约束的 SIR 疫情：Hamilton–Jacobi验证论证与对偶线性规划算法。应用数学与优化，86(2):23，2022年7月。[10] L. Miclo、D. Spiro 和 J. Weibull。重症监护病房约束下的最优疫情抑制：解析解。数学经济学杂志，101:102669，2022年。[11] E. Molina 和 A. Rapaport。在预算约束下使 SIR模型疫情峰值最小化的最优反馈控制。*Automatica*，146:110596，2022年。[12] H. M. Soner。具有状态空间约束的最优控制。I。*SIAM* 控制与优化杂志，24(6):552–561，1986年。