arXiv:2305.02602v1 [math.AP] 4 May 2023

运动区域中纳维–斯托克斯方程的部分边界正则性

DOMINIC BREIT

Abstract. 我们研究运动区域中的不可压缩纳维–斯托克斯方程，其边界由一个低正则性的函数 $\eta = \eta(t,y)$（满足 $y \in \mathbb{R}^2$）给定。这一问题源于流固耦合问题。我们证明了边界适定弱解的部分边界正则性，假设 η 关于时间连续，且取值于分数阶 Sobolev 空间 $W^{2-1/p}_{,y}{}^{p}$，其中 $p > 15/4$，并且有 $\partial_t \eta \in L^3_t(W^1_{,y}{}^{q_0})$，其中 $q_0 > 2$。

边界适定弱解的存在性是运动区域中斯托克斯方程的一项新最大正则性结果的推论，该结果本身也具有独立的研究价值。

1. Introduction

我们考虑不可压缩纳维–斯托克斯方程

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} - \nabla\pi + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

在运动区域 $\Omega_{\eta(t)}$ 中，其边界由函数 η 给定，该函数沿法向量方向使参考区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 的边界发生变形。为简化技术处理，我们假设 η 定义在 $\mathcal{I}\times\omega$ 上，其中 $\mathcal{I} = (0,T)$，对于某个给定的 $T > 0$，并将 $\partial\Omega$ 视为记作 ω的二维环面。式（1）中的速度场 $\mathbf{u}$ 和压力 π 定义在变形时空柱中

$$\mathcal{I}\times\Omega_\eta := \bigcup_{t\in\mathcal{I}} \{t\}\times\Omega_{\eta(t)} \subset \mathbb{R}^{1+3}.$$

这受到 流固耦合中的应用所启发，我们将在下文对此作进一步评论。该量 $\mathbf{f}\colon \mathcal{I}\times\Omega_\eta \to \mathbb{R}^3$ 在 (1) 中是一个外力。

内部正则性。关于方程 (1) 解的内部正则性问题（边界是否移动并不重要）是一个尚未解决的重要问题。目前已知的最佳结果是部分正则性，即速度场在时空柱体中一个测度为零的可忽略集合之外局部有界/H¨older 连续（还可以推导出该集合内部的其他正则性性质）。这一方向上的首个结果见 [19]。后来，在 [3] 中，通过引入所谓的适定弱解（它们满足局部能量不等式），人们对此有了更深入的认识

$$\begin{aligned}&\int \tfrac{1}{2}\zeta\big|\mathbf{u}(t)\big|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int \zeta|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\\ &\qquad\le \int_0^t\int \tfrac{1}{2}\Big(|\mathbf{u}|^2(\partial_t\zeta+\Delta\zeta) + \big(|\mathbf{u}|^2+2\pi\big)\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t\int \zeta\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{2}$$

对任意函数 ζ （该函数光滑、紧支撑且非负）。这使得建立局部正则性理论成为可能，另见 [4, 7, 9]。

固定区域。迄今提到的结果涉及解的内部正则性。对于平坦边界，关于边界点处正则性的分析已在 [20] 中开始，并在 [16] 和 [17]中进一步推进。例如，关于光滑曲边界的首批结果见 [18]。直到最近，[2],才开始探讨不规则区域中的部分正则性问题。

Date:2023年5月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 76D03；76D05；35B65，35Q30；35Q74。

作者在该文中证明了相应的结果，并假设边界参数化中的局部坐标图属于分数阶 Sobolev 空间

$$W^{2-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^2) \quad \text{for some} \quad p > \tfrac{15}{4}. \tag{3}$$

[18] 和 [2] 中的分析基于满足边界点处版本 (2) 的边界适定弱解，并将动量方程局部变换为平坦几何。通过采用索об列夫乘子，非光滑区域（会导致变换后方程的系数非光滑）也可纳入 [2]中的理论。

运动区域。本文旨在针对运动区域中的方程 (1) 解，在描述移动边界的函数 η 满足低正则性假设的条件下，建立边界部分正则性理论。首先，我们证明边界适定弱解的存在性，其中的关键是运动区域中斯托克斯系统的最大正则性理论。我们认为这一精确表述本身也具有独立价值，现将其列于定理 3.1。随后，我们转向部分正则性的证明，该证明基于经典的爆破技术。与 [18] 和 [2]中一样，我们在边界点附近将问题局部变换为平坦几何，从而得到一个扰动系统，其系数现在也依赖于时间。为此，需要通过局部坐标图重新参数化区域，以使系数的索об列夫乘子范数（关于时间一致）足够小，参见第4.2节。定理4.3和4.3中的主要结果表明，运动区域边界上的几乎每个点处，速度场都是正则的。为此，我们要求函数 η 关于时间连续，且取值于 (3) 中的分数阶 Sobolev 空间，并且还满足

$$\partial_t \eta \in L^3(\mathcal{I}, W^{1,q_0}(\omega)), \quad q_0 > 2. \tag{4}$$

关于空间正则性的假设是固定区域中 [2] 的自然推广。(4) 的假设源于局部坐标的引入，尤其是坐标系的旋转，详见第 3.1 节。该旋转基于运动区域的法向量（其表现为 $\nabla_y \eta$），并在一个小空间区域内取平均。控制其自然地进入问题的时间导数，后者要求满足 (4)。在定理 3.1 的证明中，这一假设对于各种估计都至关重要。对于部分正则性结果本身，我们可以将 (4) 稍微弱化为 $\partial_t \eta \in L^3(\mathcal{I};\ L^3 \cap W^{1,\ 1}(\omega))$。然而，在这种情况下，适定弱解的存在性仍不明确，参见注 4.6。

下面我们将说明 (4) 与流固耦合问题之间的关系。

流固耦合。在流固耦合中，函数 η 是占据流体区域边界（的一部分）的弹性结构的位移。它本身是某个演化偏微分方程的解，因此正则性有限。一个典型例子是

$$\varrho \partial_t^2 \eta - \alpha \partial_t \Delta \eta + \beta \Delta^2 \eta = \mathbf{F} \quad \text{in} \quad \mathcal{I} \times \omega \tag{5}$$

其中 ϱ、α、$\beta > 0$。右端的函数 F 描述了结构对流体表面力的响应，而该表面力由柯西应力施加。方程 (5) 的弱解属于以下函数类

$$W^{1,\infty}(\mathcal{I}; L^2(\omega)) \cap W^{1,2}(\mathcal{I}; W^{1,2}(\omega)) \cap L^\infty(\mathcal{I}; W^{2,2}(\omega)), \tag{6}$$

参见 [8]。请注意，第二个函数空间中的估计是耗散项对 (5) 的作用所导致的（即，$\alpha > 0$），在 [8] 所研究的纯弹性情形中并不存在该估计。仿照 [12] 中的方法，并利用耗散所产生的正则化效应，可以证明解还满足

$$\eta \in L^2(\mathcal{I}; W^{3,2}(\omega)). \tag{7}$$

由于紧嵌入

$$W^{3,2}(\omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,\infty}(\omega), \quad W^{3,2}(\omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{2-1/p,p}(\omega), \tag{8}$$

对于某个 $p > \frac{15}{4}$，我们得到 $\mathrm{Lip}(\partial\Omega_{\eta(t)}) \ll 1$，以及 $\partial\Omega_{\eta(t)} \in W^{2-1/p,\ p}(\mathbb{R}^2)$。但遗憾的是，$\eta$ 并不属于这些空间，且不满足定理4.3和4.4所要求的时间上一致性。此外，式 (6) 中的时间正则性略低于部分正则性理论所要求的式 (4) 中的正则性。总之，式 (5) 的弱解的正则性略低于式 (1) 解的部分正则性所要求的水平。

在流固相互作用问题中，通常在移动边界处，速度场与壳体变形之间满足耦合条件，因此动量方程具有非平凡的边界条件（这些条件依赖于时间）。本文不研究不规则（随时间变化的）边界数据的影响，因为这需要对我们的理论作非平凡的扩展。

2. Preliminaries and results

2.1. 约定。对于两个非负量 f 和 g，若存在 $c>0$ 使得$f \le cg$，我们记作 $f \lesssim g$。这里， c 是一个泛指常数，不依赖于关键量，且其值可随行变化。必要时，我们会注明特定的依赖关系。若 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$，我们记作 $f \approx g$。对于函数空间的记号，我们不区分标量值函数与向量值函数。不过，向量值函数通常用粗体表示。

2.2. 经典函数空间。设 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$为开集。连续函数或 α-H¨older连续函数的函数空间 $\alpha \in (0,1)$，分别记为 $C(\overline{\mathcal{O}})$或 $C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{O}})$。类似地，我们记$C^1(\overline{\mathcal{O}})$和 $C^{1,\alpha}(\overline{\mathcal{O}})$。对于 $p \in [1,\infty]$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 上的Lebesgue空间与Sobolev空间，通常分别记为 $L^p(\mathcal{O})$和 $W^{k,p}(\mathcal{O})$。对于有界区域 $\mathcal{O}$，空间 $L^p_\perp(\mathcal{O})$表示 $L^p(\mathcal{O})$中零均值函数构成的子空间，即$(f)_{\mathcal{O}} := \fint_{\mathcal{O}} f \,\mathrm{d}x := \mathcal{L}^m(\mathcal{O})^{-1}\int_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}x = 0$。我们用 $W^{k,p}_0(\mathcal{O})$表示 $W^{k,p}(\mathcal{O})$中光滑紧支撑函数的闭包。若 $\partial\mathcal{O}$ 足够正则，该空间恰为在 $\partial\mathcal{O}$ 上几乎处处为零的函数所构成的空间。我们还用 $W^{-k,p}(\mathcal{O})$表示 $W^{k,p}_0(\mathcal{O})$的对偶空间。最后，我们考虑无散向量场构成的子空间 $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\mathcal{O})$，其定义与此相应。在三维区域的情形下，我们将使用简写 L^p_x 和 $W^{k,p}_x$；对于二维集合，则使用L^p_y 和 $W^{k,p}_y$。

对于可分Banach空间 $(X,\|\cdot\|_X)$，我们用 $L^p(0,T;X)$ 表示 (Bochner-)可测函数 $u\colon (0,T)\to X$ 的集合，这些函数满足映射 $t\mapsto \|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$。集合 $C([0,T];X)$ 表示函数 $u\colon [0,T]\to X$ 的空间，这些函数关于 $(X,\|\cdot\|_X)$ 上的范数拓扑连续。空间 $W^{1,p}(0,T;X)$ 由 $L^p(0,T;X)$ 中分布意义下的时间导数也属于 $L^p(0,T;X)$ 的函数组成。我们用简写 $L^p_t X$ 表示 $L^p(0,T;X)$。例如，我们将 $L^p(0,T;W^{1,p}(\mathcal{O}))$ 记为 $L^p_t W^{1,p}_x$。类似地， $W^{k,p}(0,T;X)$ 记作 $W^{k,p}_t X$。

空间 $C^{\alpha,\beta}([0,T]\times\overline{\mathcal{O}})$，其中 $\alpha,\beta\in(0,1]$ 表示在 $t\in[0,T]$ 中 α-H¨older 连续且在 $x\in\overline{\mathcal{O}}$中 β-H¨older 连续的函数集合。

2.3. 分数阶可微性与 Sobolev 乘子。对于 $p\in[1,\infty)$，具有可微性 $s>0$ 且满足 $s\notin\mathbb{N}$ 的分数阶 Sobolev 空间（Sobolev-Slobodeckij 空间）记为 $W^{s,p}(\mathcal{O})$。对于 $s>0$，记作 $s=\lfloor s\rfloor+\{s\}$，其中 $\lfloor s\rfloor\in\mathbb{N}_0$ 且 $\{s\}\in(0,1)$。我们用 $W^{s,p}_0(\mathcal{O})$ 表示 $W^{s,p}(\mathcal{O})$ 中光滑紧支撑函数的闭包。对于 $s>\frac{1}{p}$，若 $\partial\mathcal{O}$ 足够规则，这与在 $\partial\mathcal{O}$ 上几乎处处为零的函数相一致。对于 $s>0$，我们还用 $W^{-s,p}(\mathcal{O})$ 表示 $W^{s,p}_0(\mathcal{O})$ 的对偶空间。与上文未断裂可微性的情形类似，我们采用简写记号 $W^{s,p}_x$和 $W^{s,p}_y$。我们用 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$上的标准 Besov 空间，其可微性为 $s>0$、可积性为 $p\in[1,\infty]$，精细指标为 $q\in[1,\infty]$。例如，可通过利特尔伍德–佩利分解定义这些空间，从而得到范数$\|\cdot\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)}$。关于详细介绍，参见 [14] 和 [22, 23]。有界区域 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^m$ 上的 Besov 空间 $B^s_{p,q}(\mathcal{O})$ 定义为函数从 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ 限制而来，即

$$B^s_{p,q}(\mathcal{O}) := \{f|_{\mathcal{O}} : f\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)\},$$
$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathcal{O})} := \inf\{\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} : f|_{\mathcal{O}} = g\}.$$

如果 $s\notin\mathbb{N}$ 和 $p\in(1,\infty)$，我们有 $B^s_{p,p}(\mathcal{O}) = W^{s,p}(\mathcal{O})$。

根据 [11, 第 14] 章，索об列夫乘子范数定义为

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})} := \sup_{\mathbf{v}:\,\|\mathbf{v}\|_{W^{s-1,p}(\mathcal{O})}=1} \|\nabla\varphi\cdot\mathbf{v}\|_{W^{s-1,p}(\mathcal{O})}, \tag{9}$$

其中 $p\in[1,\infty]$ 和 $s\ge 1$。索об列夫乘子空间 $\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})$ 定义为满足 $\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})$-范数有限的对象。对于 $\delta>0$，我们用 $\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})(\delta)$ 表示来自以下函数的子集

$\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})$，其 $\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})$-范数不超过 δ。通过关于 s 的数学归纳法，可以证明，对于利普希茨连续函数 φ，按式 (9) 的意义属于 $\mathcal{M}^{s,p}(\mathcal{O})$ 意味着

$$\sup_{w:\,\|w\|_{W^{s,p}(\mathcal{O})}=1} \|\varphi\, w\|_{W^{s,p}(\mathcal{O})} < \infty. \tag{10}$$

文献中，量（10）也常用作索об列夫乘子范数的定义，但（9）更适合我们的目的。

最后，我们总结索об列夫乘子的一些有用性质。由 [11, 推论 14.6.2]，我们有

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}^{s,p}(\mathbb{R}^m)} \lesssim \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}, \tag{11}$$

只要满足以下条件之一：

- $p(s-1) < m$ 且 $\phi \in B^s_{\varrho,\,p}(\mathbb{R}^m)$，其中 $\varrho \in \big[\frac{m}{s-1}, \infty\big]$;
- $p(s-1) = m$ 且 $\phi \in B^s_{\varrho,\,p}(\mathbb{R}^m)$，其中 $\varrho \in (p, \infty]$。

注意，(11) 中的隐藏常数取决于 $B^s_{\varrho,\,p}(\mathbb{R}^m)$-范数的 ϕ。根据 [11, 推论 4.3.8]，有

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}^{s,p}(\mathbb{R}^m)} \approx \|\nabla\phi\|_{W^{s-1,p}(\mathbb{R}^m)} \tag{12}$$

对于 $p(s-1) > m$。最后，我们指出下面这条关于与索об列夫乘子复合的规则，它是 [11, 引理 9.4.1] 的推论。对于开集 $\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^m$、$u \in W^{s,\,p}(\mathcal{O}_2)$，以及利普希茨连续函数 $\boldsymbol{\phi}\colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$，若其满足 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{M}^{s,\,p}(\mathcal{O}_1)$，且逆映射 $\boldsymbol{\phi}^{-1}\colon \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1$ 也是利普希茨连续的，则有

$$\|u \circ \boldsymbol{\phi}\|_{W^{s,p}(\mathcal{O}_1)} \lesssim \|u\|_{W^{s,p}(\mathcal{O}_2)} \tag{13}$$

常数取决于 $\boldsymbol{\phi}$。

2.4. 变动区域上的函数空间。假设空间参考区域 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有光滑边界的开有界子集，且具有外单位法向量 $\mathbf{n}$。假设 $\partial\Omega$ 可由某个充分大的 $k \in \mathbb{N}$对应的单射映射 $\boldsymbol{\varphi} \in C^k(\omega;\mathbb{R}^3)$ 参数化。我们假设，对于所有点 $y = (y_1, y_2) \in \omega$，向量对 $\partial_i\boldsymbol{\varphi}(y)$、$i = 1$、2 线性无关。对于邻域或 $\partial\Omega$ 中的点 x，我们可以定义函数 y 和 s 如下：

$$y(x) = \arg\min_{y\in\omega} |x - \boldsymbol{\varphi}(y)|, \quad s(x) = (x - \mathbf{p}(x)) \cdot \mathbf{n}(y(x)).$$

这里我们使用了投影 $\mathbf{p}(x) = \boldsymbol{\varphi}(y(x))$。我们将 $L > 0$ 定义为使得 s、y和 $\mathbf{p}$ 在 S_L中有定义的最大数，其中

$$S_L = \{x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < L\}. \tag{14}$$

由于 $\partial\Omega$ 的光滑性，当 L 足够小时，我们有 $|s(x)| = \min_{y\in\omega} |x - \boldsymbol{\varphi}(y)|$，对所有 $x \in S_L$均成立。这意味着 $S_L = \{s\mathbf{n}(y) + \boldsymbol{\varphi}(y) : (s, y) \in (-L, L) \times \omega\}$。给定函数 $\eta\colon \mathcal{I} \times \omega \to \mathbb{R}$，我们将变形后的边界参数化为

$$\boldsymbol{\varphi}_\eta(t, y) = \boldsymbol{\varphi}(y) + \eta(t, y)\mathbf{n}(y), \quad y \in \omega,\, t \in \overline{\mathcal{I}}. \tag{15}$$

通过适当减小 L，很容易从该公式推出 Ω_η 不会退化，即

$$\partial_1\boldsymbol{\varphi}_\eta \times \partial_2\boldsymbol{\varphi}_\eta(t, y) > 0 \quad y \in \omega,\, t \in \overline{\mathcal{I}}, \tag{16}$$

只要 $\|\eta\|_{L^\infty_{t,\,y}} < L$ 和 $\|\nabla\eta\|_{L^\infty_{t,\,y}} < L$。这里 $\mathbf{n}^{\eta(t)}$ 是通过以下方式定义的区域 $\Omega^{\eta(t)}$ 的法向量

$$\partial\Omega_{\eta(t)} = \{\boldsymbol{\varphi}(y) + \eta(t, y)\mathbf{n}(y) : y \in \omega\}. \tag{17}$$

稍微滥用一下记号，我们定义变形时空柱 $\mathcal{I}\times\Omega_\eta = \bigcup_{t\in I} \{t\}\times\Omega_{\eta(t)} \subset \mathbb{R}^{1+3}$。变动区域上的相应函数空间定义如下。

定义 2.1。（函数空间）对于 $\mathcal{I}=(0,T)$、$T>0$ 和 $\eta\in C(\overline{\mathcal{I}}\times\omega)$，其中 $\|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{I}\times\omega)}<L$，我们定义 $1\le p$、$r\le\infty$

$$L^p(\mathcal{I};\,L^r(\Omega\eta)):=\big\{v\in L^1(\mathcal{I}\times\Omega\eta):\ \ v(t,\cdot)\in L^r(\Omega_{\eta(t)})\text{ 对几乎处处的 }t,\ \|v(t,\cdot)\|_{L^r(\Omega_{\eta(t)})}\in L^p(\mathcal{I})\big\},L^p(\mathcal{I};\,W^{1,r}(\Omega\eta)):=\big\{v\in L^p(\mathcal{I};\,L^r(\Omega\eta)):\ \ \nabla v\in L^p(\mathcal{I};\,L^r(\Omega\eta))\big\}.$$

3. The Stokes system in time-dependent domains

我们考虑非定常斯托克斯系统

$$\partial_t\mathbf{u}=\Delta\mathbf{u}-\nabla\pi+\mathbf{f},\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{u}|_{\mathcal{I}\times\partial\Omega_\eta}=0,\quad \mathbf{u}(0,\cdot)=\mathbf{u}_0,\tag{18}$$

在运动区域 $\mathcal{I}\times\Omega\eta$ 中。这里 $\eta\colon\mathcal{I}\times\omega\to\mathbb{R}$ 是一个给定函数，$\Omega\eta$ 的定义见第 2.4 节。(18) 的唯一弱解存在性可由 [13, 定理 5.1] 在特殊情形 $p=2$ 下推出。我们关注关于 η 的条件，这些条件允许在 $L^r_tL^p_x$ 框架下得到极大正则性估计。首先，我们将对 $\Omega\eta$ 的边界进行局部重新参数化。

3.1. 边界的局部重新参数化。给定函数 $\eta\in C^0(\overline{\mathcal{I}};C^1(\omega))$，我们假设存在数值 $L_0\in(0,L)$，其中 L 由（14）给出，并且 $\kappa_0>0$ 使得

$$\|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{I}\times\omega)}\le L_0,\quad \inf_{\mathcal{I}\times\omega}\partial_1\boldsymbol{\varphi}_\eta\times\partial_2\boldsymbol{\varphi}_\eta\ge\kappa_0,\tag{19}$$

其中，$\boldsymbol{\varphi}_\eta$ 按照（15）定义。给定某个固定的 $t\in\overline{\mathcal{I}}$ 的 $y_\star\in\omega$（使得 $x_\star:=\boldsymbol{\varphi}(y_\star)+\eta(t,y_\star)\mathbf{n}(y_\star)\in\partial\Omega_{\eta(t)}$），存在 $y_\star$ 的一个邻域 $\omega_\star$，使得

$$\left(\fint_{\omega_\star}\partial_1\boldsymbol{\varphi}_\eta\,\mathrm{d}y\right)\times\left(\fint_{\omega_\star}\partial_2\boldsymbol{\varphi}_\eta\,\mathrm{d}y\right)\ge\frac{\kappa_0}{2},\tag{20}$$

$\omega_\star$ 的大小仅取决于（19）中的 κ_0 和 $\|\nabla\eta(t)\|_{L^\infty_y}$，尤其与 y_0 无关。现在，（20）表明我们可以旋转坐标系，使得 $\fint_{\omega_\star}\partial_1\boldsymbol{\varphi}_{\eta(t)}\,\mathrm{d}y$ 和 $\fint_{\omega_\star}\partial_2\boldsymbol{\varphi}_{\eta(t)}\,\mathrm{d}y$ 位于 $x-y$ 平面内，而 $\fint_{\omega_\star}\mathbf{n}^{\eta(t)}\,\mathrm{d}y$ 与该平面正交。这可以借助一个仿射线性映射来完成

$$\mathscr{V}^\eta_{t,\star}z=\mathcal{Q}^\eta_{t,\star}z+x_\star,\tag{21}$$

这里 $\mathcal{Q}^\eta_{t,\star}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是一个满足 $\mathcal{Q}^\eta_{t,\star}(0,0,1)^\top=\fint_{\omega_\star}\mathbf{n}^{\eta(t)}\,\mathrm{d}y$ 的正交矩阵。它可以显式地表示为 $\fint_{\omega_\star}\mathbf{n}^\eta\,\mathrm{d}y$ 的函数，并且很容易看出，

$$|\partial_t\mathcal{Q}^\eta_{t,\star}|\lesssim\fint_{\omega_\star}|\partial_t\nabla\eta(t)|\,\mathrm{d}y\lesssim\int_\omega|\partial_t\nabla\eta(t)|\,\mathrm{d}y,\tag{22}$$

其中隐藏常数取决于 η 的 $L^\infty_tW^{1,\infty}_y$-范数以及假设（19）。注意，最后一个隐藏常数还取决于 $\omega_\star$ 的大小。现在我们用函数 $\boldsymbol{\Upsilon}_\eta:=(\mathscr{V}^\eta_{t\star,})^{-1}\boldsymbol{\varphi}_\eta$ 来局部描述 x_* 附近的边界。因此，有如下结论。

$$\det\big(\nabla_y\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}\big)>0,\quad \widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_\eta=\begin{pmatrix}\Upsilon^1_\eta\\ \Upsilon^2_\eta\end{pmatrix},\tag{23}$$

在 $\omega_\star$ 中。因此，存在原点 $\mathbb{R}^2$ 的一个邻域 $\mathcal{O}_\star$，使得函数 $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}\colon\omega_\star\to\widetilde{\mathcal{O}_\star}$ 可逆（利用 (19) 可以很容易地证明，$\boldsymbol{\Upsilon}_{\eta(t)}$ 实际上在 $\omega_\star$ 中全局可逆）。在 $\mathcal{O}_\star$ 中，我们定义函数

$$\boldsymbol{\phi}(t,z)=\begin{pmatrix}z\\ \phi(t,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ \Upsilon^3_{\eta(t)}((\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}(z))\end{pmatrix}.\tag{24}$$

它描述了边界 $(\mathscr{V}^\eta_{t\star,})^{-1}\partial\Omega_{\eta(t)}$，其在 $0=(\mathscr{V}^\eta_{t\star,})^{-1}x_\star$ 附近由 $(\mathscr{V}^\eta_{t\star,})^{-1}\boldsymbol{\varphi}_{\eta(t)}(\omega_\star)$ 给出。由 $\mathcal{Q}^\eta_{t,*}$ 的选取易知 $\fint_{\omega_\star}\nabla_z\Upsilon^3_\eta\,\mathrm{d}y=0$。因此，只要 $\mathcal{O}_\star$ 足够小，$\nabla_z\phi$ 在 $\mathcal{O}_\star$ 中便很小，且 $\eta(t)\in C^1(\omega)$。

现在假设我们有 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}};B^\theta_{\varrho,p}\cap C^1(\omega))$，$\theta > 2-1/p$，其中 p 和 ϱ 通过以下关系相关联。

$$\varrho \geq p \quad \text{if} \quad p \geq 3, \quad \varrho \geq \tfrac{2p}{p-1} \quad \text{if} \quad p < 3,$$

并且 $\sup_{\mathcal{I}}\mathrm{Lip}(\partial\Omega_{\eta(t)})$ 足够小。于是，由 (11)、(12) 和 (13) 可得，该结论关于时间一致成立

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}^{2-1/p,p}} \leq \delta, \quad \|\phi\|_{W^{1,\infty}_y} \leq \delta, \tag{25}$$

对某个足够小的 δ in $\mathcal{O}_\star$ 成立。最后，根据公式

$$\begin{aligned}\partial_t\phi &= \partial_t\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1} + \nabla_y\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\partial_t(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\\ &= \partial_t\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1} - \nabla_y\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\big(\nabla_y\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\big)^{-1}\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1},\end{aligned}$$

(15)、(22) 和 (23)，可验证

$$|\partial_t\phi\circ\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}| \lesssim 1 + |\partial_t\eta| + \int_\omega |\partial_t\nabla\eta|\,\mathrm{d}y, \tag{26}$$

其中，隐藏常数取决于 $L^\infty_t W^{1,\infty}_y$ 范数、η 以及 $\omega_\star$ 的大小。同样，利用公式

$$\begin{aligned}\partial_t\nabla_y\phi &= \partial_t\nabla_y\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\nabla(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1} + \nabla_y^2\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\nabla_y(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\partial_t(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\\ &\quad + \nabla_y\Upsilon^3_{\eta(t)}\circ(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1}\partial_t\nabla_y(\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)})^{-1},\end{aligned}$$

我们得到

$$|\partial_t\nabla_y\phi\circ\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\eta(t)}| \lesssim |\partial_t\nabla\eta| + (|\nabla^2\eta|+1)\bigg(1 + |\partial_t\eta| + \int_\omega |\partial_t\nabla\eta|\,\mathrm{d}y\bigg). \tag{27}$$

通过为某个 $\ell\in\mathbb{N}$ 选取合适的点 $y_1,\dots,y_\ell$ 及上述坐标，我们可以用开集[1] $\mathcal{U}^1,\dots,\mathcal{U}^\ell$ 覆盖 $\partial\Omega_{\eta(t)}$，使得以下结论成立。令 $\mathscr{V}_j := \mathscr{V}^\eta_{t,y_j}$，并按照 (24) 定义 $\phi_j\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，则存在 $r_j>0$，具有以下性质：

(A1) 存在 $h_j>0$ 使得

$$\mathcal{U}^j = \{x = \mathscr{V}_j z\in\mathbb{R}^3 : z=(z',z_3)\in\mathbb{R}^3,\ |z'|<r_j,\ |z_3-\phi_j(z')|<h_j\}.$$

(A2) 对于 $x\in\mathcal{U}^j$，我们有 $z=\mathscr{V}_j^{-1}(x)$

- $x\in\partial\Omega_{\eta(t)}$ 当且仅当 $z_3=\phi_j(z')$;
- $x\in\Omega_{\eta(t)}$ 当且仅当 $0<z_3-\phi_j(z')<h_j$;
- $x\notin\Omega_{\eta(t)}$ 当且仅当 $0>z_3-\phi_j(z')>-h_j$。

(A3) 我们有

$$\partial\Omega_{\eta(t)}\subset\bigcup_{j=1}^\ell \mathcal{U}^j.$$

若 $\eta\in C(\overline{\mathcal{I}};C^1(\omega))$ 且对于某个 $t\in\overline{\mathcal{I}}$，条件 (A1)–(A3) 成立，那么我们可以稍微改变 t 的取值，使得在保持 y_j、r_j 和 h_j、$j=1$、…、ℓ 的选择不变的情况下，(A1)–(A3) 仍然成立。同样，无需改变 $\mathcal{U}^j$。

我们需要将 (A1)–(A3) 中的函数 φ_1、…、φ_ℓ 延拓到半空间 $\mathbb{H}:=\{\xi=(\xi',\xi_3):\ \xi_3>0\}$。因此，我们面临的任务是将函数 $\phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 延拓为映射 $\boldsymbol{\Phi}\colon\mathbb{H}\to\mathbb{R}^3$。这可以借助 Maz'ya 和 Shaposhnikova 的延拓算子 [11, Section 9.4.3] 来实现。设 $\zeta\in C^\infty_c(B_1(0'))$，其中 $\zeta\geq0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^2}\zeta(x')\,\mathrm{d}x'=1$。令 $\zeta_t(x'):=t^{-2}\zeta(x'/t)$ 表示相应的磨光子族。我们定义延拓算子

$$(\mathcal{T}\phi)(\xi',\xi_3) := \int_{\mathbb{R}^2}\zeta_{\xi_3}(\xi'-y')\phi(y')\,\mathrm{d}y', \quad (\xi',\xi_3)\in\mathbb{H},$$

其中 $\phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数，其利普希茨常数为 L。于是得到估计

$$\|\nabla(\mathcal{T}\phi)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^3)} \leq c\|\nabla\phi\|_{W^{s-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^2)} \tag{28}$$

[1]事实上，对于某个 $\omega_j\subset\omega$，$\mathcal{U}_j$ 覆盖了 $\varphi_{\eta(t)}(\omega_j)$，其中 ω_j 的作用与(20)中的 $\omega_\star$ 相同。

由 [11, 定理 8.7.2]可得。此外， [11, 定理 8.7.1] 给出

$$\|\mathcal{T}\phi\|_{\mathcal{M}^{s,p}(\mathbb{H})} \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{M}^{s-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^2)}. \tag{29}$$

可以证明 n 在 [11, 引理 9.4.5] 中，对于足够大的 N，即 $N \geq c(\zeta)L+1$，映射

$$\alpha_{z'}(z_3) \mapsto N z_3 + (\mathcal{T}\phi)(z', z_3)$$

对每个 $z' \in \mathbb{R}^2$ 都是一一映射，且其逆映射是利普希茨的，梯度有界于 $(N-L)^{-1}$。现在，我们定义映射 $\mathbf{\Phi}: \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$，将后一个映射缩放后得到该映射，具体定义为

$$\mathbf{\Phi}(\xi', \xi_3) := \big(\xi', \alpha_{\xi_3}(\xi')\big) = \big(\xi', \xi_3 + (\mathcal{T}\phi)(\xi', \xi_3/N)\big). \tag{30}$$

因此， $\mathbf{\Phi}$ 是一一映射（当 $N = N(L)$ 足够大时），我们可以定义其逆映射 $\mathbf{\Psi} := \mathbf{\Phi}^{-1}$。映射 $\mathbf{\Phi}$ 的雅可比矩阵满足

$$J = \nabla \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2\times 2} & 0 \\ \partial_{\xi'}(\mathcal{T}\phi) & 1 + 1/N \partial_{\xi_3}(\mathcal{T}\phi) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

由于 $|\partial_{\xi_3}\mathcal{T}\phi| \leq L$，我们有

$$\frac{1}{2} < 1 - L/N \leq |\det(J)| \leq 1 + L/N \leq 2 \tag{32}$$

利用 N 相对于 L 足够大这一点。最后，我们指出以下蕴含关系

$$\mathbf{\Phi} \in \mathcal{M}^{s,p}(\mathbb{H}) \;\Rightarrow\; \mathbf{\Psi} \in \mathcal{M}^{s,p}(\mathbb{H}), \tag{33}$$

例如，当 $\mathbf{\Phi}$ 是利普希茨连续时，该关系成立，参见 [11, 引理 9.4.2]。

3.2. 极大正则性理论。基于上一小节的准备工作，我们现在能够证明运动区域中斯托克斯系统的以下极大正则性定理。

定理 3.1. 设 $p, r \in (1, \infty)$ 且

$$\varrho \geq p \quad \text{if} \quad p \geq 3, \quad \varrho \geq \tfrac{2p}{p-1} \quad \text{if} \quad p < 3. \tag{34}$$

假设对某个 $\theta > 2 - 1/p$，有 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}}; B^{\theta}_{\varrho,\, p} \cap W^{2,\, 2} \cap C^1(\omega))$，且 $\sup_{\mathcal{I}} \mathrm{Lip}(\partial\Omega_{\eta(t)})$ 充分小，并且 (19) 成立。进一步假设对某个 $r_0 > \max\{2, r, \frac{2p'}{3}\}$ and $q_0 > 2$，有 $\partial_t \eta \in L^{r_0}(\mathcal{I};\, W^{1,\, q_0}(\omega))$，$\mathbf{f} \in L^r(\mathcal{I};\, L^p(\Omega_\eta))$，且 $\mathbf{u}_0 \in W^{2,\, p} \cap W^{1,\, 0}{}^{p,\, \mathrm{div}}(\Omega_{\eta_0})$。那么 (18) 存在唯一解，并且有

$$\|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^r(\mathcal{I};L^p(\Omega_\eta))} + \|\mathbf{u}\|_{L^r(\mathcal{I};W^{2,p}(\Omega_\eta))} + \|\pi\|_{L^r(\mathcal{I};W^{1,p}(\Omega_\eta))} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{L^r(\mathcal{I};L^p(\Omega_\eta))} + \|\mathbf{u}_0\|_{W^{2,p}(\Omega_{\eta_0})}. \tag{35}$$

注 3.2. 关于非柱状区域中 Stokes问题最大正则性结果，唯一可比的结果见 [6, 第 2 节10]。作者在那里考虑光滑区域（属于 C^3 类），并假设由 η 诱导的区域变换保持体积不变。这一条件对流固耦合的应用而言限制较多。

备注 3.3. 例如，当 $t \mapsto \eta(t)$ 有界地映射到一个严格小于 $W^{1,\infty}(\omega)$ 的函数空间（例如某个 $\alpha > 0$ 对应的 $C^{1,\alpha}(\omega)$）时，或者甚至当 $\eta \in C^0(\overline{\mathcal{I}}, C^1(\omega))$ 时，均有 $\sup_{\mathcal{I}}$利普希茨空间$(\partial\Omega_{\eta(t)}) \ll 1$ 。在这些情况下，可以通过局部坐标图重新参数化边界（如上文第 3.1 节所做），从而得到较小的局部利普希茨常数 利普希茨空间$(\partial\Omega_{\eta(t)})$。

定理 3.1 的证明。假设 $\mathbf{u}_0 = 0$（否则，可以考虑 $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$）。对于 $t \in \overline{\mathcal{I}} = [0, T]$，当 $T \ll 1$ 时，我们考虑满足 (A1)–(A3) 的函数 $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$，这些条件如第 3.1 节所述，参见等式 (24)。显然，我们可以找到一个开集 $\mathcal{U}^0$，使得对于所有 $t \in \overline{\mathcal{I}}$，$\Omega_{\eta(t)} \subset \cup_{j=0}^{\ell} \mathcal{U}^j$。最后，我们考虑相对于覆盖 $\mathcal{U}^0, \ldots, \mathcal{U}^\ell$ 的单位分解 $(\xi_j)_{j=0}^{\ell}$。对于 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$，我们考虑

由 (28) 给出的 ϕ_j 的延拓 $\mathbf{\Phi}_j$，其逆为 $\mathbf{\Psi}_j$。注意，ϕ_j、$\mathbf{\Phi}_j$ 和 $\mathbf{\Psi}_j$ 也依赖于 t，而 ξ_j 则不依赖。我们定义算子[2]

$$\mathscr{R}_0\mathbf{f} := \xi_0\mathbf{U}_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j, \quad \mathscr{P}\mathbf{f} := \sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\mathfrak{q}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j, \tag{36}$$

$$\mathscr{R}\mathbf{f} = \mathscr{R}_0\mathbf{f} + \mathscr{R}_1\mathbf{f}, \quad \mathscr{R}_1\mathbf{f} = -\operatorname{Bog}_{\Omega_{\eta(t)}}\operatorname{div}\mathscr{R}_0\mathbf{f},$$

通过运动区域上的 Bogovskii算子 $\operatorname{Bog}^{\Omega_{\eta(t)}}$。后者已在 [15] 中得到广泛分析，并且可以证明，由于我们的假设 $\eta\in C^0(\overline{\mathcal{I}};C^1(\omega))$，它具有预期的性质。特别地，有

$$\partial_t\operatorname{Bog}_{\Omega_\eta}\operatorname{div} : W^{1,p}(\mathcal{I};L^p(\Omega_\eta))\to L^p(\mathcal{I};L^p(\Omega_\eta)). \tag{37}$$

对于 $j\in\{1,\dots,\ell\}$，函数 $(\mathbf{U}_0,\mathfrak{q}_0)$ 和 $(\mathbf{U}_j,\mathfrak{q}_j)$ 分别是全空间和半空间上的 Stokes问题的解，其数据为 $\mathbf{f}$（必要时经过变换），也就是说，我们有

$$\partial_t\mathbf{U}_0 = \Delta\mathbf{U}_0 - \nabla\mathfrak{q}_0 + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0(0,\cdot) = 0, \tag{38}$$

and

$$\partial_t\mathbf{U}_j = \Delta\mathbf{U}_j - \nabla\mathfrak{q}_j + \mathbf{f}\circ\mathscr{V}_j^{-1}\circ\mathbf{\Phi}_j, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_j = 0, \quad \mathbf{U}_j|_{I\times\partial\mathbb{H}} = 0, \quad \mathbf{U}_j(0,\cdot) = 0. \tag{39}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}}\Big(\|\partial_t\mathbf{U}_0\|_{L^p_x}^r + \|\nabla^2\mathbf{U}_0\|_{L^p_x}^r + \|\nabla\mathfrak{q}_0\|_{L^p_x}^r\Big)\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t,\\
&\int_{\mathcal{I}}\Big(\|\partial_t\mathbf{U}_0\|_{W_x^{-1,p}}^r + \|\mathbf{U}_0\|_{W_x^{1,p}}^r + \|\mathfrak{q}_0\|_{L^p_x}^r\Big)\,\mathrm{d}t \lesssim T^{r/2}\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{40}$$

对于 $j=1,\dots,\ell$，有（利用 $\mathbf{\Phi}_j$ 的利普希茨连续性，该性质可由 ϕ_j 的利普希茨连续性推出，参见 (31)，并且 $\mathcal{Q}_j$ 是正交矩阵）

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}}\Big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{L^p_x}^r + \|\nabla^2\mathbf{U}_j\|_{L^p_x}^r + \|\nabla\mathfrak{q}_j\|_{L^r_x}^r\Big)\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\circ\mathscr{V}_j\circ\mathbf{\Phi}_j\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t,\\
&\int_{\mathcal{I}}\Big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{W_x^{-1,p}}^r + \|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r + \|\mathfrak{q}_j\|_{L^p_x}^r\Big)\,\mathrm{d}t \lesssim T^{r/2}\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\circ\mathscr{V}_j\circ\mathbf{\Phi}_j\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t \lesssim T^{r/2}\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{41}$$

关于 T 一致。注意，估计式 $(40)_2$ 和 $(41)_2$ 仅在空间局部成立（也就是说，在球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 内成立，常数依赖于半径）。在 $r=p$ 的情形下，估计式 (40) 和 (41) 是经典结果，参见 [21，定理 3.1 和 3.2]。对于任意指数 p 和 r 的情形，请参见 [6] 及其中的参考文献。$(40)_2$ 和 $(41)_2$ 中对 T 的依赖性可由缩放得到。

令 $\mathbf{V}_j = \mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j$ 和 $\mathfrak{Q}_j = \mathfrak{q}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j$，我们得到

$$\begin{aligned}
\partial_t\mathbf{V}_j =& \Delta\mathbf{V}_j - \nabla\mathfrak{Q}_j + (1-\det(\nabla\mathbf{\Psi}_j))\partial_t\mathbf{V}_j - \operatorname{div}\big((\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{A}_j)\nabla\mathbf{V}_j\big) - \operatorname{div}((\mathbf{B}_j-\mathbb{I}_{3\times3})\mathfrak{Q}_j)\\
&- \det(\nabla\mathbf{\Psi}_j)\nabla\mathbf{V}_j(\partial_t\mathscr{V}_j^{-1}\circ\mathscr{V}_j + \mathcal{Q}_j^\top\partial_t\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j) + \mathbf{f},\\
&\operatorname{div}\mathbf{V}_j = (\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{B}_j)^\top : \nabla\mathbf{V}_j, \quad \mathbf{V}_j|_{\mathcal{I}\times\partial\Omega_\eta\cap\mathcal{U}^j} = 0, \quad \mathbf{V}_j(0,\cdot) = 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

其中，$\mathbf{A}_j := \det(\nabla\mathbf{\Psi}_j)\nabla\mathbf{\Phi}_j^\top\circ\mathbf{\Psi}_j\nabla\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j$，$\mathbf{B}_j := \det(\nabla\mathbf{\Psi}_j)\mathcal{Q}_j^\top\nabla\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j$。成立如下结论。

$$\partial_t\mathscr{R}\mathbf{f} - \Delta\mathscr{R}\mathbf{f} + \nabla\mathscr{P}\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathscr{S}\mathbf{f} + (\partial_t-\Delta)\mathscr{R}_1\mathbf{f}, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}\mathbf{f} =& -\nabla\mathbf{V}_0\nabla\xi_0 - \operatorname{div}\big(\nabla\xi_0\otimes\mathbf{V}_0\big) - \sum_{j=1}^{\ell}\nabla\mathbf{V}_j\nabla\xi_j\\
&- \sum_{j=1}^{\ell}\operatorname{div}\big(\nabla\xi_j\otimes\mathbf{V}_j\big) + \sum_{j=1}^{\ell}\nabla\xi_j\mathfrak{Q}_j - \sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\operatorname{div}((\mathbf{B}_j-\mathbb{I}_{3\times3})\mathfrak{Q}_j)
\end{aligned}$$

[2]由于 $\partial\Omega_\eta$ 关于时间一致地满足利普希茨条件，我们可以使用标准延拓算子，将 (36)–(39) 中的函数延拓到全空间或半空间（如有必要）。

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\,\mathrm{div}\,\big((\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{A}_j)\nabla\mathbf{V}_j\big)+\sum_{j=1}^{\ell}\xi_j(1-\det(\nabla\mathbf{\Psi}_j))\partial_t\mathbf{V}_j\\
&-\sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\det(\nabla\mathbf{\Psi}_j)\nabla\mathbf{V}_j(\partial_t\mathscr{V}_j^{-1}\circ\mathscr{V}_j+\mathcal{Q}_j^{\top}\partial_t\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j)=:\sum_{i=1}^{9}\mathscr{S}_i\mathbf{f}.
\end{aligned}\tag{44}
$$

我们希望对该算子求逆。

$$
\mathscr{L}:\mathscr{Y}^{\eta}_{r,p}\to L^r(\mathcal{I};L^p_{\mathrm{div}}(\Omega_\eta)),\quad \mathbf{v}\mapsto\mathcal{P}^{\eta}_p\big(\partial_t\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}\big),
$$

其中空间 $\mathscr{Y}^{\eta}_{r,p}$ 定义为

$$
\mathscr{Y}^{\eta}_{r,p}:=L^r(\mathcal{I};W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}\cap W^{2,p}(\Omega_\eta))\cap W^{1,r}(\mathcal{I};L^p(\Omega_\eta))\cap\{\mathbf{v}:\,\mathbf{v}(0,\cdot)=0\}.
$$

由 (43) 可得

$$
\mathscr{L}\mathscr{R}\mathbf{f}=\mathbf{f}+\mathcal{P}^{\eta}_p\mathscr{S}\mathbf{f}+\mathcal{P}^{\eta}_p(\partial_t-\Delta)\mathscr{R}_1\mathbf{f},
$$

即,

$$
\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathrm{id}+\mathscr{T},\tag{45}
$$

其中 $\mathscr{T}=\mathcal{P}^{\eta}_p\mathscr{S}+\mathcal{P}^{\eta}_p(\partial_t-\Delta)\mathscr{R}_1$。这里，$\mathcal{P}^{\eta}_p$是从 $L^p(\Omega\eta)$ 到 $L^p{}_{\mathrm{div}}(\Omega\eta)$ 的亥姆霍兹投影。函数 $\mathrm{u}\in L^p(\mathcal{O})$ 的亥姆霍兹投影 $\mathcal{P}_p\mathrm{u}$（其法向量 $\mathrm{n}_{\mathcal{O}}$ 有界）定义为$\mathcal{P}_p\mathrm{u}:=\mathrm{u}-\nabla h$，其中 h 是诺伊曼问题的解

$$
\begin{cases}\Delta h=\mathrm{div}\,\mathbf{u} & \text{in}\quad\mathcal{O},\\ \mathbf{n}_{\mathcal{O}}\cdot(\nabla h-\mathbf{u})=0 & \text{on}\quad\partial\mathcal{O}.\end{cases}
$$

现在的目标是证明 (45) 中 $\mathscr{T}$ 的算子范数严格小于 1，这意味着 $\mathscr{L}$ 是满射。

由于假设 $\eta\in C^0(\overline{\mathcal{I}};B^{\theta}_{\varrho,p}(\omega))$，且满足 $\theta>2-1/p$和 (25)，项 $\mathscr{S}_1\mathbf{f}\ldots,\mathscr{S}_8\mathbf{f}$ 可完全按照 [2, 定理 3 的证明.1] 进行估计，得到

$$
\int_{\mathcal{I}}\|\mathscr{S}_i\mathbf{f}\|^r_{L^p_x}\,\mathrm{d}t\le\delta(T)\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|^r_{L^p_x}\,\mathrm{d}t,\quad i=1,\ldots,8,\tag{46}
$$

其中 $\delta(T)\to0$ 如 $T\to0$。项 $\mathscr{S}_9\mathbf{f}$ 是由于边界的时间依赖性而出现的，在 [2] 中没有对应项。为了估计该项，我们注意到，由 (25) 和 (29) 可知，对时间一致地有 $\mathbf{\Phi}_j\in\mathcal{M}^{2,p}(\mathbb{H})$，因此由 (33) 得 $\mathbf{\Psi}_j\in\mathcal{M}^{2,p}(\mathbb{H})$。这就证明了估计

$$
\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{V}_j\|^r_{W^{2,p}_x}\,\mathrm{d}t\lesssim\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{U}_j\|^r_{W^{2,p}_x}\,\mathrm{d}t
$$

由 (13) 得。利用嵌入

$$
W^{1,r}(\mathcal{I},L^p(\Omega))\cap L^r(\mathcal{I},W^{2,p})\hookrightarrow W^{\frac12,r}(\mathcal{I},W^{1,p}(\Omega))\hookrightarrow L^{\overline{r}}(\mathcal{I},W^{1,p}(\Omega)),\quad W^{1,q_0}(\omega)\hookrightarrow L^\infty(\omega),
$$

其中，当 $r>2$ 时 $\overline{r}=\infty$，当 $r=2$ 时 $\overline{r}<\infty$ 任意，且当 $r<2$ 时 $\overline{r}=\frac{2r}{2-r}$；连同式 (22) 和 (26)（以及式 (28) 和 $\mathbf{\Phi}_j$ 的定义）可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}}\|\mathscr{S}_9\mathbf{f}\|^r_{L^p_x}\,\mathrm{d}t&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\|\nabla\mathbf{U}_j\|^r_{L^{\overline{r}}(\mathcal{I},L^p(\Omega))}\big(\|\partial_t\nabla\eta\|^r_{L^{\tilde r}(\mathcal{I},L^1(\omega))}+\|\partial_t\eta\|^r_{L^{\tilde r}(\mathcal{I},L^\infty(\omega))}\big)\\
&\lesssim\delta(T)\sum_{j=1}^{\ell}\|\nabla\mathbf{U}_j\|^r_{L^{\overline{r}}(\mathcal{I},L^p(\Omega))}\|\partial_t\eta\|^r_{L^{r_0}(\mathcal{I},W^{1,q_0}(\omega))}\\
&\lesssim\delta(T)\sum_{j=1}^{\ell}\big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|^r_{L^r(\mathcal{I},L^p(\mathbb{H}))}+\|\mathbf{U}_j\|^r_{L^r(\mathcal{I},W^{2,p}(\mathbb{H}))}\big)\\
&\lesssim\delta(T)\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|^r_{L^p_x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{47}
$$

其中 $\max\{2,r\} < \tilde r < r_{0\circ}$ 注意，我们在最后一步还使用了 (41)，并在倒数第二步中使用了假设 $\eta \in L^{r_0}(\mathcal{I},W^{1,q_0}(\omega))$。结合 (46) 并将 T 取足够小，我们可以推得

$$\int_{\mathcal{I}} \|\mathscr{S}\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r \,\mathrm{d}t \le \tfrac{1}{4}\int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r \,\mathrm{d}t. \tag{48}$$

现在我们将对 $(\partial_t-\Delta)\mathscr{R}_1$证明同样的结论。由于 $\operatorname{div}\mathbf{B}_j^\top = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathscr{R}_0\mathbf{f} &= \nabla\xi_0\cdot\mathbf{U}_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\nabla\xi_j\cdot\mathbf{V}_j + \sum_{j=1}^{\ell}\xi_j(\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{B}_j)^\top : \nabla\mathbf{V}_j\\ &= \nabla\xi_0\cdot\mathbf{U}_0 + \sum_{j=1}^{\ell}\nabla\xi_j\cdot\mathbf{V}_j + \sum_{j=1}^{\ell}\xi_j\operatorname{div}\big((\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{B}_j)^\top : \mathbf{V}_j\big)\end{aligned}$$

从而 (37) 得出

$$\begin{aligned}\|\partial_t\mathscr{R}_1\mathbf{f}\|_{L^p_x} &\lesssim \|\nabla\xi_0\cdot\partial_t\mathbf{U}_0\|_{W_x^{-1,p}} + \sum_{j=1}^{\ell}\|\nabla\xi_j\cdot\partial_t\mathbf{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{\ell}\|\xi_j\operatorname{div}\big((\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{B}_j)^\top\partial_t\mathbf{V}_j\big)\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{\ell}\|\xi_j\partial_t\mathbf{B}_j^\top : \nabla\mathbf{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}\\ &=: (R)_1+(R)_2+(R)_3+(R)_4.\end{aligned}$$

由于 U_0 满足 (38)，由 (40) 可推得

$$\int_{\mathcal{I}}(R)_1^r\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{\mathcal{I}}\|\partial_t\mathbf{U}_0\|_{W_x^{-1,p}}^r\,\mathrm{d}t \lesssim T^{r/2}\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L^p_x}^r\,\mathrm{d}t.$$

为了估计其余各项，我们需要用 U_J来估计 V_j。由于变换 $\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j$依赖于时间，这比在 [2] 中的情形更加复杂。由于该函数是一致利普希茨的（这由 ϕ_j的利普希茨连续性（参见 (31)）以及 $\mathcal{Q}_j$ 是一个正交矩阵这一事实可得），我们有

$$\begin{aligned}\|\partial_t\mathbf{V}_j\|_{W_x^{-1,p}} &= \|\partial_t(\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j)\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\lesssim \|(\partial_t\mathbf{U}_j)\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j)\|_{W_x^{-1,p}} + \|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\partial_t\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\quad+\|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\nabla\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\partial_t\mathscr{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\lesssim \|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{W_x^{-1,p}} + \|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{W_x^{-1,p}}\\ &\quad+\|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\nabla\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\partial_t\mathscr{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}.\end{aligned}$$

按（47）选取 $\tilde r$ 和 $\overline{r}$，并利用（26）（以及（28）和 $\mathbf{\Phi}_j$ 与 $\mathbf{\Psi}_j$的定义），对于 $\tilde p$，我们有: $=\max\{1,3p/(p+3)\}$

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{L^r(\mathcal{I},W^{-1,p}(\Omega))} &\lesssim \bigg(\int_{\mathcal{I}}\|\nabla\mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{L^{\tilde p}_x}^r\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{r}}\\ &\lesssim \bigg(\int_{\mathcal{I}}\|\nabla\mathbf{U}_j\|_{L^p_x}^r\|\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{L_x^{\max\{3,p'\}}}^r\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{r}}\\ &\lesssim \bigg(\int_{\mathcal{I}}\|\nabla\mathbf{U}_j\|_{L^p_x}^r\|\partial_t\phi_j\|_{L^\infty_y}^r\,\mathrm{d}t\bigg)^{\frac{1}{r}}\\ &\lesssim \|\nabla\mathbf{U}_j\|_{L^{\overline{r}}(\mathcal{I},L^p(\Omega))}\big(\|\partial_t\eta\|_{L^{\tilde r}(\mathcal{I},L^\infty(\omega))}+\|\partial_t\nabla\eta\|_{L^{\tilde r}(\mathcal{I},L^1(\omega))}\big)\\ &\lesssim \|\nabla\mathbf{U}_j\|_{L^{\overline{r}}(\mathcal{I},L^p(\Omega))}\|\partial_t\eta\|_{L^{\tilde r}(\mathcal{I},W^{1,q_0}(\omega))}\end{aligned}$$

$$\lesssim \delta(T)\|\nabla \mathbf{U}_j\|_{L^{\overline{r}}(\mathcal{I},L^p(\Omega))}\|\partial_t\eta\|_{L^{r_0}(\mathcal{I},W^{1,q_0}(\omega))}$$
$$\lesssim \delta(T)\big(\|\partial_t \mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},L^p(\Omega))}+\|\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},W^{2,p}(\Omega))}\big),$$

类似地，

$\|\nabla \mathbf{U}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\nabla\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j\partial_t\mathscr{V}_j\|_{L^r(\mathcal{I},\ W^{-1,\ p}(\Omega))}\lesssim\delta(T)\big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},\ L^p(\Omega))}+\|\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},\ W^{2,\ p}(\Omega))}\big)$根据（22）。综上，我们得到

$$\int_{\mathcal{I}}\|\partial_t\mathbf{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}^r\,\mathrm{d}t\lesssim\delta(T)\big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},L^p(\Omega))}^r+\|\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},W^{2,p}(\Omega))}^r\big).$$

由此，根据（41）可得

$$\int_{\mathcal{I}}(R)_2^r\,\mathrm{d}t\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\|\partial_t\mathbf{V}_j\|_{W_x^{-1,p}}^r\,\mathrm{d}t\lesssim\delta(T)\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t.$$

下面我们在 Ω_η 中应用 Necas 负范数定理，该定理成立是因为 $\partial\Omega_\eta$ 随时间变化而始终为利普希茨域。利用 $\mathbf{\Psi}\circ\mathscr{V}_j$ 为利普希茨函数，我们由（25）很容易得到（论证与上面对（R）$_2^r$ 的估计相同）

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}}(R)_3^r\,\mathrm{d}t&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\|\mathbb{I}_{3\times3}-\mathbf{B}_j\|_{L^\infty(\Omega)}^r\|\partial_t\mathbf{V}_j\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\delta(\mathrm{Lip}(\partial\Omega_\eta))\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{L_x^p}^r+\|\nabla\mathbf{U}_j\partial_t(\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j)\circ(\mathbf{\Psi}_j\circ\mathscr{V}_j)^{-1}\|_{L_x^p}^r\big)\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\delta(\mathrm{Lip}(\partial\Omega_\eta))\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t+\int_{\mathcal{I}}\|\nabla\mathbf{U}_j\|_{L_x^p}^r\big(\|\partial_t\eta\|_{L^\infty(\omega)}^r+\|\partial_t\nabla\eta\|_{L^1(\omega)}^r\big)\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\delta(\mathrm{Lip}(\partial\Omega_\eta))\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t+\delta(T)\big(\|\partial_t\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},L^p(\Omega))}^r+\|\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I},W^{2,p}(\Omega))}^r\big)\\
&\lesssim\delta(\mathrm{Lip}(\partial\Omega_\eta))\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t+\delta(T)\int_{\mathcal{I}}\|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

再次使用 (41)。请注意，第二项的估计要求 T 远小于 δ（Lip($\partial\Omega_\eta$)），因为估计 (22) 和 (26) 取决于 $\mathcal{U}^j$ 的大小，因此也取决于 Lip($\partial\Omega_\eta$) 的倒数。至于 $(R)_4$，我们先假设 $p\geq\frac{3}{2}$ 满足 $\frac{3p}{p+3}\geq1$。在这种情况下，由 (26) 和 (27) 可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}}(R)_4^r\,\mathrm{d}t&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\|\partial_t\mathbf{B}_j^\top:\nabla\mathbf{V}_j\|_{L_x^{3p/(p+3)}}^r\,\mathrm{d}t\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\|\partial_t\mathbf{B}_j\|_{L_x^3}^r\|\nabla\mathbf{V}_j\|_{L_x^p}^r\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\nabla\mathbf{\Psi}_j\|_{L_x^3}^r+\|\partial_t\nabla\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\|_{L_x^3}^r+\|\nabla^2\mathbf{\Phi}_j\circ\mathbf{\Psi}_j\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{L_x^3}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r\,\mathrm{d}t\\
&+\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\eta\|_{L_y^\infty}^r+\|\partial_t\nabla\eta\|_{L_y^1}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\mathbf{\Phi}_j\|_{W_x^{1,3}}^r+\|\nabla^2\mathbf{\Phi}_j\|_{L^3}^r\|\partial_t\mathbf{\Psi}_j\|_{L_x^\infty}^r+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\phi_j\|_{W_y^{2/3,3}}^r+\|\mathbf{\Phi}_j\|_{W_x^{5/2,2}}^r\|\partial_t\phi_j\|_{L_y^\infty}^r+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r\,\mathrm{d}t\\
&\lesssim\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\mathcal{I}}\big(\|\partial_t\phi_j\|_{W_y^{2/3,3}}^r+\|\phi_j\|_{W_x^{2,2}}^r\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathcal{I}} \big(1+\|\eta\|_{W_y^{2,2}}^r\big)\big(1+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,p}}^r \,\mathrm{d}t$$

同时使用 (28)、索оболев嵌入 $W^{1,}{}_y{}^2 \hookrightarrow W^{2/3,y}{}^3$ 和 $W^{5/2,}{}_x{}^2 \hookrightarrow W^{2,x}{}^3$，以及 (13)。由于根据假设，$\eta \in L_t^\infty W^{2,y}{}^2$，我们可以像 (47) 中那样推导，得到

$$\int_{\mathcal{I}} (R)_4^r \,\mathrm{d}t \lesssim \delta(T) \int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t.$$

若 $p < \frac{3}{2}$，类似的推导链将得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}} (R)_4^r \,\mathrm{d}t &\lesssim \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathcal{I}} \|\partial_t \mathbf{B}_j^\top : \nabla \mathbf{V}_j\|_{L_x^1}^r \,\mathrm{d}t \lesssim \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathcal{I}} \|\partial_t \mathbf{B}_j\|_{L_x^3}^r \|\nabla \mathbf{V}_j\|_{L_x^{3/2}}^r \,\mathrm{d}t \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathcal{I}} \big(1+\|\eta\|_{W_y^{2,2}}^r\big)\big(1+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,3/2}}^r \,\mathrm{d}t \\ &\lesssim \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\mathcal{I}} \big(1+\|\partial_t\eta\|_{W_y^{1,q_0}}^r\big)\|\mathbf{U}_j\|_{W_x^{1,3/2}}^r \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

现在我们使用嵌入

$$W^{1,r}(\mathcal{I}, L^p(\mathbb{H})) \cap L^r(\mathcal{I}, W^{2,p}(\mathbb{H})) \hookrightarrow W^{\frac{3}{2p'},r}(\mathcal{I}, W^{\frac{3-p}{p},p}(\mathbb{H})) \hookrightarrow L^{\overline{r}}(\mathcal{I}, W^{1,3/2}(\mathbb{H})),$$

其中，$\overline{r} = \infty$ 若 $r > \frac{2p'}{3}$，$\overline{r} < \infty$ 任意，若 $r = \frac{2p'}{3}$ 且 $\overline{r} = \frac{2rp'}{2p'-3r}$，若 $r < \frac{2p'}{3}$。由此，根据（40）、关于 η 和 $r_0 >$ 的假设以及 $\max\{r, 2p'/3\}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}} (R)_4^r \,\mathrm{d}t &\lesssim \Big(\delta(T) + \|\eta\|_{L^{2p'/3}(\mathcal{I}, W^{1,q_0}(\omega))}^r\Big) \sum_{j=1}^{\ell} \big(\|\partial_t \mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I}, L^p(\mathbb{H}))}^r + \|\mathbf{U}_j\|_{L^r(\mathcal{I}, W^{2,p}(\mathbb{H}))}^r\big) \\ &\lesssim \delta(T) \int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此，在情形 $p < \frac{3}{2}$ 下也有相同的估计。

总之，我们已经证明

$$\int_{\mathcal{I}} \|\partial_t \mathscr{R}_1 \mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t \le \tfrac{1}{4} \int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t, \tag{49}$$

当 T 且 Lip($\partial\Omega_\eta$) 足够小时。对于 $\Delta\mathscr{R}_1\mathbf{f}$，我们可以使用 (25)，并按照定理 3 的证明 [2,进行论证，1] 得到

$$\int_{\mathcal{I}} \|\Delta \mathscr{R}_1 \mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t \le \tfrac{1}{4} \int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{f}\|_{L_x^p}^r \,\mathrm{d}t \tag{50}$$

选择 T 使 Lip($\partial\Omega_\eta$) 足够小。结合 (48)、(49) 和 (50) 可得 $\|\mathscr{T}\| \le \frac{3}{4}$。回顾 (45)，我们已证明当 T 足够小时（例如 $T = T_0 \ll 1$）时，该结论成立。很容易将其推广到整个区间。设 $(\mathbf{u}\ \pi)$ 是 $[0,T]$中的解。为了得到整个区间上的解，我们考虑 $[0,T]$ 上的单位分解 $(\psi_k)_{k=1}^K$，使得 $\operatorname{spt}(\psi_k) \subset (\alpha_k, \alpha_k + T_0]$，其中某个 $(\alpha_k)_{k=2}^K \subset [0,T]$且 $\alpha_1 = 0$。函数 $(\mathbf{u}_k, \pi_k) = (\psi_k \mathbf{u}\ \psi_k \pi)$ 是下列方程的唯一解：

$$\partial_t \mathbf{u}_k = \Delta \mathbf{u}_k - \nabla \pi_k + \mathbf{f} + \psi_k' \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0, \quad \mathbf{u}_k|_{(\alpha_k, \alpha_k + T_0) \times \partial\Omega_\eta} = 0, \quad \mathbf{u}_k(\alpha_k, \cdot) = 0.$$

应用已证明的区间 $[0,T_0]$ 上的结果，并注意到 $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k$ 以及 $\pi = \sum_{k=1}^K \pi_k$，即可证明一般情形下的结论。□

4. Partial regularity

4.1. 边界适定弱解。下面我们借鉴 [18] 和 [2]中的记号，给出边界适定弱解的定义。为此，我们固定两个数 $r_* \in (1,2)$ 和 $s_* \in (1, 3/2)$，使得 $\frac{1}{r_*}+\frac{3}{2s_*} \geq 2$。作出这一选择是因为方程 (1) 的弱解的对流项 $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 属于 $L_t^{r_*}L_x^{\overline{s}_*}$。稍后我们将选择 $r_* = 5/3$，相应地，选择 $s_* = 15/14$。

定义 4.1（边界适定弱解）。设 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}};\, C^1(\omega))$，其中 $\|\eta\|_{L_t^\infty,\, y} < L$。设 $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0)$ 是满足以下条件的数据集：

$$\mathbf{f} \in L^{r_*}\big(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_\eta)\big), \quad \mathbf{u}_0 \in W^{2,s_*} \cap W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega_{\eta(0)}). \tag{51}$$

若满足以下条件，则称元组 $(\mathbf{u}\ \pi)$ 是具有数据 $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0)$ 的纳维–斯托克斯方程组 (1) 的边界适定弱解：

(a) 速度场 $\mathbf{u}$ 满足

$$\mathbf{u} \in L^\infty\big(\mathcal{I}; L^2(\Omega_\eta)\big) \cap L^2\big(\mathcal{I}; W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega_\eta)\big) \cap L^{r_*}(\mathcal{I}; W^{2,s_*}(\Omega_\eta)) \cap W^{1,r_*}(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_\eta)).$$

(b) 压力 π 满足

$$\pi \in L^{r_*}(\mathcal{I}; W^{1,s_*}_{\perp}(\Omega_\eta)).$$

(c) 我们有

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} - \nabla\pi + \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega_\eta} = 0, \quad \mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0,$$

在 $\mathcal{I}\times\Omega_\eta$ 中几乎处处。

(d) 对于任意 $\zeta \in C_c^\infty(\mathcal{I}\times\mathbb{R}^3)$，若 $\zeta \geq 0$ 且 $\mathrm{spt}(\zeta) \cap (\mathcal{I}\times\partial\Omega_\eta)$，则满足局部能量不等式。

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2}\zeta\big|\mathbf{u}(t)\big|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{\Omega_\eta} \zeta|\nabla\mathbf{u}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\\ &\qquad\leq \int_0^t\int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{u}|^2(\partial_t\zeta+\Delta\zeta) + \big(|\mathbf{u}|^2+2\pi\big)\mathbf{u}\cdot\nabla\zeta\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t\int_{\Omega_\eta}\zeta\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{52}$$

成立。

下一个定理表明，在对 η 施加适当假设的情况下，存在一个满足方程 (1) 的边界适定弱解。

定理 4.2. 假设对于某个 $\varrho \geq 2s_*/(s_*-1)$ 和 $\theta > 2-1/s_*$，$\eta \in C(\overline{\mathcal{I}}; B^\theta_{\varrho,s_*} \cap W^{2,2}_{,} \cap C^1(\omega))$，且 $\sup_{\mathcal{I}}$利普希茨空间$(\partial\Omega_{\eta(t)})$ 足够小，并且 (19) 成立。进一步假设对于某个 $r_0 > \max\{2, r_*, 2s_*'/3\}$ 和 $q_0 > 2$，$\partial_t\eta \in L^{r_0}(\mathcal{I}; W^{1,q_0}(\omega))$。则存在一个边界适定弱解 $(\mathbf{u}\ \pi)$，其满足纳维 – 斯托克斯方程 (1)，且满足定义 4.1 的意义。

证明。我们考虑一个近似系统，其中对对流项和边界函数进行正则化。我们在 $\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\xi^\xi}$ 上构造该系统的一个解，其物质导数为 $\partial_t + \mathcal{R}^\xi\mathbf{u}^\xi\cdot\nabla$，其中 $\xi > 0$ 是一个固定的正则化核。这里，$\mathcal{R}^\xi$ 将函数延拓至 $\mathcal{I}\times\mathbb{R}^3$，并在时空中进行平滑。我们用 $\mathfrak{r}^\xi$ 表示作用于定义在 ω上的周期函数的正则化算子，该算子由 $\mathcal{I}$上的时间正则化构成。对于 $0 < \xi \ll 1$，我们寻找一个函数 $\mathbf{u}_\xi \in L^\infty(I, L^2(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta})) \cap L^2(I, W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta}))$，使其满足

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta(t)}}\mathbf{u}_\xi\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta(t)}}\big(\mathbf{u}_\xi\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} - \tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^\xi\mathbf{u}_\xi\cdot\nabla)\mathbf{u}_\xi\cdot\boldsymbol{\varphi} + \tfrac{1}{2}(\mathcal{R}^\xi\mathbf{u}_\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u}_\xi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad - \int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta(t)}}\big(\mu\nabla\mathbf{u}_\xi : \nabla\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{R}^\xi\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{53}$$

对于所有满足 $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\overline{I}\times\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(T,\cdot) = 0$、$\mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi} = 0$ 以及 $\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta}} = 0$，并且 $\mathbf{u}_\xi(0) = \mathcal{R}^\xi\mathbf{u}_0$的情形，$\mathbf{u}_\xi$ 的存在性可按照 [8, 命题 3.4]中的方法证明（我们的情形要容易得多，因为边界是给定的，且边界条件是平凡的）。它还满足一个全局能量不等式，该不等式意味着

$$\sup_{\mathcal{I}}\int_{\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta}}|\mathbf{u}_\xi|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega_{\mathfrak{r}^\xi\eta}}|\nabla\mathbf{u}_\xi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq c \tag{54}$$

关于 ξ一致地成立。可以将（53）理解为右端项为

$$\mathbf{g}_\xi := -\frac{1}{2}(\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_\xi \cdot \nabla)\mathbf{u}_\xi - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_\xi \cdot \nabla)\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_\xi + \mathcal{R}^\xi \mathbf{f}$$

在运动区域 $\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}$ 中。由于 $\mathbf{g}_\xi$ 属于 $L^2(\mathcal{I}, L^2(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))$，且初始数据 $\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_0$ 属于$L^2(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta(0)})$（其范数依赖于 ξ），我们可以应用定理 3.1，取 $p = r = 2$，从而得到

$$\mathbf{u}_\xi \in L^2(\mathcal{I}, W^{2,2}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta})), \quad \partial_t \mathbf{u}_\xi \in L^2(\mathcal{I}, L^2(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta})), \quad \pi_\xi \in L^2(\mathcal{I}, W^{1,2}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta})),$$

其中 π_ξ 是相应的压力函数。这意味着我们得到了（53）的一个强解。特别地，我们可以用 $\zeta \mathbf{u}_\xi$ 进行检验，其中 ζ 是（52）所要求的局部化函数。由此可得 $\mathbf{u}_\xi$ 在区域 $\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}$ 中的（52）的一个版本。

现在的目标是在 ξ 中取极限。算子 $\mathfrak{r}^\xi$ 在所有满足 $p < \infty$ 的 Besov 空间上收敛。此外，它不会扩大 $W^{1,\infty}$-范数，这足以应用定理 3.1，从而得到

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \mathbf{u}_\xi\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} + \|\mathbf{u}_\xi\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; W^{2,s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} + \|\pi_\xi\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; W^{1,s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} \\ &\qquad \lesssim \|\mathcal{R}^\xi \mathbf{f}\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} + \|(\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_\xi \cdot \nabla)\mathbf{u}_\xi\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} \\ &\qquad + \|(\mathbf{u}_\xi \cdot \nabla)\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_\xi\|_{L^{r_*}(\mathcal{I}; L^{s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta}))} + \|\mathcal{R}^\xi \mathbf{u}_0\|_{W^{2,s_*}(\Omega_{\mathfrak{r}^\xi \eta(0)})} \end{aligned} \tag{55}$$

关于 ξ 一致。由 (54) 可知，根据我们对数据的假设以及 $\mathcal{R}^\xi$ 的性质，右端项一致有界。利用 (55)，我们得到（经过选取一个子列）具有所述正则性的极限对象，同时 $\mathbf{u}_\xi$ 也具有紧性，并且可以在动量方程和局部能量不等式中取极限。注意，这还要求 $\mathfrak{r}^\xi \eta$ 一致收敛到 η，而这可由 $\mathfrak{r}^\xi$ 的性质推出。□

下面的定理是本文的主要结果。

定理 4.3. 假设 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}}; B^\theta_{p,\,p} \cap W^{2,\,2} \cap C^1(\omega))$ 对某个 $p > \frac{15}{4}$和某个 $\theta > 2 - 1/p$成立，且 $\sup_{\mathcal{I}} \mathrm{Lip}(\partial \Omega_{\eta(t)})$ 足够小，并且 (19) 成立。进一步假设 $\partial_t \eta \in L^3(\mathcal{I}; W^{1,\,q_0}(\omega))$ 对某个 $q_0 > 2$成立。存在一个数 $\varepsilon_0 > 0$ 使得以下结论成立。设 $(\mathbf{u}, \pi)$ 是纳维–斯托克斯方程组 (1) 的边界适定弱解，其意义见定义 4.1。设 $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \partial\Omega_\eta$ 满足

$$r^{-2} \int_{t_0 - r^2}^{t_0 + r^2} \int_{\Omega_\eta \cap \mathcal{B}_r(x_0)} |\mathbf{u}|^3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \left(r^{-5/3} \int_{t_0 - r^2}^{t_0 + r^2} \int_{\Omega_\eta \cap \mathcal{B}_r(x_0)} |\pi|^{5/3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{9}{5}} < \varepsilon_0 \tag{56}$$

对某个 $r \ll 1$成立。那么，对于某个 $\alpha > 0$，存在 (t_0, x_0)的一个邻域 $\mathcal{U}(t_0, x_0)$，使得 $\mathbf{u} \in C^{0,\,\alpha}(\overline{\mathcal{U}}(t_0, x_0) \cap \overline{\mathcal{I}} \times \Omega\eta)$。

定理 4.3 的证明将在下一小节给出。记 $\mathcal{H}^s_{\mathrm{para}}$ 为 s 维抛物型豪斯多夫测度，由定理 4.3 可得以下关于奇异集大小的推论。

推论 4.4. 假设定理 4.3 的条件成立。则存在纳维–斯托克斯方程 (1) 的一个解 $(\mathbf{u}, \pi)$ 和一个闭集 $\Sigma \subset \mathcal{I} \times \partial\Omega\eta$，满足 $\mathcal{H}^{5/3}_{\mathrm{para}}(\Sigma) = 0$，使得对任意 $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \partial\Omega_\eta \setminus \Sigma$，都有 $\mathbf{u} \in C^{0,\,\alpha}(\overline{\mathcal{U}}(t_0, x_0) \cap \overline{\mathcal{I}} \times \Omega\eta)$，其中某个 $\alpha > 0$ 以及 (t_0, x_0) 的一个邻域 $\mathcal{U}(t_0, x_0)$。

注 4.5. 推论 4.4 是 [2], 的对应结果，其中考虑的是固定区域。与那里一样，奇异集的豪斯多夫估计比 [18] 中光滑边界的情形更差。对于足够光滑的函数 η，我们预期可以重现 [18] 中的结果。

注 4.6. 假设边界适定弱解存在，则可以将定理 4.3 中的假设 $\partial_t \eta \in L^3(\mathcal{I}; W^{1,q_0}(\omega))$ 弱化为 $\partial_t \eta \in L^3(\mathcal{I}; L^3 \cap W^{1,1}(\omega))$。从引理 4.12 证明中的估计，特别是 (89) 的证明，可以明显看出这一点。然而，这还不足以应用定理 3.1（这对定理 4.2 的证明至关重要），因此此类解是否存在仍不清楚。

4.2. 扰动系统。设 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}};\, W^{2,2}_{,} \cap C^1(\omega))$ 为根据第 2.4 节描述 Ω_η 边界的函数，并假设 (19) 成立。设 $(\mathrm{u}\ \pi)$ 是 4.1 节意义下方程 (1) 的边界适定弱解。对于 $(t_0, x_0) \in \mathcal{I} \times \partial\Omega_\eta$，我们按照第 3.1 节定义函数 ϕ、$\mathbf{\Phi}$、$\mathbf{\Psi}$ 和 $\mathscr{V}$（带有矩阵 $\mathcal{Q}$）。我们令 $\overline{\pi} = \underline{\pi} \circ \mathscr{V} \circ \mathbf{\Phi}$、$\mathrm{u} = \mathrm{u} \circ \mathscr{V} \circ \mathbf{\Phi}$ 和 $\mathrm{f} = \mathrm{f} \circ \mathscr{V} \circ \mathbf{\Phi}$。我们还引入

$$\mathbf{A}_\phi = J_\phi \big(\nabla \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi}\big)^{\top} \nabla \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{B}_\phi = J_\phi \nabla \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi} \mathcal{Q}^{\top}, \tag{57}$$

其中 $J_\phi = \det(\nabla \mathbf{\Phi})$。我们看到，$(\mathrm{u}\ \overline{\pi})$ 是该系统的一个解

$$J_\phi \partial_t \overline{\mathbf{u}} + \operatorname{div}\big(\mathbf{B}_\phi \overline{\pi}\big) - \operatorname{div}\big(\mathbf{A}_\phi \nabla \overline{\mathbf{u}}\big) = -J_\phi \nabla \overline{\mathbf{u}}\, \partial_t (\mathbf{\Psi} \circ \mathscr{V}^{-1}) \circ \mathbf{\Phi} - \mathbf{B}_\phi \nabla \overline{\mathbf{u}}\, \overline{\mathbf{u}} + J_\phi \overline{\mathbf{f}}, \tag{58}$$

$$\mathbf{B}_\phi^{\top} : \nabla \overline{\mathbf{u}} = 0, \quad \overline{\mathbf{u}}|_{\partial \mathcal{B}_1^+ \cap \partial \mathbb{H}} = 0, \tag{59}$$

在 Q_1^+ 中几乎处处成立。注意，可能有必要对时空坐标进行平移和缩放，以得到一个定义在 $Q_1^+ := Q_1(0,0)$ 上的系统（而非定义在某些 $r > 0$、$t_0 \in \mathcal{I}$ 和 $x_0 \in \partial\mathbb{H}$ 所对应的 $Q_r(t_0, x_0)$ 上）。类似地，我们可以变换局部能量不等式，从而得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} J_\varphi \zeta \big|\overline{\mathbf{u}}(t)\big|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \zeta \mathbf{A}_\varphi \nabla \overline{\mathbf{u}} : \nabla \overline{\mathbf{u}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad \le \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} |\overline{\mathbf{u}}|^2 J_\varphi \nabla \zeta \partial_t (\mathbf{\Psi} \circ \mathscr{V}^{-1}) \circ \mathbf{\Phi} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} J_\varphi |\overline{\mathbf{u}}|^2 \partial_t \zeta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} J_\varphi |\overline{\mathbf{u}}|^2 \Delta \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi} \cdot \nabla \zeta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} |\overline{\mathbf{u}}|^2 \mathbf{A}_\varphi : \nabla^2 \zeta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} \frac{1}{2} \big(|\overline{\mathbf{u}}|^2 + 2\overline{\pi}\big) \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}_\varphi \nabla \zeta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t \int_{\Omega_\eta} J_\varphi \zeta \overline{\mathbf{f}} \cdot \overline{\mathbf{u}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{60}$$

对于任意满足 $\zeta \ge 0$ 的 $\zeta \in C_c^\infty(Q_1)$。注意，右侧的第一项是由移动边界导致的，在柱形区域中该项为零。

定义 4.7 （边界适定弱解扰动系统）。设 $(\mathrm{f}, \mathrm{u}_0)$ 是一个数据集，使得 at

$$\overline{\mathbf{f}} \in L^{r_*}\big(\mathcal{I}_1; L^{s_*}(\mathcal{B}_1^+)\big)\big), \quad \overline{\mathbf{u}}_0 \in W^{2,s_*} \cap W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\mathcal{B}_1^+). \tag{61}$$

若满足以下条件，我们称三元组 $(\mathrm{u}\ \overline{\pi})$ 为具有数据 $(\mathrm{f}, \mathrm{u}_0)$ 的扰动纳维–斯托克斯系统 (58) 的边界适定弱解：

(a) 速度场 u 满足

$$\overline{\mathbf{u}} \in L^\infty\big(\mathcal{I}_1; L^2(\mathcal{B}_1^+)\big) \cap L^2\big(\mathcal{I}_1; W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\mathcal{B}_1^+)\big) \cap L^{r_*}(\mathcal{I}_1; W^{2,s_*}(\mathcal{B}_1^+)) \cap W^{1,r_*}(\mathcal{I}_1; L^{s_*}(\mathcal{B}_1^+)).$$

(b) 压力 $\overline{\pi}$ 满足

$$\overline{\pi} \in L^{r_*}(\mathcal{I}_1; W^{1,s_*}_{\perp}(\mathcal{B}_1^+)).$$

(c) 系统 (58)–(59) 在 Q_1^+中几乎处处成立。(d) 对任意满足 $\zeta \ge 0$ 的 $\zeta \in C_c^\infty(Q_1)$，局部能量不等式 (60) 成立。

在第 4 节部分正则性证明的主体部分，我们将扰动纳维–斯托克斯系统的边界适定弱解与扰动斯托克斯系统的一个解进行比较。因此，下面我们分析后者。

与 (58)–(59) 类似，Q_1^+ 中的扰动斯托克斯系统由下式给出

$$\begin{aligned}
J_\phi \partial_t \overline{\mathbf{u}} + \operatorname{div}\big(\mathbf{B}_\phi \overline{\pi}\big) - \operatorname{div}\big(\mathbf{A}_\phi \nabla \overline{\mathbf{u}}\big) &= \overline{\mathbf{g}}, \\
\mathbf{B}_\phi^{\top} : \nabla \overline{\mathbf{u}} = \overline{h}, \quad \overline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{B}_1^+ \cap \partial\mathbb{H}} = 0, \quad \overline{\mathbf{u}}(-1, \cdot) &= 0,
\end{aligned} \tag{62}$$

其中，A_ϕ 和 B_ϕ 根据（57）针对给定函数 ϕ： $\mathcal{I}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$定义， $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 为一个正交矩阵（随时间连续变化），而g和 $\overline{h}$ 为给定数据。

我们还需要对靠近边界的点进行内部估计，因此我们类比（62）考虑以下系统

$$\begin{aligned} J_\phi \partial_t \overline{\mathbf{u}} + \operatorname{div}\left(\mathbf{B}_\phi \overline{\pi}\right) - \operatorname{div}\left(\mathbf{A}_\phi \nabla \overline{\mathbf{u}}\right) &= \overline{\mathbf{g}}, \\ \mathbf{B}_\phi^\top : \nabla \overline{\mathbf{u}} = \overline{h}, \quad \overline{\mathbf{u}}|_{\mathcal{B}_1} = 0, \quad \overline{\mathbf{u}}(-1,\cdot) &= 0, \end{aligned} \tag{63}$$

在 Q_1 中。

若我们有关于时间的一致估计，则系统 (62) 和 (63) 的以下结果可按照 [2, 引理 4.2-4.4]的思路得到

$$\phi \in \mathcal{M}^{2-1/p,p}(\mathbb{R}^2)(\delta), \quad \|\phi\|_{W^{1,\infty}_y} \leq \delta, \tag{64}$$

对某个充分小的 δ。这是 (25) 的直接推论（通过标准延拓算子将函数 ϕ 延拓至 $\mathbb{R}^2$），前提是对于某个 $\theta > 2-1/p$，我们有 $\eta \in C(\overline{\mathcal{I}};\ B^\theta_{\varrho,\,p} \cap W^{1,\,\infty}(\omega))$，且 $\sup_{\mathcal{I}}$利普希茨空间$(\partial\Omega_{\eta(t)})$ 充分小。注意，这也意味着矩阵 $\mathcal{Q}$ 关于时间有界，参见 (21)。

引理 4.8。设 p、$r \in (1,\infty)$ 已给定。假设 $\phi\colon\ \mathcal{I}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 (64)，且 $\mathcal{Q}$ 属于类 $L^\infty(\overline{\mathcal{I}}_1)$，其值取自正交 3×3-矩阵集合。进一步假设 $\mathsf{g} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ L^p(\mathcal{B}_1^+))$ 和 $\overline{h} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ W^{1,\,p} \cap L^p_\perp(\mathcal{B}_1^+))$，其中 $\partial_t \overline{h} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ W^{-1,\,p}(\mathcal{B}_1^+))$ 且 $\overline{h}(0,\cdot) = 0$。那么 (62) 存在唯一解 $(\mathsf{u}\ \overline{\pi})$，并满足

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+))} + \|\overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{2,p}(\mathcal{B}_1^+))} + \|\overline{\pi}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{1,p}(\mathcal{B}_1^+))} \\ &\qquad \lesssim \|\overline{\mathbf{g}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+))} + \|\nabla \overline{h}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+))} + \|\partial_t \overline{h}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{-1,p}(\mathcal{B}_1^+))}, \end{aligned} \tag{65}$$

其中，隐藏常数仅依赖于 p、r 和 δ。

引理 4.9. 设 $p,q,r \in (1,\infty)$，其中 $q \geq p$。假设 $\phi\colon\ \mathcal{I}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 (64)，且 $\mathcal{Q}$ 属于取值于正交 3×3-矩阵集合的类 $L^\infty(\overline{\mathcal{I}}_1)$。进一步假设 $\mathsf{g} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ L^q(\mathcal{B}_1^+))$，并且 $\overline{h} = 0$。方程 (62) 的解 $(\mathsf{u}\ \overline{\pi})$ 满足

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};L^q(\mathcal{B}_{1/2}^+))} + \|\overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};W^{2,q}(\mathcal{B}_{1/2}^+))} + \|\overline{\pi}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};W^{1,q}(\mathcal{B}_{1/2}^+))} \\ &\qquad \lesssim \|\overline{\mathbf{g}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^q(\mathcal{B}_1^+))} + \|\nabla \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+))} + \|\overline{\pi} - (\overline{\pi})_{\mathcal{B}_1^+}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+))}, \end{aligned} \tag{66}$$

其中隐藏常数仅取决于 p、q、r 和 δ。

引理 4.10. 设 $p,r \in (1,\infty)$ 已给定。假设 $\phi\colon\ \mathcal{I}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 (64)，且 $\mathcal{Q}$ 属于取值于正交 3×3-矩阵集合的类 $L^\infty(\overline{\mathcal{I}}_1)$。进一步假设 $\mathsf{g} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ L^p(\mathcal{B}_1))$ 且 $\overline{h} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ W^{1,p}(\mathcal{B}_1))$，其中 $\partial_t \overline{h} \in L^r(\mathcal{I}_1;\ W^{-1,p}(\mathcal{B}_1))$ 且 $\overline{h}(0,\cdot) = 0$。那么，方程 (63) 存在唯一解 $(\mathsf{u}\ \overline{\pi})$，满足

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1))} + \|\overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{2,p}(\mathcal{B}_1))} + \|\overline{\pi}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{1,p}(\mathcal{B}_1))} \\ &\qquad \lesssim \|\overline{\mathbf{g}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1))} + \|\nabla \overline{h}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1))} + \|\partial_t \overline{h}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;W^{-1,p}(\mathcal{B}_1))}, \end{aligned} \tag{67}$$

其中隐藏常数仅依赖于 p、r 和 δ。

引理 4.11. 设给定 p、q、$r \in (1,\infty)$，且 $q \geq p$。假设 $\phi\colon\ \mathcal{I}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 (64)，并且 $\mathcal{Q}$ 属于取值于正交 3×3 矩阵集合的类 $L^\infty(\overline{\mathcal{I}}_1)$。进一步假设 $\mathsf{g} \in L^r(\mathcal{I}_1;L^q(\mathcal{B}_1))$，且 $\overline{h} = 0$。方程 (63) 的解 $(\mathsf{u}\ \overline{\pi})$ 满足

$$\begin{aligned} &\|\partial_t \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};L^q(\mathcal{B}_{1/2}))} + \|\overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};W^{2,q}(\mathcal{B}_{1/2}))} + \|\overline{\pi}\|_{L^r(\mathcal{I}_{1/2};W^{1,q}(\mathcal{B}_{1/2}))} \\ &\qquad \lesssim \|\overline{\mathbf{g}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^q(\mathcal{B}_1))} + \|\nabla \overline{\mathbf{u}}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1))} + \|\overline{\pi} - (\overline{\pi})_{\mathcal{B}_1}\|_{L^r(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1))}, \end{aligned} \tag{68}$$

其中隐藏常数仅取决于 p、q、r 和 δ。

4.3. 爆破引理。我们考虑扰动纳维–斯托克斯系统 (58)–(59) 的一个边界适定弱解 $(\overline{\mathrm{u}}\ \overline{\pi})$，其外力 f 如定义 4.7 所定义。我们将超额泛函定义为

$$\mathscr{E}_r^{t_0,x_0}(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi}) := \fint_{Q_r^+(t_0,x_0)} |\overline{\mathbf{u}}|^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma + r^3\bigg(\fint_{Q_r^+(t_0,x_0)} |\overline{\pi} - (\overline{\pi})_{\mathcal{B}_r^+(x_0)}|^{5/3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{9}{5}}$$

并采用简记 $\mathscr{E}_r(\mathrm{u}\ \overline{\pi}) =: \mathscr{E}^0{}_{,r}{}^0(\mathrm{u}\ \overline{\pi})$。以下引理是部分正则性证明的核心，而定理 4.3 的断言将以标准方式得出。

引理 4.12. 假设对于某个 $p > \frac{15}{4}$ 和某个 $\theta > 2 - \frac{1}{p}$，$\eta \in C(\overline{\mathcal{I}_1}; B^{\theta}_{p,\ p} \cap W^{2,\ 2}(\omega))$，且 sup$_I$ 利普希茨空间 $(\partial\Omega_{\eta(t)})$ 足够小，并且 (19) 成立。[3] 进一步假设，对于某个 $q_0 > 2$，$\partial_t\eta \in L^3(\mathcal{I}; W^{1,\ q_0}(\omega))$，且 $\mathrm{f} \in L^p(\mathcal{I}_1; L^p(\mathcal{B}_1^+))$。对于任意 $\tau \in (0, 1/2)$，存在常数 $\varepsilon > 0$ （足够小）和 $C_* > 0$ （足够大），使得对于任意满足定义 4.1 意义下在 $\mathcal{Q}_1^+$ 中为 (58)–(59) 的边界适定弱解的元组 $(\mathrm{u}\ \overline{\pi})$，以下蕴含成立：假设

$$\mathscr{E}_1(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi}) + \bigg(\fint_{Q_1^+} |\overline{\mathbf{f}}|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{3}{p}} \le \varepsilon, \tag{69}$$

那么我们有

$$\mathscr{E}_\tau(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi}) \le C_*\tau^{2\alpha}\bigg(\mathscr{E}_1(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi}) + \bigg(\fint_{Q_1^+} |\overline{\mathbf{f}}|^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{3}{p}}\bigg), \tag{70}$$

其中 $\alpha = 3\big(\frac{2}{5} - \frac{3}{2p}\big)$。

注 4.13。引理 4.12 的证明基于引理 4.8–4.11，这些引理相较于定理 3.1，在对 η 的时间正则性假设方面较为宽松。然而，我们仍然需要控制第 3.1 节中局部坐标图的时间导数，尤其是对一列函数而言，还需要控制式 (26)。因此，我们要求满足相同的条件。

引理 4.12 的证明。我们用反证法。假设存在 $\tau \in (0, 1/2)$，一个序列 (η_m)，使得对 m 一致（其中某个充分小的 $\delta > 0$, $L_0 \in (0, L)$，且 $\kappa_0 > 0$ 由 (15) 给出，其中 $\boldsymbol{\varphi}_{\eta_m}$）

$$\eta_m \in C(\overline{\mathcal{I}_1}; B^{\theta}_{p,p} \cap W^{2,2}(\omega)) \cap W^{1,3}(\mathcal{I}_1; W^{1,q_0}(\omega)), \quad \sup_{\mathcal{I}_1} \mathrm{Lip}(\partial\Omega_{\eta_m(t)}) \le \delta, \tag{71}$$

$$\|\eta_m\|_{L^\infty(\mathcal{I}_1\times\omega)} \le L_0, \quad \inf_{\mathcal{I}_1\times\omega} \partial_1\boldsymbol{\varphi}_{\eta_m} \times \partial_2\boldsymbol{\varphi}_{\eta_m} \ge \kappa_0, \tag{72}$$

以及一个序列的边界适定弱解 $(\mathrm{u}_m, \overline{\pi}_m)$，其按照定义 4.7 满足扰动系统，使得

$$\lambda_m^3 := \mathscr{E}_1(\overline{\mathbf{u}}_m, \overline{\pi}_m) + \|\overline{\mathbf{f}}\|^3_{L^p(\mathcal{I}_1; L^p(\mathcal{B}_1^+))} \to 0, \quad m \to \infty, \tag{73}$$

$$\mathscr{E}_\tau(\overline{\mathbf{u}}_m, \overline{\pi}_m) > \tfrac{1}{2}\lambda_m^3. \tag{74}$$

显然，(71)意味着

$$\begin{gathered}\eta_m \rightharpoonup^* \eta \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathcal{I}_1; B^{\theta}_{p,p} \cap W^{2,2}(\omega)) \quad \sup_{\mathcal{I}_1} \mathrm{Lip}(\partial\Omega_{\eta(t)}) \le \delta, \\ \partial_t\eta_m \rightharpoonup \partial_t\eta \quad \text{in} \quad L^3(\mathcal{I}_1; W^{1,q_0}(\omega)),\end{gathered} \tag{75}$$

fo经过至少取一个子列，可得到极限函数 η。由插值可得。

$$\eta \in C(\overline{\mathcal{I}_1}; B^{\theta'}_{p,p}(\omega)) \tag{76}$$

对于任意 $\theta' < \theta.$，根据 (24) 可计算出 ϕ_m，从而推出该结论对时间一致成立（必要时减小 δ 的值）

$$\|\phi_m\|_{W^{1,\infty}_y} + \|\phi_m\|_{\mathcal{M}^{2-1/p,p}(\mathbb{R}^2)} \le \delta. \tag{77}$$

[3] 请注意，在这些条件下 $B^{\theta}_{p,\ p}(\omega) \hookrightarrow C^1(\omega)$。

我们由 (77) 得到

$$\nabla\phi_m \rightharpoonup^* \nabla\phi \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathcal{I}_1\times\mathbb{R}^2), \quad \phi\in L^\infty(\mathcal{I}_1,\mathcal{M}^{2-1/p,p}(\mathbb{R}^2)(\delta)), \quad \|\phi\|_{W^1_y\infty}\leq\delta. \tag{78}$$

因此，由（28）和（29）可得

$$\nabla\mathbf{\Phi}_m \rightharpoonup^* \nabla\mathbf{\Phi} \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathcal{I}_1\times\mathbb{R}^3), \quad \mathbf{\Phi}\in L^\infty(\mathcal{I}_1,\mathcal{M}^{2,p}(\mathbb{R}^3)), \tag{79}$$

其中， $\mathbf{\Phi}_m$ 和 $\mathbf{\Phi}$ 按照（30）定义。最后，（32）和（33）对 $\mathbf{\Phi}_m$ 和 $\mathbf{\Phi}$的反函数意味着

$$\nabla\mathbf{\Psi}_m \rightharpoonup^* \nabla\mathbf{\Psi} \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathcal{I}_1\times\mathbb{R}^3), \quad \mathbf{\Psi}\in L^\infty(\mathcal{I}_1,\mathcal{M}^{2,p}(\mathbb{R}^3)). \tag{80}$$

借助（26）和（71），我们可以控制 ϕ_m、 $\mathbf{\Phi}_m$ 和 $\mathbf{\Psi}_m$的时间导数。特别地，关于 m，我们有一致地

$$\partial_t\phi_m\in L^3(\mathcal{I}_1;L^\infty(\mathcal{B}_1^+)) \tag{81}$$

从而

$$\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m)\in L^3(\mathcal{I}_1;L^\infty(\mathcal{B}_1^+)) \tag{82}$$

由（22）、（28）和（80）可得。

我们在 $\mathcal{I}_1\times\mathcal{B}_1^+$ 中定义了

$$\overline{\mathbf{v}}_m:=\frac{1}{\lambda_m}\overline{\mathbf{u}}_m, \quad \overline{\mathfrak{q}}_m:=\frac{1}{\lambda_m}\big[\overline{\pi}_m-(\overline{\pi}_m)_{\mathcal{B}_1^+}\big], \quad \overline{\mathbf{g}}_m:=\frac{1}{\lambda_m}\overline{\mathbf{f}}.$$

由（73）可得如下关系

$$\fint_{Q_1^+}|\overline{\mathbf{v}}_m|^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\sigma+\bigg(\fint_{Q_1^+}|\overline{\mathfrak{q}}_m|^{5/3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{9}{5}}+\bigg(\fint_{Q_1^+}|\overline{\mathbf{g}}_m|^p\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{3}{p}}=1, \tag{83}$$

使得，在取一个子列后，

$$\overline{\mathfrak{q}}_m\rightharpoonup:\overline{\mathfrak{q}} \quad \text{in} \quad L^{5/3}(\mathcal{I}_1;L^{5/3}(\mathcal{B}_1^+)), \tag{84}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_m\rightharpoonup:\overline{\mathbf{v}} \quad \text{in} \quad L^3(\mathcal{I}_1;L^3(\mathcal{B}_1^+)), \tag{85}$$

$$\overline{\mathbf{g}}_m\rightharpoonup:\overline{\mathbf{g}} \quad \text{in} \quad L^p(\mathcal{I}_1;L^p(\mathcal{B}_1^+)). \tag{86}$$

现在，缩放后（74）读作

$$\fint_{Q_\tau^+}|\overline{\mathbf{v}}_m|^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\sigma+\tau^3\bigg(\fint_{\mathcal{I}_1}\fint_{\mathcal{B}_\tau^+}|\overline{\mathfrak{q}}_m-(\overline{\mathfrak{q}}_m)_{\mathcal{B}_\tau^+}|^{5/3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{9}{5}}>C_*\tau^{2\alpha}, \tag{87}$$

而方程写作

$$\begin{aligned}J_{\phi_m}\partial_t\overline{\mathbf{v}}_m+\lambda_m\mathbf{B}_{\phi_m}\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\,\overline{\mathbf{v}}_m+\lambda_m J_{\phi_m}\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m^{-1})\circ\mathbf{\Phi}_m\\ +\operatorname{div}\big(\mathbf{B}_{\phi_m}\overline{\mathfrak{q}}_m\big)-\operatorname{div}\big(\mathbf{A}_{\phi_m}\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\big)=J_{\phi_m}\overline{\mathbf{g}}_m,\\ \mathbf{B}_{\phi_m}:\nabla\overline{\mathbf{v}}_m=0, \quad \overline{\mathbf{v}}_m|_{\mathcal{B}_1^+\cap\partial\mathbb{H}}=0.\end{aligned} \tag{88}$$

注意，左端的项 $\lambda_m J_{\phi_m}\nabla\mathbf{v}_m\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m^{-1}))\circ\mathbf{\Phi}_m$ 未出现在 [2] 中，但根据 (82) 可相应地对其进行估计。由 (60)（将 ζ 替换为 ζ^2）可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}_1^+}\frac{1}{2}J_{\phi_m}\zeta^2\big|\overline{\mathbf{v}}_m(t)\big|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}\zeta^2\mathbf{A}_{\phi_m}\nabla\overline{\mathbf{v}}_m:\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\\ &\qquad\leq\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{v}}_m|^2J_{\phi_m}\nabla\zeta^2\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m)\circ\mathbf{\Phi}_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}\frac{1}{2}J_{\phi_m}|\overline{\mathbf{v}}_m|^2\partial_t\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\\ &\qquad+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}\frac{1}{2}J_{\phi_m}|\overline{\mathbf{v}}_m|^2\Delta\mathbf{\Psi}_m\circ\mathbf{\Phi}_m\cdot\nabla\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{v}}_m|^2\mathbf{A}_{\phi_m}:\nabla^2\zeta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}\frac{1}{2}\big(\lambda_m|\overline{\mathbf{v}}_m|^2+2\overline{\mathfrak{q}}_m\big)\overline{\mathbf{v}}_m\cdot\mathbf{B}_{\phi_m}\nabla\zeta^2\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma+\int_0^t\int_{\mathcal{B}_1^+}J_{\phi_m}\zeta^2\overline{\mathbf{g}}_m\cdot\overline{\mathbf{v}}_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma$$

对所有非负的 $\zeta\in C_c^\infty(\mathcal{Q}_1)$ 均成立。右端的所有项都可以按照 [2,第 4] 节中的思路进行估计，唯独第一项例外。由于根据 (87)，$\mathrm{v}_m\in L^3_{t,\ z}$ 一致成立，且根据 (82)，$\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m)\in L^3_tL^\infty_z$，因此它也有界。我们得出

$$\overline{\mathbf{v}}_m\in L^\infty\big(\mathcal{I}_{3/4};L^2\big(\mathcal{B}^+_{3/4}\big)\big)\cap L^2\big(\mathcal{I}_{3/4};W^{1,2}\big(\mathcal{B}^+_{3/4}\big)\big)\tag{89}$$

在 m 上一致成立。由 Sobolev不等式和 (88)，我们对 $\boldsymbol{\phi}\in C_c^\infty(\mathcal{B}^+_{3/4})$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}_1^+}\partial_t\overline{\mathbf{v}}_m\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}z\le\ & c\Big(\|\overline{\mathbf{v}}_m\|_{L^2_z}\|\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\|_{L^2_z}+\|\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\|_{L^2_z}\|\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m^{-1})\circ\mathbf{\Phi}_m\|_{L^2_z}\Big)\|\boldsymbol{\phi}\|_{W^{2,2}_z}\\&+c\Big(\|\overline{\mathfrak{q}}_m\|_{L^{3/2}_z}+\|\nabla\overline{\mathbf{v}}_m\|_{L^2_z}+\|\overline{\mathbf{g}}_m\|_{L^2_z}\Big)\|\boldsymbol{\phi}\|_{W^{2,2}_z}.\end{aligned}$$

由 (74)、(82) 和 (89) 可知，这表明.....有界

$$\partial_t\overline{\mathbf{v}}_m\in L^{6/5}(\mathcal{I}_{3/4};W^{-2,2}(\mathcal{B}^+_{3/4})).\tag{90}$$

取适当的子列后，我们得到

$$\partial_t\overline{\mathbf{v}}_m\rightharpoonup\partial_t\overline{\mathbf{v}}\quad\text{in}\quad L^{6/5}\big(\mathcal{I}_{3/4};W^{-2,2}\big(\mathcal{B}^+_{3/4}\big)\big).\tag{91}$$

现在，(89) 和 (90) 推出

$$\overline{\mathbf{v}}_m\to\overline{\mathbf{v}}\quad\text{in}\quad L^3\big(\mathcal{I}_{3/4};L^3\big(\mathcal{B}^+_{3/4}\big)\big)\tag{92}$$

由 Aubin–Lions紧性定理得出。回顾 (57) 中 A^{ϕ_m} 和 B^{ϕ_m} 的定义，我们可以利用 (79)、(80)、(84)、(85)、(89) 和 (91) 中的收敛，在 (88) 中取极限。我们得到（在 $Q^+_{3/4}$ 上按分布意义）

$$\begin{aligned}&J_\phi\partial_t\overline{\mathbf{v}}+\operatorname{div}\big(\mathbf{B}_\phi\overline{\mathfrak{q}}\big)-\operatorname{div}\big(\mathbf{A}_\phi\nabla\overline{\mathbf{v}}\big)=J_\phi\overline{\mathbf{g}},\\&\mathbf{B}_\phi^\top:\nabla\overline{\mathbf{v}}=0,\quad\overline{\mathbf{v}}|_{\mathcal{B}^+_{3/4}\cap\partial\mathbb{H}}=0.\end{aligned}\tag{93}$$

注意到，由于（89）和（82），$\lambda_mJ_{\phi_m}\nabla\mathrm{v}_m\partial_t(\mathbf{\Psi}_m\circ\mathscr{V}_m)\circ\mathbf{\Phi}_m$ 趋于零 $m\to\infty$).

与 [2, 第 4] 节中的做法完全相同（这需要假设 $p>15/4$），将第4.2节中建立的正则性理论应用于（88）和（93），即可导出与（87）矛盾的结论。证明至此完成。□

定理 4.3 的证明。根据假设，我们有

$$r^{-2}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\Omega_\eta\cap\mathcal{B}_r(x_0)}|\mathbf{u}|^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\left(r^{-5/3}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\Omega_\eta\cap\mathcal{B}_r(x_0)}|\pi|^{5/3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{9}{5}}<\varepsilon_0$$

由此，仿照 [2, 第 4] 节中的论证，并应用标准的迭代过程（例如，参见[5,命题 2.5]），我们可得

$$\widetilde{\mathscr{E}}^{t_0,x_0}_{\tau^kR}(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi})\lesssim\tau^{2\alpha k},\tag{94}$$

其中，access $\mathscr{E}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{E}}^{t_0,x_0}_r(\overline{\mathbf{u}},\overline{\pi}):=&\fint_{Q_r(t_0,x_0)\cap(I\times\Omega)}|\overline{\mathbf{u}}-(\overline{\mathbf{u}})_{Q_r(t_0,x_0)\cap(I\times\Omega)}|^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma\\&+r^3\bigg(\fint_{\mathcal{I}_r(t_0)}\fint_{\mathcal{B}^+_r(x_0)}|\overline{\pi}-(\overline{\pi})_{\mathcal{B}_r(x_0)\cap\Omega}|^{5/3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\sigma\bigg)^{\frac{9}{5}}\end{aligned}$$

且 $\mathrm{u}:=\mathrm{u}\circ\mathscr{V}\circ\mathbf{\Phi}$ 和 $\overline{\pi}:=\pi\circ\mathscr{V}\circ\mathbf{\Phi}$ 求解了扰动系统，参见第 4.2 节。衰减估计式 (94) 在 Q_1^+的中心点 $(t_0,x_0)=(0,0)$ 处成立，但对于足够接近该点的点也成立。此外，我们可以证明适用于内部点的引理 4.12 版本（证明中必须将引理 4.8 和 4.9 替换为相应的内部版本——引理 4.10 和 4.11）。这最终表明，在 (0, 0) 的一个邻域内，$\mathrm{u}\in C^{0,\alpha}$。改变坐标，并利用 $\mathrm{u}=\mathrm{u}\circ\mathbf{\Psi}\circ\mathscr{V}_m$，其中 $\mathbf{\Psi}$ 和 $\mathscr{V}_m$

关于时间一致地满足利普希茨条件，参见 (32)) 和 (21)，可得在 (t_0, x_0) 的邻域$\mathcal{U}(t_0, x_0)$内，$\mathrm{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{U}}(t_0, x_0) \cap \overline{\mathcal{I}}\Omega_\eta)$。定理 4.3 得证。□

Compliance with Ethical Standards

利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。
数据可用性。本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

References

[1] 2 10 1007 00208 022 02548 9 D.
[2] Breit：D维流固耦合的正则性结果。《数学年刊》。DOI：。/s - - - D. Breit：不规则区域中纳维-斯托克斯方程的部分边界正则性。arXiv预印本：2208.00415v2[3] L. Caffarelli、R. V. Kohn、L. Nirenberg：纳维–斯托克斯方程适定弱解的部分正则性。《纯粹与应用数学通讯》35，771–831。（1982）[4] H. J. Choe、J. L. Lewis：关于纳维–斯托克斯方程中的奇异集。《泛函分析杂志》175，348–369。（2000）[5] L. Escauriaza、G. Seregin、V. ˇSverak：$L_{3,\infty}$-纳维–斯托克斯方程的解与向后唯一性。《数学科学进展》58，3-44。（2003）[6] Hieber, Matthias；Saal, J¨urgen： L^p框架下的斯托克斯方程：适定性与正则性性质。见《黏性流体力学中的数学分析手册》，117–206，Springer，Cham。（2018）[7] O. A. Ladyzhenskaya、G. A. Seregin：三维纳维–斯托克斯方程适定弱解的部分正则性。《数学流体力学杂志》1，356–387。（1999）[8] D. Lengeler、M. R ̊u ̆zi ̆cka；与Koiter型壳相互作用的不可压缩牛顿流体的弱解。《理性力学与分析档案》211，205–255。（2014）[9] F.-H. Lin：Caffarelli–Kohn–Nirenberg定理的新证明。《纯粹与应用数学通讯》51，241–257。（1998）[10] D. Maity、T. Takahashi：不可压缩纳维–斯托克斯方程组与阻尼薄板相互作用的 L^p理论。《数学流体力学杂志》23，103。（2021）[11] V. G. Maz'ya、T. O. Shaposhnikova：《索об列夫乘子理论》，《数学科学基础丛书》第337卷 [数学科学基本原理]。Springer-Verlag，柏林。附有在微分与积分算子中的应用。（2009）[12] B. Muha、S. Schwarzacher：三维空间中流体与非线性壳相互作用的弱解的存在性与正则性。《庞加莱分析研究所年刊 C – 分析非线性》39，1369–1412。（2022）[13] N¨agele, P.、R ̊u ̆zi ̆cka, M.、Lengeler, D.：运动区域中非定常问题的函数框架及其应用。《复变函数与椭圆方程》62(1)，66–97。（2017）[14] T. Runst、W. Sickel：《分数阶Sobolev空间、Nemytskij算子与非线性偏微分方程》。德格鲁伊特非线性分析与应用丛书，第3卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林、纽约。（1996）[15] O. Saari、S. Schwarzacher：构造非柱形时变区域上散度算子的右逆。《偏微分方程年刊》9，8。（2023）[16] G. A. Seregin：边界附近纳维–斯托克斯方程适定弱解的局部正则性。《数学流体力学杂志》4，1–29。（2002）[17] G. A. Seregin：关于边界附近纳维–斯托克斯方程组弱解正则性的评注。《科学院学术研讨会论文集》295，168–179。（2003）[18] G. A. Seregin、T. N. Shilkin、V. A. Solonnikov：纳维–斯托克斯方程的边界部分正则性。《数学科学杂志》（纽约）132，339–358。（2006）[19] V. Scheffer：豪斯多夫测度与纳维–斯托克斯方程。《数学物理通讯》55，97–112。（1977）[20] V. Scheffer：半空间中纳维-斯托克斯方程的边界正则性。《数学物理通讯》85，275-299。（1982）[21] V. A. Solonnikov：非定常纳维-斯托克斯方程解的估计。《苏联数学》8，467–528。（1977）[22] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*，《现代Birkh¨auser经典丛书》，Springer，巴塞尔。（1983）[23] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*，《现代Birkh¨auser经典丛书》，Springer，巴塞尔。（1992）

Institute of Mathematics, TU Clausthal, Erzstrasse 1, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Germany
Email address: dominic.breit@tu-clausthal.de