arXiv:2305.02604v1 [econ.TH] 4 May 2023

灌输博弈*

Lotem Ikan† 和 David Lagziel‡

2023年5月5日

摘要

灌输博弈是一场围绕公众舆论展开的完全信息竞赛。参与者付出有成本的努力，在公众面前表达自己的私人观点，以掌控讨论，使主导意见与自己的观点相似。我们的分析为沉默的大多数和发声的少数现象提供了理论基础；也就是说，我们证明，在均衡中，所有温和意见都保持沉默，而极端主义者则可以完全掌控讨论。此外，我们证明，接触他人观点的程度提高，会加剧个体之间观察到的极化。基于这些结果，我们构建了一种新的社会学习框架，称为灌输过程。

期刊分类号：C72；D62；D72。

Keyw词语：灌输；非贝叶斯社会学习；竞赛理论、极化 .

*作者感谢 Tomer Blumkin、Ran Eilat、EhudLehrer、Igal Milchtaich、Abraham Neyman、Dov Samet、Aner Sela 和 Yevgeny Tsodikovich 提供的宝贵意见，同时感谢参加特拉维夫大学博弈论与数理经济学研究研讨会、博弈论学会以色列分会第 12届 年会以及 BIU博弈论与经济理论研讨会的与会者。

†内盖夫本-古里安大学经济学系，以色列。电子邮箱：ikanl@post.bgu.ac.il
‡内盖夫本-古里安大学经济学系，以色列。电子邮箱：Davidlag@bgu.ac.il

1 引言

“信念”一词在博弈论中，在某种程度上被误用了。例如，当有人说“我信上帝”时，人们通常不会认为此人对与上帝是否存在相关的不同世界状态持有一个概率分布（即一种信念），并且该分布会随着新收到的信息而更新。在这种情境下，既没有概率分布，也没有信息信号。“我相信人们有权做 X”之类的说法也是如此。这些信念关乎价值观和偏好，而非信息。事实上，对于你已经知道的事情，你无需相信它；而在博弈论中，信念实际上反映的是知识。也就是说，“信念”是指知道某些状态可能存在，并知道每种状态实现的概率。

这一区分至关重要，因为我们很容易自然而然地将知识与观点交织在一起。举例来说，我们来看看通常所说的学习模型的基本结构。首先，我们面临某种外生不确定性，即随机选定的状态。随后，理性主体会接收新的信息（通常是一个信号），并据此更新自己的信念。这正是说服模型、信息设计问题和贝叶斯学习过程的基本结构。然而，在许多现实情境中，从政治和经济学到宗教和体育，这种结构都无法准确反映其内在机制。选择某种政治立场，或选择自己最喜欢的运动队时，潜在的不确定性究竟是什么？事实上，两个人可能对所有相关信息都完全认同，却仍会在“史上最伟大的足球运动员是谁”这一问题上意见相左。当然，其中确实存在一些结构性不确定性，但在讨论这些话题时，我们分享的还有彼此的观点，而非信号；观点的运作方式并不相同。由此便引出了灌输这一概念。

灌输博弈是一种新型竞赛，参与者持有固定的私人观点，并在某种可称为公共辩论的场合中与他人讨论这些观点。参与者的主要目标是掌控讨论，也就是说，使主导意见与自己的观点相近。更形式化地说，该博弈由一组观点分布在某个区间上的个体构成。这些个体付出有成本的努力，在公共场合表达自己的观点。他们的收益会随着自身个体观点与他人表达的观点之间的期望距离增加而下降。[1] 也就是说，对立的

[1]期望距离取其绝对值，因此权重（即概率）是参与者内生生成的努力水平。

观点不会在参与者的收益函数中相互抵消，而且他们希望观点与自己相去甚远的其他个体保持沉默。该框架的关键要素与创新之处在于：不存在真实世界状态，只有不同视角在均衡中相互碰撞。

本文的主要目标是研究持有不同观点的个体之间的互动，具体而言，是研究持有温和意见的人与极端主义者之间的互动。这一目标分为三个部分。首先，在参与者完全观察到他人观点的情况下，我们研究灌输博弈的均衡。接下来，我们分析该博弈的一个推广版本，其中参与者对他人观点的接触是有限的。最后，我们利用所得结果构建一种新颖的社会学习过程，在这一过程中，观点会在未来世代中内生演化。我们将这一动态框架称为灌输过程。

为实现上述目标，本文给出了三个关键结果，并提出了若干见解。我们的第一个主要结果见定理1，它为沉默的大多数和发声的少数现象奠定了理论基础。该结果表明，温和意见在均衡状态下保持沉默（即沉默的大多数），同时赋予极端主义者主导讨论的能力。此外，我们的分析表明，个体表达其观点的倾向与其代表程度呈反向关系（即发声的少数）。这种负向关系具有二维特征，取决于极端群体之间的观点距离及其规模。换言之，一旦极端群体规模缩小，或变得更加极端，这些群体中每个剩余个体的行动平均而言都会加强。Mustafaraj等（2011）在社交媒体上的政治讨论背景下，对这些现象进行了实证记录。皮尤研究中心最近发布的一份题为“推特上的美国政治：少数美国成年人发布了大多数推文”的报告进一步支持了他们的发现。报告指出，美国成年人发布的政治推文中，有97%来自仅占用户10%的群体，而这些用户对对立政治立场持有的观点也最不温和。

这种挤出效应背后的直觉，源于极端个体彼此之间的相对影响力有所增强，相较之下，他们对温和派玩家的影响力则较弱。极端主义者通常会试图减轻对立一方的影响，因此总体而言，他们自然会投入更多努力。这种激进行为削弱了温和派玩家的影响力，进而形成正反馈循环，强化极端主义者的行为。当所有温和派玩家都退出辩论后，这种效应最终趋于稳定。无论参与者和观点的数量如何，这一结果都成立。

第二个主要结果涉及扩展模型，在该模型中，参与者只能对他人进行部分监控。在这种设定下，我们研究个体接触他人观点的程度如何影响博弈的均衡。我们的分析表明，接触程度提高会加剧极化。为说明这一点，我们将 Esteban 和 Ray（1994年）开创性的极化度量调整到我们的设定中，并表明在任何均衡中，极化程度都会随接触程度提高而上升。有趣的是，Bail 等人（2018年）近期的一项田野实验也通过实证记录了这一现象：他们在社交媒体上使用具有政治倾向的机器人，表明接触对立观点会加剧政治极化。

聚焦于本文的前两个部分，可以看出，在给定框架下，灌输行为相当徒劳。正如收益函数所表明的，参与者的主要目标是通过控制话语来影响他人。然而，在这个单阶段设定中，参与者并不会改变自己的观点。本文第三部分将探讨这一问题，并深入研究一种新的演化适应性学习框架。

在本文第三部分，我们利用有限接触模型的均衡结果，内生地生成观点之间的转移矩阵，从而形成跨世代的适应性学习过程。具体而言，在每个阶段，个体都依据某个均衡策略组合采取行动，而下一世代的观点分布则根据该策略组合下观察到的观点按比例决定。由此产生一个非贝叶斯演化过程，其中转移矩阵会根据新实现的均衡反复推导。我们的分析聚焦于学习过程的平稳分布如何随接触程度变化，并表明接触程度越高，社会的两极分化就越严重。换言之，我们证明，随着接触程度增加，观点分布会进一步分散。[2]

1.1 与文献的关系

我们的基本框架建立在有关竞赛的浩瀚文献之上，其渊源可追溯至Tullock（1980年）的奠基性研究，随后Skaperdas（1996年）以及Baye和Hoppe（2003年）等学者也开展了相关研究。在这类博弈中，存在一类特定的具有外部性的竞赛，[3] 其动机源于

[2]请注意，在此语境中，*"social learning"* 指的是观察并吸收他人主观观点的认知与进化过程，不应与贝叶斯学习或其他形式的理性学习混淆。[3]这一特征也延伸至拍卖理论，该理论涵盖了大量关于身份依赖型外部性的文献；例如，Funk（1996年）、Jehiel等人（1996年、1999年）、Varma（2002年）、Aseff和Chade（2008年）以及Brocas（2013年）的研究。

Buchanan（1980年）的早期研究，以及Congleton（1989年）后来更为深入的研究；后者考察了会影响外部（非策略性）个体的地位追求型具有外部性的竞赛。近年来，这一研究领域朝着多个方向拓展，[4] 因此我们将重点关注与当前研究议程最为接近的研究。

Tullock 竞赛的早期研究由 Linster（1993年）加以推广。他在一种设定中推导出了纯策略均衡：在这种设定下，失败的参与者并不对获胜者的身份无动于衷。尽管我们的框架关注的是不同的收益函数，但线性成本函数使我们能够采用与 Linster（1993年）相似的数学方法。我们设定的另一个关键特征可追溯至 Nitzan（1991年）的研究；该研究考察了参与者被划分为若干群体、并以群体为单位相互竞争的 Tullock 竞赛。群体赢得奖品后，会依照各种分配规则在成员之间分配奖品。在公共辩论的背景下，将参与者划分为相互竞争的群体是很自然的做法，这一点在我们的设定中也确实十分重要。

与 Moldovanu 等人（2012年）和 Sela（2020年）的研究类似，灌输博弈也包含负外部性。不过，在我们的框架中，所有收益都是负的，而不是由奖赏和惩罚、胡萝卜和大棒组合而成。一般而言，也可以根据外部性的类型以及受其影响的个体，对具有外部性的竞赛进行分类。灌输博弈属于具有负向、身份依赖型外部性的竞赛；这类外部性会影响所有参与者，无论其是否获胜。

总体而言，与本文前两部分最接近的研究是 Esteban 和 Ray（1999）的开创性著作，尤其是其中的第 5 节。我们的基本模型扩展了 Esteban 和 Ray（1999）的模型：一方面推广了参与者的收益和群体设定（采用 Esteban 和 Ray（1994）提出的“线性疏离”概念），另一方面聚焦于不同的成本函数（与 Linster（1993）的做法类似）。显然，我们的结果还带来了额外的结论，其中最显而易见的是沉默的大多数和发声的少数现象，以及均衡中所出现的挤出效应。

我们研究的第三部分建立在前两部分的基础上，处于自适应学习与演化过程的交汇处。不过，我们的分析更接近前者，而非后者。自适应学习这一概念可以追溯到 DeGroot（1974年）的研究，该研究探讨了通过调整所观察到的观点来达成共识的随机过程。我们的研究动机和总体目标与这条研究脉络颇为相似。我们的动机

[4]例如 Chung（1996）、Lee 和 HyeongKang（1998）、Eggert 和 Kolmar（2006）、Shaffer（2006）、Konrad（2006）、Lee（2007）、Cohen 等（2008）、Chowdhury 和 Sheremeta（2011）、Ahn 等（2011）、Klose 和 Kovenock（2015），以及 Park 和 Lee（2019）等，不胜枚举。

和总体目标与这条研究脉络颇为相似。在许多此类研究中，参与者遵循某些启发式规则，例如 Golub 和 Jackson（2010年）以及 Amir 等人（2021年）研究的朴素学习，或 Galam（2002年）和 Arieli 等人（ 2023 年）研究的多数派动态；在相关框架下，这些规则未必会形成均衡。我们的分析在两个根本问题上提供了不同的视角：第一，我们将学习过程建立在有限曝光灌输博弈的均衡之上；第二，在我们的设定中不存在真实世界状态，只有观点。值得注意的是，这使我们能够将竞赛理论与社会学习联系起来，同时为非贝叶斯自适应过程提供一个微观基础框架。

2 博弈

灌输博弈是一种完全信息的单阶段竞赛，参与者持有固定的个体观点，并将其公开表达。为此，参与者付出有成本的努力，并根据公开观察到的意见的总体分配与其私人观点之间的距离获得奖励。在均衡中，参与者会权衡自身的努力成本，以及将公众舆论引向自己观点的需要。

形式上，固定 $k \geq 2$ 个不同的值 $O_1 < O_2 < \cdots < O_k$ ，它们属于 $\mathbb{R}$，代表 k 种不同的观点。我们将 O_1 和 O_k 称为极端意见，其余则称为温和意见。[5] 令$N = \{1, 2, \ldots, n\}$为参与者集合；对于每个 $i = 1$、.....、 k，令 N_i表示私人观点为 O_i的参与者组成的非空集合，其中 $n_i = |N_i| \geq 1$ 且 $n = \sum_i n_i$。我们将N_i 中的参与者称为 O_i型参与者。

每位玩家的行动集为 $\mathbb{R}_+$。行动 $e_j \geq 0$ 是玩家 $j \in N_i$ 为公开表达其观点 O_i而付出的努力。给定一个非零行动组合 $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n_+$，考虑服从以下分布的随机变量 $X_{\mathbf{e}}$

$$\Pr(X_{\mathbf{e}} = O_i) = \frac{\sum_{j \in N_i} e_j}{\sum_{j=1}^{n} e_j} = \frac{E_i}{\sum_{j=1}^{k} E_j},$$

其中， $E_i = \sum_{j \in N_i} e_j$ 是所有 O_i玩家的努力之和。直观地说，$P_{X_{\mathbf{e}}}(\cdot)$是公开观察到的意见分配，并根据参与者的努力水平进行加权。例如，如果所有 O_i玩家投入的努力水平都相对较高（无论总体而言，还是与其他所有玩家的努力总和相比），那么他们的观点就会主导辩论，而 $X_{\mathbf{e}}$ 也会据此进行分配。

[5]为便于阐述，我们有时分别将持极端／温和观点的玩家称为极端／温和派玩家。

给定非零努力配置$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$时，玩家 $j \in N_i$的期望收益为

$$U_j(\mathbf{e}|O_i) = -e_j - \mathbb{E}[|O_i - X_{\mathbf{e}}|].$$

收益函数呈现了竞赛理论中的经典张力：努力的私人成本e_j与管理辩论的需要之间的矛盾。术语 $\mathbb{E}[|O_i - X_{\mathbf{e}}|]$ 指的是在参与者的努力水平为 $\mathbf{e}$ 时，观点O_i 与公开观察到的意见之间的期望距离。因此，如果公开观察到的意见分配 $X_{\mathbf{e}}$ 向 O_i偏移，那么所有 O_i玩家都会因期望距离 $\mathbb{E}[|O_i - X_{\mathbf{e}}|]$缩小而受益。请注意，期望距离取绝对值，因此相反的观点（相对于 O_i而言）不会相互抵消。为了排除无效辩论导致的平凡结果（即没有玩家付出正努力），也就是说，为了排除 $e_0 = (0, 0, \ldots, 0)$作为均衡，对每个观点 O_i 和每个玩家 j，固定 $U_j(e_0|O_i) = \inf_{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{e_0\}} U_j(\mathbf{e}|O_i)$。[6]

3 沉默的大多数与发声的少数

我们的分析从均衡刻画开始。定理1描述了灌输博弈的均衡，并由此揭示了两个耐人寻味的现象。第一个现象被称为“沉默的大多数”，它表明，所有温和派玩家，即没有极端观点的玩家，在每个均衡中都保持沉默。该定理正式指出，在每个均衡中，每个温和派个体的努力水平都为零。换言之，在均衡中，只有持有极端观点 O_1 和 O_k的玩家会付出正努力。[7]

第二种现象与第一种相辅相成，被称为发声的少数。不仅极端观点完全主导了公共辩论，这些群体中每个个体的平均期望努力还与群体规模成反比。换言之，来自规模较小的极端群体的个体平均而言往往更为响亮。这是因为在均衡中，这些群体各自的总努力仅取决于距离 $|O_1 - O_k|$。因此，如果一个群体比另一个群体规模小，那么较小群体中每个个体的平均“发声程度”（即努力水平）就更高。在陈述定理1之前，我们强调，这些结果与观点的相对位置以及温和派玩家的数量无关。这凸显了其稳健性。

[6]纳什均衡对于仿射收益变换具有稳健性，因此必要时，可以调整收益函数，使未被支配策略带来的收益严格为正。[7]我们承认，多数派也可能由极端群体构成。这里使用这一术语，是因为通常情况下，极端主义者所属的群体规模相对较小。

上述两种现象。

定理1. 在每个均衡中，每位温和派参与者的努力水平均为零，而所有极端玩家的总努力水平为 $E_1 = E_k = \frac{|O_1 - O_k|}{4}$ 。

定理1直接推出一个推论：存在唯一的对称均衡，在该均衡中，每个极端玩家的努力水平都与其他持相同观点的玩家相同。（证明可由定理1立即得出，故略。）

推论1：存在唯一的对称均衡 $\mathbf{e}^{\mathrm{sym}}$ ，使得

$$\mathbf{e}_j^{\mathrm{sym}} = \begin{cases} 0, & \forall j \in N_i, i \neq 1, k, \\ \frac{|O_1 - O_k|}{4n_i}, & \forall j \in N_i, i = 1, k, \end{cases}$$

且给定 $\mathbf{e}^{\mathrm{sym}}$ 时，每个玩家 j 的期望收益为

$$U_j(\mathbf{e}^{\mathrm{sym}} | O_i) = -\frac{|O_1 - O_k|}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2n_i} \mathbb{I}^{\{i=1,k\}}\right].$$

这一结果背后的驱动力和直觉，是均衡中极端玩家对温和派玩家产生的挤出效应。双方的极端玩家彼此之间的影响，远大于他们对温和派玩家的影响（与不同观点之间的距离成比例）。因此，极端个体会自然而然地试图通过提高自己的努力水平来减轻其他极端玩家的影响。这种共同的“激进”行为会稀释所有其他观点（注意，$P_{X_{\mathbf{e}}}(\cdot)$中的分母会变大），因此持温和观点的个体不太愿意投入努力，从而形成正反馈循环，最终产生上述均衡。这种均衡中的挤出效应影响范围颇广，却合乎自然。一旦所有温和观点都退出公共辩论，这种效应便趋于稳定；与此同时，极端个体的总努力水平会调整至 $\frac{1}{4}|O_i - O_k|$。

根据定理1还可以得出若干其他结论：(i) 挤出效应有利于温和派玩家，使他们的期望收益严格高于极端主义者。温和派个体实际上可以通过不参与公共辩论来提高收益，而极端玩家则注定要在这场竞赛中投入大量努力；(ii) 极化会让所有人受损。所有玩家的期望收益都与 $|O_1 - O_k|$成正比，因此极端观点之间的分歧加剧会带来不利影响。此外，极端玩家因极化而遭受的损失最大；(iii) 搭便车可能源于每个极端玩家群体内部的均衡。总

极端个体的努力水平与群体规模无关，因此极端玩家会受益于同一群体中其他极端主义者的参与。推论1对此提供了支持：该推论表明，在唯一的对称均衡下，极端玩家的期望收益会随其所属群体规模的扩大而增加；(iv) 该博弈的均衡与温和派玩家的相对位置和人数无关。换言之，极化群体的相对位置是辩论“基调”的关键决定因素。不过，我们强调，如果将线性成本函数改为凸成本函数或凹成本函数，这一结果可能会发生变化。

4 公共辩论中的有限接触

基本灌输博弈建立在完全监控这一前提之上，即个体能够完全观察所有其他人的观点。然而在实践中，参与者接触和关注信息的程度各不相同，因此也应考虑部分监控情境的可能性：在这种情境下，参与者只能有限地接触他人的观点。这些限制可能源于网络效应等外部因素，也可能源于内部因素，例如避免认知不一致。具体来说，当人们只部分认同某些观点时，可能会避免传播这些观点，从而影响他人观察这些观点的能力。此外，即便某些观点最终公之于众，人们也可能会产生一种内在冲动，选择性地忽视这些观点，尤其是因为它们与自己的私人观点不符。

本节研究对立观点的有限接触／关注如何影响辩论中可见的极化。[8] 我们的结果表明，至少在短期内（即只要观点不发生转变），增加对立观点的接触会对极化产生负面影响，使辩论变得更加激烈。为了初步理解这一结论，不妨将基本灌输博弈（见第2节）拆分为两个独立的博弈，每个博弈至少包含两个观点：第一个博弈包含观点从 O_1 到 $O_{\lfloor k/2 \rfloor}$的所有参与者，第二个则包含观点从 $O_{\lfloor k/2 \rfloor+1}$ 到 O_k 的所有参与者。定理1预测，在这些子博弈中，极端个体将分别按照 $|O_1 - O_{\lfloor k/2 \rfloor}|$和 $|O_{\lfloor k/2 \rfloor+1} - O_k|$的比例主导讨论。换言之，将博弈碎片化为两个独立的子博弈，会降低各场辩论内部的强度。因此，通过相反的过程，让不同子群体能够更好地观察彼此的观点T

o simplify th的接触 iti中，我们 follow the limited-接触 terminology in thi秒 tion, but 一个国 ld similarly int家 t

所有结果都归因于注意力有限。

显然会在均衡中引发一场高强度辩论。这为以下结论提供了一些直观解释：接触他人观点的人越多，辩论就越激烈；同时，这也为近期的实证证据提供了一个概念框架。Bail 等人（2018年）指出，在社交媒体上让人们接触对立观点会加剧政治极化。为了正式讨论并证明这些论断，我们首先定义有限曝光灌输博弈，然后根据我们的研究情境调整 Esteban 和 Ray（1994年）的极化度量。

为刻画部分监控的概念，我们引入接触程度 $\delta \in (0,1]$，该程度限制了参与者观察远距离观点的能力。更正式地说，考虑先前定义的灌输博弈，但假设某个 O_l-玩家生成的信息中，有一部分会以 $\delta^{|i-l|}$ 的比例被丢弃，直到传达到某个 O_i- 玩家。在这种情况下，每个玩家 $j \in N_i$ 的收益函数具有以下形式

$$U_j(\mathbf{e}|O_i) \quad = \quad -e_j - \frac{\sum_{l=1}^{k} E_l \delta^{|O_i - O_l|} |O_l - O_i|}{\sum_{l=1}^{k} \delta^{|O_i - O_l|} E_l}.$$

简单来说，参与者彼此接触的程度会随着其各自观点之间距离的增加而降低。

注释1。在详细阐述极化度量之前，我们先澄清，本节的分析始终局限于具有三个观点的对称设定，即 $k = 3$ 和 $|O_1 - O_2| = |O_2 - O_3| = 1$。作出这一假设是为了便于分析；包含任意数量观点和估值的一般情形则留待未来研究。我们将这一有限框架称为有限曝光灌输博弈。

为衡量公共辩论中的极化，我们遵循 Esteban 和 Ray（1994）的奠基性研究。该研究通过公理化方法，为具有不同特征的群体构建了如下极化度量（参见其中的定理1和定理2，以及第5.1节）。我们采用其度量，将 E_i 取为观察到的观点 i数量，从而努力配置 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$ 转换为如下极化值：

$$P(\mathbf{e}) = \frac{\sum_{i,j} E_i^2 E_j |O_i - O_j|}{[\sum_i E_i]^3}. \tag{1}$$

这种极化度量不受观点总量的影响；通常，当质量向两端转移时，极化程度会提高（参见 Esteban 和 Ray，1994年中的公理 $1-3$ 和条件H）。值得注意的是，上文定理1给出的结果支持一般情形（即有 k 个观点）下可能达到的最高极化程度。[9]

[9]参见 Esteban 和 Ray（1994）中关于双峰分布的定理2。

极化程度 $P(\mathbf{e})$显然取决于均衡中的诱导分布 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$，而后者又取决于接触程度 δ。因此，讨论极化之前，必须先明确均衡策略组合 $\mathbf{e}$。为此，我们以广义目标考察接触程度对所有可能均衡的影响。形式化地说，

定义1. 令 $\Lambda(\delta)$ 表示接触程度为 δ的有限曝光灌输博弈中所有均衡的集合。若对于每个 $\mathbf{e}_1 \in \Lambda(\delta_1)$、每个 $\mathbf{e}_2 \in \Lambda(\delta_2)$ 以及每个 $\delta_1 > \delta_2$，都有 $P(\mathbf{e}_1) > P(\mathbf{e}_2)$，则称有限曝光灌输博弈中的极化随接触程度增加而加剧。

换言之，我们不通过某种均衡选择来限制分析，而是考虑有限曝光灌输博弈的所有可能均衡。

本节的主要结果见下文的定理2，它确实表明，给定博弈中的极化会随着接触程度的增加而加剧。这一结果背后的直觉是，相较于极端玩家对温和派玩家的影响，极端玩家彼此之间的相对影响有所增强。接触程度一旦提高，极端玩家彼此之间的相对印象便会变得显著，因此他们会更强烈地表达自己的观点，从而淡化所有温和派玩家留下的印象，使极化显而易见。

定理2。有限接触博 弈的极化程度会随着接触程度严格上升 *l.*

为证明定理2，我们需要以下辅助引理。该引理指出，在任何均衡中，接触程度增加后，温和派参与者的相对发声力度会减弱。

引理1。对于任意给定的接触程度，在每个均衡中，温和派参与者的总努力水平与极端派参与者的总努力水平之比都是唯一的，并且会随着 δ严格下降。

图1展示了引理1所述的函数关系：在有限接触博弈的任何均衡中，$\frac{E_2}{E_1+E_3}$ 与接触程度 δ 之间存在这种关系。该关系由以下方程隐式给出

$$4\left(\delta + \tfrac{E_2}{E_1+E_3}\right)^3 = \left[1 + \delta^2 + 2\delta\tfrac{E_2}{E_1+E_3}\right]^2,$$

正如引理1的证明中所推导的那样。当 δ 趋近于1时，可以看出，我们会趋近于上一节研究的基准模型，因此均衡中的比率$\frac{E_2}{E_1+E_3}$ 趋近于零。

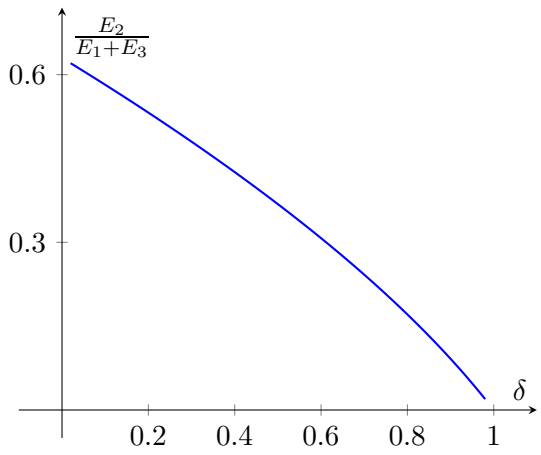

图1：在均衡中，温和派参与者的总努力水平与极端玩家的总努力水平之比随接触程度变化。尽管均衡并不唯一，但在有限接触三人灌输博弈的每个均衡中，$\frac{E_2}{E_1+E_3}$ 与 δ 之间的关系确实成立。

5 动态观点：灌输过程

有限曝光灌输博弈使我们能够至少从一般层面讨论动态观点的可能性。例如，考虑Galam（2002年）提出的基本多数规则（反应—扩散）模型：人们反复随机组成子群体，因此在每个阶段，每个人都会采纳其所在群体中多数人的观点。从某种程度上说，这是灌输的一种简化式非策略模型，在该模型中，人们只是顺从他人的观点。

为了将该模型扩展到我们的策略环境中，我们提出了一种名为灌输过程的更新框架，其中包含两项调整。首先，我们不再假设个体集合固定不变，而是考虑一个每个阶段都会更换参与者的代际过程。其次，我们不再采用多数规则，而是根据上一阶段的观点分布和均衡策略组合，确定每个阶段新组成的参与者的观点。

更正式地，对于每个 $\delta \in (0,1]$ 以及每个阶段 $t \geq 0$，记 $\mathbf{e}^t$ 为有限暴露博弈的一个均衡策略组合（假设所有观点都得到体现），并考虑转移矩阵 3×3 Q^t，其元素为 $Q^t_{i,\ j} = \Pr(X_{\mathbf{e}^t} = O_j | O_i)$。明确地说，

$$Q^t = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{E_1+\delta E_2+\delta^2 E_3} & \frac{\delta E_2}{E_1+\delta E_2+\delta^2 E_3} & \frac{\delta^2 E_3}{E_1+\delta E_2+\delta^2 E_3} \\ \frac{\delta E_1}{\delta E_1+E_2+\delta E_3} & \frac{E_2}{\delta E_1+E_2+\delta E_3} & \frac{\delta E_3}{\delta E_1+E_2+\delta E_3} \\ \frac{\delta^2 E_1}{\delta^2 E_1+\delta E_2+E_3} & \frac{\delta E_2}{\delta^2 E_1+\delta E_2+E_3} & \frac{E_3}{\delta^2 E_1+\delta E_2+E_3} \end{bmatrix}.$$

我们利用这一矩阵结构定义如下动态过程。在阶段 $t = 0$，参与者的观点根据某个具有完全支撑的初始分布 π_0 固定下来。这些参与者按照均衡策略组合 e^0行动。在阶段 $t = 1$，形成新一代，其观点按照 $\pi_1 = \pi_0 Q^0$分布，其中 Q^0 是与 e^0相关联的先前定义的转移矩阵。简单来说，阶段 $t = 1$ 的世代观察上一代产生的公众舆论，该舆论同时取决于均衡策略组合 e^0 和初始分布π_0。随后，在每个阶段 $t \geq 1$，新形成的世代根据以下方程调整意见分布π_t： $\pi_t = \pi_{t-1} Q^{t-1}$，其中 Q^{t-1} 是与均衡 e^{t-1}相关联的转移矩阵。该过程无限期地持续下去。[10]

灌输过程的运作方式是：新形成的世代在均衡状态下观察上一代的观点，同时考虑每个子群体的不同视角。该过程建立在一种内在偏向之上，因为先前的观点分布可以通过被观察到的观点显著影响后续的观点分布。例如，如果新形成的世代属于一个明显偏向某一特定观点（例如 O_1）的人群，那么在均衡状态下，他们的观点将显著受到 O_1-玩家观点的影响。现在，我们可以利用引理1证明中给出的通用均衡策略组合，明确呈现每个阶段 t 的转移矩阵。

观察1。在每个阶段 t 以及每个均衡 e^t 中（如引理1的证明所示），转移矩阵为

$$Q^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\delta r^*+\delta^2} & \frac{\delta r^*}{1+\delta r^*+\delta^2} & \frac{\delta^2}{1+\delta r^*+\delta^2} \\ \frac{\delta}{2\delta+r^*} & \frac{r^*}{2\delta+r^*} & \frac{\delta}{2\delta+r^*} \\ \frac{\delta^2}{1+\delta r^*+\delta^2} & \frac{\delta r^*}{1+\delta r^*+\delta^2} & \frac{1}{1+\delta r^*+\delta^2} \end{bmatrix},$$

其中 $r^* = \frac{E_2}{E_1}$。

注意，这是一个右中心对称转移矩阵，即它关于中心 $Q^t_{2,2}$ 对称，并且每一行的和均为一。此外，只要所有观点都得到体现，比率$r^* = \frac{E_2}{E_1}$ 就与持有各观点的玩家数量无关。因此，对于每个 $\delta \in (0,1)$，该不可约且非周期的转移矩阵在每个阶段 t 以及每个均衡 e^t中都成立。因此，

[10]如果 π_t 包含无理数值，就无法用有限数量的参与者来实现。在这种情况下，可以使用与 π_t足够接近的近似值，从而得到足够接近的结果。Lehrer 和 Shaiderman（2021）讨论的M-吸收集概念对此很有帮助。

无论初始观点分布如何，都能保证收敛至其唯一的平稳概率特征向量 π 。具体而言，其平稳分布是

$$\pi = \left(\frac{\sqrt{\delta + \frac{1}{2}r^*}}{2\sqrt{\delta + \frac{1}{2}r^*} + r^*}, \frac{r^*}{2\sqrt{\delta + \frac{1}{2}r^*} + r^*}, \frac{\sqrt{\delta + \frac{1}{2}r^*}}{2\sqrt{\delta + \frac{1}{2}r^*} + r^*} \right).$$

引理1指出， r^* 是 δ的递减函数，因此很容易证明， π_2 也随 δ 递减，从而表明随着 δ 增加，群体会变得更加极化。

引理2。温和派玩家的比例 π_2 随 $\delta \in$ 递减（$0, 1]$）。

除了单调性之外，我们还可以利用引理1之后给出的 δ 与 r^*之间的函数关系，计算 δ 趋近于0或1时的平稳分布。具体而言，当 δ 趋近于0时，平稳分布收敛至 $\pi = \left(\frac{1}{2+2^{1/3}}, \frac{2^{1/3}}{2+2^{1/3}}, \frac{1}{2+2^{1/3}} \right) \approx$ (0.307, 0.386, 0.307)。另一方面，当 δ 趋近于1时，我们知道 r^* 收敛至0，因此在完全暴露的情况下，可得 $\pi =$ (0.5, 0, 0.5)。换言之，如果没有任何限制，且每个人都能观察到所有观点，那么整个群体就会达到极化程度最高的极端状态。

6 结论

灌输博弈为理解社会辩论提供了有价值的视角，其意义超越了本文所呈现的形式化结果。它提供了一种替代标准贝叶斯推断和理性学习模型的框架，使参与者能够相互灌输。这一视角转变促使人们重新审视这样一种假设：总是存在一个客观且未知的世界状态，个体试图去发现它。相反，这一框架承认，人们可能基于各自的主观生活经历持有不同观点。该博弈为沉默的大多数和发声的少数等经验证实的现象，以及接触相反观点对群体内极化的影响，提供了理论基础。不过，不应将该博弈视为一种限制社会辩论的方式，而应将其看作一种替代性框架，以便更细致地理解人们如何在社会环境中形成并修正自己的信念。

参考文献

Ahn, T. K., R. Mark Isaac 和 Timothy C. Salmon，“群体中的寻租”，《国际工业组织杂志》，2011年1月，29（1），116–125。

Amir、Gideon、Itai Arieli、Galit Ashkenazi-Golan 和 Ron Peretz，《Granular DeGroot Dynamics——社会网络中稳健朴素学习的模型》，2021年2月。

Arieli、Arieli、Galit Ashkenazi-Golan、Ron Peretz 和 Yevgeny Tsodikovich，《创新扩散网络中的最小传染集》，2023年。

Aseff、Jorge 和 Hector Chade，《具有身份依赖型外部性的最优拍卖》，《兰德经济学杂志》，2008年，39(3)，731–746。

Bail、Christopher A.、Lisa P. Argyle、Taylor W. Brown、John P. Bumpus、Haohan Chen、M. B. Fallin Hunzaker、Jaemin Lee、Marcus Mann、Friedolin Merhout 和 Alexan- der Volfovsky，《在社交媒体上接触对立观点可能加剧政治极化》，《美国国家科学院院刊》，2018年9月，115 (37)，9216–9221。

Baye, Michael R. 和 Heidrun C. Hoppe，《寻租、创新与专利竞赛博弈的战略等价性》，《博弈与经济行为》，2003年8月，44（2），217–226。

Brocas, Isabelle，《具有类型依赖负外部性的最优配置机制》，《理论与决策》，2013年9月，75（3），359–387。

Buchanan, James M，《外部不经济条件下的寻租》，载于《Buchanan, J.M.、Tollison, R.D. 和 Tullock, G.（编），《迈向寻租社会理论》第4卷》，《1.》中，科利奇站：德克萨斯农工大学，1980年，页183–194。

Chowdhury, Subhasish M. 和 Roman M. Sheremeta，《广义 Tullock 竞赛》，《公共选择》，2011年6月，147（3），413–420。

Chung, Tai-Yeong，《总努力增加时的寻租竞赛》，《公共选择》，1996年，87 (1/2)，55–66。出版商：Springer。

Cohen、Chen、Todd R. Kaplan 和 Aner Sela，“竞赛中的最优奖励”，《兰德经济学杂志》，2008年，39（2），434–451。

Congleton, Roger D.，“有效的地位追求：外部性与地位博弈的演变”，《经济行为与组织杂志》，1989年3月，11（2），175–190。

das Varma, Gopal，“具有身份依赖型外部性的标准拍卖”，《兰德经济学杂志》，2002年，33（4），689–708。

DeGroot, Morris H.，“达成共识”，《美国统计学会杂志》，1974年，69（345），118–121。

Eggert, Wolfgang 和 Martin Kolmar，“具有规模效应的竞赛”，《欧洲政治经济学杂志》，2006年12月，22（4），989–1008。

Esteban, Joan 和 Debraj Ray，“冲突与分配”，《经济理论杂志》，1999年8月，87（2），379–415。

Esteban, Joan-Mar´ía 和 Debraj Ray，“论极化测度”，《计量经济学》，1994年，62（4），819–851。

Funk, Peter，“具有相互依存估值的拍卖”，《国际博弈论杂志》，1996年3月，25（1），51–64。

Galam, S.，《随机几何中的少数意见传播》，《欧洲物理学杂志B辑：凝聚态与复杂系统》，2002年2月，25(4)，403–406。

Golub, Benjamin 和 Matthew O Jackson，《社会网络中的朴素学习与群体智慧》，《美国经济学杂志：微观经济学》，2010年2月，2 (1)，112–149。

Jehiel, Philippe、Benny Moldovanu 和 Ennio Stacchetti，《如何（不）出售核武器》，《美国经济评论》，1996年，86 (4)，814–829。

__、__和，《具有外部性的拍卖中的多维机制设计》，《经济理论杂志》，1999年4月，85 (2)，258–293。

Klose, Bettina 和 Dan Kovenock，《具有完全信息和身份依赖型外部性的全支付拍卖》，《经济理论》，2015年，59 (1)，1–19。

Konrad, Kai A.，《沉默的利益与全支付拍卖》，《工业组织国际期刊》，2006年7月，24 (4)，701–713。

Lee, Sanghack, 《通过成本产生规模效应的竞赛》，《欧洲政治经济学杂志》，2007年12月，23(4)，1190–1193。

_ 以及 J. Hyeong Kang, 《具有外部性的集体竞赛》，《欧洲政治经济学杂志》，1998年11月，14(4)，727–738。

Lehrer, Ehud 和 Dimitry Shaiderman, 《马尔可夫式说服》，2021年11月。arXiv:2111.14365 [econ]。

Linster, Bruce G., 《寻租行为的广义模型》，《公共选择》，1993年，77 (2)，421–435。

Moldovanu, Benny、Aner Sela 和 Xianwen Shi, 《胡萝卜加大棒：竞赛中的奖励与惩罚》，《经济探究》，2012年，50 (2)，453–462。

Mustafaraj, Eni、Samantha Finn、Carolyn Whitlock 和 Panagiotis T. Metaxas, 《发声的少数对沉默的多数：发现长尾群体的观点》，载于《2011年IEEE第三届隐私、安全、风险与信任国际会议和2011年IEEE第三届社会计算国际会议》，2011年10月，第103–110页。

Nitzan, Shmuel, 《具有非同一分配规则的寻租》，《公共选择》，1991年，71（1/2），43–50。

Park, Sung-Hoon 和 Sanghack Lee, 《奖品具有线性外部性的竞赛》，2019年8月。Sela, Aner, 《图洛克竞赛中奖励与惩罚的最优分配》，《国际博弈论杂志》，2020年9月，49（3），749–771。Shaffer, Sherrill, 《战争、劳动锦标赛与竞赛收益》，《经济学快报》，2006年8月，92（2），250–255。Skaperdas, Stergios, 《竞赛成功函数》，《经济理论》，1996年，7（2），283–290。Tullock, Gordon, 《有效寻租》，载于《Buchanan, J.M., Tollison, R.D., and Tullock, G., (编), 《迈向寻租社会理论》》，第4卷。见“1.”，科利奇站：德克萨斯农工大学，1980年，第97–112页。

定理1的证明

证明。零向量显然不是均衡，因此取一个非零策略组合 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$，并考虑玩家 $j \in N_i$ 的收益函数，

$$\begin{aligned} U_j(e_j, e_{-j}|O_i) &= -e_j - \frac{\sum_{l=1}^k \sum_{r\in N_l} e_r |O_l - O_i|}{\sum_{r=1}^n e_r} \\ &= -e_j - \frac{\sum_{l=1}^k E_l |O_l - O_i|}{\sum_{l=1}^k E_l}. \end{aligned}$$

函数 $U_j(\cdot, e_{-j}|O_i)$ 关于 e_j 可微且为凹函数，因此最大值要么在边界 $e_j = 0$ 处取得（努力水平没有上界），要么满足以下一阶条件:

$$\frac{\partial U_j(e_j, e_{-j}|O_i)}{\partial e_j} = \sum_{l=1}^k E_l |O_l - O_i| - \left[\sum_{l=1}^k E_l\right]^2 = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

记 $d_{l,\ i} = |O_l - O_i|$，并注意到

$$d_{l,i} - d_{l,i+1} = |O_l - O_i| - |O_l - O_{i+1}| = \begin{cases} -d_{i,i+1}, & \forall l \le i, \\ d_{i,i+1}, & \forall l > i. \end{cases}$$

对于每个 $i = 1, \ldots, k-1$，计算差值

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j(\mathbf{e}|O_i)}{\partial e_j} - \frac{\partial U_{j'}(e|O_{i+1})}{\partial e_{j'}} &= \sum_{l=1}^k E_l d_{l,i} - \sum_{l=1}^k E_l d_{l,i+1} \\ &= -\sum_{l\le i} E_l d_{i,i+1} + \sum_{l>i} E_l d_{i,i+1} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

将每个这样的方程2（对应观点 O_i）除以 $d_{i,\ i+1} \neq 0$，得到

$$H_i := -\sum_{l\le i} E_l + \sum_{l\ge i+1} E_l = 0.$$

减去 $H_{i-1} - H_i$，得到 $2E_i = 0$，对每个 $i = 2, \ldots, k-1$ 都成立。由于努力水平非负，我们可以推知，在均衡中，对于每个温和派参与者 j，一阶条件都在边界 $e_j = 0$ 处得到满足。因此，极端意见对应的一阶条件如下

$$E_i |O_1 - O_k| - [E_1 + E_k]^2 = 0, \text{ where } i = 1, k.$$

求解 E_1 和 E_k，得到唯一解（零努力策略组合除外） $E_1 = E_k = \frac{|O_1 - O_k|}{4}$，符合要求。

□

B 定理 2 的证明

证明。考虑均衡策略组合 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n_+$。由引理1的证明可知 $E_1 = E_3$，因此极化程度可表示为

$$P(\mathbf{e}) = \frac{2E_1E_2^2 + 2E_1^2E_2 + 4E_1^3}{[2E_1 + E_2]^3} = \frac{W^2 + \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}}{[1+W]^3} = \frac{1}{1+W} - \frac{1}{2(1+W)^2} - \frac{W}{(1+W)^3},$$

其中 $W = \frac{E_2}{2E_1}$。根据引理1， W关于 δ严格递减，因此只需证明 P(e)关于 $W \geq 0$严格递减。显然，

$$\frac{dP}{dW} = -\frac{1}{(1+W)^2} + \frac{3W}{(1+W)^4} = \frac{-W^2 + W - 1}{(1+W)^4} < 0,$$

对于每个 $W \geq 0$，视需要而定。 □

C 引理1的证明

证明。固定 $\delta \in$ (0,1)，并考虑每个玩家 $j \in N_i$ 在给定非零策略组合 e 时的一阶条件（FOCs），

$$\sum_{l=1}^{3} E_l \delta^{|i-l|} |O_l - O_i| = \left[\sum_{l=1}^{3} \delta^{|i-l|} E_l \right]^2,$$

其中 $E_l = \sum_{r \in N_l} e_r$ 对于 $1 \leq l \leq 3$。对每个观点明确表述后，我们得到

$$\begin{aligned}
\text{for } j \in N_1 \quad &: \quad E_2\delta + 2E_3\delta^2 = \left[E_1 + E_2\delta + E_3\delta^2\right]^2, \\
\text{for } j \in N_2 \quad &: \quad E_1\delta + E_3\delta = \left[E_1\delta + E_2 + E_3\delta\right]^2, \\
\text{for } j \in N_3 \quad &: \quad 2E_1\delta^2 + E_2\delta = \left[E_1\delta^2 + E_2\delta + E_3\right]^2.
\end{aligned}$$

定义 $X = E_1 + E_2\delta + E_3\delta^2$、 $Y = E_1\delta + E_2 + E_3\delta$ 和 $Z = E_1\delta^2 + E_2\delta + E_3$。因此，

$$\begin{aligned}
X - E_1 + \delta^2 E_3 &= X^2, \\
Y - E_2 &= Y^2, \\
Z - E_3 + \delta^2 E_1 &= Z^2.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
X - \delta Y = E_1(1-\delta^2) \quad &\Rightarrow \quad E_1 = \frac{X - \delta Y}{1 - \delta^2}, \\
Z - \delta Y = E_3(1-\delta^2) \quad &\Rightarrow \quad E_3 = \frac{Z - \delta Y}{1 - \delta^2}.
\end{aligned}$$

将其代入前面的方程，得到

$$X^2 = X - \frac{X-\delta Y}{1-\delta^2} + \delta^2\frac{Z-\delta Y}{1-\delta^2} = X + \frac{\delta^2 Z - X}{1-\delta^2} + \delta Y \quad \Rightarrow \quad X^2(1-\delta^2) = (Z-X)\delta^2 + \delta(1-\delta^2)Y,$$
$$Z^2 = Z - \frac{Z-\delta Y}{1-\delta^2} + \delta^2\frac{X-\delta Y}{1-\delta^2} = Z + \frac{\delta^2 X - Z}{1-\delta^2} + \delta Y \quad \Rightarrow \quad Z^2(1-\delta^2) = (X-Z)\delta^2 + \delta(1-\delta^2)Y.$$

两式相减得 $(X^2 - Z^2)(1-\delta^2) + 2(X-Z)\delta^2 = 0$。因此，我们得出结论：$X = Z$ 是唯一解，且 $E_1 = E_3$。

因此，一阶条件变为

$$2\delta^2 + 2\delta W = E_1\left[1 + \delta^2 + 2\delta W\right]^2,$$
$$2\delta = E_1\left[2\delta + 2W\right]^2,$$

其中 $W = E_2/(2E_1)$。将第一个方程除以第二个方程，得

$$\delta + W = \left[\frac{1+\delta^2+2\delta W}{2(\delta+W)}\right]^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4(\delta+W)^3 = \left[1+\delta^2+2\delta W\right]^2.$$

定义函数 $Q(W,\delta) = 4(\delta+W)^3 - \left[1+\delta^2+2\delta W\right]^2$，并注意到，对于每个 $\delta \in (0,1]$，$Q(0,\delta) < 0$，且 $Q(1,\delta) > 0$。根据介值定理，存在一个解，使得 $Q(W(\delta)\ \delta) = 0$。注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial W} &= 12(\delta+W)^2 - 4W[1+\delta^2+2\delta W] \\ &\geq 12(\delta+W)^2 - 4(W+\delta)[1+\delta^2+2\delta W] = \frac{\partial Q}{\partial \delta},\end{aligned}$$

并代入 $\left[1+\delta^2+2\delta W\right] = 2(\delta+W)^{3/2}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \delta} &= 12(\delta+W)^2 - 4[1+\delta^2+2\delta W](\delta+W) \\ &= 12(\delta+W)^2 - 8(\delta+W)^{5/2} \\ &= 8(\delta+W)^2(1.5 - \sqrt{\delta+W}) > 0, \quad \forall(\delta,W) \in (0,1]^2.\end{aligned}$$

因此，两个偏导数都严格为正，且 $Q(W,\delta) = 0$ 的解 $W(\delta)$ 是唯一的。根据隐函数定理，我们得到

$$\frac{\partial W(\delta)}{\partial \delta} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial \delta}}{\frac{\partial Q}{\partial W}} < 0,$$

这意味着在均衡中，$W = \frac{E_2}{E_1+E_3}$ 相对于 δ 是递减的。 □

D 引理2的证明

证明。注意到 $\pi_1+\pi_2+\pi_3=2\pi_1+\pi_2=1$，因此只需证明 $\frac{\pi_1}{\pi_2}$ 随 δ递增。记$D=\frac{\pi_1}{\pi_2}=\frac{r^*}{\sqrt{\delta+\frac{1}{2}r^*}}$，并对 δ求导，从而

$$\frac{\partial D}{\partial \delta}=\frac{r^*-\frac{dr^*}{d\delta}[2\delta+\frac{1}{2}r^*]}{2(r^*)^2\sqrt{\delta+\frac{1}{2}r^*}}.$$

由于 r^* 随 δ 递减，因此得到 $\frac{\partial D}{\partial \delta}>0$，结论成立。 □