arXiv:2305.02611v1 [math.AT] 4 May 2023

四元数射影空间与球面乘积上的对合

Dimpi 和 Hemant Kumar Singh

Abstract. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 X，其模 2 上同调同构于四元数射影空间与球面的乘积 $\mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m, n, m \geq 1$。本文研究 X.上自由对合的连通不动点集和轨道空间

1. 引言

设 (G, X) 为一个变换群，其中 G 是紧李群， X 是有限 CW 复形，且不动点集为 $F.$ 。变换群中，不动点集和轨道空间的上同调结构一直是一个有趣的问题。Smith [11] 证明，对于素数 $G = \mathbb{Z}_p, p$ ，若有限维多面体 X 的模 p 上同调 n为球面，则其不动点集也是模 p 上同调r球面，其中 $-1 \leq r \leq n.$ 。他还证明，若 $G = \mathbb{Z}_2$ 有效地作用于实射影空间，则不动点集要么为空，要么有两个连通分支，且其模 2 上同调为实射影空间 [12]。Bredon [2] 将这一结果推广到 $G = \mathbb{Z}_p$的情形，其中 p 为素数，即其在上同调射影空间上的作用。Bredon[2] 还证明，若有限型空间 X 满足关于带有 $\mathbb{Z}_p$-系数的 Čech 上同调的庞加莱对偶，则不动点集的每个连通分支也满足庞加莱对偶。Puppe [14] 证明了 Bredon 猜想：若X 在 X_G （Borel 空间）中完全非零同调，则不动点集每个连通分支的 $\mathbb{Z}_p$-系数上同调环的生成元数至多为 $H^*(X)$ 的生成元数。射影空间与 Dold 流形乘积上对合的不动点集已在 [4, 8] 中确定。

另一方面，众所周知， $\mathbb{Z}_2$、 $\mathbb{S}^1$和 $\mathbb{S}^3$ 在 $\mathbb{S}^n$、 $\mathbb{S}^{2n+1}$ 和 $\mathbb{S}^{4n+3}$ 上的自由作用的轨道空间是射影空间 $\mathbb{P}^n$（q），其中 $q = 1$分别为 2 和 4。最近，文献[5, 7, 9]讨论了实 Milnor 流形、Dold 流形以及两个射影空间的乘积上的自由对合的轨道空间。对合的连通不动点集的可能性，以及其轨道空间

2020 年数学主题分类。主要分类 57S17；次要分类 55M35。关键词和短语。不动点集；轨道空间；纤维化；完全非零同调；Leray–Serre 谱序列。本文第一作者获得印度大学拨款委员会（UGC）新德里办事处的 SRF 资助，参考编号：201610039267。

两个射影空间与球面乘积上的自由对合 $\mathbb{F}P^n \times \mathbb{S}^m$， $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$，已在[6]中确定。作为延续，本文确定了射影空间 $X \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$ 上的对合的连通不动点集的可能性，并讨论了 X.上的自由对合的轨道空间

2. Preliminaries

本节回顾本文将用到的一些已知事实。设 $G = \mathbb{Z}_p$作用于有限 CW 复形 $X.$ 。设 $G \hookrightarrow E_G \to B_G$ 为万有 G丛，其中E_G 是可缩空间， B_G 是有限 CW 复形。则投影映射 $X \times E_G \to E_G$ 是 G等价映射，并给出一个纤维化 $X \overset{i}{\hookrightarrow} X_G \overset{\pi}{\to} B_G$ （称为 Borel 纤维化），其中 $X_G = (X \times E_G)/G$ 是由G 在空间 $X \times E_G.$ 上的对角作用所得到的 Borel 空间。设 $F \neq \emptyset$，并设 $x \in F$ 和 $\eta_x : B_G \hookrightarrow X_G$ 是投影映射 $\pi : X_G \to B_G$的一个截面，其中 $B_G \approx (\{x\} \times E_G)/G$，则$H^*(X_G)$ $\cong ker\ \eta_x^* \oplus im\ \pi^*.$。诱导同态 η_x^*取决于不动点集 F中包含 x 的连通分支F_0。如果 $\alpha \in H^n(X_G)$ 满足 $\alpha \in Ker\ \eta_x^*$，则在 $(F_0)_G$ 上将 α 限制为 $j : (F_G, x_G) \hookrightarrow (X_G,$ $x_G)$ 后所得的像不包含 $H^0(F_0, x_G)$ [3]中的元素。

回顾一下，若空间 X 在 X_G 中完全非零同调（TNHZ），则包含映射 i: $X \hookrightarrow X_G$ 在上同调 $i^* : H^*(X_G) \to H^*(X)$ 中诱导一个满射。我们用到了以下命题:

命题 2.1. ([1]) 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 X，且 $\sum \text{rk}\ H^i(X, \mathbb{Z}_2) < \infty.$。则以下陈述等价:

(a) X 在 $X_G.$中为 TNHZ（模 2）。(b) $\sum \text{rk}\ H^i(F, \mathbb{Z}_2) = \sum \text{rk}\ H^i(X, \mathbb{Z}_2)$。(c) G 在 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 上平凡作用，且 $X_G \to B_G$ 的谱序列 $E^{r,q}_2$ 退化。

命题 2.2. ([2]) 设 X 在 X_G 中为 TNHZ，且 $\{\gamma_j\}$ 是 $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ 中一组齐次元素，使得 $\{i^*(\gamma_j)\}$ 构成 $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ 的 $\mathbb{Z}_p$-基。那么， $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ 是由 $\{\gamma_j\}.$ 生成的自由 $H^*(B_G)$-模。

命题 2.3。 ([1]) 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 X，且 $A \subset X$ 是闭的不变子空间。假设对于 $i > n.$， $H^i(X, A;\ \mathbb{Z}_2) = 0$。那么，同态

$$j^* : H^k(X_G, A_G; \mathbb{Z}_2) \to H^k(F_G, F_G \cap A_G; \mathbb{Z}_2)$$

当 $k > n$ 时是同构。若 (X, A) 在 $(X_G, A_G,)$ 中为 TNHZ（模 2），则对于所有 $k.$, j^* 是单态射

命题 2.4。([1]) 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 X，且 X 是$X_G.$ 中的 TNHZ。则，对于满足 $a^2 \neq 0.$ 的任意类 $a \in H^n(X; \mathbb{Z}_2)$， $a|F$ 是不动点集 F中的非平凡元素。

我们知道 $H^*(\mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[a,b]/ < a^{n+1}, b^2 >$, 其中 deg $a = 4$ 且 deg $b = m.$。在全文中, $H^*(X)$表示空间 X 的 ˇCech 上同调, 而 $X \sim_2 Y$表示 $H^*(X; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$。

3. Main Theorems

设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 $X \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$, 其中 $n, m \geq 1.$。本节确定了 X 上对合的连通不动点集的可能形式, 以及 $X.$上自由对合的轨道空间。

首先, 我们确定了 $X.$上对合的不动点集。

定理 3.1. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 作用于有限 CW 复形 $X \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m, n, m \geq 1.$。若 X 在 X_G 中是 TNHZ, 且不动点集 F 非空且连通, 则 F 必为以下之一:

(1) $F \sim_2 \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^q$ 或 $F \sim_2 \mathbb{F}P^n \times \mathbb{S}^q$, 其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}, 1 \leq q \leq m$。(2) $F \sim_2 \mathbb{F}P^{n+1} \# \mathbb{F}P^{n+1}$, 其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$。(3) $H^*(F)$ 由 c 和 d 生成, 且 $c^{n+1} = d^2 + c^s = d^{2l+2} = 0$, 其中 deg$c = 2$、deg $d = q$, 并且若 q 为偶数, 则 $l = [\frac{n}{s}]$, $s = \frac{q}{2}$; 若 q 为奇数, 则 $s = q$。此外, 对于 $q = 1$, $F \sim_2 \mathbb{R}P^{2n+1}$; 对于 $q = 2$, $F \sim_2 \mathbb{C}P^{2n+1}$。(4) $H^*(F)$ 由 c 和 d 生成, 且 $c^{\frac{r}{s}+1} = d^{\frac{r}{q}+1} = c^{\frac{r}{s}} + d^{\frac{r}{q}} = cd = 0$, 其中 deg $c = s, s = 1, 2$, deg $d = q, q = 1, 2, 4$ 或 8, $r = sq(2n+2)/(q+s)$ 且 $n = (q+s)_k^2 - 1$, 对某个 $k \in \mathbb{N}$。(5) $H^*(F)$ 由 c 和 d 生成, 且 $c^{\frac{r}{s}+1} = c^{\frac{qj}{s}} + d^j = c^{\frac{r-q}{s}+1} d = 0$, 其中 deg$c = s, s = 1, 2$, deg $d = q < n$, $r = {}^{s}_{(2n+2)_j} + qj - (q+1)$ $n + 1 = jk$, 对某个 $k \in \mathbb{N}$, 或 $j = 2k, k = 1$ 或 2, 且 $n > {}^{(q+1)}_{2s}{}^{j} - 1$.

证明。设 $x \in F$和 $\{a, \cdots, a^n, b, ab, \cdots a^n b\}$ 是 $H^*(X, x)$ 的一组生成集, 其中 deg $a = 4$ 且 deg $b = m.$。由于 X 在 X_G中是 TNHZ, 我们得到 rk $H^*(F) = 2n + 2$, $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X_G, x_G)$ 上作用平凡, 且 Borel 纤维化 $X \xrightarrow{i} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$ 的 Leray–Serre 谱序列的 E_2-项 $E^{p,q}_2 = H^p(B_G) \otimes H^q(X)$ 是 $E^{p,q}_\infty$. 。因此, 元素 $\{1 \otimes a, 1 \otimes a^2, \cdots, 1 \otimes a^n, 1 \otimes b, 1 \otimes ab, \cdots 1 \otimes a^n b\}$是永久上循环。假设$\alpha \in H^4(X_G, x_G)$ 表示生成元 $a \in H^4(X, x)$, 而 $\beta \in H^m(X_G, x_G)$ 表示生成元 $b \in H^m(X, x)$, 使得 $\eta_x^*(\alpha) = \eta_x^*(\beta) = 0$, 其中 $\eta_x : \frac{\{x\} \times E_G}{G} \hookrightarrow \frac{X \times E_G}{G}$是包含映射。由命题 2.2, $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots \alpha^n, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \cdots \alpha^n\beta\}$ 是 $H^*(X_G, x_G)$ 作为 $H^*(B_G)$-模的一组生成集。由于 $H^m(F_G, x_G) = \bigoplus_{i=0}^m H^{m-i}(B_G) \otimes H^i(F, x)$ 且 $\eta_x(\beta) = 0.$ 我们可以假设

$$j^*(\beta) = 1 \otimes d_m + t \otimes d_{m-1} + \cdots + t^k \otimes d_{m-k} \cdots + t^{m-2} \otimes d_2 + t^{m-1} \otimes d_1,$$

其中 $d_i \in H^i(F, x)$, 且 $j^*(\alpha) = B_1 t^3 \otimes c_1 + B_2 t^2 \otimes c_2 + B_3 t \otimes c_3 + B_4 1 \otimes c_4$, 其中 $c_i \in H^i(F, x)$ 且 $B_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 4.$我们知道 $i_1^* j^* = j_1^* i^*$, 其中 $i_1 : F \hookrightarrow F_G$

且 $j_1 : F \hookrightarrow X$ 是包含映射。因此，我们得到 $c_4 = a|F.$ 若 $c_4 \neq 0$，则 $B_4 = 1.$显然，$c_4^{n+1} = 0.$因此，$j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4 + \sum_{i=1}^{3} B_i t^{4-i} \otimes c_i$，其中 $B_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 3.$所以，我们根据 B_1, B_2 和 B_3 是零还是非零，分为八种情形。

情形 (1)：如果 $B_1 = B_2 = B_3 = 0$，那么 $j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4.$

在此情形下，对于 $1 \leq i \leq n.$，$c_4^i \neq 0$ 由于 j^* 是单射，因此 $d_j \neq c_4^j$，对于某个 j，$1 \leq j \leq n$，其中 $\deg\ d_j = j.$。假设 $d_q = d_{m-k} = d$ 是满足 $d_q \neq c_4^j.$的最低次数元素。由于 j^* 在高次数上是满射的，当 r 足够大时，我们可以写成

$$t^{k+r} \otimes d = j^*(A_1 t^{r+m-4}\alpha + \cdots + A_n t^{r+m-4n}\alpha^n + A_m t^r \beta + \cdots + A_{m+n} t^{r-4n}\alpha^n \beta),$$

其中 $A_i's$ 属于 $\mathbb{Z}_2.$。比较 $t^{k+r} \otimes d$ 的系数后，我们得到 $A_m = 1.$。因此，我们有

$t^r \otimes d_m + \cdots + t^{r+k-1} \otimes d_{m-(k-1)} + t^{r+k+1} \otimes d_{m-(k+1)} + \cdots + t^{r+m-1} \otimes d_1 = -j^*(A_1 t^{r+m-4}\alpha + \cdots + A_n t^{r+m-4n}\alpha^n + A_{m+1} t^{r-4}\alpha\beta + \cdots + A_{m+n} t^{r-4n}\alpha^n\beta)$。

由上式可知，若 $q \equiv 1, 2, 3$（模 4），则 $d_{4i} = c_4^i, d_{4i+q} = c_4^i d, 1 \leq i \leq n$；若 $q \equiv 0$（模 4），则 $d_{4k} = c_4^k + c_4^{k-1} d$，其中 $1 \leq i \leq n$，其他情况下为零。因此，我们得到 $j^*(\alpha^n \beta) = t^k \otimes c_4^n d.$由于 $\alpha^n \beta \neq 0$，我们得到 $c_4^n d \neq 0$，从而 $c_4^i d \neq 0$ 对于 $1 \leq i \leq n.$显然，若 $d^2 = 0$，则 $F \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^q, 1 \leq q \leq m.$若 $d^2 \neq 0$，则 $q \equiv 0$（模 4）或 $q \equiv 2$（模 4）。首先，假设 $q \equiv 2$（模 4）。于是，我们有 $d^2 = c_4^{\frac{q}{2}}.$因此，$d^{2l+1} = c_4^{\frac{lq}{2}} d$，其中 $l = [\frac{2n}{q}]$且 $d^{2l+2} = 0.$由此得到 $c_4^{n+1} = d^{2l+2} = d^2 + c_4^{\frac{q}{2}} = 0.$特别地，对于 $q = 2$，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{C}P^{2n+1}.$这实现了可能性（3）。接下来，假设 $q \equiv 0$（模 4），则我们有 $d^2 = c_4^{\frac{q}{2}}$ 或 $d^2 = c_4^{\frac{q}{4}} d.$若 $d^2 = c_4^{\frac{q}{2}}$，则通过适当的基变换，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^q, 1 \leq q \leq m.$若 $d^2 = c_4^{\frac{q}{4}} d$，则 q 必须为 4。通过基变换 $d' = d + c_4$，我们得到 $d'^{n+2} = d^{n+2} = d'^{n+1} + d^{n+1} = dd' = 0.$因此，$F \sim_2 \mathbb{H}P^{n+1} \# \mathbb{H}P^{n+1}.$这对 $\mathbb{F} = \mathbb{H}.$实现了可能性（2）

情形 (2)：若 $B_1 = B_2 = 0$ 和 $B_3 = 1$，则 $j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4 + t \otimes c_3.$

假设 $H^1(F) \neq 0.$此外，我们根据 $c_3 = c_1^3$ 或 $c_3 \neq c_1^3.$来讨论不同情形。首先，考虑 $c_3 = c_1^3.$。假设 $H^*(F)$ 有一个生成元。那么，$c_4 = c_1^4$ 且 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} t^r \otimes c_1^{4n-r}.$由同态 j^* 的单射性可得 $c_1^{3n} \neq 0.$。显然，$\mathbf{rk} H^*(F) > 2n + 2$，矛盾。假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。那么，要么是 $c_4 = c_1^4$，要么是 $c_4 \neq c_1^4.$

令 $c_4 = c_1^4.$那么，我们也有 $\mathbf{rk}\ H^*(F) > 2n + 2$，这就产生了矛盾。

令 $c_4 \neq c_1^4.$此外，若 $c_1^4 = 0$，则

$$j^*(\alpha^n) = \begin{cases} 1 \otimes c_4^n & \text{if } n \text{ is even} \\ 1 \otimes c_4^n + t \otimes c_4^{n-1} c_1^3 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

当 $j^*(\alpha^n) \neq 0, c_4^n \neq 0$，对于 n 为偶数的情形。若 n 为奇数且 $c_4^n = 0$，则 $\mathbf{rk} H^*(F) = 4n > 2n+2, n > 1$，矛盾。显然，对于 $n = 1.$，这种情形不可能。因此，我们有

$c_4^n \neq 0$. 由于 F 是庞加莱 $对偶空间，再次得到秩 $H^*(F) > 2n+2$，这与矛盾相悖。现在，如果 $c_4 \neq c_1^4$ & $c_1^4 \neq 0$，那么我们必定有

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{r}t^{r+i}\otimes(\oplus_{j+4l=m-i}c_4^{n-r+l}c_1^{j+3r}).$$

若杯积 $c_1c_4 = 0$，则 $c_1^{3n+1} \neq 0.$。由此可得 $H^*(F)$ 的秩为 $> 2n+2$，矛盾。若杯积 $c_1c_4 \neq 0$，则 $H^*(F)$ 的秩会进一步增大，这不可能。

接下来，考虑 $c_3 \neq c_1^3.$。由于 $H^*(F)$ 至多有两个生成元，我们得到 $c_4 = c_1^4.$。因此

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{r}t^{r+i}\otimes(\oplus_{j+3l=m-i}c_1^{4n-4r+j}c_3^{r+l}).$$

当 $r = 0$ 时，c_1^{4n+1}、$c_1^{4n-3}c_3$、$\cdots$、$c_1c_3^n$ 分别是最低次数元素，次数依次为 1、$\cdots$、n。无论如何，容易看出 $H^*(F)$ 的秩为 $> 2n+2$，矛盾。

现在，假设 $H^1(F) = 0.$。此外，假设 $H^2(F) \neq 0.$。那么，我们必有 $c_4 = c_2^2.$。于是，

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{r}t^{r+i}\otimes(\oplus_{2l+3j=m-i}c_2^{2n-2r+l}c_3^{r+j}).$$

注意，当 $r =$ 分别为 0、1、$2\cdots n$ 时，c_2^{2n+1}、$c_2^{2n-1}c_3.c_2^{2n-3}c_2^2.\cdots c_2^2c_3^{n-1}$、$c_2c_3^n$ 是最低次数元素。因此，我们总有 rk $H^*(F) > 2n+2$，这就产生了矛盾。接下来，假设 $H^2(F) = 0.$。那么，

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{r}t^{r+i}\otimes(\oplus_{3l+4j=m-i}c_4^{n-r+j}c_3^{r+l}).$$

上述表达式中的最低次数元素为 $c_4^nc_3$、$c_4^{n-1}c_3^2$、$\cdots c_4c_3^n$ 和 $c_3^{n+1}.$。令 $c_3c_4 \neq 0.$。若 $c_3^2 = 0$，则 $c_4^nc_3 \neq 0.$。因此，$F \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^3.$。若 $c_4^2 = 0$ 且 $c_3^{n+1} = 0$，则 $F \sim_2 X \times \mathbb{S}^4$，其中 X 的截断多项式环为 $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{<x^{n+1}>}$，deg $x = 3.$。根据 [10], 中的定理 4.5，这是不可能的。若 $c_4^2 = 0$ 且 $c_3^{n+1} \neq 0$，则 rk $H^*(F) > 2n+2$，这就产生了矛盾。

^{r} ^{r} $_i$ $_i$现在，设 $c_3c_4 = 0.$那么，$c_3^{\overline{3}} = c_4^{\overline{4}}$是 $H^r(F)$ 的生成元，且 $c_3^{\overline{3}} \neq c_4^{\overline{4}}$ 对于 $i < r.$ 由于 rk$H^*(F) = 2n+2$，我们得到 $r = \frac{24n+24}{7}.$ 因此，$n = \frac{7k-2}{2}$, k 为偶数。于是，$c_3^{4k+1} = c_4^{3k+1} = c_3c_4 = c_3^{4k} + c_4^{3k} = 0.$ 因此，$F \sim_2 Y\#Z$，其中 Y 和 Z 分别是以 c_3 和 c_4 为生成元的截断多项式。但根据 [10], 中的定理 4.5，这是不可能的。情形 (3)：如果 $B_1 = B_3 = 0$ 和 $B_2 = 1$，那么 $j^*(\alpha) = 1\otimes c_4 + t^2\otimes c_2.$ 如果 $H^*(F)$ 有一个生成元，那么 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{2n+1}$ 或 $F \sim_2 \mathbb{C}P^{2n+1}$ 视 $H^1(F) \neq 0$或 $H^1(F) = 0.$ 这实现了 3 对于 $q = 1$ 和 $q = 2$，分别而言的可能性。现在，假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。根据 $c_4 \neq c_2^2$或 $c_4 = c_2^2.$

子情形(i)：假设 $c_4 \neq c_2^2$.
首先，假设 $H^1(F) = 0$. 若 $c_2^2 = 0$，则

$$j^*(\alpha^n) = \begin{cases} 1 \otimes c_4^n & \text{if } n \text{ is even} \\ 1 \otimes c_4^n + t^2 \otimes c_4^{n-1} c_2 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

由 j^* 的单射性可得 $c_4^n \neq 0$. 若 $c_4^{n+1} = 0$，则 $F \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^2$. 若 $c_4^{n+1} \neq 0$，则 **rk** $H^*(F) > 2n+2$，矛盾。
若 $c_2^2 \neq 0$，则可得 $j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{r} t^{2r+i} \otimes (\oplus_{2l+4j=m-i} c_4^{n-r+j} c_2^{r+l})$。可得最低次数元素为 $c_4^n c_2$、$c_4^{n-1}c_2^2$、$c_4^{n-2c_2^3} \cdots c_4^2 c_2^{n-1}$、$c_4 c_2^n$ 和 c_2^{n+1}.。注意，若 $c_4^{n-k} c_2^{k+1} \neq 0$，对于任意 $0 \leq k \leq n-1$，则 **rk** $H^*(F) > 2n+2$，矛盾。因此，c_2^{n+1} 和 $c_2^n c_4$ 中至少有一个非零。
设 $c_2 c_4 = 0$，则我们必有 $c_2^{n+1} \neq 0$. 因此，$c_2^{\frac{r}{2}} = c_4^{\frac{r}{4}}$ 是 $H^r(F)$ 的生成元。这意味着 **rk** $H^*(F) = \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = 2n+2$. 因此，$r = 8k$，其中 $n = 3k-1$，$k \in \mathbb{N}$.因此，$F \sim_2 \mathbb{C}P^{2k} \# \mathbb{H}P^{2k}$，$k \in \mathbb{N}$. 这实现了 4）对于 $s = 2$ & $q = 4$. 的可能性。
若 $c_2 c_4 \neq 0$，那么对于 $c_2^{n+1} = 0$ & $c_4^2 = 0$，显然，$F \sim_2 \mathbb{C}P^n \times \mathbb{S}^4$. 对于 $c_4^2 \neq 0$，我们必须有 $c_4^2 = c_2^3$. 根据基变换 $d' = c_2^2 + c_4$，我们得到上同调环为 $c_2^{n+1} = d'^2 = 0$. 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ & $q = 4$. 的可能性 (1)
如果 $c_2^{n+1} \neq 0$ 和 $c_2^n c_4 \neq 0$，那么 **rk** $H^*(F) > 2n+2$，这与假设矛盾。
如果 $c_2^{n+1} \neq 0.$，那么，$c_2^{\frac{r}{2}} = c_2^{\frac{r-4j}{2}} c_4^j$、$j > 1$ 构成 $H^r(F)$的生成元。这意味着 $c_2^{2j} = c_4^j$ 是 $H^{4j}(F)$的生成元。我们得到 **rk** $H^*(F) = j(\frac{r-4j}{2}) + \frac{4j}{2} + j$，这必定为 $2n+2$，因此，$r = \frac{4n+4}{j} + 4j - 2.$。我们必须有以下两种情况之一：对于某个 $k \in \mathbb{N}$，$n+1 = jk$；或者$j = 2k$、$k = 1$，2。注意，$c_2^{\frac{r-4j}{2}+1} c_4 = 0$，因为如果 $c_2^{\frac{r-4j}{2}+1} c_4 \neq 0.$，那么，′的庞加莱对偶分别为$c_2^{\frac{r-4j}{2}+1} c_4$，即 c_2^q 和 d^2，这是不可能的。因此，上同调环由 $c_2^{\frac{r}{2}} = c_2^{2j} + c_4^j = c_2^{\frac{r-4j}{2}+1} c_4 = 0.$给出。这实现了 $s = 2$和 $q = 4.$的可能性（5）。现在，假设 $H^1(F) \neq 0$，那么我们相应地考虑以下两种可能性：$c_2 = c_1^2$ 或$c_2 \neq c_1^2$.。
如果 $c_2 = c_1^2$，那么我们得到 $c_1^{2n} \neq 0.$，这将导致矛盾。
如果 $c_2 \neq c_1^2$，那么我们必有 $c_4 = c_1^4.$。容易观察到，c_2^2 要么为零，要么非零，我们得到 **rk** $H^*(F) > 2n+2$，矛盾。
子情形(ii)：假设 $c_4 = c_2^2$.
如果 $H^1(F) \neq 0$，那么对于 $c_2 = c_1^2$，我们得到 c_1^{2n+1}必定非零。因此，$H^*(F)$ 的秩 $> 2n+2$，矛盾。现在，对于 $c_2 \neq c_1^2$，我们有 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^{2r} \otimes c_2^{2n-r}$，这意味着 c_2^n必定非零。如果 $c_1^2 = 0$ 和 $c_2^{n+1} = 0$，那么 $F \sim_2 \mathbb{C}P^n \times \mathbb{S}^1$. 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 和 $q = 1.$ 的可能性（1）。如果 $c_2^{n+1} \neq 0$，那么 $H^*(F)$ 的秩超过 $2n+2$，矛盾。现在，假设 $c_1^2 \neq 0$ 那么这种情形仅当 $n = 2$且杯积 $c_1 c_2 = 0$时才可能；否则，$H^*(F)$ 的秩 $> 2n+2.$。对于 $n = 2$，我们得到 $c_1^4 = c_2^2$ 是 $H^4(F)$的生成元。因此，$F \sim_2 \mathbb{R}P^4 \# \mathbb{C}P^2$. 这实现了 $n = 2$和$q = 2$ & $s = 1.$的可能性（4）。

如果 $H^*(F)=0$，那么 $j^*(\alpha^n)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^{2r}\otimes c_2^{2n-r}$，这意味着 $c_2^n\neq 0$。对于 $c_2^{n+1}=0$，我们得到 $j^*(\alpha^n\beta)=c_2^n d\neq 0$，其中 $d=q$、 $d\neq c_2^i$、 $1\leq i\leq n.$ 的次数。如果 $d^2=0$，那么 $F\sim_2\mathbb{C}P^n\times\mathbb{S}^q$、 $1\leq q\leq m.$。如果 $d^2\neq 0$，那么要么 $d^2=c_2^q$，要么 $d^2=c_2^{\frac{q}{2}}d$。假设 $d^2=c_2^q$，那么如果 $q\equiv 0$（模 2），则通过基变换 $d'=d+c_{2^2}^{q}$，我们得到 $d'^2=0$ 和 $c_2^i d'\neq 0$ 对于 $1\leq i\leq n.$ 因此， $F\sim_2\mathbb{C}P^n\times\mathbb{S}^q$，$1\leq q\leq m.$ 这实现了 $\mathbb{F}=\mathbb{C}.$ 如果 $q\neq 0$（模 2），那么 $d^{2l+1}=c_2^{lq}d$，其中 $l=[\frac{n}{q}]$和 $d^{2n+2}=0.$ 这实现了（3）的可能性，其中 $s=q$ & q 为奇数。此外，若 $q=1$，那么显然 $F\sim_2\mathbb{R}P^{2n+1}.$

如果 $d^2=c_2^{q/2}d$，那么 q 必须为 2。因为如果 $2<q$（偶数）$\leq n$，那么 F 不满足庞加莱对偶性。通过基变换 $d'=d+c_2$，我们得到 $d'^{n+2}=d^{n+2}=d'^{n+1}+d^{n+1}=dd'=0.$ 因此，$F\sim_2\mathbb{C}P^{n+1}\#\mathbb{C}P^{n+1}.$ 这实现了 $\mathbb{F}=\mathbb{C}.$ 的可能性 (2)。

对于 $c_2^{n+1}\neq 0$，我们得到 $j^*(\alpha^n\beta)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{n}{r}t^{2r+i}\otimes(\oplus_{2l+qj=m-i}c_2^{2n-r+l}d^j)_{j=\{0,1\}}$

$$=\sum_{r=0}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{n}{r}t^{2r+i}\otimes c_2^{2n-r+\frac{m-i}{2}}+\sum_{r=0}^{n}\sum_{i=q}^{m-1}A_{l,j}\binom{n}{r}t^{2r+i}\otimes(\oplus_{2l+q=m-i}c_2^{2n-r+l}d).$$

由上式可得 c_2^{n+1}amd $c_2^n d$是最低次数元素。显然，若 $c_2^n d\neq 0$，则 rk $H^*(F)$ $>2n+2$，矛盾。现在，假设 $c_2^n d=0$ & $c_2^{n+1}\neq 0.$

若 $c_2 d=0$，则必有 $d^2\neq 0$，否则就无法得到 d.的 poincar´e 对偶。容易看出，$c_2^{\frac{r}{2}}=d^{\frac{r}{q}}$是 $H^r(F)$ 的生成元，其中 r是 $H^*(F)$ 的形式维数。由于 rk $H^*(F)=2n+2$，我们得到 $r=^{4q}(_{n+1})_{q+2}$ · 因此，$(q+2)|(4n+4)$，从而对于~~$q=$~~0、1 或 3 (mod 4)，有 $n=(q+2)k-1$；对于 $q\equiv 2$ (mod 4)，有 $n=(\frac{q+2}{2})k-1$。因此，$c_2^{\frac{r}{s}+1}=d^{\frac{r}{q}+1}=c_2^{\frac{r}{s}}+d^{\frac{r}{q}}=c_2 d=0.$这实现了 $s=2.$ 的可能性（4）

如果 $c_2 d\neq 0$ 和 $c_2^n d=0.$ 设 r 为 $F.$ 的形式维数。在这种情形下，我们证明 $H^r(F)$ 的生成元为 $c_2^{\frac{r}{2}}$，它等于 $c_2^{\frac{r-qj}{2}}d^j$，其中 $j>1.$

$\underline{r}$ $\underline{r-q}$ $\underline{i}$ $\underline{i-q}$假设 $c_2^2=0.$。现在，若 $c_{2^2}d$是 $H^r(F)$ 的生成元，则 $c_2^2\neq c_{2^2}d, q<i<r,$ $\underline{r-q}$；否则，$c_2^2=c_{2^2}d$，矛盾。因此， $H^*(F)$ 的秩为 $\geq 2n+4>2n+2$，这与我们的假设矛盾。类似地， $c_2^{\frac{r-qj}{2}}d^j$（其中 $j>1$）不能是 $\underline{r}$ $\underline{r}$ $\underline{r-q}$ $\underline{r-q}H^r(F)$ 的生成元。因此，$c_2^2\neq 0.$。此外，若 $c_2^2=c_{2^2}d$是 $H^r(F)$ 的生成元，则 c_{2^2}将有两个庞加莱对偶，即 $c_2^{\frac{q}{2}}$和 d，这再次导致矛盾。因此， $c_2^{\frac{r}{2}}=c_2^{\frac{r-qj}{2}}d^j$是 $H^r(F)$ 的生成元，其中 $j>1.$。

由于 $c_2^n d=0$，我们必须有 $q\leq n$和 $c_2^{\frac{r}{2}}=c_2^{\frac{r-qj}{2}}d^j$， $j>1$ 生成 $H^r(F)$，其中 r 为偶数。因此，对于 $1\leq i\leq j-1$ 和 $c_2^{\frac{qj}{2}}=d^j$，有 $c_2^{\frac{qi}{2}}\neq d^i$，其中 $qj<r.$。我们得到 rk$H^*(F)=j(\frac{r-qj}{2})+\frac{qj}{2}+j$，其必须为 $2n+2$，所以 $r=\frac{4n+4}{j}+qj-(q+2)$。我们必须有以下两种情况之一：对于某个 $k\in\mathbb{N}$， $n+1=jk$；或者 $j=2k$，$k=1$，2。因此，上同调环 $H^*(F)$ 由 c_2 和 d， $c_2^{\frac{r}{2}+1}=c_2^{\frac{qj}{2}}+d^j=c_2^{\frac{r-qj}{2}+1}d=0.$ ~~生成~~。由于 $qj<r$，我们得到$(q+1)_4$ $^j-1<n.$ 这实现了 $s=2.$ 的可能性（5）

情形（4）：如果 $B_2=B_3=0$ 和 $B_1=1$，那么 $j^*(\alpha)=1\otimes c_4+t^3\otimes c_1.$

在这种情形下，如果 $H^*(F)$ 有一个生成元，那么 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{2n+1}$. 假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。现在，我们根据 $c_4 = c_1^4$ 还是 $c_4 \neq c_1^4$，考虑两个子情形。

子情形(i)：假设 $c_4 = c_1^4$.

我们有 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^{3r} \otimes c_1^{4n-3r}$. 这意味着 c_1^n 必须非零。令$d \neq c^i, 1 \leq i \leq n$ 为 $H^*(F)$ 的生成元，其次数为 $q.$。我们得到

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{r} t^{3r+i} \otimes c_1^{4n-3r+m-i} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=q}^{m-1} A_{l,j} \binom{n}{r} t^{3r+i} \otimes c_1^{4n-3r+(m-i-q)} d.$$

展开上述表达式后，我们得到 c_1^{n+1}和 $c_1^n d$ 是次数可能的最小元素。若 $c_1^{n+1} = 0$, 则 $c_1^n d$ 必定非零。因此，对于 $d^2 = 0$，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^q, 1 \leq q \leq m.$ 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$ 的可能性（1）。而对于 $d^2 \neq 0$，有两种可能： $d^2 = c_1^{2q}$ 或 $d^2 = c_1^q d$。

如果 $d^2 = c_1^{2q}$，那么通过基变换 $d' = d + c_1^q$，我们得到 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$ 的可能性（1）。

如果 $d^2 = c_1^q d$，那么对于 $1 < q \leq n$, F，不满足庞加莱对偶。因此，我们必须有 $q = 1.$ 再次，根据基变换 $d' = c + d$，我们得到 $d'^{n+2} = d^{n+2} = d'^{n+1} + d'^{n+1} = dd' = 0.$ 因此， $F \sim_2 \mathbb{R}P^{n+1}\#\mathbb{R}P^{n+1}.$ 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的可能性 (2)。

现在，假设 $c_1^{n+1} \neq 0$，那么 $c_1^n d$要么为零，要么不为零。显然， $c_1^n d \neq 0$是不可能的。

假设 $c_1^n d = 0$。

如果 $c_1 d = 0$，那么我们得到 $c_1^{r+1} = d^{\frac{r}{q}+1} = c_1 d = c_1^r + d^{\frac{r}{q}} = 0$，其中 ~~$r = q_{(2n+2)}$~~ $_{q+1}$ 。这实现了 4) 中关于 $s = 1.$

若 $c_1 d \neq 0$，则得到 $c_1^r = c_1^{r-qj} d^j, j > 1$，它生成 $H^r(F)$。因此，对于$1 \leq i \leq j-1$，$c_1^{qi} \neq d^i$，且 $c_1^{qj} = d^j$，其中 $qj < r.$。我们得到秩 $H^*(F) = j(r - qj) + qj + j,$ 这必须是 $2n+2$，所以，$r = \frac{2n+2}{j} + qj - (q+1)$。我们必有 $n+1 = jk$（对某个 $k \in \mathbb{N}$），或 $j = 2.$。因此，上同调环 $H^*(F)$ 由 c_1, d 生成，且 $c_1^{r+1} = c_1^{qj} + d^j = c_1^{r-qj+1} d = 0$，其中 ~~$(q+1)j$~~ $_2 - 1 < n.$。这实现了 $s = 1.$ 的可能性（5）。

子情形(ii)：假设 $c_4 \neq c_1^4$.

首先，我们考虑 $c_1^4 = 0.$ 的情形

如果 $c_1^2 = 0,$ 那么

$$j^*(\alpha^n) = \begin{cases} 1 \otimes c_4^n & \text{if } n \text{ is even} \\ 1 \otimes c_4^n + t^3 \otimes c_4^{n-1} c_1 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

显然，c_4^n 必须非零。因此， $F \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^1.$ 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ 和 $q = 1.$ 的可能性 (1)。

若 $c_1^2 \neq 0$ 且 $c_1^3 = 0$，则 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{2} \binom{n}{r} (1 \otimes c_4)^{n-r} (t^3 \otimes c_1)^r$ 且

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{2} \binom{n}{r} t^{i+3r} \otimes (\oplus_{4l+j=m-i} c_4^{n-r+l} c_1^{r+j}).$$

因此，我们得到 $c_4^n c_1$ 和 $c_4^{n-1}c_1^2$ 是最低次数元素。由于 F 是庞加莱对偶空间，且 $\mathbf{rk}\ H^*(F) = 2n+2$，所以 $c_4^{n-1}c_1^2$ 是形式维数的生成元。因此，这仅当 $n=2$ 且 $c_4^2=0.$ 时才可能。由此， $F \sim_2 \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{S}^4$.
若 $c_1^3 \neq 0$ 且 $c_1^4 = 0$，则 $j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{3}\binom{n}{r}t^{i+3r}\otimes(\oplus_{4l+j=m-i}c_4^{n-r+l}c_1^{r+j})$。于是，$c_4^{n-1}c_1^2$ 和 $c_4^{n-2}c_1^3$ 是可能的最低次数元素。显然，只有当 $n=3$ 且 $c_4^2=0.$ 时， $c_4^{n-2}c_1^3$ 才可能是形式维数的生成元。因此我们得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^3\times\mathbb{S}^4$.现在，假设 $c_1^4 \neq 0.$

我们有 $j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^{i+3r}\otimes(\oplus_{4l+j=m-i}c_4^{n-r+l}c_1^{r+j})$。容易观察到， c_1^{n+1} 和 $c_1^n c_4$ 是可能的最低次数元素。
若 $c_1^{n+1}=0$，则 $c_1^n c_4$ 必须非零。显然，当 $c_4^2=0$、 $F\sim_2 \mathbb{R}P^n\times\mathbb{S}^4$，且当 $c_4^2\neq 0$ 时，必须有 $c_4^2 = c_1^8.$。经过基变换 $d' = c_1^4 + c_4$，得到 $F\sim_2 \mathbb{R}P^n\times\mathbb{S}^4.$。这实现了 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和 $q=4.$ 的可能性（1）。
现在假设 $c_1^{n+1}\neq 0$，则 $c_1^n c_4$ 可以为零，也可以非零。
显然， $c_1^n c_4 \neq 0$ 不可能成立。若 $c_1^n c_4 = 0$，则当杯积为零时，得到 $c_1^{r+1} = c_4^{\frac{r}{4}+1} = c_1 c_4 = c_1^r + c_4^{\frac{r}{4}} = 0$，其中 $r = {}^4(_{2n+2})$ 5。这实现了 $s=1$ 和 $q=5.$ 的可能性（4）。当杯积非零时，得到 $c_1^r = c_1^{r-4j}c_4^j$、$j>1$，它们生成 $H^r(F)$。因此，对于 $1\leq i\leq j-1$ 和 $c_1^{4j}=c_4^j$，有 $c_1^{4i}\neq c_4^i$，其中 $4j<r.$。我们得到 $\mathbf{rk}\ H^*(F) = j(r-4j)+4j+j$，它必须是 $2n+2$，因此 $r=\frac{2n+2}{j}+4j-5$，其中要么 $n+1=jk$，对于某个 $k\in\mathbb{N}$，要么 $j=2.$。因此，上同调环 $H^*(F)$ 由 c_1 和 c_4 生成，且满足 $c_1^{r+1} = c_1^{4j}+c_4^j = c_1^{r-4j+1}c_4 = 0$，其中 $\frac{5j}{2}-1<n.$。这实现了 $s=1$ 和 $q=4.$ 的可能性（5）。

情形(5)：如果 $B_1=0$ 和 $B_2=B_3=1$，那么 $j^*(\alpha) = 1\otimes c_4 + t\otimes c_3 + t^2\otimes c_2.$
在此情形下，如果 $H^*(F)$ 有一个生成元，那么 $F\sim_2\mathbb{R}P^{2n+1}.$ 假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。现在，我们考虑两个子情形：(i) $c_4=c_2^2$ (ii) $c_4\neq c_2^2.$
子情形(i)： $c_4=c_2^2$
如果 $H^1(F)=0$，那么 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}t^{2k+r}\otimes c_2^{2n-2r-k}c_3^r$ 且

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}t^{2k+r+i}\otimes(\oplus_{2l+3j=m-i}c_2^{2n-2r-k+l}c_3^{r+j}).$$

如果 $c_2c_3=0$，那么我们得到 c_2^{n+1}和 c_3^{n+1}是最低次数元素。我们必须有 $c_2^{\frac{r}{2}} = c_3^{\frac{r}{3}}$是 $H^r(F)$ 的生成元。因此， $\mathbf{rk}\ H^*(F) = \frac{r}{2}+\frac{r}{3} = 2n+2 \implies r=\frac{12n+12}{5} > 2n+2$，但 $r<3n+3.$。所以， $c_3^{n+1}=0.$。因此，我们有 $c_2^{\frac{r}{2}+1} = c_3^{\frac{r}{3}+1} = c_2c_3 = c_2^{\frac{r}{2}} + c_3^{\frac{r}{3}} = 0$，其中$r\equiv 12k, n\equiv 5k-1;\ k\in\mathbb{N}.$。这实现了 $s=2$ 和 $q=3.$ 的可能性（4）。
若 $c_2c_3\neq 0$，则有 c_2^{n+1}和 $c_2^n c_3$ 是可能的最低次数元素。若$c_2^{n+1}=0$则必有 $c_2^n c_3\neq 0.$显然，对于 $c_3^2=0$，可得 $F\sim_2\mathbb{C}P^n\times\mathbb{S}^3$而对于 $c_3^2\neq 0$，必有 $c_3^2=c_2^3.$ 因此， $c_2^{n+1} = c_3^2+c_2^3 = c_3^{2l+2}=0$其中 $l=[\frac{n}{3}].$这实现了 2 对于 $q=3.$

显然，$c_2^{n+1}\neq 0$ 和 $c_2^n c_3\neq 0$ 是不可能的。

如果 $c_2^{n+1} \neq 0$和 $c_2^n c_3 = 0.$那么，我们得到 $c_2^{\frac{r}{2}} = c_2^{\frac{r-3j}{2}} c_3^j, j > 1$，它们生成 $H^r(F)$，并且r和 j必须为偶数。由于，$\mathbf{rk}\ H^*(F) = 2n+2$，所以我们必须有 $j = 2$和 $r = 2n+4$，因此，上同调环 $H^*(F)$由 c_2 和 c_3 生成，且满足 $c_2^{n+3} = c_2^3 + c_3^2 = c_2^n c_3 = 0.$ 这实现了 $s = 2$ & $q = 3$.的可能性（5）

如果 $H^1(F) \neq 0$，那么 $\mathbf{rk}\ H^*(F) > 2n+2$，对于 $c_2 = c_1^2$或 $c_2 \neq c_1^2$.均如此

子情形(ii)： $c_4 \neq c_2^2$

在此子情形中，我们必须有 $H^1(F) \neq 0.$。容易看出，对于两种情形，即 $c_2^2 = 0$ 或 $c_2^2 \neq 0.$，$\mathbf{rk}\ H^*(F) > 2n+2$

Ca情形(6)：如果 $B_2 = 0$ 和 $B_1 = B_3 = 1$，那么 $j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4 + t \otimes c_3 + t^3 \otimes c_1.$

在此情形中，如果 $H^*(F)$ 有一个生成元，那么 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{2n+1}.$。假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。现在我们考虑两种子情形：(i) $c_3 = c_1^3$ (ii) $c_3 \neq c_1^3.$

子情形(i)： $c_3 = c_1^3.$

首先，假设 $c_4 = c_1^4.$ 那么，我们有 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} t^{3k+r} \otimes c_1^{4n-3r-k}$并且

$$j^*(\alpha^n \beta) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{r}\binom{n-r}{r} t^{3r+r+i} \otimes c_1^{4n-3r+m-i} + \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{i=q}^{m-1} A_{l,j} \binom{n}{r} t^{3r+r+i} \otimes c_1^{4n-3r-k+(m-i-q)} d.$$

显然， c_1^{n+1}和 $c_1^n d$ 是可能的最低次数元素。

如果 $c_1^{n+1} = 0$，那么 $c_1^n d$必定非零。因此，对于 $d^2 = 0$，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^q$，$1 \leq q \leq m.$ 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$ 的可能性 (1)。而对于 $d^2 \neq 0$，有两种可能：要么 $d^2 = c_1^{2q}$，要么 $d^2 = c_1^q d.$

如果 $d^2 = c_1^{2q}$，那么通过基变换 $d' = d + c_1^q$，我们实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$的可能性 (1)。如果 $d^2 = c_1^q d$，那么对于 $1 < q \leq n$， F 不满足庞加莱对偶性。因此，我们必须有$q = 1.$同样，通过基变换 $d' = c + d$，我们得到 $d'^{n+2} = d^{n+2} = d'^{n+1} + d'^{n+1} = dd' = 0.$ 因此，$F \sim_2 \mathbb{R}P^{n+1}\#\mathbb{R}P^{n+1}.$ 这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$的可能性 (2)

现在，若 $c_1^{n+1} \neq 0$，则要么是 $c_1^n d = 0$，要么是 $c_1^n d \neq 0.$.

显然， $c_1^n d \neq 0$是不可能的。设 $c_1^n d = 0.$若 $c_1 d = 0$，则得到 $c_1^{r+1} = d^{\frac{r}{q}+1} = c_1 d = c_1^r + d^{\frac{r}{q}} = 0$，其中 $r = {}^{q}(2n+2)_{q+1}$ ·因此，$(q+1) | (2n+2)$，从而对于 q 为偶数时， $n = (q+1)k - 1$；对于 q 为奇数时， $n = (\frac{q+1}{2})k - 1$， $k \in \mathbb{N}$。这实现了 $s = 1.$ 的可能性（4）。进一步地，若 $q = 1$，则 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{n+1}\#\mathbb{R}P^{n+1}$；若 $q = 2$，则$F \sim_2 \mathbb{R}P^{4k}\#\mathbb{R}P^{2k}$；若 $q = 4$，则 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{8k}\#\mathbb{H}P^{2k}.$。若 $c_1 d \neq 0$，则得到 $c_1^r = c_1^{r-qj} d^j$、 $j > 1$，它们生成 $H^r(F)$。因此，对于 $1 \leq i \leq j-1$， $c_1^{qi} \neq d^i$，并且 $c_1^{qj} = d^j$，其中 $qj < r.$。我们得到 $\mathbf{rk}\ H^*(F) = j(r - qj) + qj + j$，其必须为 $2n+2$，所以$r = \frac{2n+2}{j} + qj - (q+1)$。因此，上同调环 $H^*(F)$由 c_1 和 d生成，并满足 $c_1^{r+1} = c_1^{qj} + d^j = c_1^{r-qj+1} d = 0$，且$(q+1)_2{}^{j} \not< n.$。这实现了 $s = 1.$的可能性（5）。

接下来，设 $c_4 \neq c_1^4$.
如果 $c_1^4 = 0$，那么此情形仅在 $n = 3$ 时对 $c_1^n c_4 \neq 0$ & $c_4^2 = 0$. 成立。因此，$F \sim_2 \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{S}^4$. 这实现了 $n = 3$ & $q = 4$. 的可能性（1）
如果 $c_1^4 \neq 0$，那么我们有 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} t^{n-r+2k} \otimes c_1^{3n-3r-2k} c_4^r$ 并且

$$j^*(\alpha^n \beta) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} t^{n-r+2k+i} \otimes (\oplus_{l+4j=m-i} c_1^{3n-3r-2k+l} c_4^{r+j}).$$

注意，由上述表达式可得，c_1^{n+1}和 $c_1^n c_4$ 是可能的最低次数$_r$元素。如果 $c_1 c_4 = 0$，则得到 $c_1^r = c_4^{\overline{4}}$，其中 r 是形式维数。因此，$r = 8k$其中 $n \equiv 5k - 1$，$k \in \mathbb{N}$. 于是 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{8k}\#\mathbb{H}P^{2k}$. 这实现了 $s = 1$ & $q = 4$. 的可能性（4）。现在，假设 $c_1 c_4 \neq 0$. 如果 $c_1^{n+1} = 0$，则必有 $c_1^n c_4 \neq 0$.显然，对于 $c_4^2 = 0$，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^4$；而对于 $c_4^2 \neq 0$，必有 $c_4^2 = c_1^8$. 通过基变换 $d' = c_1^4 + c_4$，我们为 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 和 $q = 4$.实现了可能性（1）

显然，$c_1^{n+1} \neq 0$ 和 $c_1^n c_4 \neq 0$ 是不可能的。
若 $c_1^{n+1} \neq 0$和 $c_1^n c_4 = 0.$，则得到 $c_1^r = c_1^{r-4j} c_4^j, j > 1$，它们生成 $H^r(F)$。因此，对于 $1 \leq i \leq j-1$ 和 $c_1^{4j} = c_4^j$，有 $c_1^{4i} \neq c_4^i$，其中 $4j < r.$。我们得到 rk $H^*(F) = j(r-4j) + 5j$，这必定是 $2n+2.$。因此 $r = \frac{2n+2}{j} + 4j - 5$，于是上同调环 $H^*(F)$ 由 c_1和 c_4生成，其中 $c_1^{r+1} = c_4^{4j} + c_4^j = c_1^{r-4j+1} c_4 = 0.$。这实现了 $s = 1$ & $q = 4$.的可能性（5）。

子情形（ii）：$c_3 \neq c_1^3$.
由于 $H^*(F)$ 至多有两个生成元，因此我们必须有 $c_4 = c_1^4$. 于是 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} t^{3k+r} \otimes c_1^{4n-4r-3k} c_3^r$ 且

$$j^*(\alpha^n \beta) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} t^{3k+r+i} \otimes (\oplus_{l+3j=m-i} c_1^{4n-4r-3k+l} c_3^{r+j}).$$

因此，我们得到 c_1^{n+1}和 $c_1^n c_3$ 是可能的最低次数元素。若 $c_1 c_3 = 0$，则得到$_r c_1^r = c_3^{\overline{3}}$，其中 r 是形式维数。因此，$r = 3k$ 和 $n \equiv 2k - 1, k \in \mathbb{N}$. 于是，我们有 $c_1^{3k+1} = c_3^{k+1} = c_1 c_3 = c_1^{3k} + c_3^k, k \in \mathbb{N}$. 这实现了 $s = 1$ 和 $q = 3$. 的可能性（4）。现在，假设 $c_1 c_3 \neq 0.$。若 $c_1^{n+1} = 0$，则我们必须有 $c_1^n c_3 \neq 0.$。显然，对于$c_3^2 = 0$，有 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^3$；对于 $c_3^2 \neq 0$，则必须有 $c_3^2 = c_1^6.$。通过基变换 $d' = c_1^3 + c_3$，我们为 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 和 $q = 3$. 实现了可能性（1）。
显然，$c_1^{n+1} \neq 0$ 和 $c_1^n c_3 \neq 0$ 是不可能的。
若 $c_1^{n+1} \neq 0$且 $c_1^n c_3 = 0.$，则我们得到 $c_1^r = c_1^{r-3j} c_3^j$、$j > 1$，它们生成 $H^r(F)$。因此，对于 $1 \leq i \leq j-1$，有 $c_1^{3i} \neq c_3^i$，且 $c_1^{3j} = c_3^j$，其中 $3j < r.$。显然，$r = \frac{2n+2}{j} + 3j - 4$，其中要么 $n + 1 = jk$，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，要么 $j = 2.$。因此，上同调环 $H^*(F)$ 由 c_1 和 c_3 生成，且满足 $c_1^{r+1} = c_3^{3j} + c_3^j = c_1^{r-3j+1} c_3 = 0.$。这实现了 $s = 1$ 和 $q = 3$. 的可能性（5）。

情形(7)：如果 $B_3 = 0$ 和 $B_1 = B_2 = 1$，那么 $j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4 + t^2 \otimes c_2 + t^3 \otimes c_1$.

如果 $H^*(F)$ 有一个生成元，那么 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{2n+1}$. 假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。我们考虑两种子情形：(i) $c_2 = c_1^2$ (ii) $c_2 \neq c_1^2$.

子情形 (i)： $c_2 = c_1^2$.

首先，假设 $c_4 = c_1^4$. 我们有 $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}t^{2k+3r} \otimes c_1^{4n-3r-2k}$且

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{n}{r}\binom{n-r}{r}t^{2k+3r+i} \otimes c_1^{4n-3r-2k+(m-i)} + \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\sum_{i=q}^{m-1}A_{l,j}\binom{n}{r}t^{2k+3r+i} \otimes c_1^{4n-3r-2k+(m-i-q)}d.$$

显然，c_1^{n+1}和 $c_1^n d$ 是可能的最低次数元素。

若为 $c_1^{n+1} = 0$，则 $c_1^n d$ 必须非零。因此，对于 $d^2 = 0$，我们得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^q$, $1 \leq q \leq m.$。这实现了 $\mathbb{F} = \mathbb{R}.$ 的可能性 (1)。而对于 $d^2 \neq 0$，我们分别在 $d^2 = c_1^{2q}$ 和 $d^2 = c_1^q d$ 时得到 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^q, 1 \leq q \leq m$ 和 $F \sim_2 \mathbb{R}P^{n+1}\#\mathbb{R}P^{n+1}$。

现在，假设 $c_1^{n+1} \neq 0$，那么要么是 $c_1^n d = 0$ ，要么是 $c_1^n d \neq 0.$

显然，$c_1^n d \neq 0$是不可能的。现在，假设$c_1^n d = 0.$同上面情形，对于 $c_1 d = 0$，我们实现了（4）所表示的可能性，对应于 $s = 1.$ 对于 $c_1 d \neq 0$，我们实现了（5）所表示的可能性，对应于 $s = 1.$

接下来，假设 $c_4 \neq c_1^4.$

如果 $c_1^4 = 0$，那么对于 $c_1^3 = 0$，我们得到 rk $H^*(F) \neq 2n+2$，这就产生了矛盾。对于 $c_1^3 \neq 0$，我们必须有 $n = 3$ 和 $c_4^2 = 0.$。因此，我们有 $c_2 c_1^2 \neq 0$，从而 $F \sim_2 \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{S}^4.$。

令$c_4 \neq c_1^4 \neq 0.$ 那么， $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}t^{3k+r} \otimes c_1^{4n-4r-3k}c_3^r$ 并且

$$j^*(\alpha^n\beta) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}t^{2n+r-2k+i} \otimes (\oplus_{l+4j=m-i}c_1^{2n-r-2k+l}c_4^{r+j}).$$

我们得到 c_1^{n+1}和 $c_1^n c_4$ 是可能的最低次数元素。若 $c_1 c_4 = 0$，则得到$c_1^r = c_4^{\bar{4}}$，其中 r是形式维数。因此， $r = 8k$和 $n \equiv 5k-1, k \in \mathbb{N}.$于是，$c_1^{8k+1} = c_4^{k+1} = c_1 c_4 = c_1^{4k} + c_4^k, k \in \mathbb{N}.$ 这实现了 $s = 1$ & $q = 4.$的可能性（4）。现在，设 $c_1 c_4 \neq 0.$。若 $c_1^{n+1} = 0$，则必有 $c_1^n c_4 \neq 0.$。显然，对于 $c_4^2 = 0$，有 $F \sim_2 \mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^3$；而对于 $c_4^2 \neq 0$，必有 $c_4^2 = c_1^6.$。通过基变换$d' = c_1^4 + c_4$，我们为 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 和 $q = 4.$实现了可能性（1）

显然，$c_1^{n+1} \neq 0$ 和 $c_1^n c_4 \neq 0$ 是不可能的。

若 $c_1^{n+1} \neq 0$和 $c_1^n c_4 = 0.$，则可得 $c_1^r = c_1^{r-4j}c_4^j, j > 1$ 生成 $H^r(F)$。因此，$c_1^{4i} \neq c_4^i$ 对于 $1 \leq i \leq j-1$ 和 $c_1^{4j} = c_4^j$ 成立，其中 $4j < r.$。显然，$r = \frac{2n+2}{j} + 4j - 5$，其中或者 $n+1 = jk$，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，或者 $j = 2.$。因此，上同调环 $H^*(F)$ 由 c_1 和 c_4 生成，且满足 $c_1^{r+1} = c_4^{4j} + c_4^j = c_1^{r-4j+1}c_4 = 0.$。这实现了 $s = 1$ & $q = 4.$ 的可能性（5）。

子情形(ii)： $c_2 \neq c_1^2.$

假设 $c_1^2 = 0.$ 那么，我们必须有 $c_4 = c_2^2.$ 因此， $j^*(\alpha^n) = \sum_{r=0}^{1}\binom{n}{r}(1 \otimes c_2^2 + t^2 \otimes$

$c_2)^{n-r}(t^3\otimes c_1)^r$. 显然， $c_2^n\neq 0$. 对于 $c_2^{n+1}=0$，我们得到 $F\sim_2 \mathbb{C}P^n\times\mathbb{S}^1$. 对于 $c_2^{n+1}\neq 0$，我们得到秩 $H^*(F)>2n+2$，矛盾。
现在假设$c_1^2\neq 0$. 。由于 $H^*(F)$至多有两个生成元，因此必有$c_4=c_2^2$ 或$c_4=c_1^4$. 。在这两种情形下，我们得到 c_1^{n+1}和$c_1^n c_2$ 是 $j^*(\alpha^n\beta)$像中的最低次数元素。

如果 $c_1c_2=0$，那么必有 $c_1^{n+1}\neq 0$。因此，$c_1^r=c_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}$ 是 $H^r(F)$的生成元。这意味着 rk $H^*(F)=r+\frac{r}{2}=2n+2$. 因此， $r=4k$，其中 $n=3k-1$，$k\in\mathbb{N}$.因此， $F\sim_2\mathbb{R}P^{4k}\#\mathbb{C}P^{2k}$， $k\in\mathbb{N}$. 这实现了4）所示的可能性，其中 $s=1\ \&\ q=2$.

现在，假设 $c_1c_2\neq 0$. 如果 $c_1^{n+1}=0$，那么 $c_1^nc_2$ 必定非零。经过基变换$d=c_1^2+c_2$. ，我们得到 $F\sim_2\mathbb{R}P^n\times\mathbb{S}^2$. 这实现了1）所示的可能性，其中 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和$q=2$.

若 $c_1^{n+1}\neq 0$且 $c_1^nc_2\neq 0$，则 rk $H^*(F)>2n+2$，矛盾。
若 $c_1^{n+1}\neq 0$. 那么， $c_1^r=c_1^{r-2j}c_2^j$， $j>1$ 是 $H^r(F)$。这意味着$c_1^{2j}=c_2^j$是 $H^{2j}(F)$。因此，上同调环为 $c_1^{r+1}=c_1^{2j}+c_2^j=c_1^{r-2j+1}c_2=0$. 这实现了 5）所示的可能性，其中 $s=1\ \&\ q=2$.

情形(8)：若 $B_1=B_2=B_3=1$，则 $j^*(\alpha)=1\otimes c_4+t\otimes c_3+t^2\otimes c_2+t^3\otimes c_1$.若 $H^*(F)$ 有一个生成元，则 $F\sim_2\mathbb{R}P^{2n+1}$. 现在，假设 $H^*(F)$ 有两个生成元。我们考虑两个子情形：(i) $c_2=c_1^2$ (ii) $c_2\neq c_1^2$.
子情形 (i)：假设 $c_2=c_1^2$.
若 $c_3=c_1^3$和 $c_4=c_1^4$，则 $j^*(\alpha^n)=(1\otimes c_1^4+t\otimes c_1^3+t^2\otimes c_1^2+t^3\otimes c_1)^n$. 因此，我们必须有 $c_1^n\neq 0$. 此情形类似于情形（7）的子情形（i），其中 $c_2=c_1^3$ & $c_4=c_1^4$.现在，若 $c_3=c_1^3$和 $c_4\neq c_1^4$，则 $j^*(\alpha^n)=\sum_{r=0}^n\binom{n}{r}(1\otimes c_4)^{n-r}(t\otimes c_1^3+t^2\otimes c_1^2+t^3\otimes c_1)^r$.此外，若 $c_1^4=0$，则仅当 $n=3$ 且 $c_4^2=0$ 当 $c_4^{n-2}c_1^3\neq 0$. 时，此结论才成立。因此$F\sim_2\mathbb{R}P^3\times\mathbb{S}^4$.

如果 $c_1^4\neq 0$，那么， $j^*(\alpha^n\beta)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^n\sum_{k=0}^{n-r}\sum_{k'=0}^r\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}\binom{n-r-k}{k'}t^{n-r+k'+2k+i}\otimes(\oplus_{l+4j=m-i}c_1^{3n-3r-2k-k'+l}c_4^{r+j})$。显然， c_1^{n+1}和 $c_1^nc_4$ 是可能的最低次数元素。当 $c_4\neq c_1^4$ 时，该情形与情形（6）的子情形（i）类似。

如果 $c_3\neq c_1^3$，那么 $c_4=c_1^4$. 该情形与情形（6）的子情形（ii）类似。
子情形（ii）：假设 $c_2\neq c_1^2$. 我们必有 $c_4=c_2^2$ 或 $c_4\neq c_2^2$. 这与情形（7）的子情形（ii）类似。
最后，如果 $c_4=0$ 或 $\{c_4\neq 0\ \&\ B_4=0\}$，那么根据命题 2.4，必有 $n=1$.。因此，我们得到 rk $H^*(F)=4$，且 $j^*(\alpha)=B_1t^3\otimes c_1+B_2t^2\otimes c_2+B_3t\otimes c_3$。显然，若 $H^*(F)$ 有一个生成元，则 $F\sim_2\mathbb{F}P^3,\mathbb{F}=\mathbb{R}$或 $\mathbb{C}$.。假设 $H^*(F)$ 有两个生成元，则显然，$F\sim_2\mathbb{S}^r\times\mathbb{S}^q,1\leq r\leq 3\ \&\ 1\leq q\leq m$，或 $F\sim_2\mathbb{F}P^2\#\mathbb{F}P^2,\mathbb{F}=\mathbb{R}$或 $\mathbb{C}$.。这实现了 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 以及 $n=1$. □的可能性 (1)、(2) 和 (3)。

注 3.2。 对于 $n=1$，我们得到 $X\sim_2\mathbb{S}^4\times\mathbb{S}^m$. 根据定理 3.1，在 X 上，对合的连通不动点集的可能情况为 $\mathbb{S}^r\times\mathbb{S}^q$， $1\leq r\leq 4$ 和 $1\leq q\leq m$。

或 $\mathbb{F}P^3$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 或 $\mathbb{F}P^2\#\mathbb{F}P^2$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$. 这些可能性也已在 [定理 3。11, [13]]。

注 3.3. 容易看出，在相关的勒雷–塞尔谱序列非退化且谱序列的微分满足 $d_r(1\otimes b)=0\ \forall\ r\leq m$ 的假设下，当 X 在 X_G 中不是 TNHZ 时， $X\sim_2\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$上对合的不动点集具有 q-球面的模 2 上同调，其中 $-1\leq q\leq 4n+m$（见 [6]中的定理 3.5）。

现在，我们给出一些例子来实现上述定理。

例 3.4. 令 $G=\mathbb{Z}_2$ 按如下方式作用于 $\mathbb{S}^m$：

$$(x_0,x_1,\cdots x_m)\mapsto(x_0,x_1,\cdots,x_q,-x_{q+1},\cdots-x_m).$$

若考虑 G 在 $\mathbb{H}P^n$上的平凡作用，再取 G 在$\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$上的对角作用，则得到的不动点集为 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^q$，其中 $1\leq q\leq m.$
如果我们对 $\mathbb{H}P^n$ 上的 G 施加共轭作用，即 $(z_0,z_1,\cdots z_n)\mapsto(\bar{z}_0,\bar{z}_1,\cdots\bar{z}_n)$，然后对 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$ 施加 G 的对角作用，我们得到的不动点集为 $\mathbb{R}P^n\times\mathbb{S}^q,1\leq q\leq m.$。如果 G 作用于 $\mathbb{H}P^n$，定义为 $(z_0,z_1,\cdots z_n)\mapsto(iz_0,iz_1,\cdots iz_n)$，然后对 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$ 施加 G 的对角作用，我们得到的不动点集为 $\mathbb{C}P^n\times\mathbb{S}^q,1\leq q\leq m.$。这些例子实现了定理 3.1 中的可能性 (1)。

现在，考虑一个由 G 在 $\mathbb{S}^4$ 上的作用，定义为（x_0， x_1， x_2， x_3， x_4） $\mapsto$ （x_0， x_1， x_2， x_3， $-x_4$）。那么， G 在 $\mathbb{S}^4\times\mathbb{S}^m$ 上的对角作用的不动点集为 $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^q$, $1\leq q\leq m.$这也实现了定理 3.1 中对 $n=1.$ 的可能性（1）。

例 3.5. Bredon（[2]）构造了一个例子，其中 $\mathbb{P}^2(q)\#\mathbb{P}^2(q)$（射影空间的连通和）是 $\mathbb{S}^4\times\mathbb{S}^{q+k}$ 上某个对合的不动点集，其中 $k\geq 4$.这个例子实现了定理 3.1 中关于 $n=1.$ 的可能情形（2）。在本文中，Bredon 还给出了 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m,n\leq m$ 和 $X\sim_2\mathbb{S}^4\times\mathbb{S}^m,4<m$ 上对合的例子，其不动点集分别为 $F=\mathbb{R}P^3$ 和 $F\sim_2\mathbb{S}^7$。这些例子分别实现了定理 3.1 中关于 $n=1$ 的可能情形（3），以及 $X\sim_2\mathbb{H}P^1\times\mathbb{S}^m$ 且在 X_G 中不是 TNHZ 的情形。

接下来，我们讨论了空间 X 上自由对合的轨道空间的上同调环；该空间的模 2 上同调是四元数射影空间与球面的乘积 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m.$。为了说明 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$ 上自由对合的存在性，考虑在 $\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$ 上的对角作用，其中在 $\mathbb{H}P^n$ 上取任意对合，在 $\mathbb{S}^m.$ 上取对跖作用。

首先，在相关的勒雷–塞尔谱序列对 Borel 纤维化的一些假设下，我们考虑以下情形：$\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上作用平凡。注意， $X\hookrightarrow X_G\to B_G.$ 注意，[6] 如果 $G=\mathbb{Z}_2$ 在 $X\sim_2\mathbb{H}P^n\times\mathbb{S}^m$上自由作用，那么 $\pi_1(B_G)$ 作用

在 $H^*(X)$ 上作用平凡，只要满足以下任一条件：(1) $4n \leq m$ (2) $4 = m < 4n, n$为偶数，(3) $4 < m < 2m \leq 4n, m \equiv 0$(模 4)，以及 (4) $m \neq 0$(模 4)。

定理 3.6. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 在有限 CW 复形 $X \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$上自由作用，其中$n, m \geq 1$. 假设 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上平凡作用，且微分 $d_r(1 \otimes b) = 0 \ \forall \ r \leq m$. 那么，轨道空间 $H^*(X/G)$ 的上同调环同构于以下分次交换代数之一：

(1) $\mathbb{Z}_2[x, y, z]/I$，其中 I 是由以下元素生成的齐次理想：$< x^5, y^{\frac{n+1}{2}} + a_0 y^{4(n+1)}{}^{-m} z + a_1 x^4 y^{\frac{4n-m}{8}} z + \cancel{a_2 z, z^2} + a_3 x^{2i} y^{\frac{m-i}{4}} + a_4 x^{i'} y^{\frac{m-i'}{8}} z >$，其中 deg $x = 1$, deg $y = 8$ & deg $z = m, a_0 = 0$ 若 $m \neq 0$(mod 8) 或 $m > 4n+4$；$a_1 = 0$若 $m \equiv 0$(mod 8) 或 $m > 4n$； $a_2 = 0$若 $m \neq 4(n+1)$； $a_3 = 0$若 $m \not\equiv i$(mod 4) 或 $\{i = 0$ 且 $2m > 4(n-1)\}, 0 \leq 2i \leq 4$ 且 $a_4 = 0$ 若 $m \not\equiv i'$(mod 8) 或 $m > 4n, 0 \leq i' \leq 4, a_k \in \mathbb{Z}_2, 0 \leq k \leq 4, n$ 为奇数，(2) $\mathbb{Z}_2[x, y, z]/ < x^5, y^{\frac{n}{2}+1}, z^2 + a_0 y + a_1 x^4 z >$，其中 deg $x = 1$， deg $y = 8$ & deg$z = 4, a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2, n$ 为偶数，及 (3) $\mathbb{Z}_2[x, y]/ < x^{m+1}, y^{n+1} + \sum_{0<i\equiv 0 \ mod \ 4}^{min\{4(n+1),m\}} (\ ) a_i x^i y^{\frac{4(n+1)-i}{4}} >$，其中 deg $x = 1$， deg$y = 4$ 且 $a_i \in \mathbb{Z}_2$.

最后，我们考虑 $\pi_1(B_G)$ 非平凡地作用于 $H^*($ $X)$.

定理 3.7. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 在有限 CW 复形 $X \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$ 上自由作用，其中 $n, m \geq 1$. 。假设 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上非平凡作用。那么， $H^*(X/G)$ 同构于以下分次交换代数之一：

(1) $\mathbb{Z}_2[x, y, z]/< x^9, y^2 + a_0 z + a_1 x^8, z^{\frac{n+1}{2}} + a_2 x^8 z^{\frac{n-1}{2}}, xy >$，其中 deg $x = 1$、deg $y = 4$、& deg $z = 8, a_i \in \mathbb{Z}_2, 0 \leq i \leq 2, m = 4 < 4n$, n 均为奇数；以及 (2) $\mathbb{Z}_2[x, y, z, w_k]/< x^5, y^{\frac{m}{8}} + a_0 w_1, z^2, xw_k, w_k w_{k+i} + a_{k,i} x^{4d} y^{\frac{2m-4n+4q}{8}} z >$，其中 deg $x = 1$、deg $y = 8$、deg $z = 4n+4$ & deg $w_k = m + 4(k-1)$ $1 \leq k \leq \frac{4n-m+4}{4}$， 且 $0 \leq i \leq \frac{4n-m}{4}$, $-1 \leq q(odd) \leq \frac{4n-m-8}{4}, d = 0, 1,$ & n 为奇数，$4 < m < 4n < 2m, m \equiv 0$ （模 8），并且若 $^4(_{n+2})_4{}^{-m} \cancel{< 2k+i,}$ 则 $a_{k,i} = 0$； a_0 和$a_{k,i}{}'s$ 属于 $\mathbb{Z}_2$. 。若 $d = 0$， 则 i 为偶数且 $q = 2k + i - 3$. 。若 $d = 1$， 则 i 为奇数且 $q = 2k + i - 4$.

上述定理的证明分别类似于定理 4.2 和定理 4.5中的证明 [6]。

注 3.8. 如果定理 3.7 的可能性 (1) 中 $a_i = 0, 0 \leq i \leq 2$ ， 则 $X/G \sim_2 (\mathbb{R}P^8 \vee \mathbb{S}^4) \times \mathbb{P}^{\frac{n-1}{2}}$ (8)。如果定理 3.6 的可能性 (1) 中 $a_i = 0 \ \forall \ 0 \leq i \leq 4$， 则当 n 为奇数时 $X/G \sim_2 \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{P}^{\frac{j}{2}}$(8) $\times \mathbb{S}^m, j = n-1$， 当 n 为偶数时 $j = n$。如果可能性 (3) 中 $a_i = 0 \ \forall \ 0 <i \equiv 0(mod\ 4) \leq min\{4(n+1)\ m\}$， 则 $X/G \sim_2 \mathbb{R}P^m \times \mathbb{H}P^n$.

例3.9。 设 T: $\mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$ 是由 $([z], x) \mapsto ([z], -x)$.那么，这给出了 $\mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m$. 上的一个自由对合。该作用的轨道空间为 $(\mathbb{H}P^n \times \mathbb{S}^m)$ $/\mathbb{Z}_2 \sim_2 \mathbb{H}P^n \times \mathbb{R}P^m$. 这为定理 3.6 中的可能性 (3) 提供了一个实例，其中$a_i = 0 \ \forall \ i$.

References

[1] G. E. Bredon，《紧变换群导论》。纽约，美国：学术出版社，(1972)。[2] G. E. Bredon，不动点集的上同调环结构。《数学年刊》80，524–537 (1964)。[3] G. E. Bredon，变换群的上同调方面。《变换群会议论文集》（新奥尔良，1967），施普林格出版社，纽约，245–280 (1968)。[4] C. N. Chang 和 J. C. Su，两个射影空间乘积上的群作用，《美国数学杂志》101(5)，1063–1081 (1979)。[5] P. Dey 和 M. Singh，某些紧群在 Milnor流形上的自由作用。《格拉斯哥数学杂志》61，727–742 (2019)。[6]Dimpi 和 H. K. Singh，射影空间与球面乘积上的对合，arXiv:2303.16478v1，(2023)。[7] A. M. M. Morita、D. De Mattos 和 P. L. Q. Pergher，某些 Dold 流形上自由 $\mathbb{Z}_2$作用的轨道空间的上同调环。《澳大利亚数学会公报》97，340–348 (2018)。[8] C. F. Peltier 和 R. P. Beem，Dold 流形上的对合，《美国数学会会刊》85，457–460 (1982)。[9] M. Singh，两个射影空间乘积上自由对合的轨道空间，《数学结果》57(1)，53–67 (2010)。[10] N. E. Steenrod，上同调运算。数学年刊研究丛书，第50号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州 (1962)。[11] P. A. Smith，周期变换的不动点定理，《美国数学杂志》63，1–8 (1941)。[12] P. A. Smith，有限变换群的新结果与旧问题，《美国数学会通报》66，401–415 (1960)。[13] J. C. Su，两个球面乘积上的周期变换，《美国数学会汇刊》112，369–380 (1964)。[14] P. Volker，关于 Bredon猜想，《数学手稿》12，11–16 (1974)。

Dimpi Department of Mathematics
University of Delhi
Delhi – 110007, India.电子邮箱地址：
dimpipaul2@gmail.com

Hemant Kumar Singh
Department of Mathematics
University of DelhiDelhi – 110007, India.电
子邮箱地址：hemantksingh@maths.du.ac.in