arXiv:2305.02653v1 [math.PR] 4 May 2023

多个事件的强 FKG不等式

Nikita Gladkov*

摘要

我们将 FKG不等式推广到多个事件两两交集相等的情形。随后，我们应用这一不等式，解决了 Kahn 关于正关联（PA）测度的问题。

1 引言

该*Fortuin–Kasteleyn–Ginibre*（FKG）不等式有着众多应用，涵盖从渗流到图论、从偏序集理论到概率论等领域[AS16，第 6], [G83]。它将 Harris–Kleitman不等式推广到了超立方体上一大类测度。

记 H_n 为 n维离散超立方体。我们将其视为一个分配格，其中 $\vee$ 是逐坐标取最大值，$\wedge$ 是逐坐标取最小值。设μ 是定义在 H_n上的概率测度。假设 μ 满足以下***FKG*** 性质：

$$\mu(a \vee b)\mu(a \wedge b) \geq \mu(a)\mu(b) \text{ for all } a, b \in H_n.$$

FKG不等式保证了向上封闭事件之间存在非负相关：

$$P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1)P(E_2) \tag{1.1}$$

Harris–Kleitman不等式是定义在 H_n上的乘积测度所满足的 FKG不等式的特例。若测度中所有向上封闭事件之间均具有非负相关，则称其具有正关联（PA）。换言之，FKG不等式表明，所有具有 FKG 性质的测度都具有正关联。FKG不等式可用于证明由随机簇模型导出的测度具有正关联 [G06]。

我们证明了一个适用于两两交集相等的事件的强版 Harris–Kleitman不等式（定理 2.1）。接着，我们采用 [K22] 中的方法，将其推广到具有 FKG 性质的测度（定理3.2）。Harris–Kleitman不等式和 FKG不等式，以及更一般的 AD 不等式（四函数定理），均已有推广到多个集合的结果 [AD78]， [AK96、RS92]。Richards [R04] 声称证明了 FKG不等式的另一种多集合推广，但其证明存在实质性漏洞[S08]，，因此只有在附加限制性条件下才能证明这一推广 [LS22]。据我们所知，我们的推广与其他所有推广均不相同。

我们利用该不等式证明 Kahn 的一个猜想（定理 3.5）。粗略地说，我们证明了，FKG不等式可以推广到不仅限于由底层独立变量单调决定的随机变量。

*De数学系，UCLA，美国加利福尼亚州洛杉矶，90095。电子邮箱：gladkovna@ucla.edu

2 强 Harris–Kleitman不等式

如果存在定义在 $\{0,1\}$上的概率测度μ_1、 μ_2、.....、 μ_n，使得 μ与直积 $\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n$一致，我们就称定义在 H_n 上的测度 μ 为乘积测度。回忆一下，记号 $e_2(x_1, \ldots, x_k)$：$= \sum_{1 \le i < j \le k} x_i x_j$表示第二个对称多项式。若 H_n 的一个子集包含其中每个向量 $v \in H_n$ 及所有在自然偏序下大于 v 的向量，我们就称该子集向上封闭。下面是我们的主要结果：

定理2.1。 设 μ是 H_n上的概率乘积测度，并且

$$H_n = A \sqcup C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_k \sqcup B \text{ for } k \ge 2$$

使得所有形如 $A \cup C_i$ 的集合都是向上封闭的。那么：

$$\mu(A)\mu(B) \ge e_2\big(\mu(C_1), \ldots, \mu(C_k)\big). \tag{2.1}$$

注2.2。 对于 $k = 2$，我们得到 Harris–Kleitman不等式（1.1）。事实上，对于概率测度 μ，不等式

$$\mu(A)\mu(B) \ge \mu(C_1)\mu(C_2)$$

等价于向上封闭事件 $E_1 = A \cup C_1$ 和 $E_2 = A \cup C_2$之间的正相关：

$$\mu(A)\big(\mu(A) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \mu(B)\big) \ge \big(\mu(A) + \mu(C_1)\big)\big(\mu(A) + \mu(C_2)\big).$$

定理2.1的证明。 固定 k。我们对 n进行归纳。情形 $n = 0$ 是平凡的。设$\mathbf{v} \in H_{n-1}$，我们可以将其与 H_n中对应的向量等同，该向量的第 n个坐标等于**0**。记$\mathbf{v}\uparrow$ 为 H_n中对应的向量，其 n个坐标等于**1**。定义

$$\begin{aligned}
A_0 &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in A, \mathbf{v}\uparrow \in A\},\\
B_0 &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in B, \mathbf{v}\uparrow \in B\},\\
C_i^{+} &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in C_i, \mathbf{v}\uparrow \in A\},\\
C_i^{\circ} &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in C_i, \mathbf{v}\uparrow \in C_i\},\\
C_i^{-} &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in B, \mathbf{v}\uparrow \in C_i\},\\
D &:= \{\mathbf{v} \in H_{n-1} : \mathbf{v} \in B, \mathbf{v}\uparrow \in A\}.
\end{aligned}$$

根据定理中的假设，我们有：

$$H_{n-1} = A_0 \sqcup B_0 \sqcup_{i=1}^{k} C_i^{+} \sqcup_{i=1}^{k} C_i^{\circ} \sqcup_{i=1}^{k} C_i^{-} \sqcup D \text{ (see Fig. 1)}.$$

注意，乘积测度 μ 沿第 n 个坐标投影到 H_{n-1} 后仍是乘积测度。记为 μ'。此外，记

$$a_0 := \mu'(A_0), \quad b_0 := \mu'(b_0), \quad c_i^{+} := \mu'(C_i^{+}), \quad c_i^{\circ} := \mu'(C_i^{\circ}), \quad c_i^{-} := \mu'(C_i^{-}), \quad d := \mu'(D).$$

根据归纳假设（见图1中的第一个细分）：

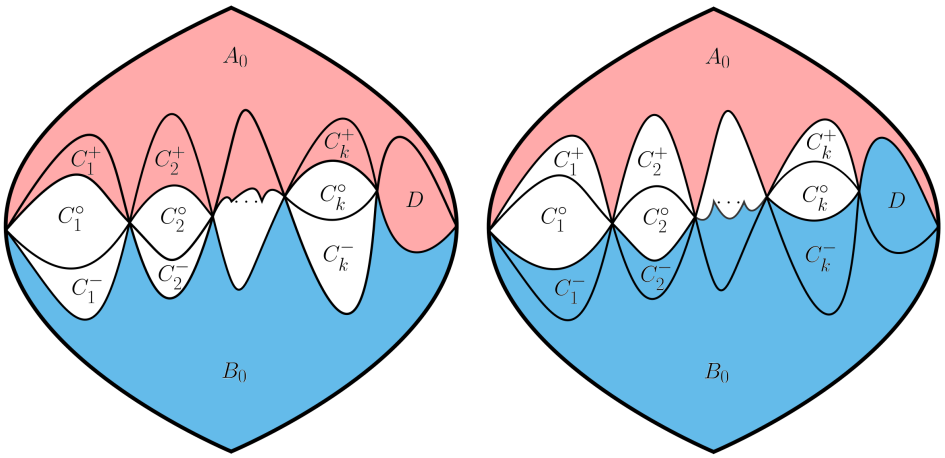


图1： $\{0,1\}^{n-1}$的细分

$$\left(a_0+d+\sum_{i=1}^{k}c_i^+\right)b_0 \;\geq\; e_2(c_1^\circ+c_1^-,\ldots,c_k^\circ+c_k^-)$$

并且（见图1中的第二个细分）

$$a_0\left(b_0+d+\sum_{i=1}^{k}c_i^-\right) \;\geq\; e_2(c_1^\circ+c_1^+,\ldots,c_k^\circ+c_k^+).$$

设 $p:=\mu(H_{n-1})$。我们需要证明

$$\left(a_0+p\left(d+\sum_{i=1}^{k}c_i^+\right)\right)\left(b_0+(1-p)\left(d+\sum_{i=1}^{k}c_i^-\right)\right)$$
$$\geq\; e_2\left(c_1^\circ+pc_1^-+(1-p)\,c_1^+,\;\ldots,\;c_k^\circ+pc_k^-+(1-p)\,c_k^+\right).$$

注意，这个不等式关于 p 是二次的，并且对 $p=0$ 和 $p=1$ 成立。因此，只需证明左侧 p^2 的系数小于右侧的系数：

$$-\left(d+\sum_{i=1}^{k}c_i^+\right)\left(d+\sum_{i=1}^{k}c_i^-\right)\leq e_2\left(c_1^--c_1^+,\ldots,c_k^--c_k^+\right).$$

消去各项后，可将其改写为

$$-d\left(2d+\sum_{i=1}^{k}c_i^++\sum_{i=1}^{k}c_i^-\right)-\sum_{i=1}^{k}c_i^-c_i^+\;\leq\;e_2\left(c_1^-,\ldots,c_k^-\right)+e_2\left(c_1^+,\ldots,c_k^+\right).$$

这是因为左侧非正，而右侧非负。归纳步骤至此完成，并由此推出对所有 n2.1，不等式 (。

□

3 UI 与 FUI 测度

回顾 [K22]中引入的 UI 和 FUI 测度定义。假设 $X_1,\ldots,X_n$是（相互依赖的）伯努利随机变量，且 μ 是它们的联合分布。测度 μ

在 H_n上的测度称为 FUI（意为有限多个底层独立变量），如果存在一种表示，使 X_i可以写成独立伯努利随机变量$Y_1, \ldots, Y_m$的递增函数，其中某个 m成立。测度 μ称为 UI，如果它是同一超立方体上的 FUI测度的极限。

注意，FUI 和 UI 都弱于 FKG 性质：

命题 3.1。 [K22，脚注 1] 所有测度 μ 具有 *FKG* 性质的测度都是 *FUI*（因此也是 *UI*）。

证明。 令 $Z_1, \ldots, Z_n$ 为独立同分布的 $U(0,1)$ 随机变量。对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们递归地将 X_i 定义为 Z 的函数，如下所示。假设在第 i步，我们有

$$X_j := f_j(Z_1, \ldots, Z_j) \text{ for all } j < i.$$

定义

$$X_i := \begin{cases} 0, \text{ if } Z_i < \mu(\mathbf{v}_i = 0 \mid \mathbf{v}_j = X_j \text{ for all } 1 \le j < i); \\ 1, \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

很容易看出， μ是（X_1、.. . 、 X_n）的分布。此外，FKG 性质意味着 X_i关于 Z_j是非递减的。

要证明 μ 是 FUI，我们需要将 X_i表示为相互独立的伯努利变量的函数。注意，(3.1) 单调地依赖于有限个（尽管其数量随 n呈指数增长）如下形式的事件

$$A(i, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}) := \big\{ Z_i < \mu(\mathbf{v}_i = 0 \mid \mathbf{v}_j = X_j \text{ for all } 1 \le j < i) \big\}.$$

可以将 $A(\cdot)$'的指示函数表示为相互独立、但分布可能不同的伯努利变量 $Y(i, \mathbf{v}_1, \ldots$ ...，$\mathbf{v}_{i-1})$ 的非递减函数。 □

命题3.1 使我们能够将定理2.1 推广到所有 UI 测度。特别地，它适用于所有具有 FKG 性质的测度。

定理 3.2。 设 μ 是 H_n上的 *UI* 测度，并且

$$H_n = A \sqcup C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_k \sqcup B \text{ for } k \ge 2$$

使得所有形如 $A \cup C_i$ 的集合都是向上封闭的。那么

$$\mu(A)\mu(B) \ge e_2\big(\mu(C_1), \ldots, \mu(C_k)\big). \tag{3.2}$$

证明。 设 μ是定义在 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$上的 FUI 测度。那么不妨假设 X_i'是相互独立的 m 伯努利变量 $Y_1, \ldots\ldots, Y_m$ 的二元非递减函数，如命题 3.1 的证明所示。所有集合 $A \cup C_j$ 在由Y_i'生成的超立方体中都是向上封闭的，因此由定理 2.1 可得不等式（3.2）。对于 UI 测度，不等式（3.2）可由 FUI 测度对应的不等式取极限得到。 □

注 3.3。 遵循 [FKG71], 的原始证明，可以将定理 3.2 推广到一般的分配格。值得注意的是， [AB08 中的 AD78] 证明无法推广到此处。若能得到方程（3.2）的泛函类比，将会很有意义，这类似于 AD 不等式作为 FKG 不等式的泛函类比。

The f 以下是 Kahn 的主要结果 [K22] 以及我们主要应用的基础 :

定理 3.4。 [K22，推论 4] 存在定义在 H_n 上的具有正关联但非 FUI 的测度。

我们将 $\{1,2,\dots,n\}$ 的子集与 H_n 中的点对应起来。考虑 μ_n，即均匀随机置换 $\sigma \in S_n$ 的不动点集的分布。已有研究 [FDS88] 表明， μ_n 具有正关联。Kahn 使用测度 μ_3 来证明定理 3.4。他写道：“要对一个 UI μ 的分布说些什么，若所依据的不仅仅是正关联，似乎出奇地困难。”

事实证明，定理 3.2 有助于我们将 Kahn 的定理推广到 UI 测度。事实上，我们使用的是同一个测度 μ_3。这回答了一个至少可追溯至 2002 年的问题K22，问题 1]。

定理 3.5。 H_n 上存在具有正关联但不属于 *UI* 的测度 .

证明。 注意

$$\mu_3(\{1\}) = \mu_3(\{2\}) = \mu_3(\{3\}) = \mu_3(\{1,2,3\}) = \frac{1}{6}$$

且 $\mu_3(\varnothing) = \frac{1}{3}$。考虑 $A = \{|S| \geq 2\}$， $B = \{S = \varnothing\}$， $C_i = \{S = \{i\}\}$ 对于 $1 \leq i \leq 3$。假设 μ_3 是 UI。那么根据定理 3.2 ，我们有

$$\frac{1}{18} \geq e_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12},$$

矛盾。因此， μ_3 不是 UI，正如所要证明的。 □

4 应用

4.1 图计数

我们在这里给出一个 [AS16风格的应用，问题 6.5。3]。

推论 4.1。 设 G 是一个具有 $2n$ 个带标签顶点的均匀随机图，并用 S 表示其度为 $\geq n$ 的顶点集合。那么对于每个 k

$$\frac{\binom{2n}{k} - 1}{2\binom{2n}{k}} \mathbf{P}(|S| = k) \leq \mathbf{P}(|S| > k)\mathbf{P}(|S| < k)$$

证明。 顶点上的随机图 $2n$ 按包含关系构成一个超立方体 $H = \{0,1\}^d$，其中 $d = \binom{2n}{2}$。我们可以在这个超立方体中考虑事件 A 和 B，它们分别等于 $\{|S| > k\}$ 和$\{|S| < k\}$，以及由所有 $C_T = \{S = T\}$ 个 k子集 T索引的 $\{1,2,\dots,2n\}$。所有 C_T 的概率均为 $\mathbf{P}(|S|=k)$ $\binom{2n}{k}$)，因此应用定理 2.1，得到

$$\binom{\binom{2n}{k}}{2} \frac{\mathbf{P}(|S| = k)^2}{\binom{2n}{k}^2} \leq \mathbf{P}(|S| > k)\mathbf{P}(|S| < k).$$

□

注意，仅使用 Harris–Kleitman不等式，我们所能得到的最佳结果是

$$\left\lfloor \frac{\binom{2n}{k}}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{\binom{2n}{k}}{2} \right\rceil \frac{\mathbf{P}(|S| = k)^2}{\binom{2n}{k}^2} \leq \mathbf{P}(|S| > k)\mathbf{P}(|S| < k),$$

其中 随着 $n \to \infty$，结果会差一个趋近于 2 的因子。特别是，对于 $k = n$，我们有 e

$$\mathbf{P}(|S| = n) \le \mathbf{P}(|S| > n) \frac{\binom{2n}{n}}{\sqrt{\binom{\binom{2n}{n}}{2}}}.$$

这意味着

$$\mathbf{P}(|S| = n) \le \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n} + 2\sqrt{\binom{\binom{2n}{n}}{2}}} \to \sqrt{2} - 1 \quad \text{as } n \to \infty.$$

这比由 Harris–Kleitman不等式[1]推出的 1 2 更强。

4.2 渗流

定理2.1 使我们能够对渗流中的连通事件作出比 Harris–Kleitman不等式更强的论述。考虑一个图 $G = (V, E)$，其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$。考虑 G上的渗流，其中每条边 $e \in E$ 以概率 $p_e \in (0,1)$ 存活，且各边相互独立。这得到一个生成子图 $H \subseteq G$，其概率为

$$\prod_{e \in H} p_e \prod_{e \notin H} (1 - p_e).$$

考虑三个顶点 1、2、 $3 \in V$。用 $\mathbf{P}(123)$ 表示顶点 1、2 和 3 属于 H 的同一个连通分支的概率。用 $\mathbf{P}(12|3)$ 表示顶点 1 和 2 属于同一个连通分支，且该分支与顶点 3 所在分支不同的概率。类似地定义 $\mathbf{P}(13|2)$ 和 $\mathbf{P}(1|23)$。最后，用 $\mathbf{P}(1|2|3)$ 表示三个顶点分别属于不同连通分支的概率。

推论4.2。 用上述记号，我们有：

$$\mathbf{P}(123)\mathbf{P}(1|2|3) \ge \mathbf{P}(12|3)\mathbf{P}(13|2) + \mathbf{P}(12|3)\mathbf{P}(1|23) + \mathbf{P}(13|2)\mathbf{P}(1|23). \tag{4.1}$$

证明。 注意，事件 $A =$(123)， $B =$(1|2|3)， $C_1 =$(1|23)， $C_2 =$(13|2)， $C_3 =$(12|3) 满足定理2.1的条件。不等式（4.1）由此得出。 □

致谢

作者谨向导师 Igor Pak 致谢，感谢他提出这一问题；并感谢 Aleksandr Zimin 的深入讨论。我们还要感谢 Tom Hutchcroft 和 Jeff Kahn 提供的宝贵意见。

参考文献

[AK96] Ron Aharoni 和 Uri Keich，Ahlswede-Daykin 不等式的一般化。离散数学。**152** （1996），第 1–3 期，1–12 页。

[1]实际上，这个数趋于零，参见此处的 Mathoverflow 回答。因此，这个不等式对于相对较小的 n 有意义。

[AB08] Rudolf Ahlswede 和 Vladimir Blinovsky，《组合学进展讲座》，施普林格，柏林，2008 年，314 页。[AD78] Rudolf Ahlswede 和 David E. Daykin，关于两个集合族权重、它们的并集与交集的不等式，《概率论及相关领域杂志》43（1978），183–185 页。[AS16] Noga Alon 和 Joel H. Spencer，《概率方法》（第四版），2016 年，375 页。[FDS88] Peter C. Fishburn、Peter G. Doyle 和 Lawrence A. Shepp，随机排列的匹配集具有 FKG 性质。《概率年刊》16（1988），1194–1214 页。[FKG71] Cornelius M. Fortuin、Pieter W. Kasteleyn 和 Jean Ginibre，某些偏序集上的相关不等式。《数学物理通讯》22（1971），89–103 页。[G83] Ronald L. Graham，FKG不等式及其相关不等式的应用，载于《数学规划：现状》（波恩，1982），115–131 页，施普林格，柏林，1983 年。[G06] Geoffrey Grimmett，《随机簇模型》，施普林格，2006 年，388 页。[K22] Jeff Kahn，关于正关联的一则注记。arXiv:2210.08653，2022 年，5 页。[LS22] Elliott H. Lieb 和 Siddhartha Sahi，论将 FKG 不等式推广至 n 函数。《数学物理杂志》63（2022），第 4 期，论文编号 043301，11 页。[S08] Siddhartha Sahi，高阶相关不等式。《组合学杂志》28（2008），第 2 期，209–227 页。[R04] Donald St. P. Richards，迈向高阶概率不等式的代数方法 II。《概率年刊》32（2004），第 2 期，1509–1544 页。[RS92] Yosef Rinott 和 Michael Saks，关于 FKG 型不等式和永久式不等式。《随机不等式》（西雅图，华盛顿州，1991），332–342 页，IMS 讲义专著丛书，第 22 卷，美国统计学会，海沃德，加利福尼亚州，1992 年。