arXiv:2305.02654v1 [math.DG] 4 May 2023

具有全纯平凡典范丛的六维齐性空间

ANTONIO OTAL 和 LUIS UGARTE

Abstract. 我们对所有存在带非零闭 (3,0)-形式的复结构的 6 维幺模李代数 $\mathfrak{g}$ 进行分类。由此得到六维紧致齐性空间 $M = \Gamma\backslash G$，其中 Γ 为格；这些空间存在典范丛全纯平凡的不变复结构。作为应用，在平衡厄米情形下，我们研究由 Levi-Civita 联络与厄米联络 Gauduchon 直线张成的平面内任意度量联络 $\nabla^{\epsilon,\,\rho}$ 的瞬子条件。在切丛上的联络为厄米-杨-米尔斯联络的 Hull-Strominger 系统中，我们证明，若某个紧致非 K¨ahler 齐性空间 $M = \Gamma\backslash G$ 存在关于族 $\nabla^{\epsilon,\,\rho}$中某个非平坦联络 ∇ 的不变解，那么 M 必为以下之一：底层李代数为 $\mathfrak{h}_3$的幂零流形、底层李代数为 $\mathfrak{g}_7$的可解流形，或半单群 SL(2,$\mathbb{C}$) 的一个商空间。由于已知该系统在这些空间上均有解，我们的结果意味着，它们是存在此类不变解的唯一紧致非 K¨ahler 平衡齐性空间。作为另一项应用，我们在底层为 Nakamura 流形的紧致可解流形上，构造了任意给定平衡 Bott-Chern 类中的异质弦运动方程解，并将陈联络取作（平坦）瞬子。

1. 引言

具有全纯平凡典范丛的复流形（可能还配备特殊的厄米度量）在几何学和理论物理中都发挥着重要作用。这类特殊流形的一个重要来源，是李群 G 关于余紧格 Γ的某些商空间；更具体地说，是配备了具有全纯平凡典范丛的不变复结构的 $2n$维紧致齐性空间 $M = \Gamma\backslash G$。所谓具有全纯平凡典范丛，是指 G 的（幺模）李代数 $\mathfrak{g}$ 具有一个复结构，且存在非零闭的 $(n, 0)$-形式。例如，当 M 是幂零流形，即 G 是幂零的情形下，Salamon [30] 的一个结果表明，M 上的任意不变复结构都存在非零闭的 $(n, 0)$-形式。

本文主要关注复维数三，这主要是因为它与 Hull-Strominger 系统有关。该系统的精确定义将在下文给出，此处我们仅回顾其解特别要求一个紧致复流形 $X = (M, J)$具有非零全纯 (3, 0)-形式 Ψ。当 $M = \Gamma\backslash G$ 是六维幂零流形且 J是不变的时，关于哪些幂零李代数 $\mathfrak{g}$ 允许复结构的问题已在 [30]中得到彻底解决。此外，$\mathfrak{g}$ 中允许具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构的六维幺模可解李代数，已在 [10], 中完成分类；该文还研究了若干特殊类别的厄米度量是否存在。本文的首要目标是扩展分类范围，将此前的结果补充完善，涵盖六维的所有幺模李代数。

在第 2 节中，我们研究具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构在实维数为 6 且幺模、非可解的李代数 $\mathfrak{g}$ 上存在的条件。根据代数 $\mathfrak{g}$ 的可分解性，我们采用不同的方法；但无论如何，我们的研究都依赖于对六维稳定形式的分析 [19]。在这一背景下，主要结果是一个唯一性定理，即 $\mathfrak{so}(3, 1)$，也就是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的底层实李代数，是唯一一个

允许这类复结构的李代数（见定理 2.9）。为完整起见，在推论 2.10、2.11 和 2.12 中，我们将这一新结果与其他已知结果汇总起来，从而给出允许具有非零闭 (3,0)-形式的复结构 J 的 6 维幺模李代数的分类，以及具有平衡厄米度量的 6 维幺模李代数的分类。

作为上述分类的第一个应用，我们研究 Hull-Strominger 系统不变解的存在性，其中切丛上的联络 ∇ 为厄米-杨-米尔斯联络。此类解满足异质弦运动方程。在第 3 节中，我们回顾该系统的定义以及文献 [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 27,32]中得到的若干重要结果。特别地，文献 [8] 首次在底层李代数为 $\mathfrak{h}_3$的幂零流形上得到了异质弦运动方程的不变解，而文献 [27] 则在底层代数为 $\mathfrak{g}_7$ 的可解流形上，以及李代数为 $\mathfrak{so}(3,1)$ 的半单群的商空间上，找到了新的解。在所有这些解中， ∇取为 Strominger-Bismut 联络 [3], ，它是一个非平坦瞬子。此外，文献 [27, 第 7] 节猜想，只有这些空间能容许此类解；更具体地说，如果一个紧致非 K¨ahler 齐性空间$M = \Gamma\backslash G$ 容许一个斜率参数为$\alpha' > 0$ 、且相对于拟设 $\nabla^{\varepsilon,\rho}$中的某个非平坦联络 ∇ 的异质弦运动方程不变解，那么 ∇ 就是 Bismut 联络，且 M 是上述三个空间之一。

这些联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 构成一个度量联络平面，其中包含为反常抵消方程提出的重要联络：Levi-Civita 联络 $\nabla^{LC} = \nabla^{0,\,0}$、Hull 联络 $\nabla^{-} = \nabla^{-\frac{1}{2},\,0}$、陈联络 $\nabla^{c} = \nabla^{0,\,\frac{1}{2}}$以及 Strominger-Bismut 联络 $\nabla^{+} = \nabla^{\frac{1}{2},\,0}$；此外还有由 ∇^{+}和 ∇^{c} 连接而成的厄米联络 Gauduchon 直线 ∇^{τ} [17]（详情见第 3 节）。在第 4 节和第 5 节中，我们证明了一个与该猜想相关的结果，该结果与斜率参数 α'的符号无关：设 $M = \Gamma\backslash G$是由单连通李群 G按最大秩格 Γ 取商得到的 6 维紧致流形，并假设 M 具有不变复结构 J，且存在非零闭 (3, 0)-形式以及一个相应的不变平衡度量 F。若与之关联的 (ε, ρ) 度量联络平面中的某个 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$是非平坦瞬子，则 G 的李代数同构于 $\mathfrak{h}_3$、 $\mathfrak{g}_7$或 $\mathfrak{so}(3,1)$（见定理 3.5）。为证明这一结果，我们在第 4 节研究幂零情形，而第 5 节则专门讨论可解流形类。

作为第二个应用，我们考虑利用陈联络，在具有给定平衡类的中村流形上构造解。具体而言，在第6节中，我们取 X 为赋予其阿贝尔复结构的中村流形所定义的紧致复流形，并在任意给定不变平衡度量 F 的 Bott-Chern 类中给出异质弦运动方程的解。更确切地说，定理 6.2 证明了，对于任意这样的 F，总存在另一个平衡度量 $\tilde{F}$，使得其满足 $[\tilde{F}^2] = [F^2] \in H^{2,\,2\,\mathrm{BC}}(X, \mathbb{R})$，并且存在一个非平坦瞬子，使其相对于与 F 相关的（平坦）陈联络 ˜ 求解异质弦运动方程。

2. Complex structures with closed (3, 0)-form on non-solvable space S

本节研究实维数为六的李代数 $\mathfrak{g}$ 上具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构的存在性。由于幂零情形和可解幺模情形分别已在 [30] 和 [10], 中研究过，我们将重点关注不可解幺模情形。结论是，只有 $\mathfrak{so}(3, 1)$ 具有这类特殊的复结构。为完整起见，在第 2.5 节中，我们将这一新结果与其他已知结果汇总起来，从而给出李代数的分类（见推论 2.10）以及具有平衡厄米度量的紧致齐性空间的分类（见推论 2.12）。

我们将根据代数 $\mathfrak{g}$ 的可分解性采用不同的方法，但无论如何，我们的研究都依赖于对六维稳定形式的分析。

2.1. 六维中的稳定形式。关于 6 维向量空间上的稳定形式， [19] 中已有广泛研究。我们在此回顾其基本性质，省略可在所引论文中找到的细节。

设 (V,ν) 为一个定向六维实向量空间， $\nu\in\wedge^6V^*$ 为 V 上的固定体积形式。若三形式 $\rho\in\wedge^3V^*$ 在 GL(V) 的作用下的轨道是开集，则称其为稳定三形式。

稳定性可以用以下代数方式刻画。设 $\kappa\colon\ \wedge^5V^*\to V\otimes\wedge^6V^*$ 为典范同构 $\kappa(\xi)=v\otimes\nu$，其中 $\iota_v\nu=\xi$, 并定义

$$K_\rho(v):=\kappa(\iota_v\rho\wedge\rho)\in V\otimes\wedge^6V^*,\qquad v\in V,$$

$$\lambda(\rho):=\tfrac{1}{6}\mathrm{tr}(K_\rho^2)\in(\wedge^6V^*)^{\otimes2}.$$

那么， ρ 是稳定的，当且仅当 $\lambda(\rho)\neq0$。稳定三形式 ρ 定义了一个特定的体积形式

$$\phi(\rho)=\sqrt{|\lambda(\rho)|}\in\wedge^6V^*$$

以及一个由 $J_\rho:=\frac{1}{\phi\,\rho()}K_\rho$ 给出的端同态。

事实证明， J_ρ 是近复结构，当且仅当 $\lambda(\rho)<0$。此时，我们称 J_ρ 为由 ρ 诱导的近复结构。对偶近复结构（本文中仍记作 J_ρ，而非 J_ρ^*）对一形式的作用由以下公式给出

$$(J_\rho\alpha)(v)\,\phi(\rho)=\alpha\wedge\iota_v\rho\wedge\rho,\qquad\alpha\in V^*,\quad v\in V. \tag{1}$$

此外，相对于 J_ρ，复三形式 $\Psi=\rho+iJ_\rho\rho$ 具有双次数 (3, 0)。

现在，设 $\mathfrak{g}$ 是一个 6维李代数， J 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个近复结构，即 J 是一个端同态 $J:\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$，满足 $J^2=-\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$。若近复结构 J 没有挠率，即其 Nijenhuis 张量彩票平台注册

$$N_J(X,Y)=[JX,JY]-J[X,JY]-J[JX,Y]-[X,Y],\qquad X,Y\in\mathfrak{g}, \tag{2}$$

恒等于零。我们关注满足更强条件的复结构，即存在非零闭 (3, 0)-形式。由于它们都源自闭稳定三形式 $\rho\in\wedge^3\mathfrak{g}^*$，我们将按如下方式展开。

设 ρ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个一般闭三形式。回顾一下，微分 d 是由以下公式诱导的

$$d\alpha(X,Y)=-\alpha([X,Y]),\qquad\alpha\in\mathfrak{g}^*,\quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{3}$$

˜现在，考虑如下通过作用于一形式来定义的端同态 J_ρ s

$$\Big((\tilde{J}_\rho\alpha)(X)\Big)\,\nu=\alpha\wedge\iota_X\rho\wedge\rho,\qquad\alpha\in\mathfrak{g}^*,\quad X\in\mathfrak{g}, \tag{4}$$

其中 $\nu\in\wedge^6\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}$的一个固定体积形式。由 (1) 和 (4) 可知，端同态

˜ ∼J_ρ 与 K_ρ 的对偶相同。接着，我们将 $\lambda(\rho)$定义为以下标量:

$$\tilde{\lambda}(\rho)\,\nu^{\otimes2}=\lambda(\rho)=\frac{1}{6}\mathrm{tr}(K_\rho^2)=\frac{1}{6}\mathrm{tr}(\tilde{J}_\rho^2).$$

˜ ˜当 $\lambda(\rho)<0$ 且 $d(J_\rho\rho)=0$ 时，我们在 $\mathfrak{g}$ 上得到一个近复结构 J_ρ，它具有非零闭 (3, 0)-形式 $\Psi=\rho+i\,J_\rho\rho$。显然，条件 $d\Psi=0$ 意味着任意 (1,0) 形式的微分的 (0,2) 分量均为零；这又等价于 J_ρ 的 Nijenhuis 张量 (2) 恒为零，即 J_ρ 可积。

因此，要证明给定的李代数 $\mathfrak{g}$ 不允许存在具有闭的 (3, 0)-形式的复结构，只需证明：对于任意闭的 $\rho\in\wedge^3\mathfrak{g}^*$，只要 $\tilde{J}_\rho\rho$ 是闭的，就有 tr($\tilde{J}_\rho^2$) ≥0。然而，对于不可解的可分解李代数 $3\oplus3$，这一条件处理起来会变得非常复杂，因此我们将改用这样一个事实:

满足 $N_{J_\rho}=0$ 的几乎复结构 J_ρ 会在第一个三维因子上诱导出一族无挠的线性自同态，因此与这种 J_ρ 的存在性相矛盾（具体论证见第 2.3 节及命题 2.4 的证明）。

正如引言中所述，我们关注形如 $M=\Gamma\backslash G$ 的紧复流形的几何，其中 Γ 是一个格，并赋有典范丛全纯平凡的不变复结构。因此，若 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，那么除了具有带非零闭 (3,0)-形式的复结构外，$\mathfrak{g}$ 还必须是幺模的，这是 Milnor [25] 的一个著名结果所表明的（关于 $\mathfrak{g}$ 的上同调的其他必要条件，另见 [10] ）。

2.2. 六维幺模非可解李代数。本节回顾六维幺模非可解李代数的不同类别。当李代数可分解，即 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{j=1}^n\mathfrak{g}_j$ 时，$\mathfrak{g}$ 的幺模性要求每个直和项 $\mathfrak{g}_j$ 都是幺模的。考虑到这一事实以及维数不超过 5 的非可解李代数列表（见 [31, 表 1] 和 [12, 表 2]），可得如下六维可分解幺模非可解李代数的分类:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^3=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,0,\,0,\,0),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{h}_3=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,0,\,0,\,e^{45}),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{e}(1,1)=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,0,\,-e^{46},\,-e^{45}),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{e}(2)=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,0,\,-e^{46},\,e^{45}),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,e^{56},\,-e^{46},\,-e^{45}),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(3)=(e^{23},\,-e^{13},\,-e^{12},\,e^{56},\,-e^{46},\,e^{45}),\\
&\mathfrak{so}(3)\oplus\mathbb{R}^3=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,0,\,0,\,0),\\
&\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{h}_3=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,0,\,0,\,e^{45}),\\
&\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{e}(1,1)=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,0,\,-e^{46},\,-e^{45}),\\
&\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{e}(2)=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,0,\,-e^{46},\,e^{45}),\\
&\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(3)=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,e^{56},\,-e^{46},\,e^{45}),\\
&A_{5,40}\oplus\mathbb{R}=(2e^{12},\,-e^{13},\,2e^{23},\,e^{24}+e^{35},\,e^{14}-e^{25},\,0).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(5) 中的所有李代数都是 $3\oplus3$可分解的，但 $A_{5,\,40}\oplus\mathbb{R}$ 除外，后者是 $5\oplus1$可分解的。根据公式 (3)，我们使用外微分 d而非李括号来描述每个李代数的结构。具体而言，例如，记号$\mathfrak{sl}$(2, $\mathbb{R}$) $\oplus\,\mathbb{R}^3$ = (e^{23}, $-e^{13}$, $-e^{12}$, 0, 0, 0) 表示该李代数具有一形式基$\{e^j\}_{j=1}^6$ 使得

$$de^1=e^2\wedge e^3,\quad de^2=-e^1\wedge e^3,\quad de^3=-e^1\wedge e^2,\quad de^4=de^5=de^6=0.$$

在不可分解情形中，我们采用 [13, 表 2], 中的分类，因此在同构意义下，六维不可分解幺模非可解李代数如下:

$$
\begin{aligned}
&L_{6,1}=(e^{23},\,-e^{13},\,e^{12},\,e^{26}-e^{35},\,-e^{16}+e^{34},\,e^{15}-e^{24}),\\
&L_{6,2}=(e^{23},\,2e^{12},\,-2e^{13},\,e^{14}+e^{25},\,-e^{15}+e^{34},\,e^{45}),\\
&L_{6,4}=(e^{23},\,2e^{12},\,-2e^{13},\,2e^{14}+2e^{25},\,e^{26}+e^{34},\,-2e^{16}+2e^{35}),\\
&\mathfrak{so}(3,1)=(e^{23}-e^{56},\,-e^{13}+e^{46},\,e^{12}-e^{45},\,e^{26}-e^{35},\,-e^{16}+e^{34},\,e^{15}-e^{24}).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

如果去掉幺模条件，就会出现另一个李代数，记作 $L_{6,3}$。事实证明，该代数具有复结构，并存在非零闭 (3, 0)-形式（详情见注 2.7

），然而相应的单连通李群不存在关于某个格的紧致商空间。

It 众所周知， $\mathfrak{so}(3,1)$ 存在具有闭的 (3, 0)-形式的复结构：

例 2.1。实李代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ 是由复结构方程给出的 3 维复李代数$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的实形式

$$d\omega^1 = \omega^{23}, \quad d\omega^2 = -\omega^{13}, \quad d\omega^3 = \omega^{12}. \tag{7}$$

为说明这一点，只需验证复一形式 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$ 相对于 $\mathfrak{so}(3,1)$ 上的某个近复结构具有 (1, 0) 双次数。令 J 为$\mathfrak{so}(3,1)$ 上的近复结构，它相对于式 (6) 中给出的实基 $\{e^j\}_{j=1}^6$ 定义如下：

$$Je^1 = e^4, \quad Je^2 = e^5, \quad Je^3 = e^6, \quad Je^4 = -e^1, \quad Je^5 = -e^2, \quad Je^6 = -e^3.$$

现在，考虑相对于 J的 (1, 0)-形式 $\omega^1 = e^3 - ie^6$、 $\omega^2 = e^1 - ie^4$ 和 $\omega^3 =e^2 - ie^5$。直接计算可知， ω^1、 ω^2、 ω^3 满足式 (7)，并且由于 J是复平行化的，(3, 0)-形式 $\Psi = \omega^{123}$ 是闭的。注意，J 对应于闭的稳定三形式 $\rho =e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} \in \wedge^3\mathfrak{so}(3,1)^*$。

2.3. 可分解情形。当李代数可分解时，我们将使用 [23, 引理 1] 中的观察： J 的可积性会在每个直和项上诱导一个无挠自同态。

根据定义，李代数 $\mathfrak{h}$ 上的无挠自同态是一个向量空间同态F： $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$，满足 $N_F（X，\ Y）= 0$，对任意 X、$Y \in \mathfrak{h}$均成立，其中

$$N_F(X,Y) = [FX,FY] - F[X,FY] - F[FX,Y] - [X,Y]. \tag{8}$$

注意，恒为零的端同态 $F \equiv 0$ 具有零挠率，当且仅当李代数$\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的；此外，也存在不允许任何无挠自同态的李代数。

现在，设 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{g}_j$ 为一个可分解李代数，并将每个 j直和项对应的自然嵌入和投影分别记为 i_j： $\mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}$ 和π_j： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_j$。设 J： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个近复结构，并对每个满足 $1 \le j \le n$的 j ，定义端同态$F_j = \pi_j \circ J \circ i_j$： $\mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_j$。

设 J 可积，即 Nijenhuis 张量 $N_J \equiv 0$。对每个直和项 $\mathfrak{g}_j$ 取投影，由 (2) 可得

$$[\pi_j JX, \pi_j JY]_{\mathfrak{g}_j} - \pi_j J([X,\pi_j JY]_{\mathfrak{g}_j}) - \pi_j J([\pi_j JX, Y]_{\mathfrak{g}_j}) - [X,Y]_{\mathfrak{g}_j} = 0$$

对任意 X、$Y \in \mathfrak{g}_j$ 均成立。因此，端同态 F_j： $\mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_j$ 满足 $N_{F_j} \equiv 0$，于是有：

引理 2.2. [23] 若 J： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 可积，则对每个 j， F_j： $\mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_j$ 都是无挠自同态。

这在 $3 \oplus 3$ 可分解李代数的情形下尤其有用。作为第一步，我们有如下引理，它指出李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 的某些自同态不是无挠的。

引理 2.3. 对任意 A、 B、 C、 λ、 μ、 $\tau \in \mathbb{R}$，有：

(i) 端同态 F： $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 由坐标矩阵定义

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & A & B \\ A & \mu & C \\ -B & -C & \tau \end{pmatrix}, \tag{9}$$

在基 $\{e_k\}_{k=1}^3$ 下，其括号为 $[e_1,e_2] = e_3$、 $[e_1,e_3] = e_2$、 $[e_2,e_3] = -e_1$，并非无挠。

(ii) 端同态 $F\colon \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ 由坐标矩阵定义

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & A & B \\ A & \mu & C \\ B & C & \tau \end{pmatrix}, \tag{10}$$

在具有括号 $[e_1, e_2] = -e_3$、$[e_1, e_3] = e_2$、$[e_2, e_3] = -e_1$ 的基 $\{e_k\}_{k=1}^3$ 中，不是无挠的。

证明。我们只证明第一个陈述，因为第二个陈述可通过类似论证得到。在第一种情形下，由 (8) 可知，F 的无挠条件等价于

$$0 = N_F(e_1, e_2) = 2(AC - B\mu)e_1 + 2(AB - \lambda C)e_2 - (1 + A^2 + B^2 + C^2 - \lambda\mu + \lambda\tau + \mu\tau)e_3,$$

$$0 = N_F(e_1, e_3) = -2(A\tau + BC)e_1 - (1 - A^2 - B^2 + C^2 + \lambda\mu - \lambda\tau + \mu\tau)e_2 - 2(AB - \lambda C)e_3,$$

$$0 = N_F(e_2, e_3) = (1 - A^2 + B^2 - C^2 + \lambda\mu + \lambda\tau - \mu\tau)e_1 + 2(A\tau + BC)e_2 + 2(AC - B\mu)e_3.$$

假设 F 是无挠的，我们将得到矛盾。由

$$0 = e^3(N_F(e_1, e_2)) + e^2(N_F(e_1, e_3)) = 2(1 + C^2 + \mu\tau),$$

我们得到 $\mu\tau < 0$（特别是 μ、$\tau \neq 0$）。因此，由方程 $0 = e^1(N_F(e_1, e_2)) = 2(AC - B\mu)$，我们有 $B = \frac{AC}{\mu}$；代入 $0 = e^1(N_F(e_1, e_3)) = -2(A\tau + BC)$，得到 $A(C^2 + \mu\tau) = 0$，这意味着 $A = 0$，因为 $C^2 + \mu\tau = -1$。由于 $A = 0$，于是 $B = 0$。

现在，由

$$0 = e^2(N_F(e_1, e_3)) + e^1(N_F(e_2, e_3)) = 2(1 + \lambda\mu),$$

我们得到 $\lambda\mu = -1$。特别地，$\lambda \neq 0$，并由方程 $e^3(N_F(e_1, e_3)) = 0$ 得到 $C = 0$。

最后，由方程 $e^2(N_F(e_1, e_3)) = 0$ 得到 $\tau(\lambda - \mu) = 0$，因此 $\lambda = \mu$。但这意味着$\lambda\mu = \lambda^2 > 0$，与 $\lambda\mu = -1$ 矛盾。□

在下面的结果中，我们将 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 视为（5）中的任意一个 $3 \oplus 3$ 可分解李代数。我们将证明，对于 $\mathfrak{g}$ 上的任意闭三形式 ρ，若 $\lambda(\rho) < 0$，则近复结构 J_ρ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上诱导的端同态不是无挠的。

命题 2.4。$3 \oplus 3$ 可分解幺模非可解李代数不允许存在具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构。

证明。$3 \oplus 3$ 可分解的幺模非可解李代数由 (5) 给出，并且分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$，其中 $\mathfrak{g}_1$ 或者是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$，或者是 $\mathfrak{so}(3)$，而 $\mathfrak{g}_2$ 取遍以下列表：$\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$,$\mathfrak{e}(1, 1)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(3)$。因此，我们根据第一个直和项区分两种情况：

• 情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_2$。我们给出李代数 $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}^3$ 的证明细节。首先，李代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^3$ 上的任意闭三形式 ρ 可表示为

$$\rho = a_1 e^{123} + a_2 e^{124} + a_3 e^{125} + a_4 e^{126} + a_5 e^{134} + a_6 e^{135} + a_7 e^{136} + a_8 e^{234} + a_9 e^{235} + a_{10} e^{236} + a_{11} e^{456},$$

其中 $a_1, \ldots, a_{11} \in \mathbb{R}$。取体积形式 $\nu = e^{123456}$，我们考虑由 (4) 定义的端同态 $\tilde{J}_\rho$。

假设 $\lambda(\rho) < 0$，即我们得到 J_ρ 是 $\mathfrak{g}$上的近复结构。我们定义由 J_ρ 和 J_ρ分别诱导的 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$上的线性自同态 $\tilde{F}_\rho = \pi_1 \circ J_\rho \circ i_1$ 和 $\tilde{F}_\rho = \pi_1 \circ J_\rho \circ i_1$。回忆一下，$J_\rho = |\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2} \tilde{J}_\rho$，所以 $\tilde{F}_\rho$ 也是 $\tilde{F}_\rho$的倍数，即

$$\tilde{F}_\rho = |\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2} \tilde{F}_\rho.$$

通过直接计算可得，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 的诱导端同态 $\tilde{F}_\rho$ 由公式 (9) 给出，其取值为 $A = B = C = 0$ 和 $\lambda = \mu = \tau = -a_1 a_{11}$，因此 $\tilde{F}_\rho\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 由以下给出。

数值 $\lambda, \mu, \tau, A, B, C$ 乘以常数 $|\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2}$，因此 F_ρ 属于由 (9) 定义的同一族线性自同态。现在，我们可以应用引理 2.3，得出 F_ρ 并非无挠。这一事实结合引理 2.2，意味着 J_ρ 也并非无挠。特别是，后者排除了在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^3$ 上存在具有闭的 (3, 0)-形式的复结构。

对于 $\mathfrak{g}_2$ 的其余情形，证明采用类似的论证，但需考虑附录中表 1 所给出的相应取值 λ, μ, τ 和 A, B, C。

• 情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{g}_2$。与前一种情形一样，我们详细证明特定李代数 $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_3$ 的情形。李代数 $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{h}_3$ 上的一般闭三形式 ρ 为

$$\begin{aligned}\rho = {} & a_1 e^{123} + a_2 e^{124} + a_3 e^{125} + a_4 e^{134} + a_5 e^{135} + a_6 e^{234} + a_7 e^{235} + a_8(-e^{145} + e^{236}) \\ & + a_9(e^{136} + e^{245}) + a_{10}(-e^{126} + e^{345}) + a_{11} e^{456},\end{aligned}$$

其中 $a_1, \ldots, a_{11} \in \mathbb{R}$。考虑相对于体积形式 $\nu = e^{123456}$，由 (4) 定义的端同态 J_ρ。于是，诱导端同态 $\tilde{F}_\rho = \pi_1 \circ \tilde{J}_\rho \circ i_1 \colon \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ 由 (10) 给出，其中取值为 $A = -2a_8a_9$, $B = -2a_{10}a_8$, $C = 2a_{10}a_9$，并且

$$\lambda = -a_{10}^2 - a_1 a_{11} + a_8^2 - a_9^2, \quad \mu = -a_{10}^2 - a_1 a_{11} - a_8^2 + a_9^2, \quad \tau = a_{10}^2 - a_1 a_{11} - a_8^2 - a_9^2.$$

因此，应用引理 2.3 可知，端同态 $F_\rho = |\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2}\tilde{F}_\rho$ 并非无挠。因此，N_{J_ρ} 不为零，故李代数 $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{h}_3$ 上不存在具有闭 (3,0)-形式的复结构。

对于 $\mathfrak{g}_2$ 的其余情形，也可采用类似论证，同时考虑附录表 2 中给出的相应取值 A、B、C、λ、μ、τ。□

剩下的 $5 \oplus 1$ 可分解李代数 $A_{5,40} \oplus \mathbb{R}$ 需要更复杂的论证，该论证依据的是 $\lambda(\rho)$ 模去由确定四形式 $J_\rho\rho$闭性的多项式生成的理想后的等价类。

命题 2.5. 李代数 $A_{5,40} \oplus \mathbb{R}$ 不存在具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构。

证明。李代数 $A_{5,\ 40} \oplus \mathbb{R}$ 的任意一般闭三形式可表示为

$$\begin{aligned}\rho = {} & a_1 e^{123} + a_2 e^{125} + a_3 e^{126} + a_4(e^{135} - e^{124}) + a_5 e^{136} + a_6 e^{234} + a_7(e^{134} + e^{235}) + a_8 e^{236} \\ & + a_9(e^{256} - e^{146}) + a_{10}(e^{246} + e^{356}) + a_{11} e^{456},\end{aligned}$$

其中 $a_1, \ldots, a_{11} \in \mathbb{R}$。取体积形式 $\nu = e^{123456}$，我们考虑由 (4) 定义的端同态 $\tilde{J}_\rho$，并发现四形式 $d(\tilde{J}_\rho\rho)$ 可表示为

$$\begin{aligned}d(\tilde{J}_\rho\rho) = {} & q_1 e^{1234} + q_2 e^{1235} + q_3 e^{1245} + q_4(e^{1246} - e^{1356}) + q_5 e^{1256} + q_6 e^{1345} + q_7(e^{1346} + e^{2356}) \\ & + q_8 e^{2345} + q_9 e^{2346},\end{aligned}$$

其中 $q_j := q_j(a_1, \dots, a_{11})$ 表示关于变量 $a_1, \dots, a_{11}$ 的多项式，其定义为

$$\begin{aligned}
q_1 &= -2(a_{10}a_2a_6 + a_{10}a_4a_7 - 2a_4a_6a_9 + 2a_7^2a_9),\\
q_2 &= -2(2a_{10}a_4^2 + 2a_{10}a_2a_7 + a_2a_6a_9 + a_4a_7a_9),\\
q_3 &= -4a_{11}(a_4^2 + a_2a_7),\\
q_4 &= -2(a_{10}^2a_2 + a_{11}a_4a_5 + 2a_{11}a_3a_7 - a_{11}a_2a_8 + a_{10}a_4a_9 + 2a_7a_9^2),\\
q_5 &= -6(a_{11}a_3a_4 - a_{11}a_2a_5 - a_{10}a_2a_9 + a_4a_9^2),\\
q_6 &= 2a_{11}(a_2a_6 + a_4a_7),\\
q_7 &= -2(2a_{10}^2a_4 - a_{11}a_3a_6 + a_{11}a_5a_7 - 2a_{11}a_4a_8 + a_{10}a_7a_9 - a_6a_9^2),\\
q_8 &= -4a_{11}(a_4a_6 - a_7^2),\\
q_9 &= -6(a_{11}a_5a_6 + a_{10}^2a_7 - a_{11}a_7a_8 + a_{10}a_6a_9).
\end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}(\rho)$的表达式是一个四次多项式，属于以变量 $a_1,\dots,a_{11}$为变量的多项式环$\mathbb{R}[a_1, \dots, a_{11}]$。设 $\mathcal{I} = \langle q_1, \dots, q_9\rangle$ 为由上述多项式 $q_1,\dots,q_9$ 生成的理想。我们需要计算[1] $\tilde{\lambda}(\rho)$模理想 $\mathcal{I}$的等价类。具体而言，可得

$$\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2 - a_{10}q_2 + a_8q_3 - a_7q_4 + \frac{2}{3}a_6q_5 + a_5q_6 + \frac{1}{3}a_2q_9.$$

现在，显然，要消去 $d(\tilde{J}_\rho\rho)$，必须消去 $q_1, \dots, q_9$，但后者意味着 $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2 \geq 0$。因此，在 $A_{5,40} \oplus \mathbb{R}$上不存在带闭 (3,0)-形式的复结构。□

2.4. 不可分解情形。本节研究不可分解幺模非可解李代数 $L_{6,1}$, $L_{6,2}$ 和 $L_{6,4}$上复结构的存在性。

命题 2.6。李代数 $L_{6,\ 1}$、 $L_{6,\ 2}$ 和 $L_{6,\ 4}$ 不承认具有非零闭 (3,0)-形式的复结构。

证明。对于李代数 $L_{6,\ 1}$ 和 $L_{6,\ 4}$，证明遵循与 $A_{5,\ 40} \oplus \mathbb{R}$ 的命题 2.5 证明类似的论证，但需考虑附录中表 3 针对形式 ρ和 $d(J_\rho\rho)$、多项式 q_1、...、q_9 以及 $\tilde{\lambda}(\rho)$ 所列出的相应值。

关于 $L_{6,\ 2}$ 的陈述的证明不如前几种情形直接，因此我们将给出该李代数的详细证明。$L_{6,\ 2}$ 上的任意闭三形式 ρ 均可表示为

$$\begin{aligned}
\rho = {} & a_1e^{123} + a_2e^{124} + a_3e^{135} + a_4(e^{234} - e^{125}) + a_5(e^{235} - e^{134}) + a_6(e^{236} - e^{145})\\
& + a_7(e^{245} - 2e^{126}) + a_8(e^{146} + e^{256}) + a_9(2e^{136} + e^{345}) + a_{10}(e^{346} - e^{156}) + a_{11}e^{456},
\end{aligned}$$

关于 $a_1, \dots, a_{11} \in \mathbb{R}$。直接计算可得，四形式 $d(\tilde{J}_\rho\rho)$ 为

$$\begin{aligned}
d(\tilde{J}_\rho\rho) = {} & q_1e^{1234} + q_2e^{1235} + q_3e^{1245} + q_4e^{1246} + q_5(e^{1256} - e^{2346}) + q_6e^{1345}\\
& + q_7(e^{1346} - e^{2356}) + q_8e^{1356} + q_9e^{2345},
\end{aligned}$$

[1]我们使用了计算机软件 Singular，该软件可从 http://www.singular.uni-kl.de 获取。

其中 $q_j := q_j(a_1, \ldots, a_{11})$ 表示变量 $a_1, \ldots, a_{11}$ 的多项式，由$q_1 = 2($

$$
\begin{aligned}
&2a_{10}a_4^2 + 2a_{10}a_2a_5 + a_4a_6^2 - 2a_1a_{10}a_7 - 3a_5a_6a_7 - 2a_3a_7^2 + a_2a_3a_8 - a_4a_5a_8 + a_1a_6a_8 \\
&\quad - a_2a_6a_9 - 2a_4a_7a_9),\\
q_2 =& -2(a_{10}a_2a_3 - a_{10}a_4a_5 + a_1a_{10}a_6 + a_5a_6^2 + a_3a_6a_7 + 2a_3a_4a_8 + 2a_5^2a_8 + 3a_4a_6a_9 \\
&\quad - 2a_5a_7a_9 + 2a_1a_8a_9 - 2a_2a_9^2),\\
q_3 =& 2(2a_{11}a_4^2 + 2a_{11}a_2a_5 + a_{10}a_2a_6 - 2a1a_{11}a_7 + 2a_{10}a_4a_7 - 2a_6^2a_7 - 3a_4a_6a_8 + 2a_5a_7a_8 \\
&\quad - a_1a_8^2 - 8a_7^2a_9 + 4a_2a_8a_9),\\
q_4 =& 6(a_{11}a_2a_6 + 2a_{11}a_4a_7 - 2a_{10}a_7^2 + a_{10}a_2a_8 + a_6a_7a_8 + a_4a_8^2),\\
q_5 =& 2(a_2(a_{10}^2 - 2a_{11}a_9) - a_{11}a_4a_6 + 4a_{11}a_5a_7 - 3a_{10}a_6a_7 - a_{10}a_4a_8 + a_6^2a_8 + 2a_5a_8^2 - 2a_7a_8a_9),\\
q_6 =& -2(a_1a_{10}^2 - 2a_{11}a_3a_4 - 2a_{11}a_5^2 + 3a_{10}a_5a_6 + 4a_{10}a_3a_7 - a_3a_6a_8 - 2a_1a_{11}a_9 + 2a_{10}a_4a_9 \\
&\quad - 2a_6^2a_9 + 2a_5a_8a_9 - 8a_7a_9^2),\\
q_7 =& -2(2a_4(a_{10}^2 - 2a_{11}a_9) - a_{11}a_5a_6 + a_{10}a_6^2 + 2a_{11}a_3a_7 - a_{10}a_5a_8 + a_3a_8^2 - 2a_{10}a_7a_9 + 3a_6a_8a_9),\\
q_8 =& -6(a_5(a_{10}^2 - 2a_{11}a_9) + a_{11}a_3a_6 + a_{10}a_3a_8 - a_{10}a_6a_9 - 2a_8a_9^2),\\
q_9 =& 2(a_{11}a_2a_3 - a_{11}a_4a_5 + a_1a_{11}a_6 + 2a_{10}a_4a_6 + a_6^3 - 3a_{10}a_5a_7 + a_1a_{10}a_8 + 2a_5a_6a_8 \\
&\quad + a_3a_7a_8 - a_{10}a_2a_9 + 4a_6a_7a_9 + 3a_4a_8a_9).
\end{aligned}
$$

˜此外，对于 $\lambda(\rho)$，可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda}(\rho) =& (2a_2a_3a_6 - 2a_4a_5a_6 + a_1a_6^2 + 4a_3a_4a_7 + 4a_5^2a_7 - 4a_4^2a_9 - 4a_2a_5a_9 + 4a_1a_7a_9 + a_1^2a_{11})a_{11} \\
&+ \frac{3}{2}a_{10}q_1 - 2a_9q_3 + \frac{5}{6}a_3q_4 + a_5q_5 - a_7q_6 + \frac{1}{2}a_4q_7 + \frac{2}{3}a_2q_8 + \frac{a_6}{2}q_9.
\end{aligned}
$$

接下来，根据多项式 q_5、 q_7 和 q_8 中出现的项 $a_{10}^2 - 2a_{11}a_9$ 是否发生抵消，我们区分两种情况。在后续分析中，我们假设 $a_{11} \neq 0$，否则 $d(\tilde{J}_\rho\rho) = 0$ 将意味着 $\tilde{\lambda}(\rho) = 0$。

(i) 若 $a_{10}^2 - 2a_{11}a_9 \neq 0$，则由 q_5、 q_7 和 q_8 的消去可得

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-a_{11}a_4a_6 + 4a_{11}a_5a_7 - 3a_{10}a_6a_7 - a_{10}a_4a_8 + a_6^2a_8 + 2a_5a_8^2 - 2a_7a_8a_9}{2a_{11}a_9 - a_{10}^2},\\
a_4 &= \frac{-a_{11}a_5a_6 + a_{10}a_6^2 + 2a_{11}a_3a_7 - a_{10}a_5a_8 + a_3a_8^2 - 2a_{10}a_7a_9 + 3a_6a_8a_9}{2(2a_{11}a_9 - a_{10}^2)},\\
a_5 &= \frac{a_{11}a_3a_6 + a_{10}a_3a_8 - a_{10}a_6a_9 - 2a_8a_9^2}{2a_{11}a_9 - a_{10}^2}.
\end{aligned}
$$

将 a_2、 a_4 和 a_5 代入 q_4 后，我们得到

$$
q_4 = \frac{3(a_{10}^3 + a_{11}^2a_3 - 3a_{10}a_{11}a_9)(a_{11}a_6^2 - 2a_{10}^2a_7 + 2a_{10}a_6a_8 + 4a_{11}a_7a_9 + 2a_8^2a_9)^2}{(a_{10}^2 - 2a_{11}a_9)^3}.
$$

现在，为了得到 $q_4 = 0$ ，我们考虑以下两种情况:

- $a_3 = \frac{3a_{10}a_{11}a_9 - a_{10}^3}{a_{11}^2}$, but in this case we have

$$
\tilde{\lambda}(\rho) = \frac{(a_1a_{11}^2 + a_{11}a_6^2 - 2a_{10}^2a_7 + 2a_{10}a_6a_8 + 4a_{11}a_7a_9 + 2a_8^2a_9)^2}{a_{11}^2} \geq 0;
$$

- $a_{11}a_6^2 - 2a_{10}^2a_7 + 2a_{10}a_6a_8 + 4a_{11}a_7a_9 + 2a_8^2a_9 = 0$，但这种情况再次得到一个非负的 $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2$。

因此，条件 $a_{10}^2 - 2a_{11}a_9 \neq 0$ 总是蕴含 $\tilde{\lambda}(\rho) \geq 0$。

(ii) 设 $a_{10}^2 - 2a_{11}a_9 = 0$，则 $a_9 = \frac{a_{10}^2}{2a_{11}}$。在这种情况下，$q_8$ 可因式分解为 $q_8 = \frac{(a_{10}^3 - 2a_{11}^2a_3)(a_{11}a_6 + a_{10}a_8)^2}{a_{11}^2}$。因此，当且仅当以下两种情况之一成立时，$q_8 = 0$ 成立：

- $a_3 = \frac{a_{10}^3}{2a_{11}^2}$，这意味着多项式 q_7 可因式分解为

$$q_7 = \frac{(a_{11}a_6 + a_{10}a_8)(2a_{11}^2a_5 - 2a_{10}a_{11}a_6 - a_{10}^2a_8)}{a_{11}^2}.$$

现在，若 $a_{11}a_6 + a_{10}a_8 = 0$，则可得 $q_6 = \frac{(2a_{11}^2a_5 + a_{10}^2a_8)^2}{a_{11}^3}$ 以及 $\tilde{\lambda}(\rho) = \frac{a_1^2a_{11}^6 + (2a_{11}^2a_5 + a_{10}^2a_8)^2(2a_{11}a_7 + a_8^2)}{a_{11}^4}$。因此，$q_6 = 0$ 蕴含 $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2$。

另一方面，当 $2a_{11}^2a_5 - 2a_{10}a_{11}a_6 - a_{10}^2a_8 = 0$ 时，我们再次得到一个非负的 $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11}^3 + (a_{11}a_6 + a_{10}a_8)^2)^2)$。

- $a_6 = -\frac{a_{10}a_8}{a_{11}}$，这意味着多项式 q_7 可因式分解为 $q_7 = (a_{10}^3 - 2a_{11}^2a_3)(2a_{11}a_7 + a_8^2)\,a_{11}^2$。我们可以假设 $a_{10}^3 - 2a_{11}^2a_3 \neq 0$（否则我们就属于前一种情况）。那么，$q_7 = 0$ 当且仅当 $2a_{11}a_7 + a_8^2 = 0$，但后者会推出 $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2$。

因此，条件 $a_{10}^2 - 2a_{11}a_9 = 0$ 也意味着 $\tilde{\lambda}(\rho) \geq 0$，所以命题的证明完成。□

注 2.7. 如果允许李代数是非幺模的，那么在六维非可解李代数类中可以找到更多具有闭 (3,0)-形式的复结构实例。事实上，考虑李代数 $L_{6,\,3}$（采用 [13, 表 2] 中的记号），其结构方程为

$$de^1 = e^{23},\ de^2 = 2e^{12},\ de^3 = -2e^{13},\ de^4 = e^{14} + e^{25} + e^{46},\ de^5 = -e^{15} + e^{34} + e^{56},\ de^6 = 0.$$

那么，由下式给出的端同态 J

$$Je^1 = \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{1}{6}e^3,\quad Je^2 = -\tfrac{1}{3}e^1 - \tfrac{1}{9}e^6,\quad Je^3 = -3e^1 + e^6,$$

$$Je^4 = \tfrac{1}{3}e^5,\qquad Je^5 = -3e^4,\qquad Je^6 = \tfrac{9}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^3,$$

定义了 $L_{6,\,3}$ 上的一个近复结构，使得非零 (3, 0)-形式 $\Psi = (e^1 - iJe^1) \wedge (e^2 - iJe^2) \wedge (e^4 - iJe^4)$ 是闭的。

注 2.8. 我们的结果还可应用于幺模非可解李群上的拟复结构和闭 $SL(3,\mathbb{C})$ 结构。

首先，我们回顾一下，与近复情形类似，如果稳定 3-形式 ρ 满足 $\lambda(\rho) > 0$，那么端同态 J_ρ 在 $\mathfrak{g}$上定义了一个超复结构，即 $J_\rho^2 = \mathrm{Id}$，并且特征值 ± 1 对应的特征子空间是三维的（更多细节见 [19]）。形式 $\rho + \mathrm{e}\, J_\rho\rho$，其中 $\mathrm{e}^2 = 1$，相对于 J_ρ是一个 (3, 0)-形式。如果这个 (3, 0)-形式是闭的，那么相应的挠张量 N_{J_ρ} 恒等于零，并且该超复结构是可积的。显然，任何可分解李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$，若 $\dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_2 = 3$，都具有带闭 (3, 0)-形式的超复结构。李代数 $A_{5,40} \oplus \mathbb{R}$, L_6,1, L_6,2, L_6,3 和 L_6,4 也具有这类结构。事实上，根据命题 2.5 和 2.6 的证明以及附录中的表 3，只需取 $a_1 = a_{11} = 1$，并令其他系数 a_j 为零即可。注意，对于 L_6,3，闭三形式 $\rho = e^{123} + e^{456}$ 定义了一个超复结构，并且对于该结构，$J_\rho\rho$也是闭的（关于 L_6,3 的结构方程，见注 2.7）。

关于 SL(3, $\mathbb{C}$) 结构，我们回顾一下，一个定向的六维可微流形 M 具有 SL(3, $\mathbb{C}$)-结构，当且仅当其标架丛可以约化为 SL(3, $\mathbb{C}$)。或者说，这样的结构由一个稳定三形式 $\rho \in \Omega^3(M)$定义，该形式诱导出一个近复结构J_ρ，即 $\lambda(\rho) < 0$。如果 $d\rho = 0$，则称该 SL(3, $\mathbb{C}$)-结构是闭的；在这种情况下，四形式 $d(J_\rho\rho)$ 相对于 J_ρ具有双次数 (2, 2)。注意，由于 ρ 是闭的，J_ρ 的可积性等价于 $d(J_\rho\rho) = 0$。对于幂零李代数，Fino 和 Salvatore 在 [11] 中对闭的 SL(3, $\mathbb{C}$)- 结构进行了分类，其中 $d(J_\rho\rho)$ 是非零的（半）正 (2, 2) 形式。本节的结果可能有助于研究非可解情形中的这类结构。

2.5. 分类结果。第 2.3 节和第 2.4 节所得的结果总结如下定理。

定理 2.9. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 6 维幺模非可解李代数。那么 $\mathfrak{g}$ 存在一个具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构，当且仅当它同构于 $\mathfrak{so}(3, 1)$。

为完整起见，在以下推论中，我们汇总定理 2.9 得出的结果以及其他已知结果。首先，根据幂零情形下的 Salamon 分类 [30]以及 [10, 定理 2.8] 中得到的可解李代数分类，我们得到

推论 2.10. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 6 维幺模李代数。那么， $\mathfrak{g}$ 存在一个具有非零闭 (3, 0)-形式的复结构，当且仅当它同构于以下列表中的某一个：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}_1 &= (0^6), & \mathfrak{h}_{15} &= (0^3, 12, 13+42, 14+23),\\
\mathfrak{h}_2 &= (0^4, 12, 34), & \mathfrak{h}_{16} &= (0^3, 12, 14, 24),\\
\mathfrak{h}_3 &= (0^5, 12+34), & \mathfrak{h}_{19}^- &= (0^3, 12, 23, 14-35),\\
\mathfrak{h}_4 &= (0^4, 12, 14+23), & \mathfrak{h}_{26}^+ &= (0^2, 12, 13, 23, 14+25),\\
\mathfrak{h}_5 &= (0^4, 13+42, 14+23), & \mathfrak{g}_1 &= (15, -25, -35, 45, 0, 0),\\
\mathfrak{h}_6 &= (0^4, 12, 13), & \mathfrak{g}_2^\alpha &= (\alpha\cdot 15+25, -15+\alpha\cdot 25, -\alpha\cdot 35+45, -35-\alpha\cdot 45, 0, 0),\\
\mathfrak{h}_7 &= (0^3, 12, 13, 23), & \mathfrak{g}_3 &= (0, -13, 12, 0, -46, -45),\\
\mathfrak{h}_8 &= (0^5, 12), & \mathfrak{g}_4 &= (23, -36, 26, -56, 46, 0),\\
\mathfrak{h}_9 &= (0^4, 12, 14+25), & \mathfrak{g}_5 &= (24+35, 26, 36, -46, -56, 0),\\
\mathfrak{h}_{10} &= (0^3, 12, 13, 14), & \mathfrak{g}_6 &= (24+35, -36, 26, -56, 46, 0),\\
\mathfrak{h}_{11} &= (0^3, 12, 13, 14+23), & \mathfrak{g}_7 &= (24+35, 46, 56, -26, -36, 0),\\
\mathfrak{h}_{12} &= (0^3, 12, 13, 24), & \mathfrak{g}_8 &= (16-25, 15+26, -36+45, -35-46, 0, 0),\\
\mathfrak{h}_{13} &= (0^3, 12, 13+14, 24), & \mathfrak{g}_9 &= (45, 15+36, 14-26+56, -56, 46, 0),\\
\mathfrak{h}_{14} &= (0^3, 12, 14, 13+42), & \mathfrak{so}(3,1) &= (23-56, -13+46, 12-45, 26-35, -16+34, 15-24).
\end{aligned}
$$

这里 $\alpha \geq 0$ 是任意非负实数。列表中的李代数两两不同构。李代数 $\mathfrak{h}_k$ 是幂零的， $\mathfrak{g}_l$ 是可解的，而 $\mathfrak{so}$(3,1) 是分类中唯一的半单李代数。另一方面，可分解李代数如下： $\mathfrak{h}_1(1 \oplus \cdots \oplus 1)$、$\mathfrak{h}_2$、 $\mathfrak{g}_3(3 \oplus 3)$、 $\mathfrak{h}_3$、 $\mathfrak{h}_6$、 $\mathfrak{h}_9$、 $\mathfrak{h}_{16}$、 $\mathfrak{g}_1$、 $\mathfrak{g}_2^\alpha(1 \oplus 5)$ 和 $\mathfrak{h}_8(1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 3)$。

设 X 是一个维数为 $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ 的复流形。称 X 上的厄米度量 F 为平衡度量，如果 $dF^{n-1} = 0$。Michel- sohn [24]最早研究了这类度量的重要性质。正如接下来的章节将要展示的，平衡Hermitian几何在异质弦理论中发挥着核心作用。

我们回顾一下，复李群上的任意左不变厄米度量 F 都是平衡的，因此李代数 $\mathfrak{so}$(3,1) 存在平衡厄米结构。具有闭的 (3, 0)-形式的六维幂零李代数（或幺模可解李代数）若存在平衡厄米结构，已在

分别由 [34, 定理 26], 和 [10, 定理 4.5] 分类。作为前几节所得结果的第二个推论，我们有

推论 2.11. 设 $\mathfrak{g}$是一个 6 维幺模李代数。那么， $\mathfrak{g}$ 存在一个带有非零闭的 (3, 0)-形式的复结构，且该复结构具有平衡度量，当且仅当它同构于 $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{h}_4$, $\mathfrak{h}_5$, $\mathfrak{h}_6$, $\mathfrak{h}_{19}^-$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2^\alpha(\alpha \geq 0)$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_8$ 或 $\mathfrak{so}$(3,1)。

关于格（最大秩格）的存在性，与李代数 $\mathfrak{h}_k$ 对应的连通单连通幂零李群 H_k 根据著名的马尔采夫定理存在格。此外，根据 [10, 命题 2.10], ，与可解李代数 $\mathfrak{g}_l$ 对应的连通单连通李群 G_l 对任意 $l \neq 2$都存在格；而对于 $l = 2$，存在可数多个互不相同的 α，其中包括 $\alpha = 0$，使得与 $\mathfrak{g}_2^\alpha$ 对应的李群 G_2^α存在格。对于 $\mathfrak{so}$(3,1) 的情形，众所周知其存在格。因此，我们得到关于 6 维紧致齐性空间的如下结果:

推论2.12. 设 $M = \Gamma\backslash G$ 是六维紧致流形，由单连通李群 G 对格 Γ取商得到。假设 M 具有不变复结构 J，且存在一个非零闭 (3, 0)-形式，并允许配备平衡度量 F。那么， G的李代数 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_6$, $\mathfrak{h}_{19}^-$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2^\alpha$，其中 $\alpha \geq 0$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_5$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_8$，或 $\mathfrak{so}$(3,1)。

我们回顾一下，这类齐性空间仅当 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_1$ 或 $\mathfrak{g}_2^0$ 时才是 K¨ahler 空间（更多细节见下文命题5.3）。我们还回顾一下，在 (M, J) 上存在平衡度量，意味着存在一个不变的平衡度量（通过对称化得到）。

3. The Hull-Strominger system on compact balanced homogeneous spaces

具有非零挠率的异质超弦背景由 A. Strominger [32] 和 C. Hull [20], 分别独立进行了研究，由此产生了一组复杂的偏微分方程。他们的方法将 [4] 中提出的超弦紧致化初始设想，拓展到典范丛平凡的复结构（不一定是 K¨ahler）情形。在六维中，该系统要求几何内空间 X 为一个典范丛全纯平凡的紧致复共形平衡流形，并配备一个满足 Green-Schwarz 反常消除条件的瞬子:

$$dT = 2\pi^2\alpha'\big(p_1(\nabla) - p_1(A)\big). \tag{11}$$

这个等式也称为 Bianchi 恒等式，是一个四形式方程，其中 T 是共形平衡度量的（Strominger-）Bismut 联络的挠率， α' 是一个实常数（称为斜率参数），而 $p_1(\nabla)$ 和 $p_1(A)$ 分别表示某个度量联络 ∇ 和瞬子 A 的第一 Pontrjagin 类所对应的四形式。

更具体地说，设 (M, J, g, Ψ) 是一个实维数为 6 的紧致流形，配备厄米结构 (J, g) 和一个处处非零的全纯 (3,0)-形式 Ψ。记 F为基本形式，则挠率三形式为 $T = JdF$。Hull-Strominger 系统由下式给出。

$$\begin{aligned} &d(\|\Psi\|_F F^2) = 0, \\ &\Omega^A \wedge F^2 = 0, \quad (\Omega^A)^{0,2} = (\Omega^A)^{2,0} = 0, \\ &dT - \tfrac{\alpha'}{4}\left(\operatorname{tr}\Omega \wedge \Omega - \operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

第一个方程（共形平衡条件）是李和姚[22], 对该系统所谓的胺基乙酰转移酶方程和引力微子方程的重新表述。只需将 F共形地修改为$\hat{}F = \|\Psi\|_F^{1/2} F$，便可直接得到（$M, J$）上存在平衡厄米度量$\hat{}F$。第二个方程也称为规范微子方程，是联络 A的厄米-杨-米尔斯方程，其中 Ω^A 表示其曲率。第三个方程是反常抵消

方程：取 $\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\,\Omega\wedge\Omega$ 为表示类 p_1的四形式后，得到方程 (11)，其中 Ω 是该联络的曲率。

Li 和 Yau [22] 发现了定义在 K¨ahler Calabi-Yau 流形上的 Hull-Strominger 系统的首批非 K¨ahler 解。基于 Goldstein 和 Prokushkin 在 [18], 中的构造，Fu 和 Yau 首次证明了定义在非 K¨ahler Calabi-Yau 内空间上的解的存在性；这些空间是以 K3 曲面 [14]为底的 $\mathbb{T}^2$-丛。最近，Fu-Yau 解被推广到 K3 轨形上的环面丛 [9]。

Ivanov 的一项重要结果 [21] （另见 [8]）指出，Hull-Strominger 系统的一个解满足异质弦运动方程，当且仅当切丛中的联络 ∇ 是厄米-杨-米尔斯联络，即

$$\Omega\wedge F^2=0,\quad \Omega^{0,2}=\Omega^{2,0}=0. \tag{13}$$

系统 (12)-(13) 的齐性解最早在 [8] 的一个幂零流形上被发现，后来又在一个可解流形以及 SL(2,$\mathbb{C}$) 的商空间上被发现 [27] （另见 [7]）。另一方面， [22] 中给出的 Hull-Strominger 系统的 Li-Yau 解，后来在 [1] 中通过一种微扰方法进一步推广到某些具有稳定全纯向量丛的 K¨ahler Calabi-Yau 三维流形，从而证明了异质弦运动方程的解的存在性。Garcia-Fernandez 在 [15], 构造了定义在 K3 曲面上的非 K¨ahler 环面丛上系统 (12)-(13) 的新解例，并将其应用于构造 T 对偶解。最近，在假设切丛中的度量联络 ∇ 为厄米-杨-米尔斯联络的情况下， [16]发现了一族 Futaki 不变量，它们阻碍 Hull-Strominger 系统在给定平衡类 $\mathfrak{b}$ 中存在解。

上述 [22, 14, 9] 中的结果要求将 ∇ 取为陈联络 ∇^c。除了 ∇^c之外，为反常抵消方程提出的其他度量联络还有 Strominger-Bismut 联络 ∇^+、Levi-Civita 联络 ∇^{LC} 或 Hull 联络∇^-。De la Ossa 和 Svanes 在 [6]中讨论了对 ∇ 作出不同选择的物理和几何意义。在 [7] 中，研究了 Gauduchon [17] 发现的厄米联络 ∇^τ 的规范一参数族。该族 ∇^τ 包含陈联络（$\tau=1$）和 Bismut 联络（$\tau=-1$）。此外，所有之前的联络都可以汇集到一个度量线性联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 平面中；这些联络由 [27], 引入并进行了研究，因此有$\nabla^{LC}=\nabla^{0,\,0}$、 $\nabla^{\pm}=\nabla^{\pm\frac{1}{2},\,0}$、 $\nabla^c=\nabla^{0,\,\frac{1}{2}}$, 其中 Gauduchon 联络 ∇^τ对应于直线 $\rho=\frac{1}{2}-\varepsilon$ （其中 $\tau=1-4\varepsilon$）。在 [5] 中还研究了这一二参数联络族的协变导数，以考察异性质结构 $\mathcal{M}$模空间上的一个纤维化 $\mathbb{X}$ 的几何，其中纤维是带有其度量和复结构的三维复流形 X。

我们回顾联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 的定义。设 (M,J,g) 是一个厄米特流形。定义在切丛 TM 上的线性联络 ∇ 称为厄米特联络，若 $\nabla g=0$ 且 $\nabla J=0$，也就是说，度量和复结构都平行。对于任意 $(\varepsilon,\rho)\in\mathbb{R}^2$，联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 定义为

$$g(\nabla^{\varepsilon,\rho}_X Y,Z)=g(\nabla^{LC}_X Y,Z)+\varepsilon\,T(X,Y,Z)+\rho\,C(X,Y,Z),\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M) \tag{14}$$

其中， $C(\cdot,\cdot,\cdot)=dF(J\cdot,\cdot,\cdot)$ 表示陈联络 ∇^c 的挠率，而 $T(\cdot,\cdot,\cdot)=JdF(\cdot,\cdot,\cdot)$ 表示 Bismut 联络 ∇^+ 的挠率三形式。这里， $F(\cdot,\cdot)=g(\cdot,J\cdot)$ 是基本二形式。

命题3.1。 [27, 命题2.1] 设 (M,J,g) 是一个厄米特流形。对于每个 $(\varepsilon,\rho)\in\mathbb{R}^2$，联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 满足以下性质：

$$\nabla^{\varepsilon,\rho}g=0,\qquad \nabla^{\varepsilon,\rho}J=(1-2\varepsilon-2\rho)\,\nabla^{LC}J.$$

因此，如果 (M,J,g) 不是 K¨ahler 的，那么， $\nabla^{\varepsilon,\,\rho}$ 是 Hermitian 的当且仅当 $\rho=\frac{1}{2}-\varepsilon$。

1 参数族 $\nabla^{\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon}$恰好是 Gauduchon 在 [17], 中发现的典范厄米联络族 ∇^{τ}，其中参数之间的关系为 $\varepsilon=\frac{1-\tau}{4}$ 和 $\rho=\frac{1+\tau}{4}$。

紧致平衡非 K¨ahler 齐性空间的不变厄米几何，使我们能够构造异质弦运动方程（更一般地说，Hull-Strominger 系统）的显式解，其中 $\nabla=\nabla^{\varepsilon,\rho}$ 取自反常抵消方程。注意，在不变情形下，函数 $\|\Psi\|_F$ 为常数，且 (12) 中的第一个方程等价于 F^2是闭的，即 F 是平衡的。事实上，[8, 27] 中已找到了此类解，甚至包括具有正斜率参数 α'的解；这些解分别定义在底层李代数为 $\mathfrak{h}_3$ 的幂零流形、底层代数为 $\mathfrak{g}_7$ 的可解流形，以及半单群 SL(2,$\mathbb{C}$) 的商空间上。当然，要得到这些解，需要在 (ε,ρ) 平面中找到满足瞬子方程 (13) 的联络。

在接下来的三个命题中，我们回顾 [27] 中关于度量 (ε,ρ)-联络的厄米-杨-米尔斯条件的研究结果。下文中，我们将使用记号 $\nabla^{\varepsilon,\rho(J,F)}$，以强调我们考虑的是给定齐性空间上的任意平衡厄米结构 (J,F)，以及相应 (ε,ρ) 平面中的任意联络。

命题 3.2。 [27, 命题 3.2] 设 (J,F) 是六维幂零流形 M 上的任意不变平衡厄米结构，其底层幂零李代数同构于 $\mathfrak{h}_3$。那么，联络 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho(J,\ F)}$是瞬子，当且仅当 $(\varepsilon,\rho)=(\frac{1}{2},0)$，也就是说，它是 Bismut 联络。

命题 3.3。 [27,命题 5.2] 设 J 是六维可解流形 M 上具有非零闭 (3, 0)-形式的任意不变复结构，其底层可解李代数同构于 $\mathfrak{g}_7$。设 F 是 (M,J) 上的任意不变平衡度量，并设 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho(J,\ F)}$是 (ε,ρ)-平面内的一个联络。那么，我们有：

(i)若 $(\varepsilon,\ \rho)\neq(\frac{1}{2},0)$，那么 $\nabla^{\varepsilon,\rho(J,F)}$ 不是瞬子。(ii)存在一些平衡度量 F，使得 Bismut 联络 $\nabla^{\frac{1}{2},0}_{(J,F)}$ 是一个瞬子。

命题 3.4. [27, 命题 4.1] 设 J 是紧致商空间 M 上的复平行化结构，其底层李代数为 $\mathfrak{so}$(3,1)（也就是说，M 是半单群 $SL(2,\mathbb{C})$ 除以一个最大秩格所得的商空间）。那么，存在一参数族的不变平衡厄米度量 F_t，使得联络 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho\ (J,\ F_t)}$ 仅当 $(\varepsilon,\rho)\in\{(\frac{1}{2},0)$、$(0,\frac{1}{2})\}$ 时才是瞬子；也就是说，此时的联络是陈联络（它是平坦的）或 Bismut 联络。

在所有这些情形中，Bismut 联络的曲率迹均非零，因此它并非平坦。此外，有人猜想这些是唯一存在此类解的空间。更具体地说（见 [27, 第 7] 节），如果一个非 K¨ahler 齐性空间 $M=\Gamma\backslash G$存在异质弦运动方程的不变解，且该解满足 $\alpha'>0$ 并且相对于某个非平坦联络 ∇（其属于 Ansatz $\nabla^{\varepsilon,\ \rho}$），那么 ∇ 就是 Bismut 联络，而 M 是上述空间之一。

本文第二部分的目标是证明以下与该猜想相关的结果，而该结果与斜率参数 α' 的符号无关。

定理 3.5。设 $M=\Gamma\backslash G$ 是一个六维紧致流形，由单连通李群 G 按最大秩格 Γ 取商定义。假设 M 具有一个不变平衡厄米结构 (J,F)，并带有不变的非零闭 (3, 0)-形式。令 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho(J,\ F)}$ 是 (ε,ρ)-平面上的度量联络。若 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho(J,\ F)}$ 是一个非平坦瞬子，则 G 的李代数同构于 $\mathfrak{h}_3$、$\mathfrak{g}_7$ 或 $\mathfrak{so}$(3,1)。

根据上一节得到的分类结果，只需关注基于李代数 $\mathfrak{g}\ncong\mathfrak{h}_3,\mathfrak{g}_7,\mathfrak{so}(3,1)$ 的齐性空间。因此，我们将研究李代数 $\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_4,\mathfrak{h}_5,\mathfrak{h}_6,\mathfrak{h}_{19}^-,\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2^0,\mathfrak{g}_2^\alpha\ (\alpha>0),\ \mathfrak{g}_3,\mathfrak{g}_5$ 和 $\mathfrak{g}_8$ 上的平衡Hermitian几何。第4节

专门讨论幂零情形，而在第5节中，我们研究可解流形类。第6节探讨平坦瞬子（陈联络）在构造具有给定平衡类的中村流形上的解时所发挥的作用。

从现在起，流形 $M=\Gamma\backslash G$ 将是李群 G 关于格Γ的一个紧致商空间，并赋有不变的厄米结构（J,F），也就是说，（J,F）可以在李群 G的李代数 $\mathfrak{g}$ 层面定义。若基 $\{e^k\}_{k=1}^6$ 是为 $\mathfrak{g}^*$ 选取的，且复结构 J 与2-形式 F 均具有标准表达形式，我们就称该基与厄米结构相适配：

$$Je^1=-e^2,\ Je^3=-e^4,\ Je^5=-e^6,\qquad F=e^{12}+e^{34}+e^{56}. \tag{15}$$

因此，度量 g 由 $g=e^1\otimes e^1+\cdots+e^6\otimes e^6$给出。

给定任意线性联络 ∇，相对于适配基的联络1-形式（σ^∇）^i_j 为

$$(\sigma^\nabla)^i_j(e_k)=g(\nabla_{e_k}e_j,e_i),$$

曲率2-形式（Ω^∇）^i_j 则由下式给出

$$(\Omega^\nabla)^i_j=d(\sigma^\nabla)^i_j+\sum_{1\le k\le 6}(\sigma^\nabla)^i_k\wedge(\sigma^\nabla)^k_j.$$

设 c^k_{ij} 为李代数 $\mathfrak{g}$ 相对于适配基 $\{e^k\}_{k=1}^6$的结构常数，即，

$$de^k=\sum_{1\le i<j\le 6}c^k_{ij}\,e^{ij},\qquad 1\le k\le 6.$$

由于 $de^k(e_i,e_j)=-e^k([e_i,e_j])$，且基 $\{e^k\}_{k=1}^6$ 是正交归一的，度量 g 的 Levi-Civita 联络1-形式 $(\sigma^{LC})^i_j$ 表示为 $(\sigma^{LC})^i_j(e_k)=\frac12(c^i_{jk}-c^k_{ij}+c^j_{ki})$。

现在，设 $\nabla=\nabla^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}$为（$\varepsilon,\rho$）平面上的任意一个度量联络。利用（14），其联络1-形式由下式给出。

$$\begin{aligned}\big(\sigma^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(e_k) &= (\sigma^{LC})^i_j(e_k)-\varepsilon\,T(e_i,e_j,e_k)-\rho\,C(e_k,e_i,e_j)\\ &= \frac12(c^i_{jk}-c^k_{ij}+c^j_{ki})-\varepsilon\,JdF(e_i,e_j,e_k)-\rho\,dF(Je_k,e_i,e_j).\end{aligned}$$

对于任意的 $1\le i,j,k,l\le 6$，我们定义

$$\begin{aligned}\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(i,j)&:=\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(e_1,e_2)+\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(e_3,e_4)+\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(e_5,e_6),\\ \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(i,j,k,l)&:=\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(Je_k,Je_l)-\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}}\big)^i_j(e_k,e_l).\end{aligned}$$

然后，可以将厄米-杨-米尔斯条件 (13) 表示如下：

引理 3.6. 联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 是一个瞬子，当且仅当对于适配基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足以下条件

$$\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(i,j)=0,\qquad \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(i,j,k,l)=0, \tag{16}$$

对任意 $1\le i$、j、k、$l\le 6$，均满足这些条件。

证明。考虑到（15），结论可直接由 $\Omega^{\nabla^{\varepsilon}{}_{,\rho\,(J,F)}}\wedge F^2=0$和 $\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon}{}_{,\rho\,(J,F)}}\big)^{0,2}=\big(\Omega^{\nabla^{\varepsilon}{}_{,\rho\,(J,F)}}\big)^{2,0}=0$得出。□

4. Instantons on balanced nilmanifolds

本节证明定理 3.5 对幂零流形成立。我们将使用 [33] 中为任意不变平衡厄米结构所获得的适配标架。

回顾第 3 节中的讨论，我们需要研究底层李代数同构于以下任一幂零李代数$\mathfrak{h}_2$、 $\mathfrak{h}_4$、 $\mathfrak{h}_5$、$\mathfrak{h}_6$或 $\mathfrak{h}_{19}^-$的幂零流形上的平衡Hermitian几何。

下面的结果研究赋有复平行化结构的幂零李代数 $\mathfrak{h}_5$ 上的厄米几何。

命题 4.1. 设 (M, J) 为岩泽流形，并设 F为 (M, J) 上的任意不变厄米度量。那么，联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho\,(J,\,F)}$是一个瞬子，当且仅当 $(\varepsilon, \rho) = (0, 1\,2)$，也就是说，它是陈联络（且为平坦联络）。

证明. 由于 J 是复平行化的，众所周知，岩泽流形 (M, J) 上的任意不变厄米度量 F都是平衡的，且陈联络是平坦的，因此它是一个瞬子。

考虑任意其他联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}$。根据 [33, 定理 2.11],，给定任意这样的 (J, F)，存在一个 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及以下方程。

$$de^1 = de^2 = de^3 = de^4 = 0, \quad de^5 = t\, e^{13} - t\, e^{24}, \quad de^6 = t\, e^{14} + t\, e^{23}, \tag{17}$$

其中 $t \in \mathbb{R}^*$。根据引理 3.6，当且仅当条件 (16) 成立时，该联络是一个瞬子。直接计算得到以下特定方程:

$$\begin{aligned} \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + 2\varepsilon - 2\rho = 0, \\ \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,3,1,3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - 2\varepsilon - 2\rho = 0, \end{aligned}$$

当 $(\varepsilon, \rho) \neq (0, 1\,2)$ 时，这些条件永远不成立。总之，只有陈联络是瞬子。

□

在以下结果中，我们排除了 $\mathfrak{h}_3$ 这种情况，因为它已在 [27] 中研究过（见上文命题 3.2）。这就是为什么在以下结果中取 $(\varrho, b) \neq (0, 0)$。

命题 4.2. 设 (J, F) 是幂零流形 M 上的一个不变平衡厄米结构，其底层李代数同构于 $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_5$ 或 $\mathfrak{h}_6$。假设 J 不是复平行化。那么，联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 永远不是瞬子。

证明。我们采用 [33, 定理 2.11] 中对李代数 $\mathfrak{h}_2$、 $\mathfrak{h}_4$、 $\mathfrak{h}_5$ 和 $\mathfrak{h}_6$ 上平衡几何的描述。对于任意不变平衡厄米结构 (J, F)，存在一组 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及以下两组方程之一:

$$\begin{cases} de^1 \;=\; de^2 = de^3 = de^4 = 0, \\ de^5 \;=\; \frac{t}{s}(\varrho + b^2)e^{13} - \frac{t}{s}(\varrho - b^2)e^{24}, \\ de^6 \;=\; -2\,t\,(e^{12} - e^{34}) + \frac{t}{s}(\varrho - b^2)e^{14} + \frac{t}{s}(\varrho + b^2)e^{23}; \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} de^1 \;=\; de^2 = de^3 = de^4 = 0, \\ de^5 \;=\; sY\left[2b^2u_1|u|\,(e^{12} - e^{34}) - b^2tu_1|u|Y\,(e^{13} + e^{24}) + 2\varrho s u_1\,(e^{13} - e^{24})\right. \\ \qquad\qquad \left. +2su_2\left((\varrho - b^2)e^{14} + (\varrho + b^2)e^{23}\right)\right], \\ de^6 \;=\; sY\left[2(2s^2 - b^2u_2)|u|\,(e^{12} - e^{34}) + b^2tu_2|u|Y\,(e^{13} + e^{24}) - 2\varrho s u_2\,(e^{13} - e^{24})\right. \\ \qquad\qquad \left. +2su_1\left((\varrho - b^2)e^{14} + (\varrho + b^2)e^{23}\right)\right]. \end{cases} \tag{19}$$

这里，$\varrho \in \{0,1\}$、$b \in \mathbb{R}$ 与 $(\varrho, b) \neq (0,0)$，且 s、$t \in \mathbb{R}^*$。在方程 (19) 中，$u = u_1 + i\,u_2 \in \mathbb{C}^*$ 与 $s^2 > |u|^2$，我们记 $Y := \frac{2\sqrt{s^2-|u|^2}}{t\,|u|}$。我们回顾一下，所有复结构 J 都是幂零的，而阿贝尔复结构对应于在 (18) 或 (19) 中取 $\rho = 0$。由于我们考虑的是 $(\varrho, b) \neq (0,0)$，当 J 为阿贝尔时，李代数是 $\mathfrak{h}_5$，并且我们可以对 b 进行规范化，使得 $b = 1$。

接下来，我们研究任意联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}$ 的瞬子条件。首先，我们考虑方程 (18)。瞬子条件 (16) 尤其给出以下方程：

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad b^4(1+4(\varepsilon-\rho)^2) + 4s^2\left(\rho^2 + (\varepsilon-\tfrac{1}{2})^2\right) + 4\,\varepsilon\,\varrho^2(2\rho-1) = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2,1,4) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \varrho(\varepsilon-\rho-\tfrac{3}{2})(\varepsilon-\rho+\tfrac{1}{2}) = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(3,6,1,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)\left[\varrho(1+2\varepsilon-2\rho) - b^2(1-2\varepsilon-2\rho)\right] = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(4,5,1,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)\left[\varrho(1+2\varepsilon-2\rho) + b^2(1-2\varepsilon-2\rho)\right] = 0.
\end{aligned}
$$

回忆一下 $\varrho \in \{0,1\}$。若 $\varrho = 1$，则方程 $\Upsilon^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}(1,2,1,4) = 0$ 意味着 $\varepsilon - \rho \in \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$。在第一种情况下，由于 $b^4 + s^2 + 4\varepsilon^2(1+s^2) > 0$，我们有 $\Theta^{\varepsilon,\varepsilon+\frac{1}{2}}{}_{(J,F)}(1,2) \neq 0$。另一方面，若 $\varepsilon - \rho = \frac{3}{2}$，则条件 $\Upsilon^{\varepsilon}{}_{,\varepsilon-\frac{3}{2}(J,F)}(3,6,1,6) = 0 = \Upsilon^{\varepsilon}{}_{,\varepsilon-\frac{3}{2}(J,F)}(4,5,1,6)$ 中至少有一个不成立。

现在假设 $\varrho = 0$，也就是说，复结构 J 是阿贝尔的，因此我们可以取 $b = 1$。但在这种情况下，$\Theta^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}(1,2) \neq 0$ 显然成立。因此，没有任何联络是瞬子。

从现在起，我们考虑方程 (19)，并根据数对 (ϱ, b) 的取值，将研究分为三种情形：

- 若 $(\varrho, b) = (0,1)$，则可以验证，方程 $\Theta^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}(5,6) = 0$ 成立，当且仅当 $(1-2\varepsilon)\rho = 0$，因此 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 或 $\rho = 0$。对项 $\Upsilon^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}(1,3,1,3)$ 进行直接计算，可以证明在这两种情形下，方程 $\Upsilon^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}(1,3,1,3) = 0$ 成立，当且仅当 $(\varepsilon,\rho) = (1\,2\,,\,0)$。但对于后一个联络，可得 $\Theta^{\frac{1}{2}}{}_{,0\,(J,F)}(1,2) \neq 0$。因此，当 $(\varrho, b) = (0,1)$ 时，没有任何联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}$ 是瞬子。

- 在 $(\varrho, b) = (1,0)$ 的情况下，我们得到以下条件：

$$
\begin{aligned}
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,5,3,5) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)^2 u_1 = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,5,3,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)^2 u_2 = 0.
\end{aligned}
$$

利用 $u \neq 0$，可得 $\rho = \varepsilon + \frac{1}{2}$。现在，直接计算可得 $\Upsilon^{\varepsilon,\ \varepsilon+\frac{1}{2}(J,\ F)}(1,3,1,3) = 0$ 蕴含 $\varepsilon = 0$，进而得到 $\Theta^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}(5,6) \neq 0$。因此，对于 $(\varrho, b) = (1,0)$，不存在瞬子。

- 最后，我们来研究 $\varrho = 1$ 和 $b \neq 0$ 的情形。可得：

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,4) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left[(1+2\varepsilon-2\rho)^2 + 4\rho(1-2\varepsilon)\right] u_1 = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2,1,4) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)(3-2\varepsilon+2\rho)\,u_1 = 0,\\
\Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,5,1,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon-2\rho)(1-2\varepsilon+2\rho)\,u_1 = 0.
\end{aligned}
$$

- 若 $u_1 \neq 0$，则必有 $\rho = \varepsilon + \frac{1}{2}$，第一个方程化简为 $(\varepsilon + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \varepsilon) = 0$，从而得到两个可能值 $(\varepsilon,\rho) = (\frac{1}{2}, 1)$ 或 $(\varepsilon,\rho) = (-\frac{1}{2}, 0)$。可以验证，在这两种情况下，条件 $\Theta^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}(1,2) = 0$ 成立，当且仅当 $(b^2-u_2)^2 + 2s^2 - u_2^2 + 1 = 0$。然而，后一种情况不可能，因为 $s^2 > |u|^2$ 意味着 $2s^2 - u_2^2 > 0$。

- 假设 $u_1 = 0$（因此，$u_2 \neq 0$）。差值 $\Upsilon^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}(1,5,3,6) - \Upsilon^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}(2,5,3,5)$ 是 $(1+2\varepsilon-2\rho)^2(2s^2-b^2u_2)$ 的非零倍数，因此接下来我们将根据 $2s^2 - b^2u_2$ 是否为零来区分两种情况：

– 如果 $2s^2 \neq b^2u_2$，那么 $\rho = \varepsilon + \frac{1}{2}$。此外，我们得到

$$\begin{aligned}\Theta^{\varepsilon,\varepsilon+\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2\varepsilon)(1-2\varepsilon)(2s^2-b^2u_2) = 0,\\ \Upsilon^{\varepsilon,\varepsilon+\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,3,1,3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \varepsilon\left((b^2-u_2)^2 + 2s^2 - u_2^2 + 1\right) = 0.\end{aligned}$$

如上所述，该系统无解。

– 最后，我们考虑 $2s^2 = b^2u_2$ 的情形，因此可取 $u_2 = 2s^2/b^2$。注意，条件 $s^2 > |u|^2$ 转化为不等式 $b^4 - 4s^2 > 0$。直接计算得到以下方程：

$$\begin{aligned}\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2) - \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(3,4) = 0 &\Longleftrightarrow (1+2\varepsilon)^2 - 16\varepsilon\rho + 4\rho^2 = 0,\\ \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5,6) = 0 &\Longleftrightarrow (1+2\varepsilon)^2 - 16\varepsilon\rho + 4\rho^2 - 4(1-2\varepsilon)\rho(1+b^4-2s^2) = 0.\end{aligned}$$

作差可得 $(1-2\varepsilon)\rho(1+b^4-2s^2) = 0$，因此 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 或 $\rho = 0$（因为 $b^4 - 4s^2 > 0$）。现在，若 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，条件 $\Theta^{\frac{1}{2}}{}_{,\ \rho\,(J,F)}(5,6) = 0$ 化为 $(1-\rho)^2(b^4-4s^2) = 0$，这意味着 $\rho = 1$；然而，在这种情况下，可以验证 $\Theta^{\frac{1}{2}}{}_{,1\ (J,F)}(1,2) \neq 0$。类似地，若 $\rho = 0$，则 $\Theta^{\varepsilon}{}_{,0\ (J,F)}(5,6) = 0$ 化为 $(1+2\varepsilon)^2(b^4-4s^2) = 0$，因此 $\varepsilon = -\frac{1}{2}$，但再次有 $\Theta^{-\frac{1}{2}}{}_{,0\ (J,F)}(1,2) \neq 0$。

总之，当 $\varrho = 1$ 且 $b \neq 0$时，没有联络 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}$ 是瞬子，命题的证明到此完成。□

在下面的结果中，我们考虑底层李代数为 $\mathfrak{h}_{19}^-$ 的幂零流形。

命题 4.3. 设 (J,F) 是幂零流形 M上的不变平衡厄米结构，其底层李代数同构于 $\mathfrak{h}_{19}^-$。那么，联络 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}$ 绝不是瞬子。

证明. 李代数 $\mathfrak{h}_{19}^-$ 上的平衡几何描述可见 [33, 定理 2.11]。对于任意不变平衡厄米结构 (J,F)，存在一个由 1-形式构成的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及以下两组方程之一：

$$(20)\qquad \left\{\ de^1 = de^2 = 0,\quad de^3 = \tfrac{2s}{r}\,e^{15},\quad de^4 = \tfrac{2s}{r}\,e^{25},\quad de^5 = 0,\quad de^6 = \pm\tfrac{2}{rs}\,(e^{13}+e^{24});\right.$$

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} de^1 &= de^2 = 0,\\ de^3 &= \tfrac{s}{rtZ}\left[\pm\tfrac{t^2}{s^2}\,(e^{13}+e^{24}) \pm \tfrac{t^2}{s^2}(st+Z)\,(e^{25}-e^{16}) + e^{14} + \tfrac{1}{st+Z}\,e^{15}\right],\\ de^4 &= \tfrac{s}{rtZ}\left[e^{24} + \tfrac{1}{st+Z}\,e^{25}\right],\\ de^5 &= \tfrac{-s}{rtZ}\left[(st+Z)\,e^{24} + e^{25}\right],\\ de^6 &= \tfrac{s}{rtZ}\left[\pm\tfrac{t^2}{s^2}\tfrac{1}{st+Z}\,(e^{13}+e^{24}) \pm \tfrac{t^2}{s^2}\,(e^{25}-e^{16}) + (st+Z)\,e^{14} + e^{15}\right].\end{aligned}\right.$$

这里 $r,s,t \in \mathbb{R}^*$，并且在方程 (21) 中，我们有 $s^2t^2 > 1$和 $Z := \sqrt{s^2t^2-1}$。

我们回顾一下，J 上的任意复结构都是非幂零的，并且在同构意义下只有两种复结构 $J_0^{\pm}$。上述方程中的 $\pm$号分别对应于 $J = J_0^{\pm}$。

对于（20），直接计算可得

$$\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2)=0 \iff \big((\varepsilon-\tfrac12)^2+\rho^2\big)\,(1+s^4)=0,$$
$$\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5,6)=0 \iff \rho(\varepsilon-\tfrac12)+\varepsilon(\rho-\tfrac12)s^4=0,$$

而对于方程（21），我们得到

$$\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,2)=0 \iff ((\varepsilon-\tfrac12)^2+\rho^2)(s^4+t^4)=0,$$
$$\Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(3,5)=0 \iff \big((\varepsilon+\tfrac12)^2+2\varepsilon+\rho(\rho-4\varepsilon-2)\big)\,s^4-\big((\varepsilon-\tfrac12)^2+\rho(\rho-4\varepsilon+2)\big)\,t^4=0.$$

显然，在这两种情况下，相应的方程组在 (ε,ρ) 中均无解，因此引理 3.6 中的 (16) 式始终不成立，故联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}$ 不是一个瞬子。□

5. Instantons on balanced solvmanifolds

在本节中，我们证明关于可解流形的定理 3.5。回顾第 3 节的讨论，我们需要研究底层代数同构于以下任一可解李代数的可解流形上的平衡Hermitian几何： $\mathfrak{g}_1$、 $\mathfrak{g}_2^0$、 $\mathfrak{g}_2^{\alpha>0}$、 $\mathfrak{g}_3$、 $\mathfrak{g}_5$ 或 $\mathfrak{g}_8$。

与幂零情形的一个主要区别是，文献中没有适用于可解李代数的适配标架，因此我们将针对每种情况分别找出这些标架。

在本节中， J 始终表示具有非零闭的 (3, 0)-形式的不变复结构。给定复结构 J 的一个 (1,0)-基 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$，任意不变厄米度量 F 均可表示为

$$2\,F = i\,(r^2\omega^{1\bar1}+s^2\omega^{2\bar2}+t^2\omega^{3\bar3})+u\omega^{1\bar2}-\bar u\omega^{2\bar1}+v\omega^{2\bar3}-\bar v\omega^{3\bar2}+z\omega^{1\bar3}-\bar z\omega^{3\bar1}, \tag{22}$$

其中系数 r^2、 s^2、 t^2 是非零实数，而 u、 v、 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $r^2s^2>|u|^2$、$s^2t^2>|v|^2$、$r^2t^2>|z|^2$ 和 $r^2s^2t^2+2\mathfrak{Re}\,(i\bar u\bar v z)>t^2|u|^2+r^2|v|^2+s^2|z|^2$。 F 的平衡条件对这些度量系数施加了限制；为了找到 $(J,\,F)$ 的适配基，必须考虑这些限制。下文中，我们用“对角的”来指称一种平衡度量 F：对于某个 (1,0)-基，其表达式 (22) 中含有 $u=v=z=0$。

我们将从 [10] 中得到的复结构分类入手，以便在每个平衡厄米可解流形上寻找适配标架，然后研究关联的 (ε,ρ)-平面上任意联络 $\nabla^{\varepsilon,\ \rho\,(J,\ F)}$ 的瞬子条件。

在研究底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_1$、 $\mathfrak{g}_2^\alpha$ 或 $\mathfrak{g}_8$ 的可解流形时，将使用下面的引理。

引理 5.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个赋有复结构 J 的 6维李代数，该复结构由复方程定义

$$d\omega^1=K\,\omega^{13}+L\,\omega^{1\bar3},\qquad d\omega^2=-K\,\omega^{23}-L\,\omega^{2\bar3},\qquad d\omega^3=0, \tag{23}$$

其中 K、$L\in\mathbb{C}$，且 $L\neq0$。设 F 是由 (22) 给出的任意厄米度量。则有：

(a) 度量 F 是平衡的，当且仅当 $v=z=0$。

(b) 对任意平衡度量 F，存在一个 (1,0)-基 $\{\tau^k\}_{k=1}^3$，使得 $F=\frac{i}{2}(\tau^{1\bar1}+\tau^{2\bar2}+\tau^{3\bar3})$，并且

$$d\tau^1=\frac{K}{t}\tau^{13}+\frac{L}{t}\tau^{1\bar3},\quad d\tau^2=\frac{2uK}{t\sqrt{1-|u|^2}}\tau^{13}+\frac{2uL}{t\sqrt{1-|u|^2}}\tau^{1\bar3}-\frac{K}{t}\tau^{23}-\frac{L}{t}\tau^{2\bar3},\quad d\tau^3=0.$$

（c）由 $e^{2k-1}+i\,e^{2k}:=\tau^k$, $1\le k\le3$ 定义的 $\mathfrak{g}^*$ 的实基 $\{e^1,\dots,e^6\}$ 满足（15）。

证明。度量 F 是平衡的，当且仅当 F^2 是闭形式，等价地， $\bar\partial F\wedge F=0$。利用（23）可得

$$4\,\bar\partial F\wedge F = L\,(u\bar z - ir^2\bar v)\omega^{13\bar1\bar2\bar3} - L\,(is^2\bar z+\bar u\bar v)\omega^{23\bar1\bar2\bar3}.$$

由于 $L\neq 0$, F是平衡的，当且仅当 $u\bar z - ir^2\bar v = 0 = is^2\bar z+\bar u\bar v$。现在， $r^2s^2>|u|^2$ 意味着后一个条件等价于 $v=z=0$。这就证明了 (a)。

注意，我们可以对度量系数 r 和 s进行归一化，使得任意平衡厄米结构 (J,F) 仍具有满足 (23) 的 (1,0)-基，且度量可写为

$$2\,F = i\,\omega^{1\bar1} + i\,\omega^{2\bar2} + i\,t^2\omega^{3\bar3} + u\,\omega^{1\bar2} - \bar u\,\omega^{2\bar1},\quad t\in\mathbb{R}^*,\quad u\in\mathbb{B}=\{u\in\mathbb{C}\mid |u|<1\}. \tag{24}$$

因此， F 可以写成

$$2\,F = i\,(1-|u|^2)\,\omega^{1\bar1} + i\,\big(u\,\omega^1+i\,\omega^2\big)\wedge(\bar u\,\omega^{\bar1}-i\,\omega^{\bar2}) + it^2\omega^{3\bar3} = \ i(\tau^{1\bar1}+\tau^{2\bar2}+\tau^{3\bar3}),$$

其中， $\{\tau^k\}_{k=1}^3$ 是由.....定义的 (1,0)-基。

$$\tau^1=\sqrt{1-|u|^2}\,\omega^1,\quad \tau^2 = u\,\omega^1+i\,\omega^2,\quad \tau^3 = t\,\omega^3. \tag{25}$$

直接计算表明，复结构方程 (23) 在此基下可表示为 (b) 中的形式。

最后，(c) 可通过考虑 τ^k、 $1\le k\le 3$ 的实部和虚部，即 $e^1+i\,e^2:=\tau^1$、 $e^3+i\,e^4:=\tau^2$ 和 $e^5+i\,e^6:=\tau^3$，由 (b) 得出。□

在以下结果中，我们从以 $\mathfrak{g}_1$ 为底层李代数的可解流形开始。

命题 5.2. 设 M 是一个 6 维可解流形，其底层可解李代数同构于 $\mathfrak{g}_1$。对于每个不变平衡厄米结构 (J,F)，在 M 上存在一组 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及以下方程:

$$\begin{cases} de^1 &= \frac{2}{t}e^{15},\\ de^2 &= \frac{2}{t}e^{25},\\ de^3 &= \frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15} - \frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25} - \frac{2}{t}e^{35},\\ de^4 &= \frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15} + \frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25} - \frac{2}{t}e^{45},\\ de^5 &= de^6 = 0, \end{cases} \tag{26}$$

其中 $t\in\mathbb{R}^*$ 和 $u=u_1+i\,u_2\in\mathbb{B}=\{u\in\mathbb{C}\mid |u|<1\}$。

此外，联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho\,(J,\,F)}$ 是瞬子，当且仅当 $(\varepsilon,\rho)=(0,\,1\,2)$ 且 $u=0$；换言之，平衡度量 F （非 K¨ahler）是“对角的”，而 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho\,\,(J,\,F)}$ 恰好是陈联络（它是平坦的）。

证明。根据 [10, 命题 3，3], 在同构意义下， J 李代数 $\mathfrak{g}_1$上只有一个具有闭的 (3, 0)-形式的复结构。其复方程由带有 $K=L=1$ 的 (23) 给出。然后，根据引理 5.1，我们考虑在 M 上由 (c) 定义的不变 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$。现在，根据引理 5.1 (b) 中给出的关于 $K=L=1$ 的复方程进行直接计算，我们得到 (26)。

接下来，我们研究瞬子条件。可以验证，方程 $\Theta^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}(5,\,6)=0$ 成立，当且仅当 $\varepsilon(1-2\rho)=0$，因此 $\varepsilon=0$ 或 $\rho=\frac12$。但是，若 $\varepsilon=0$，则 $\Upsilon^{0,\rho\,(J,F)}(1,\,3,\,1,\,3)=0$ 意味着 $1-2\rho=0$，所以 $\rho=\frac12$。另一方面，若 $\rho=\frac12$，则 $\Upsilon^{\varepsilon,\,1\,2\,(J,F)}(1,\,3,\,1,\,3)=0$ 意味着 $\varepsilon=0$。因此，无论如何，我们都归结为 $(\varepsilon,\rho)=(0,\,1\,\underline{\,2})$，即陈联络。

现在，令 $(\varepsilon,\rho)=(0,\frac{1}{2})$。此时，瞬子条件等价于项 $\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(i,j)$（其中 $1\le i<j\le 4$）消失。此外，$\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,2)=-\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(3,4)$，$\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,3)=\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(2,4)$ 以及 $\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,4)=-\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(2,3)$ 均成立，因此瞬子条件 (16) 等价于以下三项消失

$$\Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,2)=\frac{-8\,|u|^2}{t^2(1-|u|^2)},\qquad \Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,3)=\frac{-8\,u_2}{t^2\sqrt{1-|u|^2}},\qquad \Theta^{0,\frac{1}{2}}_{(J,F)}(1,4)=\frac{8\,u_1}{t^2\sqrt{1-|u|^2}},$$

这又等价于 $u=0$（即平衡度量 F 在按基 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$ 展开时是对角的）。由于 $dF=-\frac{4}{t}e^{125}+\frac{4}{t}e^{345}$，度量 F 不是 K¨ahler。 (24)

最后，当 $u=0$ 陈联络的所有曲率形式恒等于零时，该瞬子是平坦的。□

在下面的结果中，我们考虑底层李代数为 $\mathfrak{g}_2^0$ 的可解流形。回顾一下，这些可解流形存在 K¨ahler 的不变厄米度量。

命题5.3. 设 M 是一个底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_2^0$的可解流形。对于每个不变平衡厄米结构(J,F)，存在 M上的1-形式基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足(15)和方程

$$\begin{cases} de^1 = -\frac{2}{t}e^{25},\\ de^2 = \frac{2}{t}e^{15},\\ de^3 = -\frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15}-\frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25}+\frac{2}{t}e^{45},\\ de^4 = \frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15}-\frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25}-\frac{2}{t}e^{35},\\ de^5 = de^6=0, \end{cases} \tag{27}$$

其中 $t\in\mathbb{R}^*$ 和 $u=u_1+i\,u_2\in\mathbb{B}=\{u\in\mathbb{C}\mid |u|<1\}$。

此外，如果平衡度量不是 K¨ahler 度量，那么 $\nabla^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}$ 永远不是瞬子。

K¨ahler 度量对应于 $u=0$ 中的 (27)；在这种情况下，联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}$与 Levi-Civita 联络重合，其所有曲率形式恒为零。

证明。由 [10, 命题 3.3] 可知，在同构意义下，李代数 $\mathfrak{g}_2^0$上存在唯一一个带有闭的 (3, 0)-形式的复结构 J，其复方程由 (23) 给出，适用于 $K=L=i$。利用引理 5.1，我们考虑 M 上由 (c) 定义的 $\{e^k\}_{k=1}^6$ 不变 1-形式基。现在，通过直接计算可从引理 5.1 (b) 中给出的复结构方程推出 (27)，其中 $K=L=i$。

接下来，我们研究任意联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}$ 的瞬子条件。首先，我们注意到方程 $\Theta^{\varepsilon,\rho}{}_{(J,F)}(1,2)=-4^{((1-2\varepsilon)^2+4\rho^2)t^2}\underbrace{\frac{|u|^2}{(1-|u|^2)}=0}$意味着 $(\varepsilon,\rho)=(\frac{1}{2},0)$，或者 $u=0$。

在 $(\varepsilon,\rho)=(\frac{1}{2},0)$ 的情况下，条件 $\Theta^{\frac{1}{2},0}{}_{(J,F)}(5,6)=\underbrace{\frac{16|u|^2}{t^2}(1-|u|^2)=0}$意味着 $u=0$。因此，在非 K¨ahler 的度量下不存在瞬子。

显然，当 $u=0$ 时，由于 F 是 K¨ahler，所有联络都是 Levi-Civita 联络。在这种情况下，所有曲率形式都恒等于零。□

在下述结果中，我们研究底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_2^\alpha$、其中某个 $\alpha>0$ 的可解流形。回顾一下，存在可数多个不同的 α，使得与 $\mathfrak{g}_2^\alpha$ 对应的连通单连通可解李群具有一个格 [10, 命题 2.10]。

命题 5.4. 设 M 是底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_2^\alpha$、其中某个 $\alpha>0$ 的可解流形。对于 M 上的每个不变平衡厄米结构（J, F），存在一组 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及下列方程：

$$
(28)\qquad \begin{cases} de^1 = \frac{2\delta}{t}\cos\theta\, e^{15} - \frac{2}{t}\sin\theta\, e^{25}, \\ de^2 = \frac{2}{t}\sin\theta\, e^{15} + \frac{2\delta}{t}\cos\theta\, e^{25}, \\ de^3 = \frac{4\delta u_1\cos\theta - 4u_2\sin\theta}{t\sqrt{1-|u|^2}} e^{15} - \frac{4\delta u_2\cos\theta + 4u_1\sin\theta}{t\sqrt{1-|u|^2}} e^{25} - \frac{2\delta}{t}\cos\theta\, e^{35} + \frac{2}{t}\sin\theta\, e^{45}, \\ de^4 = \frac{4\delta u_2\cos\theta + 4u_1\sin\theta}{t\sqrt{1-|u|^2}} e^{15} + \frac{4\delta u_1\cos\theta - 4u_2\sin\theta}{t\sqrt{1-|u|^2}} e^{25} - \frac{2}{t}\sin\theta\, e^{35} - \frac{2\delta}{t}\cos\theta\, e^{45}, \\ de^5 = de^6 = 0, \end{cases}
$$

其中 $\delta=\pm1$ 和 $\theta\in(0,\pi/2)$，且 $t\in\mathbb{R}^*$ 和 $u=u_1+i\,u_2\in\mathbb{B}=\{u\in\mathbb{C}\mid |u|<1\}$。

此外，联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}(J,F)$ 是瞬子，当且仅当 $(\varepsilon,\rho)=(0,12)$ 且 $u=0$；也就是说，非 Kähler 平衡度量 F 是“对角的”，而 $\nabla^{\varepsilon,\rho}(J,F)$ 是陈联络（它是平坦的）。

证明。李代数 $\mathfrak{g}_2^\alpha$ 上带有闭的 (3, 0)-形式的任意复结构 J，在同构意义下，均由方程 (23) 给出，其中 $K=L=\delta\cos\theta+i\sin\theta$，且 $\delta=\pm1$ 和 $\theta\in(0,\pi/2)$。注意，$\alpha=\cos\theta/\sin\theta$。于是，根据引理 5.1，我们考虑由 (c) 定义在 M 上的不变 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$。现在，由引理 5.1 (b) 中给出的、适用于 $K=L=\delta\cos\theta+i\sin\theta$ 的复方程直接计算，可得 (28)。

现在，我们将求出满足瞬子条件 (16) 的联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}(J,F)$。特别考虑以下条件：

$$
\begin{aligned} \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,3,1,3)=0 &\iff \tfrac{(1+2\varepsilon-2\rho)(1-2\varepsilon-2\rho)(\cos^2\theta+|u|^2\sin^2\theta)}{t^2(1-|u|^2)}=0, \\ \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5,6)=0 &\iff \tfrac{\varepsilon(1-2\rho)(\cos^2\theta+|u|^2\sin^2\theta)}{t^2(1-|u|^2)}=0. \end{aligned}
$$

利用 $\theta\in(0,\pi/2)$，我们得到 $(1-2\rho)^2-4\varepsilon^2=0=\varepsilon(1-2\rho)$。因此，$(\varepsilon,\rho)=(0,12)$，也就是说，我们归结为研究陈联络。然而，现在我们有 $\Theta^0{}_{,12(J,F)}(1,2)=\frac{-8|u|^2}{t^2(1-|u|^2)}=0$，这意味着 $u=0$，即度量是对角的（在基 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$ 下按照（24）表示时）。注意，$dF=-\frac{4\delta}{t}\theta(\text{余弦})(e^{12}-e^{34})\wedge e^5\neq0$，因此该对角度量不是 Kähler 度量。

最后，当 $u=0$ 陈联络的所有曲率形式恒等于零时，它就是一个平坦瞬子。□

注 5.5. 请注意，$\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2^\alpha$ 恰好是推论 2.10 中具有余维一阿贝尔理想的可解李代数。李代数具有这一性质的李群 G 称为近阿贝尔李群。Pujia 在 [29] 研究了六维近阿贝尔李群上不变平衡结构的 Gauduchon 联络的瞬子条件，因此，命题 5.2、5.3 和 5.4 将这一研究拓展到了度量联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}$ 的整个（ε，ρ）平面。

在接下来的两个命题中，我们证明底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_3$ 或 $\mathfrak{g}_5$ 的可解流形不提供任何瞬子。

命题 5.6. 设 M 是一个底层李代数与 $\mathfrak{g}_3$ 同构的可解流形。对于每个不变平衡厄米结构 (J,F)，在 M 上存在一组 1- 形式基 $\{e^k\}_{k=1}^6$

满足 (15) 及以下方程:

$$
(29)\qquad \begin{cases} de^1 \;=\; de^2 = 0, \\ de^3 \;=\; \frac{v_2}{rt^2}\, e^{13} + \frac{v_1}{rt^2}\, e^{14} - \frac{\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}{rt^2}\, e^{16}, \\ de^4 \;=\; \frac{2xv_2}{rt^2}\, e^{13} + \frac{2xv_1}{rt^2}\, e^{14} - \frac{2x\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}{rt^2}\, e^{16} + \frac{v_2-2xv_1}{rt^2}\, e^{23} + \frac{v_1+2xv_2}{rt^2}\, e^{24} \\ \qquad + \frac{2x\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}{rt^2}\, e^{25} - \frac{\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}{rt^2}\, e^{26}, \\ de^5 \;=\; \frac{t^4+2xv_2(v_1-2xv_2)}{2xrt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{13} + \frac{v_1(v_1-2xv_2)}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{14} - \frac{v_1-2xv_2}{rt^2}\, e^{16} \\ \qquad - \frac{t^4+v_2^2-2xv_1v_2}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{23} + \frac{t^4-2xv_2(v_1+2xv_2)}{2xrt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{24} - \frac{2xv_2}{rt^2}\, e^{25} + \frac{v_2}{rt^2}\, e^{26}, \\ de^6 \;=\; \frac{t^4+v_2(v_2+2xv_1)}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{13} + \frac{v_1(v_2+2xv_1)}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{14} - \frac{v_2+2xv_1}{rt^2}\, e^{16} \\ \qquad + \frac{v_1(v_2-2xv_1)}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{23} + \frac{v_1(v_1+2xv_2)}{rt^2\sqrt{s^2t^2-|v|^2}}\, e^{24} + \frac{2xv_1}{rt^2}\, e^{25} - \frac{v_1}{rt^2}\, e^{26}, \end{cases}
$$

其中 $x \in \mathbb{R}^+$，且 r、s、$t \in \mathbb{R}^*$ 和 $v = v_1 + i\, v_2 \in \mathbb{C}$ 满足 $s^2t^2 > |v|^2$。

此外，$\nabla^{\varepsilon,\ \rho\ (J,\ F)}$ 永远不是一个瞬子。

证明。正如 [10, 命题 3.4], 所证明的，李代数 $\mathfrak{g}_3$ 上的任意带有闭的 (3, 0)-形式的复结构 J，在同构意义下均由以下方程给出

$$
(30)\qquad d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = -\frac{1}{2}\omega^{13} - \frac{1+2xi}{2}\omega^{1\bar3} + xi\,\omega^{3\bar1}, \quad d\omega^3 = \frac{1}{2}\omega^{12} + \frac{2x-i}{4x}\omega^{1\bar2} + \frac{i}{4x}\,\omega^{2\bar1},
$$

其中 $x \in \mathbb{R}^+$。

不变厄米度量 F 是平衡的，当且仅当它由 (22) 给出，且满足 $u = z = 0$（详情见 [10, 定理 4.5] 的证明）。考虑由以下方式定义的 (1,0)-基 $\{\tau^k\}_{k=1}^3$

$$
(31)\qquad \tau^1 = r\,\omega^1, \quad \tau^2 = \frac{\Delta}{t}\,\omega^2, \quad \tau^3 = \frac{v}{t}\,\omega^2 + it\,\omega^3,
$$

其中 $\Delta = \sqrt{s^2t^2 - |v|^2}$。因此，该度量可写为 $F = \frac{i}{2}(\tau^{1\bar1} + \tau^{2\bar2} + \tau^{3\bar3})$，复结构方程 (30) 在此基下表示为

$$
(32)\qquad \begin{cases} d\tau^1 \;=\; 0, \\ d\tau^2 \;=\; -\frac{v\,i}{2rt^2}\tau^{12} + \frac{\Delta\,i}{2rt^2}\tau^{13} - \frac{(2x-i)\bar v}{2rt^2}\tau^{1\bar2} + \frac{(2x-i)\Delta}{2rt^2}\tau^{1\bar3} - \frac{xv}{rt^2}\tau^{2\bar1} + \frac{x\Delta}{rt^2}\tau^{3\bar1}, \\ d\tau^3 \;=\; \frac{(t^4-v^2)\,i}{2rt^2\Delta}\tau^{12} + \frac{v\,i}{2rt^2}\tau^{13} + \frac{t^4-4x^2|v|^2+2x(|v|^2+t^4)\,i}{4xrt^2\Delta}\tau^{1\bar2} + \frac{(2x-i)v}{2rt^2}\tau^{1\bar3} \\ \qquad -\frac{4x^2v^2+t^4}{4xrt^2\Delta}\tau^{2\bar1} + \frac{xv}{rt^2}\tau^{3\bar1}. \end{cases}
$$

Tak按照引理 5.1 (c) 中的实基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，并利用 (32)，我们得到 (29)).

接下来，我们研究 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 的瞬子条件。首先，我们注意到，条件$\Theta^{\varepsilon,\rho\,(J,F)}(1,2) = -((1-2\varepsilon)^2+4\rho^2)(1+4x^2)\underline{(4x^2s^4+t^4)16x^2r^2(s^2t^2-|v|^2)=0}$直接意味着 $(\varepsilon,\rho) = (\frac{1}{2},0)$。此外，对于这些值，我们得到关于 v_1 和 v_2 的以下线性方程组:

$$
\begin{aligned} \Theta^{\frac12,0}_{(J,F)}(3,5) = 0 \iff (1+4x^2)t^2v_1 + 4x(s^2+t^2)v_2 = 0, \\ \Theta^{\frac12,0}_{(J,F)}(3,6) = 0 \iff -4x(s^2-t^2)v_1 + (1+4x^2)t^2v_2 = 0. \end{aligned}
$$

由于行列式等于 $(1-4x^2)^2t^4+16x^2s^4>0$，我们有 $v_1=0=v_2$。但在这种情况下得到的是

$$\Upsilon^{\frac{1}{2},0}_{(J,F)}(1,3,1,4)=\frac{2x^2s^2(s^2+t^2)+t^4}{2xr^2s^2t^2}\neq 0,$$

因此，(ε,ρ)-平面中不存在瞬子。 □

命题 5.7. 设 M 是一个可解流形，其底层李代数与 $\mathfrak{g}_5$ 同构。对于 M 上的每个不变平衡厄米结构 (J,F)，都存在一个 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及方程

$$\text{(33)}\qquad \begin{cases} de^1 &= \frac{2}{t}e^{15},\\ de^2 &= \frac{2}{t}e^{25},\\ de^3 &= \frac{4u_1}{t\sqrt{r^2s^2-u_1^2}}e^{15}-\frac{2}{t}e^{35},\\ de^4 &= \frac{4u_1}{t\sqrt{r^2s^2-u_1^2}}e^{25}-\frac{2}{t}e^{45},\\ de^5 &= 0,\\ de^6 &= \frac{2t}{\sqrt{r^2s^2-u_1^2}}e^{13}+\frac{2t}{\sqrt{r^2s^2-u_1^2}}e^{24}, \end{cases}$$

其中 r、s、$t\in\mathbb{R}^*$ 和 $u_1\in\mathbb{R}$ 满足 $r^2s^2>u_1^2$。

此外，$\nabla^{\varepsilon,\rho}(J,F)$ 从来不是瞬子。

证明。根据 [10, 命题 3.6] 在李代数 $\mathfrak{g}_5$ 上，至多存在一个具有闭的 (3, 0)-形式且复结构方程为下式的复结构 J，其同构意义下唯一：

$$\text{(34)}\qquad d\omega^1=\omega^1\wedge(\omega^3+\omega^{\bar3}),\quad d\omega^2=-\omega^2\wedge(\omega^3+\omega^{\bar3}),\quad d\omega^3=\omega^{1\bar2}+\omega^{2\bar1}.$$

不变厄米度量 F 是平衡的，当且仅当它由 (22) 给出，其中 $u=\bar u=u_1\in\mathbb{R}$ 和 $v=z=0$ [10, 定理 4.5]。就由下式定义的 (1,0)-基 $\{\tau^k\}_{k=1}^3$ 而言，

$$\tau^1=\frac{\Delta}{s}\,\omega^1,\quad \tau^2=\frac{u_1}{s}\,\omega^1+is\,\omega^2,\quad \tau^3=t\,\omega^3,$$

其中 $\Delta=\sqrt{r^2s^2-u_1^2}$，度量可写为 $F=\frac{i}{2}(\tau^{1\bar1}+\tau^{2\bar2}+\tau^{3\bar3})$。复结构方程 (34) 在此基下表示为

$$\text{(35)}\qquad \begin{cases} d\tau^1 &= \frac{1}{t}\tau^{13}+\frac{1}{t}\tau^{1\bar3},\\ d\tau^2 &= \frac{2u_1}{t\Delta}\tau^{13}+\frac{2u_1}{t\Delta}\tau^{1\bar3}-\frac{1}{t}\tau^{23}-\frac{1}{t}\tau^{2\bar3},\\ d\tau^3 &= \frac{it}{\Delta}\tau^{1\bar2}-\frac{it}{\Delta}\tau^{2\bar1}, \end{cases}$$

取实 基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，如引理 5.1 (c) 所示，由 (35) 可得方程 (33)。

现在，我们研究联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho}(J,F)$，它们是瞬子。可以验证，条件 $\Upsilon^{\varepsilon,\rho}(J,F)(1,5,3,6)=0$ 成立，当且仅当 $\rho=\varepsilon+\frac{1}{2}$。在这种情况下，有 $\Upsilon^{\varepsilon,\varepsilon+\frac{1}{2}}(J,F)(1,3,1,3)=0$，当且仅当 $\varepsilon=0$。但取 $(\varepsilon,\rho)=(0,1\,2)$ 后，我们得到 $\Theta^{0,1\,2}(J,F)(5,6)=\frac{4t^2}{r^2s^2-u_1^2}$，它永不为零。因此，在 (ε,ρ)- 平面内不存在瞬子。□

以下两个命题讨论底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_8$ 的可解流形。赋予其复平行化结构后，它便成为著名的中村流形 [26]。以下结果研究这一情形，而在命题 5.10 中，我们关注那些并非复平行化的复结构（具有闭 (3,0)-形式）。

命题 5.8. 设 M 是一个底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_8$ 的可解流形。设 J 是其复平行化结构， F 是任意不变平衡厄米度量。那么，在 M 上存在一组 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 及以下方程

$$
(36)\qquad \begin{cases} de^1 \;=\; -Ye^{16} - Ye^{25}, \\ de^2 \;=\; Ye^{15} - Ye^{26}, \\ de^3 \;=\; Ze^{15} - Te^{16} - Te^{25} - Ze^{26} + Ye^{36} + Ye^{45}, \\ de^4 \;=\; Te^{15} + Ze^{16} + Ze^{25} - Te^{26} - Ye^{35} + Ye^{46}, \\ de^5 \;=\; de^6 = 0, \end{cases}
$$

其中 Y、Z、$T \in \mathbb{R}$，且 $Y > 0$。此外，联络 $\nabla^{\varepsilon,\,\rho\,(J,\,F)}$ 是瞬子，当且仅当它是陈联络（其为平坦的）。

证明。众所周知, 复平行化结构 J 在 $\mathfrak{g}_8$ 上由以下方程定义：

$$
(37)\qquad d\omega^1 = 2i\,\omega^{13},\quad d\omega^2 = -2i\,\omega^{23},\quad d\omega^3 = 0,
$$

由 (22) 给出的任意度量 F 都是平衡的。考虑由下式定义的 (1,0)-基 $\{\sigma^k\}_{k=1}^3$：

$$
\sigma^1 = \omega^1,\quad \sigma^2 = -\frac{iu}{s^2}\,\omega^1 + \omega^2 + \frac{i\bar{v}}{s^2}\,\omega^3,\quad \sigma^3 = \omega^3.
$$

那么，复结构方程 (37) 在此基下表示为：

$$
(38)\qquad d\sigma^1 = 2i\,\sigma^{13},\quad d\sigma^2 = \frac{4u}{s^2}\,\sigma^{13} - 2i\,\sigma^{23},\quad d\sigma^3 = 0,
$$

度量 F 可写为：

$$
F = \frac{i}{2}r'^2\sigma^{1\bar{1}} + \frac{i}{2}s'^2\sigma^{2\bar{2}} + \frac{i}{2}t'^2\sigma^{3\bar{3}} + \frac{z'}{2}\sigma^{1\bar{3}} - \frac{\bar{z'}}{2}\sigma^{3\bar{1}},
$$

其中 $r'^2 = r^2 - \frac{|u|^2}{s^2}$、$s'^2 = s^2$、$t'^2 = t^2 - \frac{|v|^2}{s^2}$ 和 $z' = z + \frac{iuv}{s^2}$。

设 $\Delta' = \sqrt{r'^2t'^2 - |z'|^2}$。现在，根据由 $\{\tau^k\}_{k=1}^3$ 定义的新 (1,0)-基，得到

$$
\tau^1 = r'\,\sigma^1 + \frac{i\bar{z'}}{r'}\,\sigma^3,\quad \tau^2 = s'\,\sigma^2,\quad \tau^3 = \frac{\Delta'}{r'}\,\sigma^3,
$$

度量为 $F = \frac{i}{2}(\tau^{1\bar{1}} + \tau^{22} + \tau^{33})$，复结构方程 (38) 表示为

$$
(39)\qquad \begin{cases} d\tau^1 \;=\; \frac{2r'i}{\Delta'}\,\tau^{13}, \\ d\tau^2 \;=\; \frac{4u}{s'\Delta'}\,\tau^{13} - \frac{2r'i}{\Delta'}\,\tau^{23}, \\ d\tau^3 \;=\; 0. \end{cases}
$$

因此，取引理 5.1 (c) 中的实基 $\{e^1, \dots, e^6\}$，由 (39) 可得到带有 $Y = \frac{2r'}{\Delta'}$ 和 $Z + iT = \frac{4u}{s'\Delta'}$ 的 (36)。注意到 $Y \neq 0$，我们总可以假设 $Y > 0$（只需取 $-e^j$ 作为 $j = 5,\ 6$）。

接下来，我们研究联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 的瞬子条件。由于 $Y > 0$，由以下两个方程可知

$$
\begin{aligned} \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1,3,1,3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad ((1-2\rho)^2 - 4\varepsilon^2)(2Y^2 + Z^2 + T^2) = 0, \\ \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5,6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \varepsilon\,(1-2\rho)(2Y^2 + Z^2 + T^2) = 0, \end{aligned}
$$

由此可得 $(\varepsilon, \rho) = (0, \frac{1}{2})$，也就是说，我们只需研究陈联络。现在，通过直接计算可以验证，对于任意度量，瞬子条件都成立，因为陈联络的所有曲率形式均为零。

总之，对于任意 J-厄米度量 F，陈联络都是平坦瞬子。注意， $dF = 2Y(e^{12} - e^{34}) \wedge e^6 + (e^{13} + e^{24}) \wedge (Te^5 + Ze^6) - (e^{14} - e^{23}) \wedge (Ze^5 - Te^6) \neq 0$。□

注 5.9. 方程 (36) 中的系数 $Y, Z, T \in \mathbb{R}$ 与 (22) 中的度量系数 $r, s, t \in \mathbb{R}^*$ 和 $u, v, z \in \mathbb{C}$ 相关。事实上，根据命题 5.8 的证明，我们有$Y = Y(r, s, t, u, v, z) = \frac{2r'}{\Delta'}$, $Z = Z(r, s, t, u, v, z) = \frac{4u_1}{s'\Delta'}$, 以及 $T = T(r, s, t, u, v, z) = \frac{4u_2}{s'\Delta'}$, 其中$r'^2 = r^2 - \frac{|u|^2}{s^2}$, $s'^2 = s^2$, $t'^2 = t^2 - \frac{|v|^2}{s^2}$, $z' = z + \frac{iuv}{s^2}$ 和 $\Delta' = \sqrt{r'^2 t'^2 - |z'|^2}$。

命题 5.10. 设 M 是一个可解流形，其底层李代数同构于 $\mathfrak{g}_8$，并赋有一个不变的 J，但它不是复平行化的，且允许存在平衡度量。那么，对于每个不变平衡厄米结构 (J, F), M 上都存在一组 1-形式的基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，满足 (15) 以及以下方程:

$$
(40)\qquad \begin{cases} de^1 = -\frac{2a}{t}e^{15} - \frac{2}{t}e^{16} + \frac{2b}{t}e^{25}, \\ de^2 = -\frac{2b}{t}e^{15} - \frac{2a}{t}e^{25} - \frac{2}{t}e^{26}, \\ de^3 = -\frac{4(a\,u_1 - b\,u_2)}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15} - \frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{16} + \frac{4(b\,u_1 + a\,u_2)}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25} + \frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{26} \\ \qquad + \frac{2a}{t}e^{35} + \frac{2}{t}e^{36} - \frac{2b}{t}e^{45}, \\ de^4 = -\frac{4(b\,u_1 + a\,u_2)}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{15} - \frac{4u_2}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{16} - \frac{4(a\,u_1 - b\,u_2)}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{25} - \frac{4u_1}{t\sqrt{1-|u|^2}}e^{26} \\ \qquad + \frac{2b}{t}e^{35} + \frac{2a}{t}e^{45} + \frac{2}{t}e^{46}, \\ de^5 = de^6 = 0, \end{cases}
$$

其中 $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* - \{(0, -1)\}$，以及 $t \in \mathbb{R}^*$和 $u = u_1 + i\,u_2 \in \mathbb{B} = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1\}$

此外，联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho(J,F)}$是一个瞬子，当且仅当 $(\varepsilon, \rho) = (0, 1/2)$ 且 $u = 0$；也就是说，(非 Kähler) 平衡度量 F 是“对角的”，并且 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 是陈联络（它是平坦的）。

证明。根据 [10, 命题 3.7 和定理 4.5], , 李代数 $\mathfrak{g}_8$ 上任一具有闭的 (3, 0)-形式且允许平衡度量的复结构 J，在同构意义下，均由形如 (23) 的复结构方程给出，其中 $K = -A + i$ 且 $L = -A - i$，这里 $A \in \mathbb{C}$ 且 $\mathfrak{Im}\, A \neq 0$。当且仅当 $A = -i$时，该结构是复平行化的，因此接下来我们假设 $A = a + b\,i$，其中 $b \neq 0$ 且 $(a, b) \neq (0, -1)$。根据引理 5.1，我们考虑 (c) 中定义在 M 上的不变 1-形式的基$\{e^k\}_{k=1}^6$。现在，对引理 5.1 (b) 中给出的复方程进行直接计算，对于 $K = -a + (1 - b)i$ 和 $L = -a - (1 + b)i$，即可得到 (40)。

现在，联络 $\nabla^{\varepsilon,\rho\ (J,F)}$ 的瞬子条件意味着

$$
\begin{aligned} \Upsilon^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(1, 3, 1, 3) = 0 \iff ((1 - 2\rho)^2 - 4\varepsilon^2)(1 + a^2 + b^2|u|^2) = 0, \\ \Theta^{\varepsilon,\rho}_{(J,F)}(5, 6) = 0 \iff \varepsilon\,(1 - 2\rho)(1 + a^2 + b^2|u|^2) = 0. \end{aligned}
$$

因此，$(\varepsilon, \rho) = (0, 1/2)$，于是我们只需研究陈联络。但直接计算表明， $\Theta^{0}_{,1/2(J,F)}(1, 2) = 0$当且仅当 $(a^2 + (1 + b)^2)|u|^2 = 0$，因此 $u = 0$（即平衡度量 F 在基 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$下写成 (24) 时是对角的）。此外，在这种情况下，所有曲率形式都恒等于零。注意，

$dF = \frac{4a}{t}e^{125} + \frac{4}{t}e^{126} - \frac{4a}{t}e^{345} - \frac{4}{t}e^{346} \neq 0$，也就是说，度量 F 不是 Kähler。□

注 5.11. 值得指出的是，第 4 节和第 5 节给出的适配方程不仅完整描述了各自流形上不变平衡厄米结构的空间，还导出了一个构造性逆向结果。换言之，对于

任意一组方程，都可以应用以下构造过程，我们以命题 5.2 为例加以说明：任取 $t \in \mathbb{R}^*$ 和 $u = u_1 + i\,u_2 \in \mathbb{B} = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1\}$，可以验证方程 (26) 满足 $d^2 e^k = 0$、$1 \le k \le 6$，因此它们定义了一个与 $\mathfrak{g}_1$ 同构的可解李代数；由 (15) 定义 J 和 F，可知 J 是一个复结构，具有非零闭 (3, 0)-形式 $\Psi = (e^1 + i\,e^2) \wedge (e^3 + i\,e^4) \wedge (e^5 + i\,e^6)$，而 F 是一个平衡J-厄米度量；最后，由于相应的单连通李群具有一个格 [10]，我们便得到一个赋有厄米结构 (J, F) 的紧致可解流形。

6. Solutions of the Hull-Strominger system and the heterotic equations ofmotion

本节将在底层为中村流形的紧致可解流形上，求得 Hull-Strominger 系统和异质弦运动方程的新显式解。在即将发表的论文 [28] 中，我们将对可解流形上的该系统进行一般性研究。

由第 4 节和第 5 节可知，陈联络 ∇^c 在若干情况下是一个瞬子，尽管它始终是平坦的。我们有以下结论

推论 6.1. 设 $M = \Gamma\backslash G$ 是一个六维紧致流形，它是单连通李群 G 对格 Γ取商所得。假设 M 具有不变复结构 J，且带有允许平衡度量的非零闭 (3, 0)-形式 F。那么，在以下情况下，陈联络 ∇^c 是一个瞬子：

- $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_5$、$\mathfrak{g}_8$ 或 $\mathfrak{so}(3,1)$，赋予其复平行化结构 J（在此情况下，任意厄米度量都是平衡的）；
- $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2^{\alpha}(\alpha > 0)$ 或 $\mathfrak{g}_8$, J 是任意复结构，且 F 是任意“对角的”厄米度量；
- $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_2^0$，对于任意复结构 J 以及任意 K ¨ahler 度量 F。

此外，在所有情况下，∇^c 都是平坦的。

证明。The 该结果直接由命题 3.4、4.1、5.2、5.3、5.4、5.8 和 5.10 得出 . □

设 X 是一个复维数为 n的紧致复流形，赋有平衡厄米度量 F。那么，F^{n-1} 在 X 的 Bott-Chern 上同调中定义了一个实的 $(n-1, n-1)$ 类。我们回顾一下，X 的 Bott-Chern 上同调群 [2] 定义为

$$H^{p,q}_{BC}(X) := \frac{\ker d \colon \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p+q+1}(X,\mathbb{C})}{\operatorname{im} dd^c \colon \Omega^{p-1,q-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{p,q}(X,\mathbb{C})},$$

并且我们将用 $[F^{n-1}]$ 表示由 H^{n-1} 中的平衡度量定义的类，$_{BC}{}^{n-1}(X,\mathbb{R}) \subset H^{n-1,}$ $_{BC}{}^{n-1}\,X$ ()。

回顾一下，$\mathfrak{g}_8$ 是中村流形底层可解流形的李代数。接下来，我们考虑赋予它阿贝尔复结构的情形。在下面的结果中，我们证明，对于任意给定的不变平衡度量，都存在另一个度量，使其定义相同的 Bott-Chern (2,2) 类，且该度量所对应的陈联络是平坦的，并且相对于一个非平坦瞬子，异质弦运动方程得以满足。

定理 6.2. 设 $X = (M, J_{Ab})$ 为具有阿贝尔复结构 J_{Ab} 的中村流形。设 F 为 X 上任意不变平衡厄米度量，且 $[F^2] \in H^{2,\,2\,\mathrm{BC}}(X,\mathbb{R})$ 为其˜对应的 Bott-Chern 类。那么，存在 X 上的平衡厄米度量 F，满足以下性质：

(a) 度量 $\tilde{F}$与 F 属于同调类，即 $[\tilde{F}^2] = [F^2] \in H^{2,2\,\mathrm{BC}}(X,\mathbb{R})$，其对应的陈联络 $\nabla^{c\,(J_{Ab},\tilde{F})}$ 是平坦的；

˜(b) 存在一个与 (J_{Ab}, F) 相容的联络 A，它是一个非平坦瞬子，并且满足相对于陈联络的异质弦运动方程。

证明。阿贝尔复结构 J_{Ab} 由复方程给出

$$d\omega^1 = -2i\,\omega^{1\bar{3}}, \quad d\omega^2 = 2i\,\omega^{2\bar{3}}, \quad d\omega^3 = 0, \tag{41}$$

因此，它对应于在 (23) 中取 $K = 0$ 和 $L = -2i$。根据引理 5.1 (a)，任意不变平衡厄米度量 F 均由 (22) 给出，其中 $v = z = 0$。此外，我们可以将度量系数 $r = s = 1$规范化，因此对于结构 J_{Ab}，存在满足 (41) 的一个 (1,0)-基 $\{\omega^k\}_{k=1}^3$，使得任意平衡度量 F 均由下式给出

$$2\,F = i\,(\omega^{1\bar{1}} + \omega^{2\bar{2}} + t^2\omega^{3\bar{3}}) + u\,\omega^{1\bar{2}} - \bar{u}\,\omega^{2\bar{1}}, \tag{42}$$

其中 $t \in \mathbb{R}^*$ 和 $u \in \mathbb{B} = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1\}$。于是，我们得到

$$2\,F^2 = (1 - |u|^2)\,\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + t^2\omega^{13\bar{1}\bar{3}} + t^2\omega^{23\bar{2}\bar{3}} - iut^2\omega^{13\bar{2}\bar{3}} + i\bar{u}t^2\omega^{23\bar{1}\bar{3}}.$$

注意，方程 (41) 蕴含

$$\partial\bar{\partial}(\omega^{1\bar{2}}) = 4\,\omega^{13\bar{2}\bar{3}}, \qquad \partial\bar{\partial}(\omega^{2\bar{1}}) = 4\,\omega^{23\bar{1}\bar{3}},$$

因此我们有

$$F^2 = \frac{1 - |u|^2}{2}\,\omega^{12\bar{1}\bar{2}} + \frac{t^2}{2}\,\omega^{13\bar{1}\bar{3}} + \frac{t^2}{2}\,\omega^{23\bar{2}\bar{3}} + i\,\partial\bar{\partial}\left(\frac{\bar{u}t^2}{8}\,\omega^{2\bar{1}} - \frac{ut^2}{8}\,\omega^{1\bar{2}}\right).$$

因此，$[F^2] = [\tilde{F}^2]$ 属于 $H^{2,\,2\,\mathrm{BC}}(X, \mathbb{R})$，其中 $\tilde{F}$ 是定义在 X 上的平衡厄米度量，其定义为

$$2\,\tilde{F} = i\,(\tilde{r}^2\,\omega^{1\bar{1}} + \tilde{s}^2\,\omega^{2\bar{2}} + \tilde{t}^{\,2}\,\omega^{3\bar{3}}), \tag{43}$$

其中 $\tilde{r} = \tilde{s} = (1 - |u|^2)^{1/4}$ 和 $\tilde{t} = t/(1 - |u|^2)^{1/4}$。现在，由于度量 $\tilde{F}$ 是对角的，根据推论 6.1 可知，其陈联络是平坦的。这就证明了 (a)。

为证明 (b)，我们需要找到一个瞬子 A，使其满足陈联络的反常抵消条件，即满足

$$dT = \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}\Omega^c \wedge \Omega^c - \operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A) = -\frac{\alpha'}{4}\operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A, \tag{44}$$

˜ ˜其中，α' 是一个非零常数，且 $dT = dJ_{Ab}dF$，其中 F 由（43）给出。我们首先注意到，由于复方程（41）的形式，与之前一样，存在一个（$\mathfrak{g}_8, J_{Ab}$）˜的自同构，使得我们可以假设 $\tilde{r} = \tilde{s} = 1$。从现在起，我们将用 t表示度量系数 t。

因此，我们可以将平衡度量写为 $\tilde{F} = e^{12} + e^{34} + e^{56}$ 相对于适配基 $\{e^k\}_{k=1}^6$，其微分由(40)给出，其中$(a, b) = (0,1)$和 $u_1 = u_2 = 0$。直接计算得到 $d\tilde{F} = \frac{4}{t}(e^{12} - e^{34}) \wedge e^6$，因此我们有挠率三形式 $T = J_{Ab}d\tilde{F} = \frac{4}{t}(e^{12} - e^{34}) \wedge e^5$。于是，

$$dT = -\frac{16}{t^2}e^{1256} - \frac{16}{t^2}e^{3456}. \tag{45}$$

现在，我们考虑由适配基 $\{e^k\}_{k=1}^6$下给出的联络1-形式定义的线性联络 A：

$$(\sigma^A)_2^1 = -(\sigma^A)_1^2 = \lambda\,e^1 + \mu\,e^2, \quad (\sigma^A)_4^3 = -(\sigma^A)_3^4 = \lambda\,e^3 + \mu\,e^4,$$

并且 $(\sigma^A)_j^i = 0$ 对于任意 $(i, j) \neq (1, 2)$、$(2, 1)$、$(3, 4)$、$(4, 3)$。这里 λ, μ 是实数，因此对任意这样的配对，都存在一个联络 $A_{\lambda,\,\mu}$（我们将其简记为 A）。

注意，任意联络 A 都是厄米的。事实上，由于我们使用的是适配基，$\tilde{}$ $\tilde{}$ A 与 U(3)-结构 (J_{Ab}, F) 的相容性，即 $AJ_{Ab} = 0 = AF$，等价于联络1-形式满足 $(\sigma^A)^j_i = -(\sigma^A)^i_j$，以及以下条件

$$(\sigma^A)^1_3 = (\sigma^A)^2_4, \quad (\sigma^A)^1_4 = -(\sigma^A)^2_3, \quad (\sigma^A)^1_5 = (\sigma^A)^2_6, \quad (\sigma^A)^1_6 = -(\sigma^A)^2_5,$$

$$(\sigma^A)^3_5 = (\sigma^A)^4_6, \quad (\sigma^A)^3_6 = -(\sigma^A)^4_5.$$

通过直接计算，我们得到所有曲率2-形式 $(\Omega^A)^i_j$ 均为零，除了

$$(\Omega^A)^1_2 = -(\Omega^A)^2_1 = -\frac{2\mu}{t}e^{15} - \frac{2\lambda}{t}e^{16} + \frac{2\lambda}{t}e^{25} - \frac{2\mu}{t}e^{26},$$

and

$$(\Omega^A)^3_4 = -(\Omega^A)^4_3 = \frac{2\mu}{t}e^{35} + \frac{2\lambda}{t}e^{36} - \frac{2\lambda}{t}e^{45} + \frac{2\mu}{t}e^{46}.$$

因此，引理 3.6 中的条件 (16) 得到满足，这意味着 A 是一个瞬子。此外，由这些曲率形式可得，该瞬子的曲率迹为

$$\operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A = -\frac{8}{t^2}(\lambda^2 + \mu^2)e^{1256} - \frac{8}{t^2}(\lambda^2 + \mu^2)e^{3456},$$

因此，考虑到..... 计数（45），我们有：当且仅当 i f

$$-\frac{16}{t^2} = \frac{2\alpha'}{t^2}(\lambda^2 + \mu^2).$$

最后，对于任意负的 α'，我们都可以选择 λ、μ，使得 $\lambda^2 + \mu^2 = 8/(-\alpha')$。因此，采用这一选择，我们得到了一个具有非平坦瞬子的异质弦运动方程的解。□

备注 6.3。我们在此注意到，赋予阿贝尔复结构 J_{Ab} 的中村流形，对于任意给定的正 α'，也提供了异质弦运动方程的解。事实上，我们可以在反常消除条件中交换 ∇^c 和 A 的作用，并寻找该方程的解

$$dT = \frac{\alpha'}{4}(\operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A - \operatorname{tr}\Omega^c \wedge \Omega^c) = \frac{\alpha'}{4}\operatorname{tr}\Omega^A \wedge \Omega^A,$$

与 $\alpha' > 0$。请注意，这恰好属于 M. Garcia-Fernandez 在 [15], 提出的系统的框架：该系统允许在 Hull-Strominger 系统反常抵消方程右端第一项中使用作为瞬子的度量联络。回想一下，定理 6.2 中找到的瞬子 $A_{\lambda,\ \mu}$ 不仅是度量联络，而且还是 Hermitian 的。因此，按照该定理的证明，对于任意正的 α'，我们都可以选择 λ、μ，使得 $\lambda^2 + \mu^2 = 8/\alpha'$。根据[15], ，作此选择后，便可得到许多带有平坦瞬子的异质弦运动方程的解。

Appendix 附录 A.

本附录给出命题 2.4 和 2.6 的证明所需的相关数据。表 1 和表 2 分别对应于 $3 \oplus 3$ 可分解李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_2$ 和 $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{g}_2$。对于李代数 $L_{6,\ 1}$ 和 $L_{6,\ 4}$，相关数据列于表 3。

$\mathfrak{g}_2$	李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{g}_2$
$\mathbb{R}^3$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{125}+a_4e^{126}+a_5e^{134}+a_6e^{135}+a_7e^{136}+a_8e^{234}+a_9e^{235}$ $+a_{10}e^{236}+a_{11}e^{456}$ $\lambda=\mu=\tau=a_1a_{11},\quad A=B=C=0$
$\mathfrak{h}_3$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{125}+a_4e^{134}+a_5e^{135}+a_6e^{234}+a_7e^{235}+a_8(e^{236}-e^{145})$ $+a_9(e^{136}+e^{245})+a_{10}(e^{126}+e^{345})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_8^2-a_9^2,\quad \mu=a_{10}^2-a_1a_{11}+a_8^2+a_9^2,\quad \tau=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_8^2-a_9^2$ $A=-2a_8a_9,\quad B=-2a_{10}a_8,\quad C=2a_{10}a_9$
$\mathfrak{e}(1,1)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{134}+a_4e^{234}+a_5(e^{146}+e^{235})+a_6(e^{145}+e^{236})+a_7(e^{245}-e^{136})$ $+a_8(e^{246}-e^{135})+a_9(e^{345}-e^{126})+a_{10}(e^{346}-e^{125})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2+a_6^2+a_7^2-a_8^2-a_9^2,\quad \mu=a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2-a_6^2-a_7^2+a_8^2-a_9^2$ $\tau=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2-a_6^2+a_7^2-a_8^2+a_9^2$ $A=2(a_5a_8-a_6a_7),\quad B=2(a_{10}a_5-a_6a_9),\quad C=2(a_{10}a_8-a_7a_9)$
$\mathfrak{e}(2)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{134}+a_4e^{234}+a_5(e^{146}+e^{235})+a_6(e^{236}-e^{145})+a_7(e^{136}+e^{245})$ $+a_8(e^{246}-e^{135})+a_9(e^{126}+e^{345})+a_{10}(e^{346}-e^{125})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2-a_6^2-a_7^2-a_8^2+a_9^2,\quad \mu=a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2$ $\tau=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2+a_6^2-a_7^2-a_8^2-a_9^2$ $A=2(a_5a_8-a_6a_7),\quad B=2(a_{10}a_5-a_6a_9),\quad C=2(a_{10}a_8+a_7a_9)$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\rho=a_1e^{123}+a_2(e^{234}-e^{156})+a_3(e^{146}+e^{235})+a_4(e^{145}+e^{236})+a_5(e^{245}-e^{136})+a_6(e^{246}-e^{135})$ $+a_7(e^{134}+e^{256})+a_8(e^{345}-e^{126})+a_9(e^{346}-e^{125})+a_{10}(e^{124}+e^{356})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_2^2-a_3^2+a_4^2+a_5^2-a_6^2+a_7^2-a_8^2+a_9^2$ $\mu=-a_{10}^2-a_1a_{11}-a_2^2+a_3^2-a_4^2-a_5^2+a_6^2-a_7^2-a_8^2+a_9^2$ $\tau=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2+a_7^2+a_8^2-a_9^2$ $A=-2(a_4a_5-a_3a_6+a_2a_7),\quad B=-2(a_{10}a_2+a_4a_8-a_3a_9),\quad C=-2(a_{10}a_7+a_5a_8-a_6a_9)$
$\mathfrak{so}(3)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2(e^{234}-e^{156})+a_3(e^{146}+e^{235})+a_4(e^{236}-e^{145})+a_5(e^{136}+e^{245})+a_6(e^{246}-e^{135})$ $+a_7(e^{134}+e^{256})+a_8(e^{126}+e^{345})+a_9(e^{346}-e^{125})+a_{10}(e^{124}+e^{356})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_2^2-a_3^2-a_4^2-a_5^2-a_6^2-a_7^2+a_8^2+a_9^2$ $\mu=a_{10}^2-a_1a_{11}+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2$ $\tau=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_2^2+a_3^2+a_4^2-a_5^2-a_6^2-a_7^2-a_8^2-a_9^2$ $A=-2(a_4a_5-a_3a_6+a_2a_7),\quad B=-2(a_{10}a_2+a_4a_8-a_3a_9),\quad C=2(a_{10}a_7+a_5a_8+a_6a_9)$

TABLE 1. 闭3-形式 ρ 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{g}_2$ 上的取值，以及引理 2.3 (i)˜中由 J_ρ 诱导的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$上的线性自同态 F 的取值 λ,μ,τ,A,B,C（至常数 $|\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2}$）

$\mathfrak{g}_2$	李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{g}_2$
$\mathbb{R}^3$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{125}+a_4e^{126}+a_5e^{134}+a_6e^{135}+a_7e^{136}+a_8e^{234}+a_9e^{235}$ $+a_{10}e^{236}+a_{11}e^{456}$ $\lambda=\mu=\tau=-a_1a_{11},\quad A=B=C=0$
$\mathfrak{h}_3$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{125}+a_4e^{126}+a_5e^{134}+a_6e^{135}+a_7e^{136}+a_8e^{234}+a_9e^{235}$ $+a_{10}e^{236}+a_{11}e^{456}$ $\lambda=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_8^2-a_9^2,\quad \mu=-a_{10}^2-a_1a_{11}-a_8^2+a_9^2,\quad \tau=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_8^2-a_9^2$ $A=-2a_8a_9,\quad B=-2a_{10}a_8,\quad C=2a_{10}a_9$
$\mathfrak{e}(1,1)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{134}+a_4e^{234}+a_5(e^{146}+e^{235})+a_6(e^{145}+e^{236})+a_7(e^{245}-e^{136})$ $+a_8(e^{246}-e^{135})+a_9(e^{126}+e^{345})+a_{10}(e^{125}+e^{346})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2-a_6^2+a_7^2-a_8^2+a_9^2,\quad \mu=-a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2+a_6^2-a_7^2+a_8^2+a_9^2$ $\tau=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2+a_6^2+a_7^2-a_8^2-a_9^2$ $A=2(a_5a_8-a_6a_7),\quad B=2(a_{10}a_5-a_6a_9),\quad C=2(a_{10}a_8-a_7a_9)$
$\mathfrak{e}(2)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2e^{124}+a_3e^{134}+a_4e^{234}+a_5(e^{146}+e^{235})+a_6(e^{236}-e^{145})+a_7(e^{136}+e^{245})$ $+a_8(e^{246}-e^{135})+a_9(e^{345}-e^{126})+a_{10}(e^{125}+e^{346})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_5^2+a_6^2-a_7^2-a_8^2-a_9^2,\quad \mu=-a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2-a_6^2+a_7^2+a_8^2-a_9^2$ $\tau=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_5^2-a_6^2-a_7^2-a_8^2+a_9^2$ $A=2(a_5a_8-a_6a_7),\quad B=2(a_{10}a_5-a_6a_9),\quad C=2(a_{10}a_8+a_7a_9)$
$\mathfrak{so}(3)$	$\rho=a_1e^{123}+a_2(e^{234}-e^{156})+a_3(e^{146}+e^{235})+a_4(e^{236}-e^{145})+a_5(e^{136}+e^{245})+a_6(e^{246}-e^{135})$ $+a_7(e^{134}+e^{256})+a_8(e^{126}+e^{345})+a_9(e^{346}-e^{125})+a_{10}(e^{124}+e^{356})+a_{11}e^{456}$ $\lambda=-a_{10}^2-a_1a_{11}+a_2^2+a_3^2+a_4^2-a_5^2-a_6^2-a_7^2-a_8^2-a_9^2$ $\mu=-a_{10}^2-a_1a_{11}-a_2^2-a_3^2-a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2-a_8^2-a_9^2$ $\tau=a_{10}^2-a_1a_{11}-a_2^2-a_3^2-a_4^2-a_5^2-a_6^2-a_7^2+a_8^2+a_9^2$ $A=-2(a_4a_5-a_3a_6+a_2a_7),\quad B=-2(a_{10}a_2+a_4a_8-a_3a_9),\quad C=2(a_{10}a_7+a_5a_8+a_6a_9)$

TABLE 2. 闭3-形式 ρ 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{g}_2$ 以及引理 2.3 (ii)˜中由 J_ρ诱导的 $\mathfrak{so}(3)$ 的线性自同态 F 的值 λ,μ,τ,A,B,C（常数 $|\tilde{\lambda}(\rho)|^{-1/2}$除外）。

$\mathfrak{g}$	
$L_{6,1}$	$\rho = a_1e^{123} + a_2e^{126} + a_3e^{135} + a_4(e^{136} - e^{125}) + a_5e^{234} + a_6(e^{235} - e^{134})$ $+ a_7(e^{124} + e^{236}) + a_8(e^{146} + e^{256}) + a_9(e^{245} + e^{346}) + a_{10}(e^{356} - e^{145}) + a_{11}e^{456},$ $d(J_\rho\rho) = q_1e^{1234} + q_2e^{1235} + q_3e^{1236} + q_4e^{1245} + q_5(e^{1246} + e^{1345}) + q_6(e^{1256} + e^{2345})$ $+ q_7e^{1346} + q_8(e^{1356} + e^{2346}) + q_9e^{2356},$ $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2 + a_{10}q_2 + a_3q_4 + a_4q_5 - a_6q_8 + a_3q_9,$ 其中: $q_1 = 4(a_{10}a_2a_6 + a_{10}a_4a_7 - a_4a_6a_8 + a_3a_7a_8 + a_2a_3a_9 + a_4^2a_9),$ $q_2 = -4(a_{10}a_2a_5 - a_{10}a_7^2 - a_4a_5a_8 - a_6a_7a_8 - a_2a_6a_9 - a_4a_7a_9),$ $q_3 = -4(a_{10}a_4a_5 + a_{10}a_6a_7 + a_3a_5a_8 + a_6^2a_8 - a_4a_6a_9 + a_3a_7a_9),$ $q_4 = 2(a_{10}^2a_2 + a_{11}a_2a_3 + a_{11}a_4^2 - a_{10}^2a_5 - a_{11}a_2a_5 - a_{11}a_3a_5 - a_{11}a_6^2 + a_{11}a_7^2$ $-2a_{10}a_4a_8 - a_3a_8^2 + a_5a_8^2 + 2a_{10}a_6a_9 + 2a_7a_8a_9 + a_2a_9^2 + a_3a_9^2),$ $q_5 = -4(a_{11}a_4a_5 + a_{11}a_6a_7 - a_{10}a_5a_8 - a_{10}a_7a_9 + a_6a_8a_9 - a_4a_9^2),$ $q_6 = -4(a_{11}a_4a_6 - a_{10}^2a_7 - a_{11}a_3a_7 - a_{10}a_6a_8 - a_{10}a_4a_9 - a_3a_8a_9),$ $q_7 = 2(a_{10}^2a_2 + a_{11}a_2a_3 + a_{11}a_4^2 + a_{10}^2a_5 + a_{11}a_2a_5 + a_{11}a_3a_5 + a_{11}a_6^2 - a_{11}a_7^2$ $-2a_{10}a_4a_8 - a_3a_8^2 - a_5a_8^2 - 2a_{10}a_6a_9 - 2a_7a_8a_9 - a_2a_9^2 - a_3a_9^2),$ $q_8 = 4(a_{11}a_2a_6 + a_{11}a_4a_7 - a_{10}a_7a_8 - a_6a_8^2 - a_{10}a_2a_9 + a_4a_8a_9),$ $q_9 = -2(a_{10}^2a_2 + a_{11}a_2a_3 + a_{11}a_4^2 - a_{10}^2a_5 + a_{11}a_2a_5 - a_{11}a_3a_5 - a_{11}a_6^2 - a_{11}a_7^2$ $-2a_{10}a_4a_8 - a_3a_8^2 - a_5a_8^2 + 2a_{10}a_6a_9 - 2a_7a_8a_9 - a_2a_9^2 + a_3a_9^2)_\circ$
$L_{6,4}$	$\rho = a_1e^{123} + a_2e^{124} + a_3(e^{126} + e^{134}) + a_4e^{136} + a_5(e^{234} - 2e^{125}) + a_6e^{235}$ $+ a_7(e^{236} - 2e^{135}) + a_8(2e^{145} + e^{246}) + a_9(e^{256} + e^{345}) + a_{10}(e^{346} - 2e^{156}) + a_{11}e^{456},$ $d(J_\rho\rho) = q_1e^{1234} + q_2e^{1235} + q_3e^{1236} + q_4e^{1245} + q_5(e^{1246} + e^{2345}) + q_6(e^{1256} + e^{1345})$ $+ q_7(e^{1346} - e^{2356}) + q_8e^{1356} + q_9e^{2346},$ $\tilde{\lambda}(\rho) = (a_1a_{11})^2 + a_{10}q_1 - \frac{a_4}{2}q_4 - a_7q_5 + \frac{a_3}{2}q_6 + a_3q_9,$ 其中: $q_1 = 8(2a_{10}a_5^2 + a_{10}a_2a_6 - a_3a_6a_8 - 2a_5a_7a_8 + a_3a_5a_9 - a_2a_7a_9),$ $q_2 = -8(2a_{10}a_3a_5 - 2a_{10}a_2a_7 - 2a_4a_5a_8 + 2a_3a_7a_8 + a_3^2a_9 - a_2a_4a_9),$ $q_3 = -8(a_{10}a_3a_6 + 2a_{10}a_5a_7 - a_4a_6a_8 - 2a_7^2a_8 + a_4a_5a_9 - a_3a_7a_9),$ $q_4 = 8(2a_{11}a_5^2 + a_{11}a_2a_6 - 2a_6a_8^2 + 4a_5a_8a_9 + a_2a_9^2),$ $q_5 = -8(a_{11}a_3a_5 - a_{11}a_2a_7 - 2a_{10}a_5a_8 + 2a_7a_8^2 - a_{10}a_2a_9 + a_3a_8a_9),$ $q_6 = 4(2a_{10}^2a_2 + a_{11}a_3^2 - a_{11}a_2a_4 - 4a_{10}a_3a_8 + 2a_4a_8^2),$ $q_7 = -8(2a_{10}^2a_5 - a_{11}a_4a_5 + a_{11}a_3a_7 - 2a_{10}a_7a_8 + a_{10}a_3a_9 - a_4a_8a_9),$ $q_8 = -8(2a_{10}^2a_6 - a_{11}a_4a_6 - 2a_{11}a_7^2 - 4a_{10}a_7a_9 - a_4a_9^2),$ $q_9 = -2(2a_{10}^2a_2 + a_{11}a_3^2 - a_{11}a_2a_4 - 2a_{11}a_3a_6 - 4a_{11}a_5a_7 - 4a_{10}a_3a_8 + 4a_{10}a_6a_8$ $+ 2a_4a_8^2 - 4a_{10}a_5a_9 - 4a_7a_8a_9 - 2a_3a_9^2).$

TABLE 3. 一般闭三形式 ρ 以及相应的四形式 $d(J_\rho\rho)$和标量 $\lambda(\rho)$在李代数 $\mathfrak{g} = L_{6,1}, L_{6,4}$.

Acknowledgments

本研究部分得到了项目 PID2020-115652GB-I00 的资助，该项目由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 提供资金；同时还得到了项目 E22-17R “代数与几何”（阿拉贡政府/欧洲区域发展基金）的资助。

References

[1] B. Andreas、M. Garcia-Fernandez，《通过 Calabi-Yau 三维流形上的稳定丛求解 Strominger 系统》，*Comm. Math. Phys.* **315** (2012)，153–168。[2] R. Bott、S. S. Chern，《厄米向量丛及其全纯截面零点的均匀分布》，*Acta Math.* **114** (1965)，第 1 期，71–112。[3] J.-M. Bismut，《非 K¨ahler 流形的局部指标定理》，*Math. Ann.* **284** (1989)，681–699。[4] P. Candelas、G.T. Horowitz、A. Strominger、E. Witten，《超弦的真空构型》，*Nuclear Phys. B* **258** 1985 46 74 ( )，–。[5] P. Candelas、X. De la Ossa、J. McOrist、R. Sisca，《异质弦真空的普适几何》，*J. High Energy Phys.* 02 2019 038 ( )，。[6] X. De la Ossa、E.E. Svanes，《联络、场重定义与异质超引力》，*J. High Energy Phys.* 12 2014 008 ( )，。[7] T. Fei、S.-T. Yau，《复李群及其商空间上的 Strominger 系统不变解》，*Comm. Math. Phys.* **338** (2015)，1183–1195。[8] M. Fern´andez、S. Ivanov、L. Ugarte、R. Villacampa，《具有非零通量和常数膨胀子的非 K¨ahler 异质弦紧化》，*Comm. Math. Phys.* **288** (2009)，677–697。[9] A. Fino、G. Grantcharov、L. Vezzoni，《具有环面对称性的 Hull-Strominger 系统解》，*Comm. Math. Phys.* **388** 2021 947 967 ( )，–。[10] A. Fino、A. Otal、L. Ugarte，《典范丛全纯平凡的六维可解流形》，Int. Math. Res. Not. IMRN，24 (2015)，13757-13799。[11] A. Fino、F. Salvatore，《幂零流形上的闭 SL(3, ℂ)-结构》，*J. Geom. Phys.* **167** (2021)，104289，19 页。[12] M. Freibert、F. Schulte-Hengesbach，《可分解李群上的半平坦结构》，*Transform. Groups* **17** (2012)，第 1 期，123–141。[13] M. Freibert、F. Schulte-Hengesbach，《不可分解李群上的半平坦结构》，*Transform. Groups* **17** (2012)，第 3 期，657–689。[14] J.-X. Fu、S.-T. Yau，《非 K¨ahler 流形上带通量的超弦理论及复 Monge- Amp`ère 方程》，*J. Differential Geom.* **78** (2008)，369–428。[15] M. Garcia-Fernandez，《非 K¨ahler 三维流形上的 Hull-Strominger 系统 T-对偶解》，*J. Reine Angew. Math.* **766** 2020 137 150 ( )，–。[16] M. Garcia-Fernandez、R. Gonzalez Molina，《Futaki 不变量与 Yau 关于 Hull-Strominger 系统的猜想》，arXiv:2303.05274 [math.DG]。[17] P. Gauduchon，《厄米联络与 Dirac 算子》，*Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 11 (1997)，257–288。[18] E. Goldstein、S. Prokushkin，《具有 SU( ) 结构的复非 K¨ahler 流形的几何模型》，*Comm. Math. Phys.* **251** 2004 65 78 ( )，–。[19] N. Hitchin，《六维三形式的几何》，*J. Differential Geom.* **55** (2000)，547–576。[20] C. Hull，*Superstring compactifications with torsion and space-time supersymmetry*，《1985 年都灵会议论文集“超统一与额外维度”》（1986），347–375。[21] S. Ivanov，《异质弦超对称性、反常抵消与运动方程》，*Phys. Lett.* B 685 (2010)，190–196。[22] J. Li、S.-T. Yau，《具有挠率的超对称弦理论的存在性》，*J. Differential Geom.* **70** (2005)，143–181。[23] L. Magnin，《重新考察 U( ) 与 SU( ) SU( ) 上的左不变复结构》，*Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **55** 2010 4, 269 296 ( )，第 – 期。[24] M.L. Michelsohn，《复几何中特殊度量的存在性》，*Acta Math.* **149** (1982)，261–295。[25] J. Milnor，《李群左不变度量的曲率》，*Adv. Math.* **21** (1976)，293–329。[26] I. Nakamura，《复平行化流形及其小形变》，*J. Differential Geom.* **10** (1975)，第 1 期，85–112。[27] A. Otal、L. Ugarte、R. Villacampa，《Strominger 系统与异质弦运动方程的不变解》，*Nuclear Phys. B* **920** (2017)，442–474。[28] A. Otal、L. Ugarte、R. Villacampa，《可解流形上的 Hull-Strominger 系统》，*to appear*。

[29] M. Pujia, 《一类可解流形上的 Hull-Strominger 系统与反常流》， *J. Geom. Phys.* **170** (2021)，104352，15 页。[30] S. Salamon, 《幂零李代数上的复结构》， *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001)，311–333。[31] F. Schulte-Hengesbach, 《三维李群乘积上的半平坦结构》， *J. Geom. Phys.* **60** (2010)，1726–1740。[32] A. Strominger, 《具有挠率的超弦》， *Nuclear Phys. B* **274** (1986)，253–284。[33] L. Ugarte、R. Villacampa, 《六维幂零流形上的平衡厄米几何》， *Forum Math.* **27** (2) (2015)，1025–1070。[34] L. Ugarte, 《六维幂零流形上的厄米结构》， *Transform. Groups* **12** (2007)，175–202。(A. Otal)

Centro Universitario de la Defensa - I.U.M.A. Academia General Militar Ctra. de, Huesca s/n. 50090 Zaragoza Spain

, , *Email address*: aotal@unizar.es (L. Ugarte) Departamento de Matemáticas - I.U.M.A., Universidad de Zaragoza, Campus Plaza SanFrancisco, 50009 Zaragoza Spain*Email address*: ugarte@unizar.es