arXiv:2305.02655v2 [math.ST] 8 Jun 2023

用于扩散过程的含潜变量结构方程建模及其在稀疏估计中的应用

SHOGO KUSANO [1] 和 MASAYUKI UCHIDA [1,2]

Abstract. 我们基于高频数据，研究扩散过程的含潜变量结构方程模型（SEM）。我们提出了SEM中参数的准似然估计量，并根据准似然比推导出拟合优度检验。我们还研究了SEM中的稀疏估计，并建立了针对SEM稀疏估计的拟合优度检验。此外，我们还考察了所提出估计量的渐近性质。

1. 引言 Introduction

我们研究扩散过程的含潜变量结构方程模型（SEM）。首先，设定一个真实模型。随机过程 $\mathbb{X}_{1,\,0,\,t}$ 由如下真实因子模型定义：

$$\mathbb{X}_{1,0,t} = \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\xi_{0,t} + \delta_{0,t}, \tag{1.1}$$

其中，$\{\mathbb{X}_{1,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_1维可观测向量过程，$\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_1维潜在公共因子向量过程，$\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_1维潜在特有因子向量过程，$\mathbf{\Lambda}_{x_1,\,0} \in \mathbb{R}^{p_1\times k_1}$ 是一个常数载荷矩阵，p_1 不为零，p_1 和 k_1 是固定的，并且 $k_1 \leq p_1$。随机过程$\mathbb{X}_{2,\,0,\,t}$ 由以下真实因子模型定义：

$$\mathbb{X}_{2,0,t} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\eta_{0,t} + \varepsilon_{0,t}, \tag{1.2}$$

其中，$\{\mathbb{X}_{2,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_2维可观测向量过程，$\{\eta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_2维潜在公共因子向量过程，$\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_2维潜在特有因子向量过程，$\mathbf{\Lambda}_{x_2,\,0} \in \mathbb{R}^{p_2\times k_2}$ 是一个常数载荷矩阵，p_2 不为零，p_2 和 k_2 是固定的，且 $k_2 \leq p_2$。令 $p = p_1 + p_2$。此外，我们将$\eta_{0,\,t}$ 与$\xi_{0,\,t}$ 之间的关系表示如下：

$$\eta_{0,t} = \mathbf{B}_0\eta_{0,t} + \mathbf{\Gamma}_0\xi_{0,t} + \zeta_{0,t}, \tag{1.3}$$

其中，$\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_2维的潜在特有因子向量过程，$\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{k_2\times k_2}$ 是一个对角元素为零的常数载荷矩阵，而 $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}^{k_2\times k_1}$ 是一个常数载荷矩阵。令 $\mathbf{\Psi}_0 = \mathbb{I}_{k_2} - \mathbf{B}_0$,, 其中 $\mathbb{I}_{k_2}$ 表示 k_2阶单位矩阵。假设$\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}$ 是一个列满秩矩阵，且$\mathbf{\Psi}_0$ 是非奇异的。设 $\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 由以下随机微分方程定义：

$$\mathrm{d}\xi_{0,t} = B_1(\xi_{0,t})\mathrm{d}t + \mathbf{S}_{1,0}\mathrm{d}W_{1,t} \quad (t \in [0,T]), \quad \xi_{0,0} = c_1, \tag{1.4}$$

[1]Graduate School of Engineering Science, Osaka University
[2]Center for Mathematical Modeling and Data Science (MMDS), Osaka University and JST CREST

Key words and phrases. 结构方程建模；渐近理论；高频数据；随机微分方程；准最大似然估计；稀疏估计。

其中 $B_1:\ \mathbb{R}^{k_1}\to\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbf{S}_{1,0}\in\mathbb{R}^{k_1\times r_1}$, $c_1\in\mathbb{R}^{k_1}$ 和 $W_{1,t}$ 是一个 r_1 维标准维纳过程。$\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\delta_{0,t}=B_2(\delta_{0,t})\mathrm{d}t+\mathbf{S}_{2,0}\mathrm{d}W_{2,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \delta_{0,0}=c_2, \tag{1.5}$$

其中 $B_2:\mathbb{R}^{p_1}\to\mathbb{R}^{p_1}$, $\mathbf{S}_{2,0}\in\mathbb{R}^{p_1\times r_2}$, $c_2\in\mathbb{R}^{p_1}$ 和 $W_{2,t}$ 是一个 r_2 维标准维纳过程。$\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 定义为以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{0,t}=B_3(\varepsilon_{0,t})\mathrm{d}t+\mathbf{S}_{3,0}\mathrm{d}W_{3,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \varepsilon_{0,0}=c_3, \tag{1.6}$$

其中 $B_3:\mathbb{R}^{p_2}\to\mathbb{R}^{p_2}$, $\mathbf{S}_{3,0}\in\mathbb{R}^{p_2\times r_3}$, $c_3\in\mathbb{R}^{p_2}$ 和 $W_{3,t}$ 是一个 r_3 维标准维纳过程。$\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\zeta_{0,t}=B_4(\zeta_{0,t})\mathrm{d}t+\mathbf{S}_{4,0}\mathrm{d}W_{4,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \zeta_{0,0}=c_4, \tag{1.7}$$

其中 $B_4:\mathbb{R}^{k_2}\to\mathbb{R}^{k_2}$, $\mathbf{S}4,\ _0\in\mathbb{R}^{k_2\times r_4}$, $c_4\in\mathbb{R}^{k_2}$ 和 $W_{4,\ t}$ 是一个 r_4 维标准维纳过程。令 $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,\ 0}=\mathbf{S}_{1,0}\mathbf{S}_1^{\top}$, $\mathbf{0},\ \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,\ 0}=\mathbf{S}_{2,0}\mathbf{S}_2^{\top}$, $\mathbf{0},\ \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,\ 0}=\mathbf{S}_{3,0}\mathbf{S}_3^{\top}$, $\mathbf{0}$ 以及 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,\ 0}=\mathbf{S}_{4,0}\mathbf{S}_4^{\top}$, $\mathbf{0}$, 其中 $\top$ 表示转置。假设 $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,\ \mathbf{0}}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,\ \mathbf{0}}$ 是正定矩阵, 且 $W_{1,\ t},\ W_{2,\ t},\ W_{3,\ t}$ 和 $W_{4,\ t}$ 相互独立。

接下来，我们设定一个参数模型。随机过程 $\mathbb{X}_{1,t}$ 定义为如下因子模型:

$$\mathbb{X}_{1,t}=\mathbf{\Lambda}_{x_1}\xi_t+\delta_t, \tag{1.8}$$

其中, $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_1维的潜在公共因子向量过程, $\{\delta_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_1维的潜在特有因子向量过程, $\mathbf{\Lambda}_{x_1}\in\mathbb{R}^{p_1\times k_1}$ 是一个常数载荷矩阵。随机过程$\mathbb{X}_{2,\ t}$ 由因子模型定义如下:

$$\mathbb{X}_{2,t}=\mathbf{\Lambda}_{x_2}\eta_t+\varepsilon_t, \tag{1.9}$$

其中, $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_2维潜在公共因子向量过程, $\{\varepsilon_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 p_2维潜在特有因子向量过程，而 $\mathbf{\Lambda}_{x_2}\in\mathbb{R}^{p_2\times k_2}$ 是一个常数载荷矩阵。此外, η_t 与 ξ_t 之间的关系表示如下:

$$\eta_t=\mathbf{B}\eta_t+\mathbf{\Gamma}\xi_t+\zeta_t, \tag{1.10}$$

其中 $\{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 k_2 维潜在特有因子向量过程，$\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{k_2\times k_2}$ 是一个常数载荷矩阵，其对角元素为零, 而 $\mathbf{\Gamma}\in\mathbb{R}^{k_2\times k_1}$ 是一个常数载荷矩阵。假设 $\mathbf{\Lambda}_{x_1}$ 是列满秩矩阵，且 $\mathbf{\Psi}$ 非奇异，其中 $\mathbf{\Psi}=\mathbb{I}_{k_2}-\mathbf{B}$。假设 $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ 满足以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\xi_t=B_1(\xi_t)\mathrm{d}t+\mathbf{S}_1\mathrm{d}W_{1,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \xi_0=c_1, \tag{1.11}$$

其中 $\mathbf{S}_1\in\mathbb{R}^{k_1\times r_1}$。$\{\delta_t\}_{t\geq 0}$ 定义为以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\delta_t=B_2(\delta_t)\mathrm{d}t+\mathbf{S}_2\mathrm{d}W_{2,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \delta_0=c_2, \tag{1.12}$$

其中 $\mathbf{S}_2\in\mathbb{R}^{p_1\times r_2}$。$\{\varepsilon_t\}_{t\geq 0}$ 满足以下随机微分方程:

$$\mathrm{d}\varepsilon_t=B_3(\varepsilon_t)\mathrm{d}t+\mathbf{S}_3\mathrm{d}W_{3,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \varepsilon_0=c_3, \tag{1.13}$$

其中 $\mathbf{S}_3\in\mathbb{R}^{p_2\times r_3}$。$\{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ 由以下随机微分方程定义:

$$\mathrm{d}\zeta_t=B_4(\zeta_t)\mathrm{d}t+\mathbf{S}_4\mathrm{d}W_{4,t}\quad(t\in[0,T]),\quad \zeta_0=c_4, \tag{1.14}$$

其中 $\mathrm{S}_4 \in \mathbb{R}^{k_2 \times r_4}$。设 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} = \mathrm{S}_1\mathrm{S}_1^\top$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} = \mathrm{S}_2\mathrm{S}_2^\top$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} = \mathrm{S}_3\mathrm{S}_3^\top$和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta} = \mathrm{S}_4\mathrm{S}_4^\top$。假设 $\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}$和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ 为正定矩阵。令 $\mathbb{X}_t = (\mathbb{X}_{1,t}^\top, \mathbb{X}_{2,t}^\top)^\top$。 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 表示$\mathbb{X}_t$的协方差结构。 $\{\mathbb{X}_{t_i^n}\}_{i=1}^n$ 为离散观测，其中 $t_i^n = ih_n$, $T = nh_n$, 且 p_1, p_2, k_1 和 k_2 独立于n。

结构方程模型是一种描述无法观测的潜变量之间关系的方法。结构方程模型已应用于多个领域，例如行为科学、经济学、工程学和医学。例如，在心理学中，结构方程模型用于研究智力与动机之间的关系。请注意，智力和动机都是潜变量。J¨oreskog [22] 提出了这种方法，将路径分析与验证性因子分析结合起来。关于路径分析和验证性因子分析，参见 Mueller [30] 等。例如，已有多种模型被用于建立结构方程模型。在本文中，我们考虑由式（1.8）、（1.9）和（1.10）定义的模型，称为线性结构关系（LISREL）模型（J¨oreskog [23]）。LISREL 模型是结构方程模型中最著名的模型之一，能够表达潜变量之间的复杂关系。关于 LISREL 模型的更多信息，参见 Everitt[13] 等。请注意，结构方程模型是一种验证性分析方法，而非探索性分析方法。在进行分析之前，结构方程模型用于从各研究领域的理论角度设定模型。这就是验证性分析方法与探索性因子分析等探索性分析方法之间的区别。

稀疏估计已应用于许多方法中，例如主成分分析（Zou et.al. [41]）和探索性因子分析（Choi et.al. [9]）。Jacobucci et.al. [20] 和 Huang et.al. [19] 提出了在结构方程模型（SEM）中进行稀疏估计的方法。在本文中，我们将该方法称为“结构方程建模中的稀疏估计（SSEM）”。在 SEM 中，尽管某些参数可能被设定为 0，但这一假设可能并不正确，这意味着模型存在设定错误。SSEM 可以通过稀疏估计克服模型设定错误的问题。值得注意的是，在 SSEM 中，与探索性因子分析类似，统计学家仅作出满足可识别性条件所需的最小假设。因此，SSEM 也可称为“探索性结构方程建模”。Huang et.al. [19] 证明，该估计量具有 Oracle 性质，这意味着参数的真实稀疏模式在渐近意义下能够得到正确设定。关于 Oracle 性质，参见 Fan and Li [14]。此外，他们还提出了用于 SSEM 拟合优度检验的检验统计量，并研究了其渐近性质。

在行为科学领域，针对时间序列数据的因子分析已得到广泛研究；例如，参见 Molenaar [29]以及 Pena 和 box [32]。此外，Czi´aky [10] 提出了一种用于时间序列数据的结构方程模型，称为含潜变量的动态结构方程模型（DSEM）。Asparouhov 等人 [4] 研究了更一般的 DSEM 模型。近年来，得益于测量设备的发展，我们能够轻松获取股票价格数据、生活日志数据（血压、脑电图等）等高频数据，并且基于高频数据的随机微分方程统计推断也得到了发展。关于基于高频数据的扩散过程参数估计，例如，参见 Yoshida [39], 、Genon-Catalot 和 Jacod [15], 、Kessler[24], 、Uchida 和 Yoshida [37] 及其中的参考文献。De Gregorio 和 Iacus [11] 以及 Masuda 和 Shimizu[27] 研究了基于高频数据的扩散过程稀疏估计。Suzuki and Yoshida[35] 考虑了更一般的情形，并提出了一种在计算方面具有优势的新方法。在金融计量经济学领域，针对高频数据的因子模型已得到广泛研究。在

在该领域，当因子为潜变量时，参数和因子数量通过对高频数据使用主成分分析进行估计（A¨ıt-Sahalia 和 Xiu [2]）；另见 A¨ıt-Sahalia 和 Xiu[1]。然而，这些研究基于高维情形。对于低维模型，估计量不具有一致性；参见 Bai [5]。另一方面，Kusano 和 Uchida [26] 提出了针对扩散过程的经典因子分析。他们的方法适用于低维模型。然而，据我们所知，关于高频数据的结构方程模型和结构方程模型中的稀疏估计的研究很少。Oud 和 Jansen [31] 以及 Driver 等人 [12] 研究了随机微分方程的结构方程模型。在此需要注意的是，他们的模型不同于本文中的模型。在因果推断领域，Hansen 和 Sokol [17]研究了随机微分方程的结构方程模型。然而，由于他们的模型是路径分析模型，因此无法描述潜变量之间的关系。需要注意的是，这些研究并未假设数据以高频方式采样。另一方面，我们提出了基于高频数据的扩散过程半鞅的结构方程模型和结构方程模型中的稀疏估计。

本文为简化讨论，假设扩散过程的波动率和载荷矩阵不随时间变化，而是保持常数。关于扩散过程的波动率和载荷矩阵随时间变化的模型，将留待未来研究。此外，本文不讨论高维情形。Bai [6]基于最大似然估计研究了高维模型中因子分析的渐近性质。我们预期，我们的准似然方法也适用于高维模型，相关研究留待未来开展。

本文结构如下。第 2 节介绍符号和假设。第 3 节研究遍历和非遍历情形下扩散过程的结构方程模型。首先考察实现协方差的渐近性质。接着，求得结构方程模型中参数的准似然估计量，并给出这些估计量的渐近性质。此外，我们提出一种基于准似然比的拟合优度检验，并研究其渐近性质。第 4 节讨论遍历和非遍历情形下扩散过程的结构方程模型中的稀疏估计。我们提出针对结构方程模型中的稀疏估计的拟合优度检验，并研究其渐近性质。第 5 节和第 6 节给出示例和模拟研究，以考察第 3 节和第 4 节所述结果的渐近表现。第 7 节用于证明第 3 节和第 4 节中的定理。

2. Preliminaries

首先，我们准备以下符号和定义。对于任意向量 v, $|v| = \sqrt{\mathrm{tr}\, vv^\top}$, $v^{(i)}$ 是 v 的第i个元素，$\mathrm{Diag}\, v$ 是一个对角矩阵，其第 i个对角元素为 $v^{(i)}$。对于任意矩阵 A，$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}\, AA^\top}$，且 A_{ij}是 A的第（i，j）个元素。对于任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$，diag A是一个 p维向量，其第 i个元素为 A_{ii}。对于任意集合 S，$|S|$ 是 S中的元素个数。定义 $O_{p\times q}$ 为$p \times q$零矩阵。对于任意对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$，vec A、vech A和 $\mathbb{D}_p$分别表示A的向量化、 A的半向量化以及 $p^2 \times \bar{p}$重复矩阵。这里，vec $A = \mathbb{D}_p$、vech A和$\bar{p} = p\,(p+1)\,/2$；例如参见 Harville [18]。对于任意矩阵 A，A^+ 表示 A的 Moore-Penrose 逆。若 A是正定矩阵，则记作 $A > 0$。对于任意正序列 u_n，$R\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是满足 $|R\,(u_n,\ x)\,| \le u_n C\,(1+|x|)^{\,C}$（其中某个 $C > 0$）的函数的简写。令 $C^k_\uparrow(\mathbb{R}^d)$ 表示所有满足以下条件的函数 f 构成的空间：

(i) f 关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 连续可微至 k 阶。

(ii) f 及其所有导数关于 $x \in \mathbb{R}^d$均为多项式增长，即若 $g(x) = R(1, x)$，则 g 关于 $x \in \mathbb{R}^d$为多项式增长。

$N_p(\mu, \Sigma)$ 表示均值为 $\mu \in \mathbb{R}^p$ 、协方差矩阵为$\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$的 p 维正态随机变量。设 χ^2_r 为服从自由度为 r 的卡方分布的随机变量。$\chi^2_r(\alpha)$ 表示自由度为 r 的卡方分布的上侧 α 分位点，其中 $0 \le \alpha \le 1$。符号 $\xrightarrow{P}$ 和 $\xrightarrow{d}$ 分别表示依概率收敛和依分布收敛。将协方差结构 $\mathbf{\Sigma}$ 的真实值设为

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_0^{11} & \mathbf{\Sigma}_0^{12} \\ \mathbf{\Sigma}_0^{12\top} & \mathbf{\Sigma}_0^{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_0^{11} &= \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top + \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0}, \\
\mathbf{\Sigma}_0^{12} &= \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top \mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top, \\
\mathbf{\Sigma}_0^{22} &= \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}(\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top + \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0})\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0}.
\end{aligned}$$

接下来，我们作出以下假设。

[**A1**] (i) 存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 $x,\ y \in \mathbb{R}^{k_1}$,

$$|B_1(x) - B_1(y)| \le C|x - y|.$$

(ii) 对所有 $\ell \ge 0$, $\sup_t \mathbb{E}\left[|\xi_t|^\ell\right] < \infty$。(iii) $B_1 \in C^4_\uparrow(\mathbb{R}^{k_1})$。

[**A2**] 扩散过程 ξ_t 关于其不变测度π_ξ是遍历的：对于任意 π_ξ-可积函数 g，有

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(\xi_t)dt \xrightarrow{P} \int g(x)\pi_\xi(dx)$$

当 $T \longrightarrow \infty$ 时。

[**B1**] (i) 存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $x,\ y \in \mathbb{R}^{p_1}$,

$$|B_2(x) - B_2(y)| \le C|x - y|.$$

(ii) 对所有 $\ell \ge 0$, $\sup_t \mathbb{E}\left[|\delta_t|^\ell\right] < \infty$。(iii) $B_2 \in C^4_\uparrow(\mathbb{R}^{p_1})$。

[**B2**] 扩散过程 δ_t 关于其不变测度 π_δ是遍历的：对于任意 π_δ-可积函数 g，有

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(\delta_t)dt \xrightarrow{P} \int g(x)\pi_\delta(dx)$$

作为 $T \longrightarrow \infty$。

[**C1**] (i) 存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^{p_2}$,

$$|B_3(x) - B_3(y)| \le C|x - y|.$$

(ii) 对所有 $\ell \geq 0$, $\sup_t \mathbb{E}\big[|\varepsilon_t|^\ell\big] < \infty$。(iii) $B_3 \in C^4_\uparrow(\mathbb{R}^{p_2})$。

[**C2**] 扩散过程 ε_t 关于其不变测度 π_ε 是遍历的：对于任意 π_ε-可积函数 g，有

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(\varepsilon_t)dt \xrightarrow{P} \int g(x)\pi_\varepsilon(dx)$$

当 $T \longrightarrow \infty$ 时。

[**D1**] (i) 存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^{k_2}$,

$$|B_4(x) - B_4(y)| \leq C|x - y|.$$

(ii) 对所有 $\ell \geq 0$, $\sup_t \mathbb{E}\big[|\zeta_t|^\ell\big] < \infty$。(iii) $B_4 \in C^4_\uparrow(\mathbb{R}^{k_2})$。

[**D2**] 扩散过程 ζ_t 关于其不变测度 π_ζ 是遍历的：对于任意 π_ζ-可积函数 g，有

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(\zeta_t)dt \xrightarrow{P} \int g(x)\pi_\zeta(dx)$$

如 $T \longrightarrow \infty$。

注1 对于扩散过程，假设 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**] 是标准假设；例如，参见 Kessler [24]。

3. SEM FOR DIFFUSION PROCESSES

首先，我们考察非遍历情形，此时不假设 [**A2**], [**B2**], [**C2**] 和 [**D2**] 成立，并且 T 固定。为估计 $\mathbf{\Sigma}_0$, 我们使用如下实现协方差:

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})^\top. \tag{3.1}$$

对于实现协方差，以下定理成立。

定理1 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$时,

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_0$$

and

$$\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_0) \xrightarrow{d} N_{\bar{p}}\Big(0, 2\mathbb{D}_p^+(\mathbf{\Sigma}_0 \otimes \mathbf{\Sigma}_0)\mathbb{D}_p^{+\top}\Big).$$

接下来，我们考虑参数估计。估计参数 $\mathbf{\Lambda}_{x_1}$、$\mathbf{\Lambda}_{x_2}$、$\mathbf{\Gamma}$、$\mathbf{\Psi}$、$\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}$、$\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta}$、$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}$。请注意，为满足参数估计的可识别性条件，假定其中一些元素已知。关于参数的约束和可识别性条件，请参见备注2。将参数设为 $\theta \in \Theta$，其中 $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ 是一个凸紧空间。θ 仅包含未知的

以及 $\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}$、 $\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}$、 $\boldsymbol{\Gamma}$、 $\boldsymbol{\Psi}$、 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$、 $\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}$、 $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta}$ 中互不重复的元素。将参数模型的协方差结构设置为

$$\boldsymbol{\Sigma}(\theta) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{11}(\theta) & \boldsymbol{\Sigma}^{12}(\theta) \\ \boldsymbol{\Sigma}^{12}(\theta)^\top & \boldsymbol{\Sigma}^{22}(\theta) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^{11}(\theta) &= \boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top + \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{12}(\theta) &= \boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{22}(\theta) &= \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top + \boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta})\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top + \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}. \end{aligned}$$

假设存在 $\theta_0 \in \operatorname{Int}\Theta$，使得

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0).$$

注意， $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 是正定矩阵；参见引理31。将参数模型的准似然函数定义为

$$\mathbb{L}_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det\left(h_n\boldsymbol{\Sigma}(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2h_n}(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})^\top\boldsymbol{\Sigma}(\theta)^{-1}(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})\right\}. \tag{3.3}$$

成立

$$\log\mathbb{L}_n(\theta) = -\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\boldsymbol{\Sigma}(\theta) - \frac{n}{2}\operatorname{tr}\big\{\boldsymbol{\Sigma}(\theta)^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}\big\}. \tag{3.4}$$

关于 (3.3) 和 (3.4) 的细节，请参见附录 8.1。令

$$\ell_n(\boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\boldsymbol{\Sigma} - \frac{n}{2}\operatorname{tr}\big\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}\big\}.$$

注意到 $\ell_n(\boldsymbol{\Sigma})$ 有一个最大值

$$-\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \frac{np}{2}$$

当 $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} > 0$ 时，取值为 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$。定义如下函数：

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) &= -\frac{2}{n}\log\mathbb{L}_n(\theta) + \frac{2}{n}\left\{-\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \frac{np}{2}\right\} \\ &= \log\det\boldsymbol{\Sigma}(\theta) - \log\det\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} + \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}(\theta)^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}\right\} - p. \end{aligned} \tag{3.5}$$

根据 Shapiro 中的定理1， [33], (3.5) 可改写为

$$\mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) = (\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta))^\top\mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \tag{3.6}$$

当 $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} > 0$ 时，其中

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) = \mathbb{D}_p^\top \int_0^1\int_0^1 &\lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}(\theta) + \lambda_1\lambda_2(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \boldsymbol{\Sigma}(\theta)))^{-1} \\ &\otimes(\boldsymbol{\Sigma}(\theta) + \lambda_1\lambda_2(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \boldsymbol{\Sigma}(\theta)))^{-1}d\lambda_1 d\lambda_2\mathbb{D}_p \end{aligned}$$

当 $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} > 0$ 时。此外，定义如下函数：

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) = (\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta))^\top\tilde{\mathrm{V}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta)),$$

其中

$$\tilde{\mathrm{V}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) = \begin{cases} \mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)), & (\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} \text{ is non-singular}), \\ \mathbb{I}_{\bar{p}}, & (\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} \text{ is singular}). \end{cases}$$

对比函数为

$$\mathbb{F}_n(\theta) = \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)). \tag{3.7}$$

ˆ 最小值对比估计量 θ_n 定义为

$$\mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n) = \inf_{\theta\in\Theta} \mathbb{F}_n(\theta). \tag{3.8}$$

Set

$$\Delta = \partial_\theta \operatorname{vech} \mathbf{\Sigma}(\theta)|_{\theta=\theta_0}, \tag{3.9}$$

其中 $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$。令

$$\mathbf{W}(\theta) = 2\mathbb{D}_p^+(\mathbf{\Sigma}(\theta)\otimes\mathbf{\Sigma}(\theta))\mathbb{D}_p^{+\top}. \tag{3.10}$$

此外，我们作出以下假设。

[E1] (i) $\mathbf{\Sigma}(\theta_1) = \mathbf{\Sigma}(\theta_2) \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2$.
(ii) 秩 $\Delta = q$。

备注2 假设 [**E1**] **(i)**是参数估计的可识别性条件，并意味着最小对比估计量 θ_n的一致性。与因子模型一样，当参数不受约束时，LISREL 模型不具备参数估计的可识别性条件。为了满足 [**E1**](i)，可以将某些参数固定为 0 或 1，或者假设某些参数与其他参数具有相同的值。这些约束是从各研究领域的理论角度确定的，满足 [**E1**] **(i)**的模型示例见第 5 节。遗憾的是，对于 LISREL 模型，目前尚不清楚满足 [**E1**](i)的简单充分条件。关于可识别性问题，例如，参见 Everitt [13]。假设 [**E1**](ii)意味着 $\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta$是非奇异的，参见引理35。

对于最小对比估计量，我们得到以下定理。

定理2 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E1**], 当 $h_n \longrightarrow 0$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$$

and

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N_q\Big(0, \big(\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big)^{-1}\Big).$$

接下来，我们考虑拟合优度检验。统计假设检验如下:

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\theta), \\ H_1 : \mathbf{\Sigma} \neq \mathbf{\Sigma}(\theta). \end{cases} \tag{3.11}$$

准似然比 Λ_n 定义为

$$\Lambda_n = \frac{\max_{\theta\in\Theta} \mathrm{L_n}(\mathbf{\Sigma}(\theta))}{\max_{\mathbf{\Sigma}>0} \mathrm{L_n}(\mathbf{\Sigma})},$$

其中

$$\mathrm{L}_n(\mathbf{\Sigma}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det(h_n\mathbf{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2h_n}(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})^\top\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbb{X}_{t_i^n} - \mathbb{X}_{t_{i-1}^n})\right\}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}-2\log\Lambda_n &= -2\max_{\theta\in\Theta}\log \mathrm{L_n}(\mathbf{\Sigma}(\theta)) + 2\max_{\mathbf{\Sigma}>0}\log \mathrm{L_n}(\mathbf{\Sigma}) \\ &= -2\left\{-\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n) - \frac{n}{2}\operatorname{tr}\left\{\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\right\}\right\} \\ &\quad + 2\left\{-\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \frac{np}{2}\right\} \\ &= n\left\{\log\det\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n) - \log\det\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} + \operatorname{tr}\left\{\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\right\} - p\right\} \\ &= n\mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}}))\end{aligned} \tag{3.12}$$

为 $\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} > 0$。拟似然比检验统计量定义为

$$\mathbb{T}_n = n\mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n). \tag{3.13}$$

我们得到检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的如下渐近结果。

定理3 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 且 [**E1**], 当 $h_n \longrightarrow 0$时,

$$\mathbb{T}_n \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-q}$$

在 H_0 条件下。

根据定理3，构造渐近显著性水平为 $\alpha \in (0,1)$ 的检验。拒绝域设为

$$\left\{\mathbb{T}_n > \chi^2_{\bar{p}-q}(\alpha)\right\}.$$

Fin ¯ally，我们研究该检验的一致性。令 $\mathbb{U}(\theta) = \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta))$。 θ 定义为

$$\mathbb{U}(\bar{\theta}) = \inf_{\theta\in\Theta}\mathbb{U}(\theta). \tag{3.14}$$

此外，我们作出以下假设:

[**E2**] $\mathbb{U}(\theta_1) = \mathbb{U}(\theta_2) \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2$.

备注 3 假设 [**E2**]意味着在 H_1下的 $\hat{}\theta_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$ ，参见引理 36。

我们有如下定理。

定理4 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 且 [**E2**], 如 $h_n \longrightarrow 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\mathbb{T}_n > \chi^2_{\bar{p}-q}(\alpha)\Big) \longrightarrow 1$$

在 H_1 下。

注4 拟合优度检验存在一些问题。例如，Bentler 和 Bonett [7] 讨论了拟合优度检验存在的问题。不过，拟合优度检验是结构方程模型中最受欢迎的模型评估方法之一；例如，参见 Mcdonald [28]。因此，本文仅将拟合优度检验作为模型评估方法，其他方法留待未来研究。

在遍历情形下，以下与非遍历情形类似的结果成立。

定理5 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**] 和 [**D1**]-[**D2**], 当 $h_n \longrightarrow 0$ 和 $nh_n \longrightarrow \infty$时,

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_0.$$

此外，作为 $nh_n^2 \longrightarrow 0$,

$$\sqrt{n}(\mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}_0) \xrightarrow{d} N_{\bar{p}}\Big(0, 2\mathbb{D}_p^+(\mathbf{\Sigma}_0 \otimes \mathbf{\Sigma}_0)\mathbb{D}_p^{+\top}\Big).$$

定理 6 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**], [**D1**]-[**D2**] 以及 [**E1**], 分别为 $h_n \longrightarrow 0$ 和 $nh_n \longrightarrow \infty$时,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0.$$

此外，作为 $nh_n^2 \longrightarrow 0$,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N_q\Big(0, \big(\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big)^{-1}\Big).$$

定理 7 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**], [**D1**]-[**D2**] 以及 [**E1**], , 其中 $h_n \longrightarrow 0$、 $nh_n \longrightarrow \infty$ 和 $nh_n^2 \longrightarrow 0$,

$$\mathbb{T}_n \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-q}$$

在 H_0之下。

定理 8 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**], [**D1**]-[**D2**] 和 [**E2**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$ 和 $nh_n \longrightarrow \infty$的条件下,

$$\mathbb{P}\Big(\mathbb{T}_n > \chi^2_{\bar{p}-q}(\alpha)\Big) \longrightarrow 1$$

在 H_1的条件
下。

注 5 一般而言，在遍历情形和非遍历情形下， $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$ 和 θ_n 的极限分布各不相同。在我们的设定中，两种情形下它们都收敛到相同的分布。这是因为在我们的设定中波动率为常数。

4. SSEM for diffusion processes

本节研究扩散过程的结构方程模型中的稀疏估计。分别由 (3.7)、(3.8) 和 (3.14) 定义 $\mathbb{F}_n(\theta)$、 θ_n 和 $\mathbb{U}(\theta)$。首先，我们考虑非遍历情形。Lasso 估计量（Tibshirani[36]）定义如下:

$$\hat{\theta}_{lasso,n} \in \arg\inf_{\theta\in\Theta}\Big\{\mathbb{F}_n(\theta) + \lambda_n \sum_{j=1}^{q} |\theta^{(j)}|\Big\},$$

其中 $\lambda_n > 0$。Lasso 不具有 Oracle性质；例如，参见 Zou [40]。设

$$\kappa_n^{(j)} = \lambda_{1,n}|\hat{\theta}_n^{(j)}|^{-\gamma} 1_{\left\{|\hat{\theta}_n^{(j)}|\geq\delta\right\}} + \lambda_{2,n} 1_{\left\{|\hat{\theta}_n^{(j)}|<\delta\right\}}$$

对于 $j = 1, \cdots, q$, 其中 $\lambda_{1,n} > 0$, $\lambda_{2,n} > 0$, $\gamma > 0$ 且 $\delta > 0$。自适应套索估计量（Zou [40]）定义为

$$\hat{\theta}_{adaptive,n} \in \arg\inf_{\theta\in\Theta}\Big\{\mathbb{F}_n(\theta) + \sum_{j=1}^{q} \kappa_n^{(j)}|\theta^{(j)}|\Big\}. \tag{4.1}$$

ˆ 尽管需要初始估计量 θ_n，自适应套索具有Oracle性质。Wang and Leng [38]表明，自适应套索的对比函数可改写为

$$(\theta-\hat{\theta}_n)^\top \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\theta)(\theta-\hat{\theta}_n)+\sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\theta^{(j)}|, \tag{4.2}$$

其中 $\partial_\theta^2=\partial_\theta\partial_\theta^\top$。与（4.1）相比，（4.2）在数值上更容易求解。Suzuki and Yoshida [35] 研究了比 Wang and Leng [38]更为一般的情形。令 $G_n\in\mathbb{R}^{q\times q}$，惩罚对比函数定义为

$$\mathbb{Q}_{G,n}(\theta)=(\theta-\hat{\theta}_n)^\top \tilde{G}_n(\theta-\hat{\theta}_n)+\sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\theta^{(j)}|, \tag{4.3}$$

其中

$$\tilde{G}_n=\begin{cases} G_n, & (G_n \text{ is a positive definite matrix}),\\ \mathbb{I}_q, & (G_n \text{ is not a positive definite matrix}).\end{cases}$$

最小惩罚对比估计量定义为

$$\mathbb{Q}_{G,n}(\tilde{\theta}_{G,n})=\inf_{\theta\in\Theta}\mathbb{Q}_{G,n}(\theta).$$

˜估计量 $\theta_{G,\ n}$ 称为惩罚最小二乘近似（PLSA）估计量。有关 PLSA估计量的详细信息，参见 Suzuki and Yoshida [35] 。此外，我们作出以下假设。

[**F1**] 存在一个正定矩阵 $G\in\mathbb{R}^{q\times q}$，使得 $G_n\xrightarrow{P}G$。

不失一般性，本节假设 $\theta_0^{(j)}\neq 0$ for $j=1,\cdots,q_0$ and $\theta_0^{(j)}=0$ for $j=q_0+1,\cdots,q$。令

$$\mathcal{F}_1=\Big\{j\in\{1,\cdots,q\}\mid \theta_0^{(j)}\neq 0\Big\}=\Big\{1,\cdots,q_0\Big\}.$$

假设 $0<\delta<$ 最小值 $_{j\in\mathcal{F}_1}|\theta_0^{(j)}|$。对于任意向量 $v\in\mathbb{R}^q$ 和任意矩阵 $M\in\mathbb{R}^{q\times q}$，令 $v_{\mathcal{F}_1}=(v^{(i)})_{1\le j\le q_0}$ 一个 d

$$M=\begin{pmatrix} M_{\mathcal{F}}^{11} & M_{\mathcal{F}}^{10}\\ M_{\mathcal{F}}^{10\top} & M_{\mathcal{F}}^{00}\end{pmatrix},$$

其中 $M_{\mathcal{F}}^{11}=(M_{ij})_{1\le i,j\le q_0}$, $M_{\mathcal{F}}^{10}=(M_{ij})_{1\le i\le q_0,q_0+1\le j\le q}$ 和 $M_{\mathcal{F}}^{00}=(M_{ij})_{q_0+1\le i,j\le q_0}$ 令

$$\mathfrak{G}_G=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{q_0} & (G_{\mathcal{F}}^{11})^{-1}G_{\mathcal{F}}^{10}\end{pmatrix}$$

and

$$\tilde{\mathcal{F}}_{G,n,1}=\Big\{j\in\{1,\cdots,q\}\mid \tilde{\theta}_{G,n}^{(j)}\neq 0\Big\}.$$

记 $\mathbf{A}(\theta_0)=\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta$，其中 Δ 和 $\mathbf{W}(\theta_0)$分别由式 (3.9) 和 (3.10) 定义。注意，根据 Harville [18] 中的引理35和推论 14.2.12，有 $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{11}(\theta_0)$是一个正定矩阵。PLSA 具有如下 Oracle 性质。

引理1 在 [之下**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E1**] 和 [**F1**], 分别为 $h_n\longrightarrow 0$、$\sqrt{n}\lambda_{1,\ n}\longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,\ n}\longrightarrow\infty$,

$$\mathbb{P}\Big(\tilde{\mathcal{F}}_{G,n,1}=\mathcal{F}_1\Big)\longrightarrow 1.$$

引理 2 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E1**] 和 [**F1**], 分别为 $h_n \longrightarrow 0$、 $\sqrt{n}\lambda_{1,\,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,\,n} \longrightarrow \infty$ 的条件下,

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{G,n} - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} - \mathfrak{G}_G\big\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)\big\} \xrightarrow{P} 0.$$

此外，当 $G = \mathbf{A}(\theta_0)$ 时,

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{G,n} - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-1}\Big).$$

注 6 假设 $G_n = 2^{-1}\partial^2_\theta \mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n)$。与定理2的证明类似，有 $G_n \xrightarrow{P} \mathbf{A}(\theta_0)$，由此得到 $G = \mathbf{A}(\theta_0)$。

注 7 由定理2可得

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, (\mathbf{A}(\theta_0)^{-1})^{11}_{\mathcal{F}}\Big).$$

由 Harville 中的定理 8.5.11 和定理 14.8.4 [18] 可知

$$(\mathbf{A}(\theta_0)^{-1})^{11}_{\mathcal{F}} \geq \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-1}.$$

在 (4.3) 中，当 $G_n = \mathbb{I}_q$ 时，惩罚对比函数为

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\theta) = \sum_{j=1}^{q}\big(\theta^{(j)} - \hat{\theta}^{(j)}_n\big)^2 + \sum_{j=1}^{q}\kappa^{(j)}_n|\theta^{(j)}|$$

并且 LSA 估计量定义为

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}) = \inf_{\theta\in\Theta}\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\theta).$$

从计算角度看，最小化 $\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\theta)$ 比最小化 $\mathbb{Q}_{G,n}(\theta)$ 更容易。请注意，$\theta_{\mathbb{I},n}$ 的渐近协方差矩阵与 $\theta_{G,n}$ 的渐近协方差矩阵不同。设

$$\tilde{\Theta}_n = \Big\{\theta\in\Theta \;\Big|\; \theta^{(j)} = 0 \ (j \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,0})\Big\},$$

其中

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,0} = \Big\{j \in \{1,\cdots,q\} \;\Big|\; \tilde{\theta}^{(j)}_{\mathbb{I},n} = 0\Big\}.$$

定义惩罚方法到普通方法（P-O）估计量如下:

$$\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) = \inf_{\theta\in\tilde{\Theta}_n}\mathbb{F}_n(\theta).$$

有关 P-O 估计量的详细信息，请参见 Suzuki and Yoshida [35] 。P-O 估计量具有以下渐近性质。

引理 3 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E1**], 如 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}(\check{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-1}\Big).$$

接下来，我们再次考虑拟合优度检验（3.11）。回顾一下,

$$\mathrm{L}_n(\mathbf{\Sigma}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det(h_n\mathbf{\Sigma})^{\frac{1}{2}}}\exp\Big\{-\frac{1}{2h_n}(\mathbb{X}_{t^n_i} - \mathbb{X}_{t^n_{i-1}})^\top\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbb{X}_{t^n_i} - \mathbb{X}_{t^n_{i-1}})\Big\}.$$

受限准似然比定义为

$$\check{\Lambda}_n = \frac{\max_{\theta\in\tilde{\Theta}_n}\mathrm{L}_n(\mathbf{\Sigma}(\theta))}{\max_{\mathbf{\Sigma}>0}\mathrm{L}_n(\mathbf{\Sigma})}.$$

与 (3.12) 类似，我们可以看到，当 $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} > 0$ 时，

$$-2\log \check{\Lambda}_n = n\mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_{\mathrm{n}})),$$

其中，\(F\) 由式（3.6）定义。因此，我们将惩罚准似然比检验统计量定义为

$$\check{\mathbb{T}}_n = n\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n). \tag{4.4}$$

ˇ 检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的渐近结果如下。

定理 9 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 以及 [**E1**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$的条件下,

$$\check{\mathbb{T}}_n \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}$$

在 H_0 下。

S由于 $|\mathcal{F}_1|$ 未知，我们需要估计 $|\mathcal{F}_1|$。由此得到以下命题。 .

命题 1 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 且 [**E1**], 当 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 且 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \longrightarrow 0$$

在 H_0 下。

根据定理 9 和命题 1，我们可以构造一个渐近显著性水平为 $\alpha \in$ (0,1) 的检验。拒绝域定义为

$$\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right\}.$$

最后，我们考虑该检验的一致性。令

$$\bar{\mathcal{F}}_1 = \left\{j \in \{1, \cdots, q\} \mid \bar{\theta}^{(j)} \neq 0\right\}.$$

S假设 $0 < \delta <$ 最小值$_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1} |\bar{\theta}^{(j)}|$。此外，我们作出如下假设:

[**F2**] $\partial^2_\theta \mathbb{U}(\bar{\theta})$ 是非奇异的。

以下引理成立。

引理4 在 [之下**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 和 [**F2**], 作为 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n} = \bar{\mathcal{F}}_1\right) \longrightarrow 1$$

在 H_1 下。

此外，以下结果表明该检验具有一致性。

定理10 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 和 [**F2**], 当 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$时,

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) \longrightarrow 1$$

在 H_1 下。

在遍历情形下，我们得到与非遍历情形类似的结果如下。

定理 11 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**], [**D1**]-[**D2**] 和 [**E1**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$, $nh_n \longrightarrow \infty$,$nh_n^2 \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,\ n} \longrightarrow 0$ 以及 $\sqrt{n}\lambda_{2,\ n} \longrightarrow \infty$时,

$$\check{\mathbb{T}}_n \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}$$

在 H_0 条件下。

定理 12 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**], [**D1**]-[**D2**], [**E2**] 和 [**F2**], 分别为 $h_n \longrightarrow 0$, $nh_n \longrightarrow \infty$, $nh_n^2 \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,\ n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,\ n} \longrightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) \longrightarrow 1$$

在 H_1 条件下。

5. Example and simulation results for sem

5.1. T 实模型。 随机过程 $\mathbb{X}_{1,0,t}$ 定义如下，为真实因子模 l:

$$\mathbb{X}_{1,0,t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\top} \xi_{0,t} + \delta_{0,t},$$

其中， $\{\mathbb{X}_{1,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个四维可观测向量过程， $\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个二维潜在公共因子向量过程， $\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个四维潜在特有因子向量过程。随机过程 $\mathbb{X}_{2,0,t}$ 由真实因子模型定义如下:

$$\mathbb{X}_{2,0,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \eta_{0,t} + \varepsilon_{0,t},$$

其中， $\{\mathbb{X}_{2,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个二维可观测向量过程， $\{\eta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个一维潜在公共因子向量过程， $\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个二维潜在特有因子向量过程。此外，$\eta_{0,t}$ 与 $\xi_{0,t}$ 之间的关系表示如下:

$$\eta_{0,t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \xi_{0,t} + \zeta_{0,t},$$

其中， $\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个一维潜在特有因子向量过程。 $\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足以下二维 OU 过程:

$$\mathrm{d}\xi_{0,t} = -\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \xi_{0,t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}W_{1,t}, \quad (t \in [0,T]), \quad c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

其中，$W_{1,t}$ 是二维标准维纳过程。$\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 定义为如下四维 OU 过程:

$$\mathrm{d}\delta_{0,t} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \delta_{0,t}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}W_{2,t}, \quad (t \in [0,T]), \quad c_2 = 0,$$

其中 $W_{2,\ t}$ 是四维标准维纳过程。 $\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 由如下二维奥恩斯坦-乌伦贝克过程定义:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{0,t} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \varepsilon_{0,t}\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}W_{3,t}, \quad (t \in [0,T]), \quad c_3 = 0,$$

其中 $W_{3,\ t}$ 是二维标准维纳过程。 $\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足如下单维OU过程:

$$\mathrm{d}\zeta_{0,t} = -\zeta_{0,t}\mathrm{d}t + 2\mathrm{d}W_{4,t} \quad (t \in [0,T]), \quad c_4 = 0,$$

其中 $W_{4,\ t}$ 是一维标准维纳过程。我们假设 $W_{1,\ t}$、 $W_{2,\ t}$、 $W_{3,\ t}$ 和 $W_{4,\ t}$ 相互独立。图1展示了真实模型的路径图。

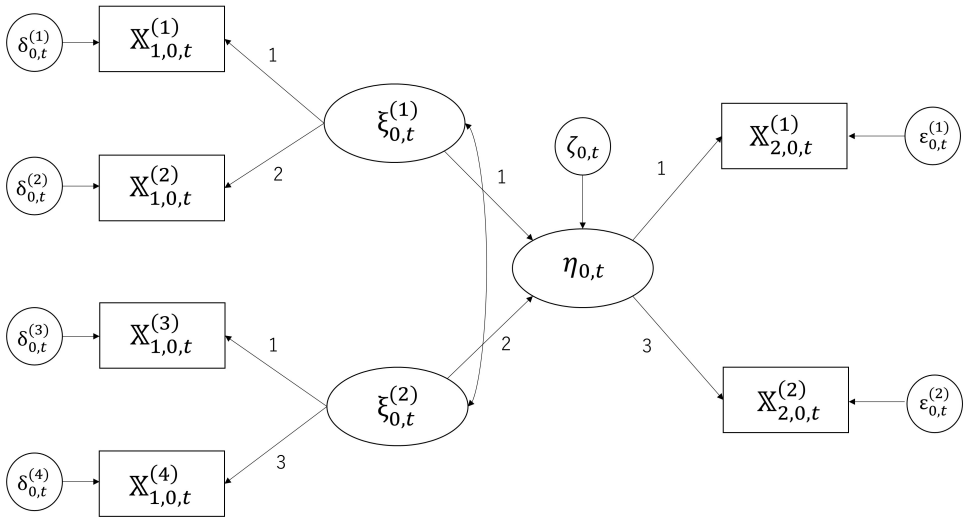


FIGURE 1. 真实模型的路径图。

5.2. 正确设定的参数模型。在参数模型（1.8）—（1.14）中令 $p_1 = 4$、 $p_2 = 2$、 $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 1$ 。假设

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{42} \end{pmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^{4\times 2},$$

其中（$\mathbf{\Lambda}_{x_1}$）$_{21}$ 和（$\mathbf{\Lambda}_{x_1}$）$_{42}$ 不为零,

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21} \end{pmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^{2\times 1},$$

其中（$\mathbf{\Lambda}_{x_2}$）$_{21}$ 不为零， $\mathbf{\Gamma}_{11}$ 和 $\mathbf{\Gamma}_{12}$ 不为零， $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 为正定矩阵，（$\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}$）$_{12}$ 不为零， $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 为正定对角矩阵，且 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} > 0$。参数表示为

$$\begin{aligned}\theta = \Big((\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21}, (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{42}, (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}, \mathbf{\Gamma}_{11}, \mathbf{\Gamma}_{12}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{12}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{22}, \\ (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{22}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{33}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{44}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{22}, \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\Big)^{\top} \in \Theta,\end{aligned}$$

其中 $\Theta = [-100,100]^5 \times [0.1,100] \times [-100,100] \times [0.1,100]^8$。令

$$\theta_0 = \Big(2,3,3,1,2,2,2,4,1,4,4,1,1,9,4\Big)^{\top} \in \Theta.$$

有 $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{\Sigma}(\theta_0)$，这意味着该模型是一个设定正确的参数模型。此外，我们有

$$\mathbf{\Sigma}(\theta_1) = \mathbf{\Sigma}(\theta_2) \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2. \tag{5.1}$$

关于（5.1）的详细信息，请参见附录 8.2。图 2 展示了设定正确的参数模型的路径图。

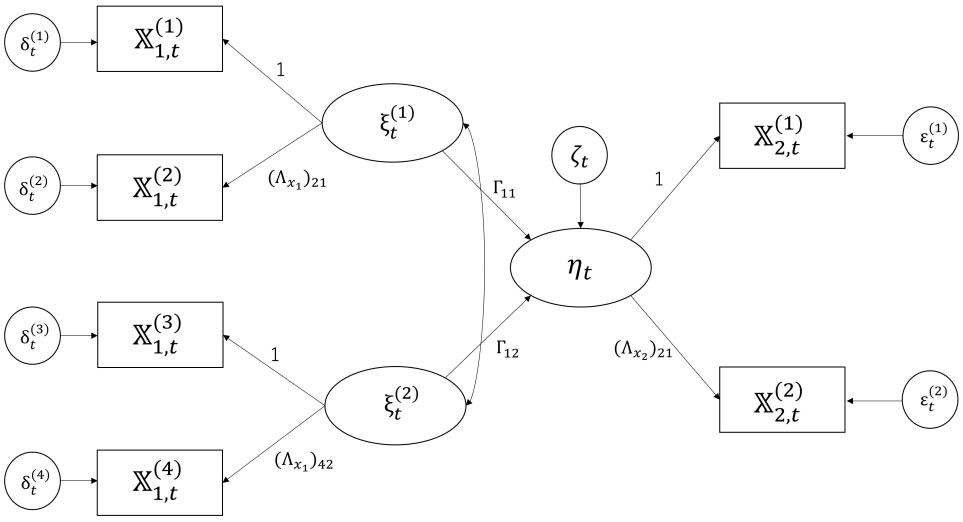


FIGURE 2. 设定正确的参数模型的路径图。

5.3. **设定错误的参数模型**。

5.3.1. 模型*A*。 令参数模型 (1.8)-(1.14) 中的 $p_1 = 4$、 $p_2 = 2$、 $k_1 = 1$ 和 $k_2 = 1$ 。假设

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21} & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{31} & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

其中 $(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21}$,$(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{31}$ 和 $(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41}$ 均不为零,

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2\times 1},$$

其中，$(\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}$ 不为零， $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}$ 不为零， $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} > 0$、 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} > 0$以及 $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是正定对角矩阵。参数表示如下:

$$\begin{aligned} \theta = \Big(& (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21}, (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{31}, (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41}, (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{11}, \\ & (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{22}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{33}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{44}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{22}, \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} \Big)^\top \in \Theta, \end{aligned}$$

其中 $\Theta = [-100, 100]^5 \times [0.1, 100]^8$。图 3 展示了模型A的路径图。

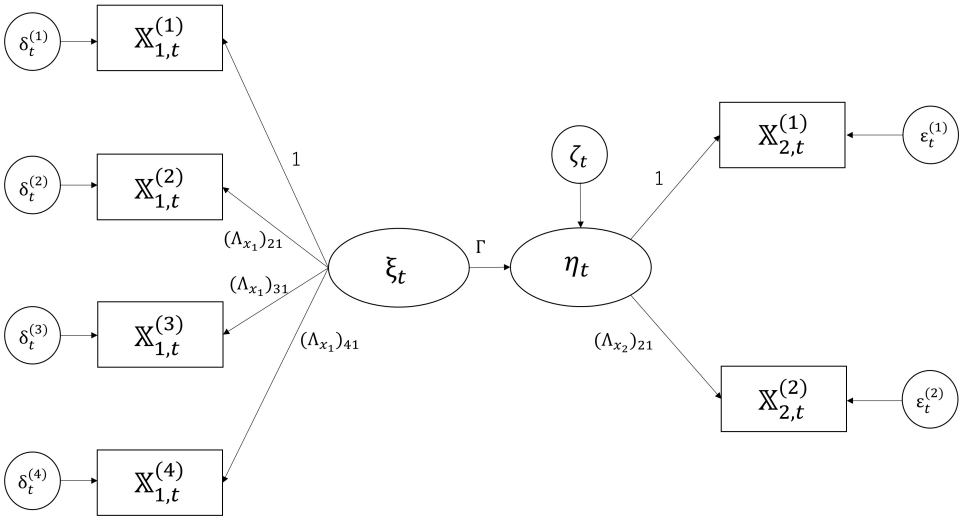


FIGURE 3. 模型A的路径图。

5.3.2. 模型B . 在参数模型 (1.8)-(1.14) 中，令 $p_1 = 4$、 $p_2 = 2$、 $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 1$ 。假设

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41} \\ 0 & (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{22} & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{4\times 2},$$

其中，$(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{22}$ 和$(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41}$ 均不为零，

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2\times 1},$$

其中，$(\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}$ 不为零， $\mathbf{\Gamma}_{11}$ 和 $\mathbf{\Gamma}_{12}$ 不为零， $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是正定矩阵，$(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{12}$ 不为零， $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是正定对角矩阵，且 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} > 0$。参数表示为

$$\theta = \Big((\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{22}, (\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{41}, (\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}, \mathbf{\Gamma}_{11}, \mathbf{\Gamma}_{12}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{12}, (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{22},$$
$$(\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{22}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{33}, (\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta})_{44}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{11}, (\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{22}, \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\Big)^\top \in \Theta,$$

其中 $\Theta = [-100, 10\ 0]^5 \times [0.1, 100] \times [-100, 100] \times [0.1, 100]^8$。图4展示了模型B的路径图。 .

5.4. **模拟结果**。令 $(n,\ h_n,\ T) = (10_4,\ 10^{-3},\ 10_1)$。我们从真实模型中生成了 10,000 条相互独立的样本路径。为了优化 $\mathbb{F}_n(\theta)$，我们使用 R语言中的 optim() 函数和 BFGS方法。优化的初始值设为 θ_0。遍历情形的模拟结果见附录 8.10。

5.4.1. 正确设定的参数模型。 首先，我们检验 $\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}$的渐近表现。表1展示了 $\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}$的样本均值和样本标准差（SD）。图5展示了 $\sqrt{n}((\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}})_{11} - (\mathbf{\Sigma}_0)_{11})$的直方图、Q-Q图和经验分布。从表1和图5可以看出，ˆ 定理1在这个例子中成立。接下来，我们考察 θ_n的渐近表现。表2ˆˆ展示了 θ_n 的样本均值和样本标准差，据此我们推断 θ_n 具有一致性。图6展示了$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)})$的直方图、Q-Q图和经验分布。这些模拟结果表明

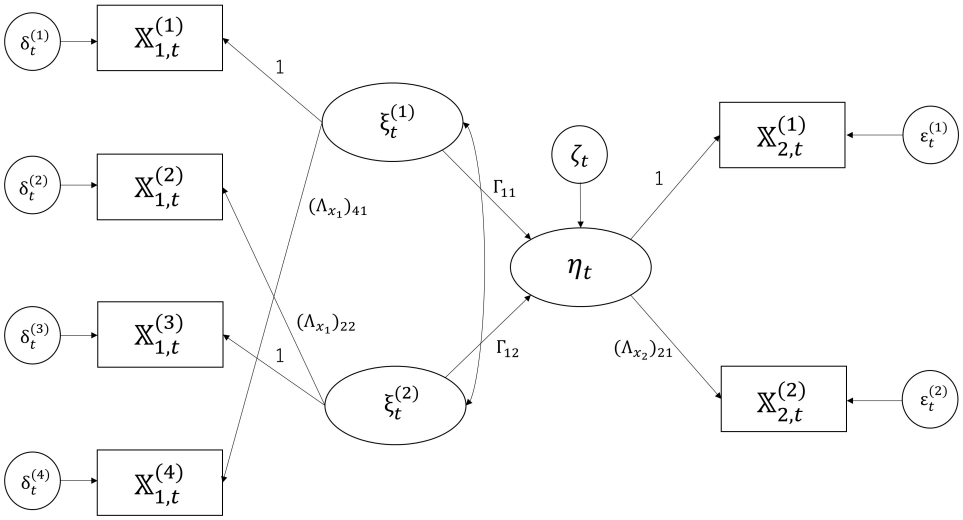


FIGURE 4. 模型B的路径图。

定理2在这个例子中似乎成立。表3展示了检验统计量 $\mathbb{T}_n$的样本均值和样本标准差。图7展示了检验统计量 $\mathbb{T}_n$的直方图、Q-Q图和经验分布。表3和图7表明，检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 似乎在 H_0下收敛于 χ_6^2 。模拟结果的详细信息见附录8.11。

5.4.2. 错误设定的参数模型。 表4展示了模型A和模型B中拟似然比检验的拒绝次数，这表明在模型A和模型B的检验中，原假设均被拒绝了10000次。表5展示了模型A和模型B中检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的四分位数。根据表5，我们推断模型B比模型A更接近真实模型。

	$(\mathbb{Q}_{XX})_{11}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{12}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{13}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{14}$
均值（真实值）	3.002（3.000）	4.002（4.000）	2.000 (2.000)	6.001 (6.000)
标准差（理论值）	0.042 (0.042)	0.072 (0.072)	0.052 (0.053)	0.121 (0.121)
	$(\mathbb{Q}_{XX})_{15}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{16}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{22}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{23}$
均值（真实值）	6.001 (6.000)	18.003 (18.000)	12.007 (12.000)	4.001 (4.000)
标准差（理论值）	0.113 (0.114)	0.337 (0.341)	0.170 (0.170)	0.106 (0.106)
	$(\mathbb{Q}_{XX})_{24}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{25}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{26}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{33}$
均值（真实值）	12.002 (12.000)	12.002 (12.000)	36.007 (36.000)	8.006 (8.000)
标准差（理论值）	0.245 (0.242)	0.229 (0.227)	0.686 (0.681)	0.112 (0.113)
	$(\mathbb{Q}_{XX})_{34}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{35}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{36}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{44}$
均值（真实值）	12.003 (12.000)	10.003 (10.000)	30.009 (30.000)	37.010 (37.000)
标准差（理论值）	0.210 (0.210)	0.187 (0.187)	0.561 (0.560)	0.530 (0.523)
	$(\mathbb{Q}_{XX})_{45}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{46}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{55}$	$(\mathbb{Q}_{XX})_{56}$
均值（真实值）	30.006（30.000）	90.021（90.000）	31.008（31.000）	90.023（90.000）
标准差（理论值）	0.457 (0.452)	1.369 (1.357)	0.441 (0.438)	1.302 (1.294)
	$(\mathbb{Q}_{XX})_{66}$			
均值（真实值）	279.081（279.000）			
标准差（理论值）	3.961（3.946）			

TABLE 1. $\mathbb{Q}_{XX}$的样本均值和样本标准差（标准差）。

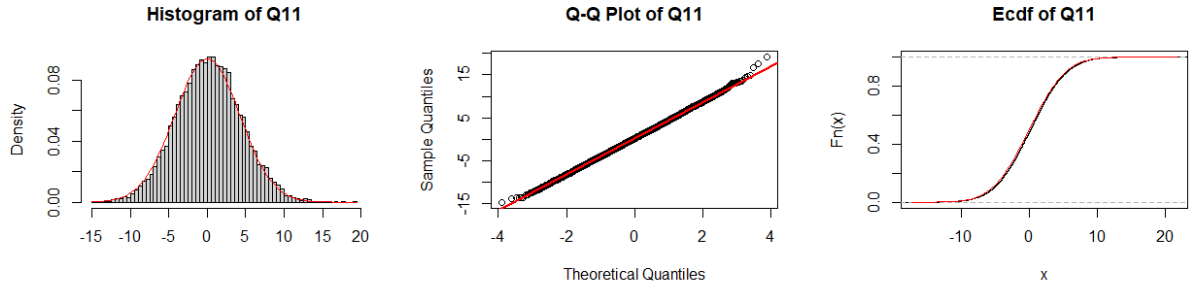


FIGURE 5.$\sqrt{n}$的直方图（左）、Q-Q图（中）和经验分布（右）（$\mathbb{Q}_{XX11} - \boldsymbol{\Sigma}_{011}$）。红线表示理论曲线。

	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(2)}$	$\hat{\theta}_n^{(3)}$	$\hat{\theta}_n^{(4)}$
均值（真实值）	2.000 (2.000)	3.000 (3.000)	3.000 (3.000)	0.999 (1.000)
标准差（理论值）	0.026 (0.026)	0.336 (0.336)	0.009 (0.008)	0.036 (0.036)
	$\hat{\theta}_n^{(5)}$	$\hat{\theta}_n^{(6)}$	$\hat{\theta}_n^{(7)}$	$\hat{\theta}_n^{(8)}$
均值（真实值）	2.001（2.000）	2.001（2.000）	2.000（2.000）	4.002（4.000）
标准差（理论值）	0.030 (0.030)	0.044 (0.044)	0.045 (0.046)	0.100 (0.100)
	$\hat{\theta}_n^{(9)}$	$\hat{\theta}_n^{(10)}$	$\hat{\theta}_n^{(11)}$	$\hat{\theta}_n^{(12)}$
均值（真实值）	1.001 (1.000)	4.003（4.000）	4.004 (4.000)	1.004（1.000）
标准差（理论值）	0.024 (0.024)	0.096 (0.096)	0.059（0.060）	0.183（0.182）
	$\hat{\theta}_n^{(13)}$	$\hat{\theta}_n^{(14)}$	$\hat{\theta}_n^{(15)}$	
均值（真实值）	1.001（1.000）	9.007 (9.000)	3.999 (4.000)	
标准差（理论值）	0.038 (0.038)	0.341 (0.343)	0.110 (0.109)	

TABLE 2. θ_n的样本均值和样本标准差（SD）。

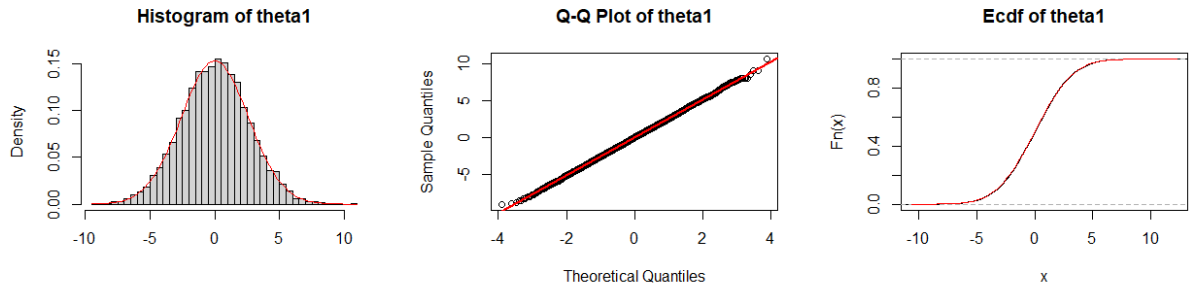


FIGURE 6. $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n^{(1)} - \theta_0^{(1)})$ 的直方图（左）、Q-Q图（中）和经验分布（右）。红线为理论曲线。

均值（真实值）	5.980 (6.000)
SD （理论值）	3.400 (3.464)

TABLE 3. 检验统计量的样本均值和样本标准差（SD） $\mathbb{T}_n$.

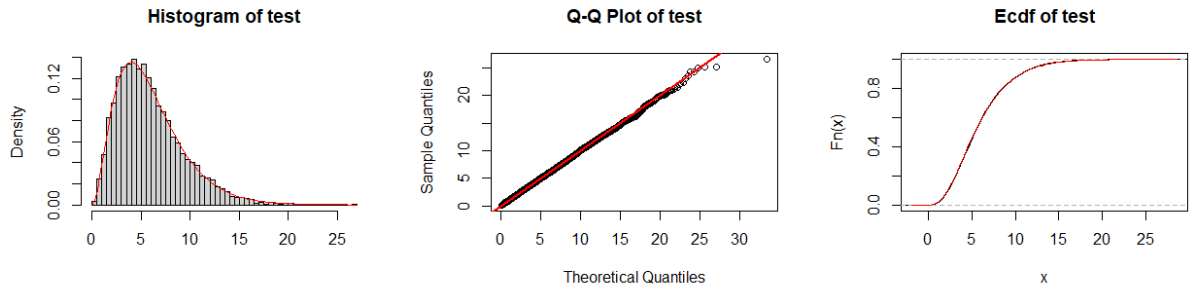


FIGURE 7. 检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的直方图（左）、Q-Q图（中）和经验分布（右）。红线为理论曲线。

模型A	10000
模型B	10000

TABLE 4. 模型A和模型B中拟似然比检验的拒绝次数。

	Min	$Q1$	中位数	$Q3$	Max
模型A	2391	2720	2791	2862	3205
模型B	1793	2064	2123	2183	2442

TABLE 5. 模型A和模型B中检验统计量的 $\mathbb{T}_n$ 四分位数。

6. Example and simulation results for ssem

6.1. 真实模型。随机过程 $\mathbb{X}_{1,0,t}$ 由真实因子模型定义如下:

$$\mathbb{X}_{1,0,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\top} \xi_{0,t} + \delta_{0,t},$$

其中，$\{\mathbb{X}_{1,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个九维可观测向量过程，$\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个三维潜在公共因子向量过程，$\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个九维潜在特有因子向量过程。随机过程 $\mathbb{X}_{2,\ 0,\ t}$ 定义为如下真实因子模型:

$$\mathbb{X}_{2,0,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\top} \eta_{0,t} + \varepsilon_{0,t},$$

其中，$\{\mathbb{X}_{2,0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个六维可观测向量过程，$\{\eta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个二维潜在公共因子向量过程，$\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个六维潜在特有因子向量过程。此外，我们将 $\eta_{0,t}$ 与 $\xi_{0,t}$ 之间的关系表示如下:

$$\eta_{0,t} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xi_{0,t} + \zeta_{0,t},$$

其中，$\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 是一个二维潜在特有因子向量过程。假设 $\{\xi_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 定义为如下三维 OU 过程:

$$\mathrm{d}\xi_{0,t} = -\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \xi_{0,t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}W_{1,t},\ (t \in [0,T]),\ \ \xi_{0,0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

其中 $W_{1,\ t}$ 是一个三维标准维纳过程。$\{\delta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足以下九维 OU过程:

$$\mathrm{d}\delta_{0,t} = -B_2 \xi_{0,t} \mathrm{d}t + \mathbf{S}_{2,0} \mathrm{d}W_{2,t},\ (t \in [0,T]),\ \delta_{0,0} = 0,$$

其中 B_2 =Diag(3，2，3，2，2，3，1，3，1), $\mathbf{S}_{2,\ 0}$ =Diag(1，2，1，5，2，3，1，2，3) 且 $W_{2,\ t}$ 是一个九维标准维纳过程。$\{\varepsilon_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 定义为以下六维 OU过程:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{0,t} = -B_3 \varepsilon_{0,t} \mathrm{d}t + \mathbf{S}_{3,0} \mathrm{d}W_{3,t},\ (t \in [0,T]),\ \varepsilon_{0,0} = 0,$$

其中 B_3 =Diag(1，3，2，3，2，2), $\mathbf{S}_{3,\ 0}$ =Diag(3，1，2，1，5，2) 且 $W_{3,\ t}$ 是一个六维标准维纳过程。$\{\zeta_{0,t}\}_{t\geq 0}$ 满足以下二维奥恩斯坦-乌伦贝克过程:

$$\mathrm{d}\zeta_{0,t} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_{0,t} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}W_{4,t},\ (t \in [0,T]),\ \zeta_{0,0} = 0,$$

其中 $W_{4,\ t}$ 是二维标准维纳过程。图 8 展示了真实模型的路径图。

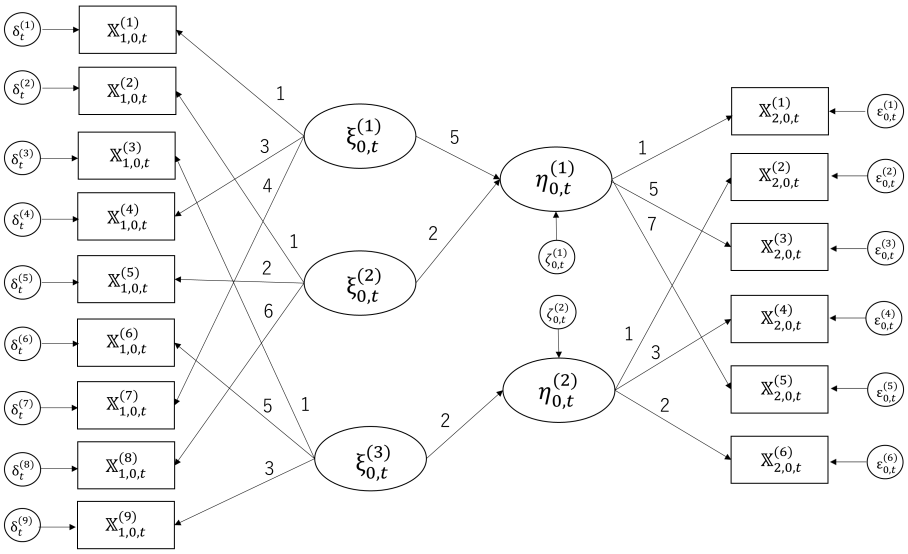


FIGURE 8. 真实模型的路径图。

6.2. 设定正确的参数模型。令参数模型 (1.8)-(1.14) 中的 $p_1 = 9$、 $p_2 = 6$、 $k_1 = 3$ 和 $k_2 = 2$ 。假设

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1} = \left(\mathbb{I}_3, \mathbf{A}_{x_1}^\top\right)^\top, \quad \mathbf{\Lambda}_{x_2} = \left(\mathbb{I}_2, \mathbf{A}_{x_2}^\top\right)^\top$$

其中， $\mathbf{A}_{x_1} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ 和$\mathbf{A}_{x_2} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$， $\mathbf{A}_{x_2}$ 是一个列满秩矩阵。此外，我们假设$\mathbf{\Lambda}_{x_1}$ 满足 Anderson 和 Rubin [3]中的定理5.1所规定的可识别性条件。该参数表示为

$$\theta = \left(\operatorname{vec}\mathbf{A}_{x_1}^\top, \operatorname{vec}\mathbf{A}_{x_2}^\top, \operatorname{vec}\mathbf{\Gamma}^\top, \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}^\top, \operatorname{diag}\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta}^\top, \operatorname{diag}\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^\top, \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}^\top\right)^\top \in \Theta$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta = &[-100,100]^{32} \times [0.1,100] \times [-100,100]^2 \times [0.1,100] \\ &\times [-100,100] \times [0.1,100]^{17} \times [-100,100] \times [0.1,100],\end{aligned}$$

$\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ 是一个满行秩矩阵， $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是正定矩阵， $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$和 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ 是正定对角矩阵。设

$$\begin{aligned}\theta_0 = \Big(&3,0,0,0,2,0,0,0,5,4,0,0,0,6,0,0,0,3,5,0,0,3,7,0,0,2,5,2,0, \\ &0,0,2,4,0,0,1,0,9,1,4,1,25,4,9,1,4,9,9,1,4,1,25,4,9,0,1\Big)^\top \in \Theta\end{aligned}$$

并且我们注意到 $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{\Sigma}(\theta_0)$，这意味着该模型是一个设定正确的参数模型。该模型满足

$$\mathbf{\Sigma}(\theta_1) = \mathbf{\Sigma}(\theta_2) \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2. \tag{6.1}$$

关于（6.1）的证明，见附录8.3。图9展示了正确设定的参数模型的路径图。

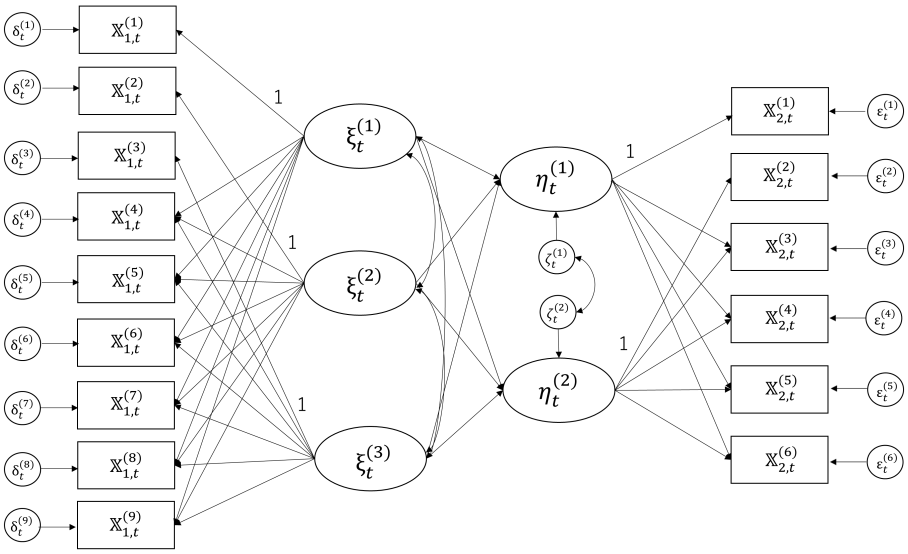


FIGURE 9. 正确设定的参数模型的路径图。

6.3. 错误设定的参数模型。 设定参数模型 (1.8)-(1.14) 中的 $p_1 = 9$、 $p_2 = 6$、 $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 2$ 。假设

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1} = \left(\mathbb{I}_2, \mathbf{A}_{x_1}^\top\right)^\top, \quad \mathbf{\Lambda}_{x_2} = \left(\mathbb{I}_2, \mathbf{A}_{x_2}^\top\right)^\top$$

其中 $\mathbf{A}_{x_1} \in \mathbb{R}^{6\times 2}$、$\mathbf{A}_{x_2} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$、$\mathbf{A}_{x_2}$ 是列满秩矩阵。此外，假设 $\mathbf{\Lambda}_{x_1}$满足 Anderson 和 Rubin [3] 中定理5.1的可识别性条件。参数是

$$\theta = \left(\operatorname{vec}\mathbf{A}_{x_1}^\top, \operatorname{vec}\mathbf{A}_{x_2}^\top, \operatorname{vec}\mathbf{\Gamma}^\top, \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}^\top, \operatorname{diag}\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta}^\top, \operatorname{diag}\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^\top, \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}^\top\right)^\top \in \Theta$$

其中

$$\Theta = [-100, 100]^{26} \times [0.1, 100] \times [-100, 100] \times [0.1, 100]^{17} \times [-100, 100] \times [0.1, 100],$$

$\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是非奇异的， $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 和 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是正定矩阵， $\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ 和$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ 是正定对角矩阵。图10展示了错误设定参数模型的路径图。

6.4. 模拟结果。从真实模型生成 10,000 条独立样本路径。令 n， h_n， $T = (10^4, 10^{-4}, 1)$。令 $\delta = 0.1$、$\lambda_{1,n} = n^{-0.6}$、 $\lambda_{2,n} = \delta^{-1}$ 和 $\gamma = 4$。为优化 $\mathbb{F}_n$，我们在 R语言中使用 optim() 函数和 BFGS方法。为优化 $\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\theta)$，采用次梯度法。有关次梯度法，请参见 Shor[34] 。优化的初始值设为 θ_0。

6.4.1. 设定正确的参数模型。表6展示了 $\mathbb{T}_n$的样本均值和样本标准差 $\check{}$ $\check{}$。图11展示了 $\mathbb{T}_n$的直方图、Q-Q图和经验分布。从表6和图11可以看出，在 H_0下，$\check{}$ $\mathbb{T}_n$ 依分布收敛于 χ^2_{87} 。

6.4.2. 设定错误的参数模型。表7展示了惩罚准似然比检验的拒绝次数。从表7来看，定理10似乎适用于这个例子。

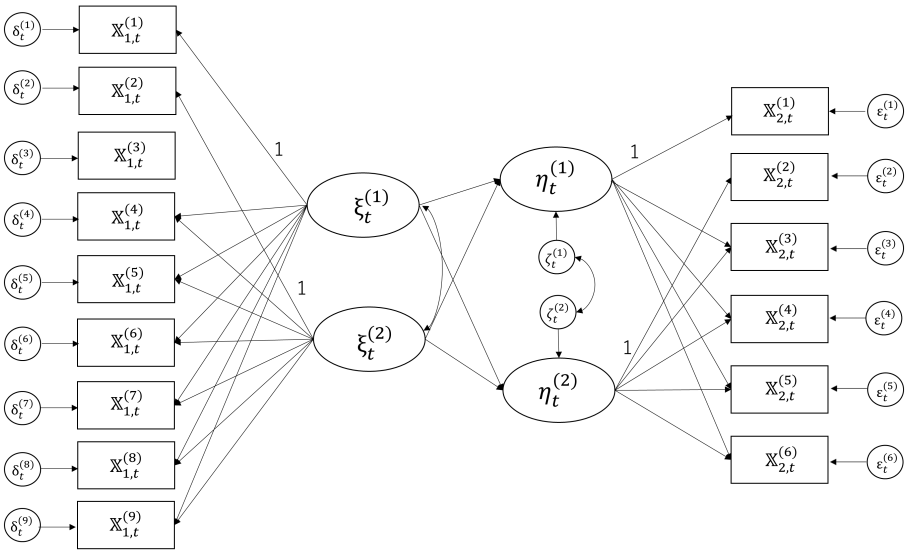


FIGURE 10. 错误设定参数模型的路径图。

均值（真实值）	86.684 (87.000)
SD （理论值）	13.096 (13.191)

TABLE 6. 检验统计量 $\check{}\,\mathbb{T}_n$ 的样本均值和样本标准差（SD）。

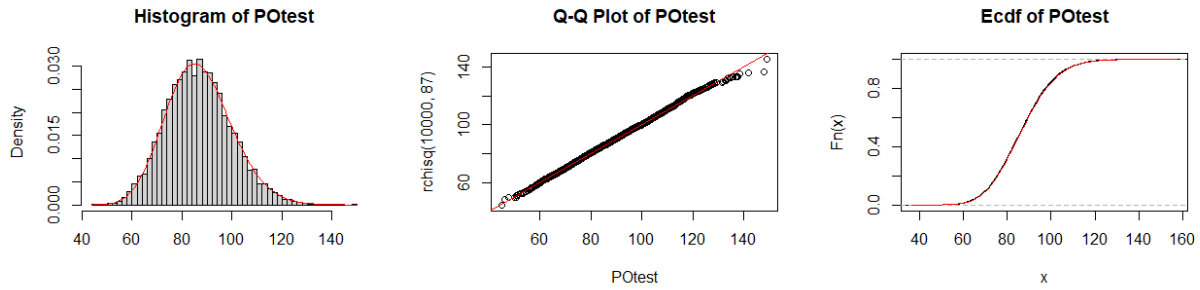


FIGURE 11. 检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的直方图（左）、Q-Q图（中）和经验分布（右）。红线为理论曲线。

错误设定的参数模型	10000

TABLE 7. 惩罚准似然比检验的拒绝次数。

7. Proofs

令 $\Delta Y_i = Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}$ 对于任意随机过程 Y_t。设

$$\mathbb{Q}_{\xi\xi,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\xi_{0,i})(\Delta\xi_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\delta\delta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\delta_{0,i})(\Delta\delta_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\varepsilon\varepsilon,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\varepsilon_{0,i})(\Delta\varepsilon_{0,i})^\top,$$
$$\mathbb{Q}_{\zeta\zeta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\zeta_{0,i})(\Delta\zeta_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\xi\delta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\xi_{0,i})(\Delta\delta_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\xi_{0,i})(\Delta\varepsilon_{0,i})^\top,$$
$$\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\xi_{0,i})(\Delta\zeta_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\delta\varepsilon,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\delta_{0,i})(\Delta\varepsilon_{0,i})^\top,\ \mathbb{Q}_{\delta\zeta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\delta_{0,i})(\Delta\zeta_{0,i})^\top,$$
$$\mathbb{Q}_{\varepsilon\zeta,0} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(\Delta\varepsilon_{0,i})(\Delta\zeta_{0,i})^\top.$$

定义 $\bar{r} = \sum_{i=1}^{4} r_i$。令

$$\mathscr{F}_i^n = \sigma(W_{1,s}, W_{2,s}, W_{3,s}, W_{4,s}, s \le t_i^n)$$

对于 $i = 1, \cdots n$。不失一般性，假设 $T = 1$。于是有 $h_n = n^{-1}$。

引理 5 在 **[A1]**, **[B1]**, **[C1]** 和 **[D1]**, 下, $h_n \longrightarrow 0$,

$$\mathbb{Q}_{\xi\xi,0} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0},\ \mathbb{Q}_{\delta\delta,0} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0},\ \mathbb{Q}_{\varepsilon\varepsilon,0} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0},$$
$$\mathbb{Q}_{\zeta\zeta,0} \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0},\ \mathbb{Q}_{\xi\delta,0} \xrightarrow{P} O_{k_1\times p_1},\ \mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0} \xrightarrow{P} O_{k_1\times p_2},$$
$$\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0} \xrightarrow{P} O_{k_1\times k_2},\ \mathbb{Q}_{\delta\varepsilon,0} \xrightarrow{P} O_{p_1\times p_2},\ \mathbb{Q}_{\delta\zeta} \xrightarrow{P} O_{p_1\times k_2},\ \mathbb{Q}_{\varepsilon\zeta,0} \xrightarrow{P} O_{p_2\times k_2}.$$

证明。根据 Kessler [24] 中的引理 7，可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\Delta\xi_{0,i}^{(j_1)}\Delta\xi_{0,i}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = \sum_{i=1}^{n}\big\{h_n(\mathbf{S}_{1,0}\mathbf{S}_{1,0}^\top)_{j_1j_2} + R_i(h_n^2,\xi)\big\}$$
$$= (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0})_{j_1j_2} + \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi) \xrightarrow{P} (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0})_{j_1j_2}$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, k_1$，由此可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\Delta\xi_{0,i}\Delta\xi_{0,i}^\top\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\Delta\xi_{0,i}^{(j_1)}\Delta\xi_{0,i}^{(j_2)}\Delta\xi_{0,i}^{(j_3)}\Delta\xi_{0,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \xrightarrow{P} 0$$

对于 $j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \cdots, k_1$，以类似方式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\Delta\xi_{0,i}\Delta\xi_{0,i}^\top\Delta\xi_{0,i}\Delta\xi_{0,i}^\top\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \xrightarrow{P} O_{k_1\times k_1}.$$

因此，根据 Genon-Catalot 和 Jacod [15] 中的引理9，可得

$$\mathbb{Q}_{\xi\xi,0} = \sum_{i=1}^{n}\Delta\xi_{0,i}\Delta\xi_{0,i}^\top \xrightarrow{P} \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}.$$

以类似的方式，可以证明其他结果。 □

引理 6 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**], 条件下, 当 $h_n \longrightarrow 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_2}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\xrightarrow{P}0 \tag{7.1}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_3j_4}\right\}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_2}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\qquad\times\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_3j_4}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\xrightarrow{P}t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_2j_4}+(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_2j_3}\big\},\quad\forall t\in[0,1]\end{aligned} \tag{7.2}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_2)}\Delta\bar{W}_i^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0,\quad\forall t\in[0,1] \tag{7.3}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p,\ j_3=1,\ \cdots,\ \bar{r}$, 以及

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_i^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_2}\right|^4\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{7.4}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p$。

证明。 参见附录 8.4。 □

定理*1*的证明. 我们首先证明

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_0. \tag{7.5}$$

为了证明（7.5），只需证明

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_1\mathbb{X}_1}\xrightarrow{P}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0}\ (=\mathbf{\Sigma}_0^{11}), \tag{7.6}$$

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2}\xrightarrow{P}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top\ (=\mathbf{\Sigma}_0^{12}), \tag{7.7}$$

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_2\mathbb{X}_2}\xrightarrow{P}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}(\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top+\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0})\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0}\ (=\mathbf{\Sigma}_0^{22}). \tag{7.8}$$

利用引理 5 和斯卢茨基定理，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_1\mathbb{X}_1}&=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\Delta\xi_{0,i}+\Delta\delta_{0,i})(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\Delta\xi_{0,i}+\Delta\delta_{0,i})^\top\\&=\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbb{Q}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top+\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbb{Q}_{\xi\delta,0}+\mathbb{Q}_{\xi\delta,0}^\top\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top+\mathbb{Q}_{\delta\delta,0}\\&\xrightarrow{P}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0},\end{aligned}$$

由此得到（7.6）。类似地，由于

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2}=&\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbb{Q}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top+\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top+\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0}\\&+\mathbb{Q}_{\xi\delta,0}^\top\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top+\mathbb{Q}_{\delta\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top+\mathbb{Q}_{\delta\varepsilon,0}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{P} \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_2\mathbb{X}_2} &= \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\mathbb{Q}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top \\ &\quad + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0} + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0}^\top\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top \\ &\quad + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbb{Q}_{\zeta\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbb{Q}_{\varepsilon\zeta,0}^\top \\ &\quad + \mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0}^\top\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbb{Q}_{\varepsilon\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbb{Q}_{\varepsilon\varepsilon,0} \\ &\xrightarrow{P} \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}(\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top + \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0})\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top + \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0},\end{aligned}$$

我们得到（7.7）和（7.8）。接下来，我们证明

$$\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_0) \xrightarrow{d} N_{\bar{p}}(0, \mathbf{W}_0), \tag{7.9}$$

其中

$$\mathbf{W}_0 = 2\mathbb{D}_p^+(\mathbf{\Sigma}_0 \otimes \mathbf{\Sigma}_0)\mathbb{D}_p^{+\top}.$$

考虑以下收敛:

$$\sqrt{n}(\operatorname{vec}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vec}\mathbf{\Sigma}_0) \xrightarrow{d} N_{p^2}(0, \bar{\mathbf{W}}_0), \tag{7.10}$$

其中

$$(\bar{\mathbf{W}}_0)_{p(j_1-1)+j_2,\ p(j_3-1)+j_4} = (\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_2j_3}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p$。若 (7.10) 成立，则由连续映射定理可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}_0) &= f(\sqrt{n}(\operatorname{vec}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vec}\mathbf{\Sigma}_0)) \\ &\xrightarrow{d} f(N_{p^2}(0, \bar{\mathbf{W}}_0)) \sim N_{\bar{p}}\big(0, \mathbb{D}_p^+\bar{\mathbf{W}}_0\mathbb{D}_p^{+\top}\big),\end{aligned} \tag{7.11}$$

其中，对于 $x \in \mathbb{R}^{\bar{p}}$，$f(x) = \mathbb{D}_p^+ x$。与 Kusano 和 Uchida [26], 中的引理 6 类似。

$$\mathbb{D}_p^+\bar{\mathbf{W}}_0\mathbb{D}_p^{+\top} = \mathbf{W}_0,$$

从而得到（7. 由 (7.11) 得到第 9) 条。因此，只需证明 (7.10)，即可证明 (7.9)。L et

$$L_{i,n} = \sqrt{n}\operatorname{vec}\Delta\mathbb{X}_i\Delta\mathbb{X}_i^\top - \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{vec}\mathbf{\Sigma}_0.$$

(7.10) 式的左侧表示为

$$\sqrt{n}(\operatorname{vec}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vec}\mathbf{\Sigma}_0) = \sum_{i=1}^n L_{i,n}.$$

根据定理 3.2 i 在 Jacod [21], 中，为了证明（7.10），只需证明以下收敛关系。 :

$$\sup_{t\in[0,1]}\Big|\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\Big| \xrightarrow{P} 0, \tag{7.12}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[L_{i,n}L_{i,n}^\top|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] - \mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^\top \xrightarrow{P} t\bar{\mathbf{W}}_0, \quad \forall t\in[0,1], \tag{7.13}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[L_{i,n}(\Delta\bar{W}_i)^\top|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \xrightarrow{P} O_{p^2\times\bar{r}}, \quad \forall t\in[0,1], \tag{7.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|L_{i,n}|^4|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0, \tag{7.15}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[L_{i,n}\Delta N_i|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0,\quad \forall t\in[0,1],\ \forall N_t\in\mathcal{M}_b(\bar{W}^{\perp}), \tag{7.16}$$

其中，$\bar{W}_t=(W_1^{\top,\,t},\ W_2^{\top,\,t},\ W_3^{\top,\,t},\ W_4^{\top,\,t})^{\top}$，且 $\mathcal{M}_b(\bar{W}^{\perp})$ 表示所有与 W_t 正交的有界鞅构成的类。首先，我们将证明 (7.12)。由于

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|&\le\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{[nt]}\left|\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\\&\le\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\le C_p\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p^2}\left|\mathbb{E}\left[L_{i,n}^{(j)}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|,\end{aligned}$$

只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[L_{i,n}^{(j)}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\xrightarrow{P}0 \tag{7.17}$$

对于 $j=1,\ \cdots,\ p^2$，为了证明（7.12），由（7.1）可得（7.17）。此外，（7.2）和（7.3）分别推出（7.13）和（7.14）。接下来，我们证明（7.15）。注意到

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|L_{i,n}|^4|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{u=1}^{p^2}L_{i,n}^{(u)2}\right|^2\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\le C_p\sum_{u=1}^{p^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|L_{i,n}^{(u)}|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right].\end{aligned} \tag{7.18}$$

由（7.4）可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|L_{i,n}^{(u)}|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0$$

对于 $u=1,\cdots,p^2$，因此由 (7.18) 可得 (7.15) 成立。最后，我们证明 (7.16)。由于 $L_{i,n}-\mathbb{E}[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n]$ 是零均值鞅，根据鞅表示定理，存在一个随机过程 $\eta_{t,n}\in\mathbb{R}^{p^2\times\bar{r}}$，使得

$$L_{i,n}-\mathbb{E}[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n]=\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\eta_{t,n}d\bar{W}_t.$$

注意到 $[\bar{W},N]_t=0$，因为 $N_t\in\mathcal{M}_b$（$\bar{W}^{\perp}$），其中 $[\bar{W},N]_t$是 $\bar{W}_t$和 N_t的协变差过程。因此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[L_{i,n}\Delta N_i|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]&=\mathbb{E}\Big[\big(L_{i,n}-\mathbb{E}[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n]\big)\Delta N_i\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]\\&=\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\eta_{t,n}d\bar{W}_t\right)\left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}dN_t\right)\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\eta_{t,n}d[\bar{W},N]_t\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=0,\end{aligned}$$

由此得到（7.16）。因此，我们得到（7.10）。 □

定理*2-4*的证明。 我们可以采用与 Kusano 和 Uchida [26] 中定理2-4的证明相同的方法来证明这些结果。另请参阅附录8.5。 □

定理*5*的证明. 参见附录8.6。 □

定理*6-8*的证明. 利用定理5，我们可以类似于定理2-4的方式证明定理6-8。 □

Set

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ j \in \{1, \cdots, q\} \mid \theta_0^{(j)} = 0 \Big\}.$$

令 $a_n = \text{最大值}_{j \in \mathcal{F}_1} \kappa_n^{(j)}$，且 $b_n = \text{最小值}_{j \in \mathcal{F}_0} \kappa_n^{(j)}$。

引理 7 在 **[A1]**, **[B1]**, **[C1]**, **[D1]** 和 **[E1] (i)** 的条件下，当 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n} a_n \xrightarrow{P} 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n} b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

证明。 注意 $0 < \text{最小值}_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \delta$。在

$$\Big\{ |\hat{\theta}_n^{(j)} - \theta_0^{(j)}| < \min_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \delta \Big\},$$

对于 $j \in \mathcal{F}_1$，该结论成立,

$$\begin{aligned} |\hat{\theta}_n^{(j)}| = |(\theta_0^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)}) - \theta_0^{(j)}| &\geq |\theta_0^{(j)}| - |\theta_0^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)}| \\ &> \min_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \Big\{ \min_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \delta \Big\} \geq \delta, \end{aligned}$$

因此

$$\Big\{ |\hat{\theta}_n^{(j)} - \theta_0^{(j)}| < \min_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \delta \Big\} \subset \Big\{ |\hat{\theta}_n^{(j)}| > \delta \Big\} \tag{7.19}$$

对于 $j \in \mathcal{F}_1$。令

$$B_n = \bigcap_{j \in \mathcal{F}_1} \Big\{ |\hat{\theta}_n^{(j)}| \geq \delta \Big\}.$$

由定理2和 (7.19) 可得

$$\mathbb{P}\big(B_n^c\big) \leq \sum_{j \in \mathcal{F}_1} \mathbb{P}\Big(|\hat{\theta}_n^{(j)}| \leq \delta \Big) \leq \sum_{j \in \mathcal{F}_1} \mathbb{P}\Big(|\hat{\theta}_n^{(j)} - \theta_0^{(j)}| \geq \min_{j \in \mathcal{F}_1} |\theta_0^{(j)}| - \delta \Big) \longrightarrow 0 \tag{7.20}$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时。由于

$$\begin{aligned} \sqrt{n} a_n &= \sqrt{n} \max_{j \in \mathcal{F}_1} \kappa_n^{(j)} \\ &= \sqrt{n} \lambda_{1,n} \max_{j \in \mathcal{F}_1} |\hat{\theta}_n^{(j)}|^{-\gamma} \leq \sqrt{n} \lambda_{1,n} \delta^{-\gamma} \end{aligned}$$

在 B_n 上，我们从 $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 (7.20) 得知，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\sqrt{n} a_n > \varepsilon \Big) &\leq \mathbb{P}\Big(\big\{ \sqrt{n} a_n > \varepsilon \big\} \cap B_n \Big) + \mathbb{P}\Big(\big\{ \sqrt{n} a_n > \varepsilon \big\} \cap B_n^c \Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\big\{ \sqrt{n} \lambda_{1,n} \delta^{-\gamma} > \varepsilon \big\} \cap B_n \Big) + \mathbb{P}\big(B_n^c \big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(\sqrt{n} \lambda_{1,n} > \varepsilon \delta^{\gamma} \big) + \mathbb{P}\big(B_n^c \big) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

作为 $n \longrightarrow \infty$，这意味着 $\sqrt{n}a_n \xrightarrow{P} 0$。令

$$C_n = \bigcap_{j \in \mathcal{F}_0} \Big\{ |\hat{\theta}_n^{(j)}| < \delta \Big\}.$$

由定理2可得

$$\mathbb{P}\big(C_n^c\big) \leq \sum_{j \in \mathcal{F}_0} \mathbb{P}\Big(|\hat{\theta}_n^{(j)}| \geq \delta \Big) = \sum_{j \in \mathcal{F}_0} \mathbb{P}\Big(|\hat{\theta}_n^{(j)} - \theta_0^{(j)}| \geq \delta \Big) \longrightarrow 0 \tag{7.21}$$

即 $n \longrightarrow \infty$。注意，在 C_n 上，

$$\sqrt{n}b_n = \sqrt{n} \min_{j \in \mathcal{F}_0} \kappa_n^{(j)} = \sqrt{n}\lambda_{2,n}.$$

由 $\sqrt{n}\lambda_{2,\ n} \longrightarrow \infty$ 和（7.21）可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}b_n} > \varepsilon \right) &\leq \mathbb{P}\left(\Big\{ \frac{1}{\sqrt{n}b_n} > \varepsilon \Big\} \cap C_n \right) + \mathbb{P}\left(\Big\{ \frac{1}{\sqrt{n}b_n} > \varepsilon \Big\} \cap C_n^c \right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Big\{ \frac{1}{\sqrt{n}\lambda_{2,n}} > \varepsilon \Big\} \cap C_n \right) + \mathbb{P}\big(C_n^c\big) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\lambda_{2,n}} > \varepsilon \right) + \mathbb{P}\big(C_n^c\big) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

对于所有 $\varepsilon > 0$，当 $n \longrightarrow \infty$ 时，有 $\frac{1}{\sqrt{n}b_n} \xrightarrow{P} 0$。 □

引理***1—2***的证明。由于根据 [**F1**] 有 $\tilde{G}_n \xrightarrow{P} G$，Suzuki and Yoshida[35]中的假设1得到满足。由定理2可得

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = O_p(1),$$

其满足 Suzuki and Yoshida [35] 中的假设 2。由引理 7，可得 $\sqrt{n}a_n = o_p(1)$ 和 $\sqrt{n}b_n \xrightarrow{P} \infty$。因此，Sūzuki and Yoshida [35] 中的定理 2 和定理 3 意味着

$$\mathbb{P}\Big(\tilde{\mathcal{F}}_{G,n} = \mathcal{F}_1 \Big) \longrightarrow 1$$

and

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{G,n} - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} - \mathfrak{G}_G\big\{ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \big\} \xrightarrow{P} 0.$$

注意，由引理35可知$\mathbf{A}(\theta_0)$是一个正定矩阵。由定理2可得

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathbf{A}(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}\zeta,$$

其中，ζ 是一个 q维标准正态随机向量。因此，满足 Suzuki and Yoshida [35] 中的假设3。因此，根据 Suzuki and Yoshida [35] 中的定理3可知，当 $G = \mathbf{A}(\theta_0)$时，

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{G,n} - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, \mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{11}(\theta_0)^{-1} \Big).$$ □

受限参数空间设定为

$$\underline{\Theta} = \Big\{ \theta \in \Theta \ \Big|\ \theta^{(j)} = 0 \ \ (j \in \mathcal{F}_0) \Big\}.$$

限制准似然估计量 $\underline{\theta}_n$ 定义如下：

$$\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) = \inf_{\theta \in \underline{\Theta}} \mathbb{F}_n(\theta).$$

引理8 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E1**], 如下 $h_n \longrightarrow 0$时,

$$\sqrt{n}(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-1}\Big).$$

证明。 参见附录8.7。 □

引理***3***的证明. 由引理8可得

$$\sqrt{n}(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}\eta,$$

其中， η 是一个 $|\mathcal{F}_1|$维标准正态随机向量。因此，满足Suzuki and Yoshida[35]中的假设5（ii），故 Suzuki and Yoshida [35] 中的定理5（a）表明

$$\sqrt{n}(\check{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, \mathbf{A}^{11}_{\mathcal{F}}(\theta_0)^{-1}\Big). \quad \square$$

引理9 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E1**], 的条件下， $h_n \longrightarrow 0$,

$$n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}$$

在 H_0 下。

证明。 见附录8.8。 □

定理 ***9***的证明。 令 $D_n = \big\{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1} = \mathcal{F}_1\big\}$。注意，在 D_n上， $\tilde{\Theta}_n = \underline{\Theta}$。˘ θ_n 和 θ_n的定义意味着，在 D_n上，

$$\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) = \mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n).$$

因此，对于所有 $\varepsilon > 0$，我们看到，在 H_0下，

$$\mathbb{P}(D_n) \le \mathbb{P}\Big(n\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) = n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n)\Big) \le \mathbb{P}\Big(\big|n\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) - n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n)\big| < \varepsilon\Big),$$

所以，根据引理1，在 H_0下可得，

$$n\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) - n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) \xrightarrow{P} 0.$$

因此，引理9和斯卢茨基定理给出

$$\check{\mathbb{T}}_n = n\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}$$

在 H_0下。 □

命题 ***1*** 的证明。 成立

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \\
\le\ &\mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right\} \cap D_n\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right\} \cap D_n^c\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \\
\le\ &\mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}} > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right\} \cap D_n\right) + \mathbb{P}\big(D_n^c\big) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \\
\le\ &\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) + \mathbb{P}\big(D_n^c\big) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \\
=\ &\mathbb{P}\big(D_n^c\big).
\end{aligned}$$

类似地，可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right)\\
&\le \mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right\} \cap D_n\right)\\
&\quad + \mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right\} \cap D_n^c\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right)\\
&\le \mathbb{P}\left(\left\{\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right\} \cap D_n\right) + \mathbb{P}\big(D_n^c\big) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right)\\
&\le \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) + \mathbb{P}\big(D_n^c\big) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right)\\
&= \mathbb{P}\big(D_n^c\big).
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\left|\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right)\right| \le \mathbb{P}\big(D_n^c\big), \tag{7.22}$$

因此，引理1表明，在 H_0 下，

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}(\alpha)\right) \longrightarrow 0$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时。 □

Let

$$\bar{\mathcal{F}}_0 = \Big\{j \in \{1, \cdots, q\} \mid \bar{\theta}^{(j)} = 0\Big\}.$$

设 $\bar{a}_n =$ 最大值$_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1} \kappa_n^{(j)}$，且 $\bar{b}_n =$ 最小值$_{j\in\bar{\mathcal{F}}_0} \kappa_n^{(j)}$。

引理 10 在[**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E2**], 时，其中 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n}^{-} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n}^{-} \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}\bar{a}_n \xrightarrow{P} 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}\bar{b}_n} \xrightarrow{P} 0$$

在 H_1 下。

证明。 注意到 $0 < \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1} |\bar{\theta}^{(j)}| - \delta$，并且由引理 36 可知 $\hat{}\theta_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$ 在 H_1 下。以类似于引理 7 的方式，我们可以得到该结果。□

引理 11 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 且 [**F2**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta}) = O_p(1)$$

在 H_1 下。

证明。 见附录 8.9。 □

引理 12 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 且 [**F2**], 满足 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\lambda_{1,n} \longrightarrow^{-} 0$ 且 $\sqrt{n}\lambda_{2,n} \longrightarrow^{-} \infty$,

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}) = O_p(1)$$

在 H_1 下。

证明。注意到

$$\sum_{j=1}^{q} \kappa_n^{(j)} |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}| \ge \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1} \kappa_n^{(j)} |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}|, \quad \sum_{j=1}^{q} \kappa_n^{(j)} |\bar{\theta}^{(j)}| = \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1} \kappa_n^{(j)} |\bar{\theta}^{(j)}|.$$

~由于根据$\theta_{\mathbb{I},n}$ 的定义成立,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}) - \mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\bar{\theta}) \\
&= \sum_{j=1}^{q}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)} + \bar{\theta}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}| - \sum_{j=1}^{q}(\bar{\theta}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)})^2 - \sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\bar{\theta}^{(j)}| \\
&= \sum_{j=1}^{q}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})(\bar{\theta}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)}) + \sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}| - \sum_{j=1}^{q}\kappa_n^{(j)}|\bar{\theta}^{(j)}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{q}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})(\hat{\theta}_n^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}) + \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}\kappa_n^{(j)}(|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}| - |\bar{\theta}^{(j)}|) \\
&\geq \sum_{j=1}^{q}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})(\hat{\theta}_n^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}) - \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}\kappa_n^{(j)}|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{q}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)})(\hat{\theta}_n^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}) - \bar{a}_n\sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}| \\
&\geq |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}|^2 - 2|\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}||\hat{\theta}_n - \bar{\theta}| - \bar{a}_n|\bar{\mathcal{F}}_1||\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}|,
\end{aligned}
$$

有

$$0 \geq |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}|\Big\{|\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})| - 2|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta})| - \sqrt{n}\bar{a}_n|\bar{\mathcal{F}}_1|\Big\},$$

由此得到

$$|\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})| \leq 2|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta})| + \sqrt{n}\bar{a}_n|\bar{\mathcal{F}}_1|.$$

因此，由引理 10 和引理11可知，在 H_1 下,

$$2|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta})| + \sqrt{n}\bar{a}_n|\bar{\mathcal{F}}_1| = O_p(1),$$

~ ¯因此我们有$-\sqrt{n}(\theta_{\mathbb{I},n} - \theta) = O_p(1)$。 □

引理*4*的证明。 令 $E_n^{(j)} = \{\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} \neq 0\}$ 对于 $j \in \bar{\mathcal{F}}_0$。在 $E_n^{(j)}$,

$$\sqrt{n}\left.\frac{\partial\mathbb{Q}_{\mathbb{I},n}(\theta)}{\partial\theta^{(j)}}\right|_{\theta=\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}} = 2\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)}) + \sqrt{n}\kappa_n^{(j)}sign(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)})$$

¯对于 $j \in \mathcal{F}_0$, 其中

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0), \\ 0, & (x = 0), \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$

~ ¯对于 $x \in \mathbb{R}$。$\theta_{\mathbb{I}}$ 的定义，$_n$ 意味着对于 $j \in \mathcal{F}_0$,

$$2\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)}) = -\sqrt{n}\kappa_n^{(j)}sign(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)})$$

在 $E_n^{(j)}$ 上，因此对于 $j \in \bar{\mathcal{F}}_0$,

$$\big|2\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)})\big| = \sqrt{n}\kappa_n^{(j)}\big|sign(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)})\big| = \sqrt{n}\kappa_n^{(j)} \geq \sqrt{n}\bar{b}_n$$

在 $E_n^{(j)}$ 上。注意，引理 11 和引理 12 得出

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \hat{\theta}_n) = \sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta}) - \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta}) = O_p(1)$$

在 H_1下。由引理 10可知，对于 $j \in \mathcal{F}_0$,

$$2\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)})\frac{1}{\sqrt{n\bar{b}_n}} = o_p(1)$$

在 H_1下，可得

$$\mathbb{P}\big(E_n^{(j)}\big) \le \mathbb{P}\left(\left|2\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \hat{\theta}_n^{(j)})\frac{1}{\sqrt{n\bar{b}_n}}\right| \ge 1\right) \longrightarrow 0 \tag{7.23}$$

对于 $j \in \mathcal{F}_0$ 在 H_1 下，因为 $n \longrightarrow \infty$。在

$$\Big\{|(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})_{\bar{\mathcal{F}}_1}| < \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\bar{\theta}^{(j)}|\Big\},$$

我们看到

$$|\bar{\theta}^{(j)}| - |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)}| \le |\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n}^{(j)} - \bar{\theta}^{(j)}| \le |(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})_{\bar{\mathcal{F}}_1}| < \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\bar{\theta}^{(j)}| \le |\bar{\theta}^{(j)}|$$

对于 $j \in \bar{\mathcal{F}}_1$，这意味着 $|\tilde{\theta}_{\mathbb{I}}^{(j)}{}_{,\ n}| > 0$ 对于 $j \in \bar{\mathcal{F}}_1$。因此，可得

$$\Big(\bigcap_{j\in\bar{\mathcal{F}}_0}(E_n^{(j)})^c\Big) \cap \Big\{|(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})_{\bar{\mathcal{F}}_1}| < \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\bar{\theta}^{(j)}|\Big\} \subset \Big\{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1} = \bar{\mathcal{F}}_1\Big\}.$$

因此，由 (7.23) 和引理 12 可知，在 H_1 下，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1} \ne \bar{\mathcal{F}}_1\right) &\le \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_0}\mathbb{P}\big(E_n^{(j)}\big) + \mathbb{P}\left(|(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})_{\bar{\mathcal{F}}_1}| \ge \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\bar{\theta}^{(j)}|\right)\\ &\le \sum_{j\in\bar{\mathcal{F}}_0}\mathbb{P}\big(E_n^{(j)}\big) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\mathbb{I},n} - \bar{\theta})_{\bar{\mathcal{F}}_1}| \ge \min_{j\in\bar{\mathcal{F}}_1}|\bar{\theta}^{(j)}|\right) \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1} = \bar{\mathcal{F}}_1\right) \longrightarrow 1$$

当 H_1 时，随着 $n \longrightarrow \infty$。 □

引理 13 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 和 [**F2**], 当 $h_n \longrightarrow 0$, $\sqrt{n}\bar{\lambda}_{1,n} \longrightarrow 0$ 和 $\sqrt{n}\lambda_{2,n}^{-} \longrightarrow \infty$,

$$\check{\theta}_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$$

在 H_1 下。

证明。 由 [**E2**], , 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\big|\check{\theta}_n - \bar{\theta}\big| > \varepsilon \Longrightarrow \mathbb{U}(\check{\theta}_n) - \mathbb{U}(\bar{\theta}) > \delta. \tag{7.24}$$

令 $D_n = \{\mathcal{F}_{\mathbb{I},n,1} = \mathcal{F}_1\}$, 且

$$\bar{\Theta} = \Big\{\theta \in \Theta \;\Big|\; \theta^{(j)} = 0 \;\; (j \in \bar{\mathcal{F}}_0)\Big\}.$$

由于 $\Theta = \Theta$ 在 D_n 上且 $\theta \in \Theta$,

我们有

$$\mathbb{F}_n(\check{\theta}_n) = \inf_{\theta\in\bar{\Theta}}\mathbb{F}_n(\theta) \le \mathbb{F}_n(\bar{\theta})$$

¯在 D_n上。因此可得

$$\mathbb{P}\big(\bar{D}_n\big) \leq \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) \leq \frac{\delta}{3}\right),$$

因此，根据引理4，在 H_1 下，

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \longrightarrow 0 \tag{7.25}$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时。由引理 33、(7.24) 和 (7.25) 可知

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{P}\Big(|\check{\theta}_n - \bar{\theta}| > \varepsilon\Big) \\
\leq\ & \mathbb{P}\Big(\mathbb{U}(\check{\theta}_n) - \mathbb{U}(\bar{\theta}) > \delta\Big) \\
\leq\ & \mathbb{P}\left(\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_{\mathrm{n}})) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_{\mathrm{n}})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
& + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
& + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
\leq\ & 2\mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta}\left|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta))\right| > \frac{\delta}{3}\right) \\
& + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\check{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

在 H_1 下，当 $n \longrightarrow \infty$ 时，从而在 H_1 下有 $\check{\theta}_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$。 □

命题2 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**], [**E2**] 以及 [**F2**], 当 $h_n \longrightarrow 0$ 时， $\sqrt{n}\lambda_{1,\ n} \longrightarrow 0$ 并且 $\sqrt{n}\lambda_{2,\ n} \longrightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\bar{\mathcal{F}}_1|}(\alpha)\right) \longrightarrow 0$$

在 H_1 下。

证明。 以与命题 1 类似的方式，我们得到

$$\left|\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\bar{\mathcal{F}}_1|}(\alpha)\right)\right| \leq \mathbb{P}\big(\bar{D}_n^c\big).$$

¯由于由引理4可知， $\mathbb{P}(D_n^c) \longrightarrow 0$ 在 H_1 下，当 $n \longrightarrow \infty$时，

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) - \mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\bar{\mathcal{F}}_1|}(\alpha)\right) \longrightarrow 0$$

当 H_1 下， $n \longrightarrow \infty$时。 □

证 明 定理***10***的证明。 以与定理4类似的方式，由引理 13可得

$$\frac{1}{n}\check{\mathbb{T}}_n \xrightarrow{P} \mathbb{U}(\bar{\theta})$$

¯在 H_1下。回顾一下， $\mathbb{U}(\theta) > 0$ 在 H_1下。在 H_1下，

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\bar{\mathcal{F}}_1|}(\alpha)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\check{\mathbb{T}}_n \leq \frac{1}{n}\chi^2_{\bar{p}-|\bar{\mathcal{F}}_1|}(\alpha)\right) \longrightarrow 1$$

作为 $n \longrightarrow \infty$。因此，命题2和斯卢茨基定理表明，在 H_1 条件下，

$$\mathbb{P}\left(\check{\mathbb{T}}_n > \chi^2_{\bar{p}-|\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{I},n,1}|}(\alpha)\right) \longrightarrow 1$$

作为 $n \longrightarrow \infty$。 □

定理***11-12***的证明。 利用定理5，我们可以用与定理9-10类似的方法证明定理11-12。□

References

[1] A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Xiu, D.（2017）。利用主成分分析和高频数据估计高维因子模型。计量经济学杂志，201(2)，384-399。[2] A¨ıt-Sahalia, Y. 和 Xiu, D.（2019）。高频数据的主成分分析。美国统计学会杂志，114(525)，287-303。[3] Anderson, T. W. 和 Rubin, H.（1956）。因子分析中的统计推断。载于《第三届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，5，111-150。[4] Asparouhov, T.、Hamaker, E. L. 和 Muth´en, B.（2018）。动态结构方程模型。《结构方程建模：多学科期刊》，25(3)，359-388。[5] Bai, J.（2003）。大维度因子模型的推断理论。《计量经济学》，71(1)，135-171。[6] Bai, J. 和 Li, K.（2012）。高维因子模型的统计分析。《统计学年刊》，40(1)，436-465。[7] Bentler, P. M. 和 Bonett, D. G.（1980）。协方差结构分析中的显著性检验与拟合优度。《心理学通报》，88(3)，588。[8]Browne, M. W.（1974）。协方差结构分析中的广义最小二乘估计量。《南非统计学杂志》，8(1)，1-24。[9] Choi, J.、Oehlert, G. 和 Zou, H.（2010）。稀疏因子分析的惩罚最大似然方法。《统计及其界面》，3(4)，429-436。[10] Czir´aky, D.（2004）。潜变量动态结构方程模型的估计。《方法论与统计学进展》，1(1)，185-204。[11] De Gregorio, A. 和 Iacus, S. M.（2012）。多元扩散过程的自适应 LASSO 型估计。《计量经济理论》，28(4)，838-860。[12] Driver, C. C.、Oud, J. H. 和 Voelkle, M. C.（2017）。使用 R 软件包 ctsem 进行连续时间结构方程建模。《统计软件杂志》，77，1-35。[13] Everitt, B.（1984）《潜变量模型导论》，Springer Science & Business Media[14] Fan, J. 和 Li, R.（2001）。通过非凹惩罚似然进行变量选择及其预言机性质。《美国统计学会杂志》，96(456)，1348-1360。[15]Genon-Catalot, V. 和 Jacod, J.（1993）。多维扩散过程扩散系数的估计。《亨利·庞加莱研究所年刊》（B辑），概率与统计，29，119-151。[16] Hall, P. 和 Heyde, C. C.（1981）。鞅极限定理及其应用。Academic Press。[17] Hansen, N. 和 Sokol, A.（2014）。随机微分方程的因果解释。《电子概率期刊》，19，1-24。[18] Harville, D. A.（1998）。统计学家视角下的矩阵代数。Taylor & Francis。

[19] Huang, P. H.、Chen, H. 和 Weng, L. J.（2017）。结构方程建模的惩罚似然方法。《心理测量学》，82(2)，329-354。[20]Jacobucci, R.、Grimm, K. J. 和 McArdle, J. J.（2016）。正则化结构方程建模。《结构方程建模：多学科期刊》，23(4)，555-566。[21]Jacod, J.（1997）。连续条件高斯鞅与分布稳定收敛。《概率研讨会》第三十一卷（第232-246页）。[22]J¨oreskog, K. G.（1970）。协方差结构分析的一般方法。《生物计量学》，57(2)，239-251。[23] J¨oreskog, K. G. 和 Van Thillo, M.（1972）。LISREL：用于估计涉及多个未测量变量指标的线性结构方程系统的通用计算机程序。《ETS研究公报系列》，2，i-71。[24] Kessler, M.（1997）。基于离散观测的遍历扩散过程估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，24(2)，211-229。[25] Kitagawa, H. 和 Uchida, M.（2014）。离散时点采样的遍历扩散过程的自适应检验统计量。《统计规划与推断杂志》，150，84-110。[26] Kusano, S. 和 Uchida, M.（2022）。基于离散观测的扩散过程因子分析中的统计推断。arXiv 预印本 arXiv:2202.01481。[27] Masuda, H. 和 Shimizu, Y.（2017）。多重与混合速率渐近下正则化估计的矩收敛。《统计学数学方法》，26，81-110。[28]McDonald, R. P. 和 Ho, M. H. R.（2002）。结构方程分析报告的原则与实践。《心理学方法》，7(1)，64。[29] Molenaar, P. C.（1985）。用于分析多元时间序列的动态因子模型。《心理测量学》，50(2)，181-202。[30] Mueller, R. O.（1999）。结构方程建模基本原理：LISREL 和 EQS 导论。Springer Science & Business Media。[31] Oud, J. H. 和 Jansen, R. A.（2000）。使用 SEM 对面板数据进行连续时间状态空间建模。《心理测量学》，65(2)，199-215。[32] Pena, D. 和 Box, G. E.（1987）。识别时间序列中的简化结构。《美国统计学会杂志》，82(399)，836-843。[33]Shapiro, A.（1985）。最小偏差函数估计量与 GLE 估计量的渐近等价性。《南非统计学杂志》，19(1)，73-81。[34] Shor, N. Z.（2012）。不可微函数的极小化方法（第3卷）。Springer Science & Business Media。[35] Suzuki, T. 和 Yoshida, N.（2020）。惩罚最小二乘近似方法及其在随机过程中的应用。《日本统计与数据科学杂志》，3(2)，513-541。[36] Tibshirani, R.（1996）。通过套索法进行回归收缩与变量选择。《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》，58(1)，267-288。[37] Uchida, M. 和 Yoshida, N.（2012）。基于抽样数据的遍历扩散过程自适应估计。《随机过程及其应用》，122(8)，2885-2924。

[38] Wang, H. 和 Leng, C.（2007）。通过最小二乘近似进行统一 LASSO 估计。美国统计学会杂志，**102(479)**，1039-1048。[39] Yoshida, N.（1992）。基于离散观测的扩散过程估计。多元分析杂志，**41**，220–242。[40]Zou, H.（2006）。自适应套索及其 oracle 性质。美国统计学会杂志，**101(476)**，1418-1429。[41]Zou, H.、Hastie, T. 和 Tibshirani, R.（2006）。稀疏主成分分析。计算与图形统计学杂志，**15(2)**，265-286。

8. 附录

首先，我们介绍记号。将 $\Delta\mathbb{X}_{1,i}$ 分解为

$$\Delta\mathbb{X}_{1,i} = A_{i,n} + B_{i,n},$$

其中 $A_{i,\ n} = \mathbf{\Lambda}_{x_1,\ 0}\Delta\xi_{0,\ i}$ 以及 $B_{i,\ n} = \Delta\delta_{0,\ i}$。回顾一下。

$$\mathbb{X}_{2,t} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\xi_{0,t} + \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\zeta_{0,t} + \varepsilon_{0,t}.$$

$\Delta\mathbb{X}_{2,i}$ 被分解为

$$\Delta\mathbb{X}_{2,i} = C_{i,n} + D_{i,n} + E_{i,n},$$

其中

$$C_{i,n} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\Delta\xi_{0,i},\ D_{i,n} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\Delta\zeta_{0,i},\ E_{i,n} = \Delta\varepsilon_{0,i}.$$

此外，我们将 $\mathbf{\Sigma}_0$ 分解为

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_0^{11} & \mathbf{\Sigma}_0^{12} \\ \mathbf{\Sigma}_0^{12\top} & \mathbf{\Sigma}_0^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & F \\ F^\top & C+D+E \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}^\top,\ B = \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0},\ C = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top,$$
$$D = \mathbf{\Lambda}_{x_2,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0}\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top,\ E = \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0},\ F = \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0}\mathbf{\Gamma}_0^\top\mathbf{\Psi}_0^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2,0}^\top.$$

令 $R_i(h_n^\ell,\xi) = R(h_n^\ell,\xi_{0,t_{i-1}^n})$、$R_i(h_n^\ell,\delta) = R(h_n^\ell,\delta_{0,t_{i-1}^n})$、$R_i(h_n^\ell,\varepsilon) = R(h_n^\ell,\varepsilon_{0,t_{i-1}^n})$ 以及 $R_i(h_n^\ell,\zeta) = R(h_n^\ell,\zeta_{0,t_{i-1}^n})$，其中 $\ell \geq 0$。对于任意二阶可微函数 f，$\partial_x f(a) = \partial_x f(x)|_{x=a}$ 以及 $\partial_x^2 f(a) = \partial_x^2 f(x)\big|_{x=a}$。

8.1. （3.3）和（3.4）的细节。令 Ξ_t 为 ξ_t的Euler-Maruyama近似。则有

$$\Delta\Xi_i = B_1(\Xi_{t_{i-1}^n})h_n + \mathbf{S}_1\Delta W_{1,i}.$$

同理，将 D_t、E_t 和 Z_t 分别设为 δ_t、ε_t 和 ζ_t 的Euler-Maruyama近似。于是得到

$$\Delta D_i = B_2(D_{t_{i-1}^n})h_n + \mathbf{S}_2\Delta W_{2,i},$$
$$\Delta E_i = B_3(E_{t_{i-1}^n})h_n + \mathbf{S}_3\Delta W_{3,i},$$
$$\Delta Z_i = B_4(Z_{t_{i-1}^n})h_n + \mathbf{S}_4\Delta W_{4,i}.$$

注意，由 [**A1**](iii)和 [**B1**](iii)可得

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1}\Delta\Xi_i + \Delta D_i = \mathbf{\Lambda}_{x_1}\mathbf{S}_1\Delta W_{1,i} + \mathbf{S}_2\Delta W_{2,i} + R(h_n,\Xi_{t_{i-1}^n}) + R(h_n,\Delta_{t_{i-1}^n}).$$

¯若设 $\mathbb{X}_{1,t}$ 为 $\mathbb{X}_{1,t}$的近似值，则由 (1.8) 得

$$\Delta\bar{\mathbb{X}}_{1,i} = \mathbf{\Lambda}_{x_1}\mathbf{S}_1\Delta W_{1,i} + \mathbf{S}_2\Delta W_{2,i}. \tag{8.1}$$

类似地，由 [**A1**] (iii)、[**C1**] (iii) 和 [**D1**] (iii) 可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\Delta\Xi_i + \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\Delta Z_i + \Delta E_i \\ = \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{S}_1\Delta W_{1,i} + \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{S}_4\Delta W_{4,i} + \mathbf{S}_3\Delta W_{3,i} \\ + R(h_n, \Xi_{t_{i-1}^n}) + R(h_n, Z_{t_{i-1}^n}) + R(h_n, E_{t_{i-1}^n}),\end{aligned}$$

(1.9) 和 (1.10) 推出

$$\Delta\bar{\mathbb{X}}_{2,i} = \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{S}_1\Delta W_{1,i} + \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{S}_4\Delta W_{4,i} + \mathbf{S}_3\Delta W_{3,i}, \tag{8.2}$$

其中 $\bar{\mathbb{X}}_{2,t}$ 表示 $\mathbb{X}_{2,t}$ 的一个近似。令 $\bar{\mathbb{X}}_t = (\bar{\mathbb{X}}_{1,t}^\top, \bar{\mathbb{X}}_{2,t}^\top)^\top$。由 (8.1) 和 (8.2) 可得

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\mathbb{X}}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\mathbf{S}_1 & O_{p_1\times r_1} \\ O_{p_2\times r_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{S}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta W_{1,i} \\ \Delta W_{1,i}\end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix}\mathbf{S}_2 \\ O_{p_2\times r_2}\end{pmatrix}\Delta W_{2,i} + \begin{pmatrix}O_{p_1\times r_3} \\ \mathbf{S}_3\end{pmatrix}\Delta W_{3,i} + \begin{pmatrix}O_{p_1\times r_4} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{S}_4\end{pmatrix}\Delta W_{4,i}.\end{aligned}$$

布朗运动的性质推出

$$\begin{pmatrix}\Delta W_{1,i} \\ \Delta W_{1,i}\end{pmatrix} \sim N_{2r_1}\left(0, h_n\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{r_1} & \mathbb{I}_{r_1} \\ \mathbb{I}_{r_1} & \mathbb{I}_{r_1}\end{pmatrix}\right), \tag{8.3}$$

因此，由 (8.3) 可知

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\mathbf{S}_1 & O_{p_1\times r_1} \\ O_{p_2\times r_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{S}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta W_{1,i} \\ \Delta W_{1,i}\end{pmatrix} \\ \sim N_p\left(0, h_n\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top & \boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top \\ \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top & \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

以类似的方式，我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_2 \\ O_{p_2\times r_2}\end{pmatrix}\Delta W_{2,i} \sim N_p\left(0, h_n\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} & O_{p_1\times p_2} \\ O_{p_2\times p_1} & O_{p_2\times p_2}\end{pmatrix}\right), \\ \begin{pmatrix}O_{p_1\times r_3} \\ \mathbf{S}_3\end{pmatrix}\Delta W_{3,i} \sim N_p\left(0, h_n\begin{pmatrix}O_{p_1\times p_1} & O_{p_1\times p_2} \\ O_{p_2\times p_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}\end{pmatrix}\right), \\ \begin{pmatrix}O_{p_1\times r_4} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{S}_4\end{pmatrix}\Delta W_{4,i} \sim N_p\left(0, h_n\begin{pmatrix}O_{p_1\times p_1} & O_{p_1\times p_2} \\ O_{p_2\times p_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta}\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

因此，由于 $W_{1,\,t}$、$W_{2,\,t}$、$W_{3,\,t}$ 和 $W_{4,\,t}$ 相互独立，可得

$$\Delta\bar{\mathbb{X}}_i \sim N_p\big(0, h_n\boldsymbol{\Sigma}(\theta)\big).$$

因此，$(\mathbb{X}_{t_i^n})_{0\le i\le n}$ 的联合概率密度函数如下：

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\det\left(h_n\boldsymbol{\Sigma}(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2h_n}(\bar{x}_{t_i^n} - \bar{x}_{t_{i-1}^n})^\top\boldsymbol{\Sigma}(\theta)^{-1}(\bar{x}_{t_i^n} - \bar{x}_{t_{i-1}^n})\right\}.$$

将准似然设为 (3.3)。由于

$$\log\mathbb{L}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n\left\{-\frac{p}{2}\log(2\pi) - \frac{p}{2}\log h_n - \frac{1}{2}\log\det\boldsymbol{\Sigma}(\theta) - \frac{1}{2h_n}(\Delta\mathbb{X}_i)^\top\boldsymbol{\Sigma}(\theta)^{-1}(\Delta\mathbb{X}_i)\right\}$$

$$= -\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbf{\Sigma}(\theta) - \frac{1}{2h_n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left\{\mathbf{\Sigma}(\theta)^{-1}(\Delta\mathbb{X}_i)(\Delta\mathbb{X}_i)^\top\right\}$$
$$= -\frac{pn}{2}\log(2\pi) - \frac{pn}{2}\log h_n - \frac{n}{2}\log\det\mathbf{\Sigma}(\theta) - \frac{n}{2}\mathrm{tr}\left\{\mathbf{\Sigma}(\theta)^{-1}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}\right\},$$

我们得到准对数似然函数 (3.4)。

8.2. **（5.1）的证明**。假设

$$\mathbf{\Sigma}(\theta_1) = \mathbf{\Sigma}(\theta_2). \tag{8.4}$$

由式 (8.4) 的第 (1,3) 个元素，我们得到

$$(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{12} = (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{12}. \tag{8.5}$$

由于由式（8.4）的第（2，3）个和第（1，4）个元素可得，

$$(\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{12} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{12},$$
$$(\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{42}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{12} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{42}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{12}$$

且 $(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi})_{12}$ 不为零，由 (8.5) 可知。

$$(\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{21} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{21},\ (\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{42} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{42}. \tag{8.6}$$

由（8.4）的第（1，2）个和第（3，4）个元素可知，

$$(\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{11} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{11},$$
$$(\mathbf{\Lambda}_{x_1,1})_{42}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{22} = (\mathbf{\Lambda}_{x_1,2})_{42}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{22}$$

且 $(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{21}$ 和 $(\mathbf{\Lambda}_{x_1})_{42}$ 不为零，由 (8.6) 可得

$$(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{11} = (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{11},\ (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1})_{22} = (\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2})_{22}. \tag{8.7}$$

因此，(8.5)–(8.7) 意味着

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1,1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Lambda}_{x_1,1}^\top = \mathbf{\Lambda}_{x_1,2}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Lambda}_{x_1,2}^\top,$$

因此我们从 (8.4) 可以看出，

$$\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,1} = \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,2}. \tag{8.8}$$

此外，由（8.4）中的第（1,5）和第（3,5）个元素可得

$$\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top = \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Gamma}_2^\top$$

且 $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}$ 是一个正定矩阵，由此可得

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_2 \tag{8.9}$$

由（8.5）和（8.7）可得。注意，由于 $\mathbf{\Gamma}$ 不是零向量，且 $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}$ 是正定矩阵，因此根据（8.4）的第（1,6）个元素可知。

$$(\mathbf{\Lambda}_{x_2,1})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top)_{11} = (\mathbf{\Lambda}_{x_2,2})_{21}(\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Gamma}_2^\top)_{11},$$

这意味着

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2,1} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,2} \tag{8.10}$$

由（8.5）、（8.7）和（8.9）得出。由于从（8.4）的第（5,6）个元素可知,

$$(\mathbf{\Lambda}_{x_2,1})_{21}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top + (\mathbf{\Lambda}_{x_2,1})_{21}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1} = (\mathbf{\Lambda}_{x_2,2})_{21}\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Gamma}_2^\top + (\mathbf{\Lambda}_{x_2,2})_{21}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2}$$

且 $(\mathbf{\Lambda}_{x_2})_{21}$ 不为零，(8.5)、(8.7)、(8.9) 和 (8.10) 表明

$$\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1} = \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2}. \tag{8.11}$$

此外，由 (8.4) 可知

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}(\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top + \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1})\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}^\top + \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,1} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,2}(\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Gamma}_2^\top + \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2})\mathbf{\Lambda}_{x_2,2}^\top + \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,2}$$

并且由 (8.5)、(8.7)、(8.9) 和 (8.11) 可得

$$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,1} = \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,2}. \tag{8.12}$$

因此，由 (8.5)-(8.12) 可得 $\theta_1 = \theta_2$，这意味着 (5.1)。

8.3. **证明 (6.1)**。假设

$$\mathbf{\Sigma}(\theta_1) = \mathbf{\Sigma}(\theta_2). \tag{8.13}$$

由式 (8.13) 和 Anderson 和 Rubin 的定理5.1 [3] 可得

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1,1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Lambda}_{x_1,1}^\top = \mathbf{\Lambda}_{x_1,2}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Lambda}_{x_1,2}^\top \tag{8.14}$$

and

$$\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,1} = \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,2}. \tag{8.15}$$

回顾一下,

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Lambda}_{x_1}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} & \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{A}_{x_1}^\top \\ \mathbf{A}_{x_1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{x_1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{A}_{x_1}^\top \end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}$ 是一个正定矩阵。由式 (8.14)，我们有

$$\mathbf{\Lambda}_{x_1,1} = \mathbf{\Lambda}_{x_1,2},\ \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1} = \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}. \tag{8.16}$$

注意,

$$\mathbf{\Sigma}^{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top & \mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top\mathbf{A}_{x_2}^\top \\ \mathbf{A}_{x_1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top & \mathbf{A}_{x_1}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top\mathbf{A}_{x_2}^\top \end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{\Gamma}$ 是一个满行秩矩阵。由式 (8.13) 和 (8.16) 可知

$$\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}(\mathbf{\Gamma}_1^\top - \mathbf{\Gamma}_2^\top) = O_{3\times 2},$$

可得

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_2. \tag{8.17}$$

类似地，由 (8.13)、(8.16) 和 (8.17) 可得

$$\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top(\mathbf{A}_{x_2,1}^\top - \mathbf{A}_{x_2,2}^\top) = O_{3\times 4}.$$

由于 $\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top$ 是列满秩矩阵，根据 Harville [18]中的引理 11.3.1，可得

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2,1} = \mathbf{\Lambda}_{x_2,2}. \tag{8.18}$$

回想一下

$$\mathbf{\Sigma}^{22}(\theta)=\mathbf{\Lambda}_{x_2}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi}\mathbf{\Gamma}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta})\mathbf{\Lambda}_{x_2}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$$

且 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}$ 是一个对角矩阵。由 (8.16)-(8.18) 可知

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,1}\mathbf{\Gamma}_1^\top\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}^\top=\mathbf{\Lambda}_{x_2,2}\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,2}\mathbf{\Gamma}_2^\top\mathbf{\Lambda}_{x_2,2}^\top,$$

由 (8.13) 可知

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1}\mathbf{\Lambda}_{x_2,1}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,1}=\mathbf{\Lambda}_{x_2,2}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2}\mathbf{\Lambda}_{x_2,2}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,2}. \tag{8.19}$$

注意

$$\mathbf{\Lambda}_{x_2}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\mathbf{\Lambda}_{x_2}^\top+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} & \mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\mathbf{A}_{x_2}^\top\\ \mathbf{A}_{x_2}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta} & \mathbf{A}_{x_2}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\mathbf{A}_{x_2}^\top\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{11} & O_{2\times4}\\ O_{4\times2} & \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{11}=\mathrm{Diag}((\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{11},(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{22})^\top$ 且 $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}^{22}=\mathrm{Diag}((\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{33},\cdots,(\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon})_{66})^\top$。(8.18) 和 (8.19) 意味着

$$\mathbf{A}_{x_2,1}(\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1}-\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2})=O_{4\times2}.$$

$\mathbf{A}x_2$ 是一个列满秩矩阵，因此可得

$$\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,1}=\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,2}. \tag{8.20}$$

由（8.18）—（8.20），我们得到

$$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,1}=\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,2}. \tag{8.21}$$

因此，由 (8.15)-(8.18)、(8.20) 和 (8.21) 可知 $\theta_1=\theta_2$。

8.4. **引理 6 的证明**。

引理14 在 [**A1**],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=R_i(h_n,\xi),\\
&\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=h_nA_{j_1j_2}+R_i(h_n^2,\xi),\\
&\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}A_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=R_i(h_n^2,\xi),\\
&\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}A_{i,n}^{(j_3)}A_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=h_n^2(A_{j_1j_2}A_{j_3j_4}+A_{j_1j_3}A_{j_2j_4}+A_{j_1j_4}A_{j_2j_3})+R_i(h_n^3,\xi)
\end{aligned}$$

对于 $j_1,j_2,j_3,j_4=1,\cdots,p_1$。

引理15 在.....之下 [**B1**],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[B_{i,n}^{(j_1)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=R_i(h_n,\delta),\\
&\mathbb{E}\left[B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=h_nB_{j_1j_2}+R_i(h_n^2,\delta),\\
&\mathbb{E}\left[B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}B_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=R_i(h_n^2,\delta),\\
&\mathbb{E}\left[B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}B_{i,n}^{(j_3)}B_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=h_n^2(B_{j_1j_2}B_{j_3j_4}+B_{j_1j_3}B_{j_2j_4}+B_{j_1j_4}B_{j_2j_3})+R_i(h_n^3,\delta)
\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p_1$。

引理16 在 [**A1**],

$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n,\xi),$$
$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_nC_{j_1j_2} + R_i(h_n^2,\xi),$$
$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^2,\xi),$$
$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}C_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(C_{j_1j_2}C_{j_3j_4} + C_{j_1j_3}C_{j_2j_4} + C_{j_1j_4}C_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\xi)$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$。

引理17 在 [**D1**],

$$\mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n,\zeta),$$
$$\mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_nD_{j_1j_2} + R_i(h_n^2,\zeta),$$
$$\mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}D_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^2,\zeta),$$
$$\mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}D_{i,n}^{(j_3)}D_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(D_{j_1j_2}D_{j_3j_4} + D_{j_1j_3}D_{j_2j_4} + D_{j_1j_4}D_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\zeta)$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$。

引理18 在.....之下 [**C1**],

$$\mathbb{E}\left[E_{i,n}^{(j_1)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n,\varepsilon),$$
$$\mathbb{E}\left[E_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_nE_{j_1j_2} + R_i(h_n^2,\varepsilon),$$
$$\mathbb{E}\left[E_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}E_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^2,\varepsilon),$$
$$\mathbb{E}\left[E_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}E_{i,n}^{(j_3)}E_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(E_{j_1j_2}E_{j_3j_4} + E_{j_1j_3}E_{j_2j_4} + E_{j_1j_4}E_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\varepsilon)$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$。

引理19 在 [**A1**],

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_nF_{j_1j_2} + R_i(h_n^2,\xi)$$

对于 $j_1 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2,$

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^2,\xi)$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ p_2,$

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^2,\xi)$$

对于 $j_1 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_2,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ p_2,$

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}A_{i,n}^{(j_3)}C_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(A_{j_1j_2}F_{j_3j_4} + A_{j_1j_3}F_{j_2j_4} + F_{j_1j_4}A_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\xi)$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2,$

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}C_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(A_{j_1j_2}C_{j_3j_4} + F_{j_1j_3}F_{j_2j_4} + F_{j_1j_4}F_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\xi)$$

对于 $j_1,j_2 = 1,\cdots,p_1,j_3,j_4 = 1,\cdots,p_2,$ 以及

$$\mathbb{E}\left[A_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}C_{i,n}^{(j_3)}C_{i,n}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = h_n^2(F_{j_1j_2}C_{j_3j_4} + F_{j_1j_3}C_{j_2j_4} + F_{j_1j_4}C_{j_2j_3}) + R_i(h_n^3,\xi)$$

关于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$。

引理 *14–19* 的证明。 这些结果可以用与 Kusano 和 Uchida[26] 中引理 2–3 类似的方法证明。□

引理20 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**],

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j)}\right|^{\ell}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] &= R_i(h_n^{\frac{\ell}{2}},\xi) \quad (j=1,\cdots,p_1),\\
\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j)}\right|^{\ell}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] &= R_i(h_n^{\frac{\ell}{2}},\delta) \quad (j=1,\cdots,p_1),\\
\mathbb{E}\left[\left|C_{i,n}^{(j)}\right|^{\ell}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] &= R_i(h_n^{\frac{\ell}{2}},\xi) \quad (j=1,\cdots,p_2),\\
\mathbb{E}\left[\left|D_{i,n}^{(j)}\right|^{\ell}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] &= R_i(h_n^{\frac{\ell}{2}},\zeta) \quad (j=1,\cdots,p_2),\\
\mathbb{E}\left[\left|E_{i,n}^{(j)}\right|^{\ell}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] &= R_i(h_n^{\frac{\ell}{2}},\varepsilon) \quad (j=1,\cdots,p_2)
\end{aligned}$$

对于 $\ell \geq 2$。

证明。 采用与 Kessler [24], 中引理 6 类似的方法即可证明这些结果。 □

引理 21 在 [**A1**],和 [**B1**],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\\
&= h_n(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2} + h_n^2\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\delta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big\},
\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\\
&= h_n^2\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\}\\
&\qquad + h_n^3\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\delta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_1$。

证明。 根据引理14和引理15，可以用与Kusano andUchida [26]中的引理4类似的方法得到这些结果。□

引理 22 在 [**A1**], [**C1**] 和 [**D1**],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\\
&= h_n(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2} + h_n^2\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\varepsilon)+R_i(1,\zeta)\\
&\qquad + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)+R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta)+R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\big\},
\end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\\
&= h_n^2\{(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_3}\}\\
&\quad + h_n^3\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\varepsilon)+R_i(1,\zeta)+R_i(1,\xi)R(1,\varepsilon)\\
&\qquad + R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta)+R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\big\}
\end{aligned} \tag{8.25}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$。

证明。 首先，我们考虑 (8.24)。由引理16-18可知，对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2$,

$$\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] + \mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right] + \mathbb{E}\left[E_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]$$

$$= h_n(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2} + h_n^2\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\zeta)\big\}.$$

由引理16-18以及$\xi_{0,t}$、 $\varepsilon_{0,t}$和$\zeta_{0,t}$ 的独立性可得,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] &= R_i(h_n,\xi)R_i(h_n,\zeta),\\
\mathbb{E}\left[C_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] &= R_i(h_n,\xi)R_i(h_n,\varepsilon),\\
\mathbb{E}\left[D_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] &= R_i(h_n,\zeta)R_i(h_n,\varepsilon)
\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] &= \mathbb{E}\left[(C_{i,n}^{(j_1)} + D_{i,n}^{(j_1)} + E_{i,n}^{(j_1)})(C_{i,n}^{(j_2)} + D_{i,n}^{(j_2)} + E_{i,n}^{(j_2)})\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&= h_n(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2} + h_n^2\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\zeta)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\big\}
\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2$。此外，根据引理16-18，可以用同样的方法证明(8.25)。 □

引理23 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&= h_n(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2} + h_n^2\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon)\big\}
\end{aligned}$$

对于 $j_1 = 1,\cdots,p_1,\ j_2 = 1,\cdots,p_2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&= h_n^2\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\}\\
&\quad + h_n^3\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta)\big\}
\end{aligned}$$

对于 $j_1,j_2,j_3 = 1,\cdots,p_1,\ j_4 = 1,\cdots,p_2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&= h_n^2\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_3}\}\\
&\quad + h_n^3\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\delta) + R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\zeta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta)\\
&\quad + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\\
&\quad + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\big\} + h_n^4R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta)R_i(1,\varepsilon)
\end{aligned}$$

对于 $j_1,j_2 = 1,\cdots,p_1,\ j_3,j_4 = 1,\cdots,p_2$, 以及

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&= h_n^2\{(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_3}\}\\
&\quad + h_n^3\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\zeta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$+ R_i(1,\xi)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon) + R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon)$$
$$+ R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta) + R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)\big\}$$
$$+ h_n^4 R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)R_i(1,\varepsilon)R_i(1,\zeta)$$

用于 $j_1 = 1,\cdots,p_1,\ j_2,j_3,j_4 = 1,\cdots,p_2$。

证明。根据引理 14–19，可以用与引理 22 类似的方法证明这些结果。 . □

引理 24 在 [**A1**],

$$\mathbb{E}\left[\Big|\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n}))ds\Big|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^{k+\frac{k}{2}},\xi)$$

对于 $k \geq 2$。

证明。注意到，根据 Kessler [24] 中的引理 6，我们可以得出，

$$t_{i-1}^n \leq s \leq t_i^n \Longrightarrow \mathbb{E}\Big[|\xi_{0,s} - \xi_{0,t_{i-1}^n}|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = R_i(h_n^{\frac{k}{2}},\xi)$$

对于 $k \geq 2$。由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Big|\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n}))ds\Big|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}|B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})|ds\right)^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[\left\{\left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}|B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})|^k ds\right)^{\frac{1}{k}}\left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}1^{\frac{k}{k-1}}ds\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&\leq h_n^{k-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}|B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})|^k ds\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&\leq h_n^{k-1}\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\mathbb{E}\Big[|B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]ds\\
&\leq C_1 h_n^{k-1}\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\mathbb{E}\Big[|\xi_{0,s} - \xi_{0,t_{i-1}^n}|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]ds\\
&\leq C_2 h_n^{k+\frac{k}{2}}\big(1 + |\xi_{0,t_{i-1}^n}|\big)^{C_2}
\end{aligned}$$

对于 $k \geq 2$，从而得到

$$\mathbb{E}\left[\Big|\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n}))ds\Big|^k\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] = R_i(h_n^{k+\frac{k}{2}},\xi)$$

对于 $k \geq 2$。 □

引理25 在 [**A1**],

$$\mathbb{E}\Big[A_{i,n}^{(j_1)}\Delta W_{1,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = R_i(h_n,\xi) \tag{8.26}$$

对于 $j_1 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ \ j_2 = 1,\ \cdots,\ r_1$,

$$\mathbb{E}\Big[A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = R_i(h_n^2,\xi) \tag{8.27}$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_1, j_3 = 1, \cdots, r_1$, 以及

$$\mathbb{E}\Big[A_{i,n}^{(j_1)} C_{i,n}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = R_i(h_n^2, \xi) \tag{8.28}$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, p_2, j_3 = 1, \cdots, r_1$。

证明。首先，我们将证明 (8.26)。有

$$\Delta\xi_{0,i} = I_{1,i} + h_n B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n}) + \mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i},$$

其中

$$I_{1,i} = \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (B_1(\xi_{0,s}) - B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n}))ds.$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, r_1$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[A_{i,n}^{(j_1)} \Delta W_{1,i}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big] &= \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]I_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \\ &\quad + h_n \mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})\mathbb{E}\Big[\Delta W_{1,i}^{(j_2)}\Big] \\ &\quad + \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big].\end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式和引理 24 可得

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]I_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big]\Big| &\le C_1\mathbb{E}\Big[|I_{1,i}||\Delta W_{1,i}^{(j_2)}|\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \\ &\le C_1\mathbb{E}\Big[|I_{1,i}|^2\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\big|\Delta W_{1,i}^{(j_2)}\big|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\le R_i(h_n^2, \xi)\end{aligned} \tag{8.29}$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, r_1$。类似地，可以证明娱乐主管

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big]\Big| \le C_2 h_n \tag{8.30}$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, r_1$。因此，得到 (8.26)。

接下来, 我们考虑（8.27）。由柯西-施瓦茨不等式和引理 24 可知,

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]I_{1,i}\big)\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_2,]I_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big]\Big| \\ &\qquad \le C_3\mathbb{E}\Big[|I_{1,i}|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\big|\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\big|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le R_i(h_n^{\frac{7}{2}}, \xi)\end{aligned}$$

对于 $j_1, \ j_2 = 1, \ \cdots, \ p_1, \ j_3 = 1, \ \cdots, \ r_1$。以类似的方式,

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]I_{1,i}\big)\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_2,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big]\Big| \\ &\qquad \le C_4\mathbb{E}\Big[|I_{1,i}|^2\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\big|\Delta W_{1,i}\big|^4\Big]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}\Big[\big|\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\big|^4\Big]^{\frac{1}{4}} \le R_i(h_n^{\frac{5}{2}}, \xi)\end{aligned}$$

对于 $j_1, \ j_2 = 1, \ \cdots, \ p_1, \ j_3 = 1, \ \cdots, \ r_1$。(8.29) 和 (8.30) 意味着

$$h_n\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_2,]I_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n\Big] = R_i(h_n^3, \xi)$$

and

$$h_n\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]B_1(\xi_{0,t_{i-1}^n})\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_2,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\Big] = R_i(h_n^2, \xi)$$

对于 $j_1, \ j_2 = 1, \ \cdots, \ p_1, \ j_3 = 1, \ \cdots, \ r_1$。此外,

$$\mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_1,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\big(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}[j_2,]\mathbf{S}_{1,0}\Delta W_{1,i}\big)\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\Big]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{m=1}^{r}(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{S}_{1,0})_{j_1\ell}(\mathbf{\Lambda}_{x_1,0}\mathbf{S}_{1,0})_{j_2m}\mathbb{E}\Big[\Delta W_{1,i}^{(\ell)}\Delta W_{1,i}^{(m)}\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\Big] = 0$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_1, j_3 = 1, \cdots, r_1$。因此，我们得到 (8.27)。类似地，(8.28) 也成立。 □

引理 26 在 [**B1**]，

$$\mathbb{E}\Big[B_{i,n}^{(j_1)}\Delta W_{2,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n, \delta)$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, r_2$，以及

$$\mathbb{E}\Big[B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\Delta W_{2,i}^{(j_3)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n^2, \delta)$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_1, j_3 = 1, \cdots, r_2$。

引理 27 在 [**A1**]，

$$\mathbb{E}\Big[C_{i,n}^{(j_1)}\Delta W_{1,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n, \xi)$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_2, j_2 = 1, \cdots, r_1$，以及

$$\mathbb{E}\Big[C_{i,n}^{(j_1)}C_{i,n}^{(j_2)}\Delta W_{1,i}^{(j_3)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n^2, \xi)$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_2, j_3 = 1, \cdots, r_1$。

引理 28 在 [**D1**]，

$$\mathbb{E}\Big[D_{i,n}^{(j_1)}\Delta W_{4,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n, \zeta)$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_2, j_2 = 1, \cdots, r_4$，以及

$$\mathbb{E}\Big[D_{i,n}^{(j_1)}D_{i,n}^{(j_2)}\Delta W_{4,i}^{(j_3)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n^2, \zeta)$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_2, j_3 = 1, \cdots, r_4$。

引理 29 在 [**C1**]，

$$\mathbb{E}\Big[E_{i,n}^{(j_1)}\Delta W_{3,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n, \varepsilon)$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_2, j_2 = 1, \cdots, r_3$，以及

$$\mathbb{E}\Big[E_{i,n}^{(j_1)}E_{i,n}^{(j_2)}\Delta W_{3,i}^{(j_3)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\Big] = R_i(h_n^2, \varepsilon)$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_2, j_3 = 1, \cdots, r_3$。

引理*26–29*的证明。 结果可以用类似于引理25的方式证明。 □

引理 ***6*** 的证明。 首先，我们证明（7.1）。只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\right| \xrightarrow{P} 0 \tag{8.31}$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_1$，

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\right| \xrightarrow{P} 0 \tag{8.32}$$

对于 $j_1 = 1, \cdots, p_1, j_2 = 1, \cdots, p_2$，以及

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^{n}\right]\right| \xrightarrow{P} 0 \tag{8.33}$$

对于 j_1, $j_2 = 1, \cdots, p_2$。由式 (8.22)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|n\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] - (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big\{n^{-1}R_i(1,\xi) + n^{-1}R_i(1,\delta) + n^{-1}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\Big\} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\delta) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\right\} \xrightarrow{P} 0
\end{aligned}$$

对于 j_1, $j_2 = 1, \cdots, p_1$，这意味着（8.31）。同样地，根据引理 22–23，我们得到（8.83）和（8.84）。接下来，我们证明（7.2）。注意到 $nt - 1 < [nt] \le nt$。由于根据引理 21，有以下结论：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\Big\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big\}\right. \\
&\qquad\left.\times\Big\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big\}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&= n\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \\
&\quad - (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\times\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] \\
&\quad - (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\times\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big] + \frac{[nt]}{n}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4} \\
&= \frac{[nt]}{n}\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\big\} \\
&\qquad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\big\{R_i(1,\xi) + R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big\},
\end{aligned}$$

有人拥有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\Big\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big\}\right.\right. \\
&\qquad\left.\times\Big\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big\}\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\qquad\left.- t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\big\}\right| \\
&\le \left|\frac{[nt]-nt}{n}\right|\left|(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\right| \\
&\qquad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]}\big|R_i(1,\xi) + R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big| \\
&\le \frac{1}{n}\left|(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\delta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\right\}\xrightarrow{P}0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\qquad\qquad\xrightarrow{P}t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4}+(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\big\}\end{aligned}\tag{8.34}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p_1$。此外，由引理 21 可知

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right.\\&\qquad\left.\times\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\\&\le\frac{1}{n^2}\times\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\delta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\right\}\xrightarrow{P}0,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right.\\&\qquad\left.\times\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\xrightarrow{P}0\end{aligned}\tag{8.35}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p_1$。因此，由 (8.34) 和 (8.35) 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\quad-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\qquad\times\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\xrightarrow{P}t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4}+(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\big\}\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p_1$。以类似的方式，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\quad-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\end{aligned}$$

$$\times \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$

$$\xrightarrow{P} t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\big\}$$

用于 $j_1, j_2, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.$$
$$\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$\times \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$

$$\xrightarrow{P} t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_3}\big\}$$

对于 $j_1, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_2, j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\right\}\right.$$
$$\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$\times \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$

$$\xrightarrow{P} t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{12\top})_{j_2j_3}\big\}$$

对于 $j_1, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_2, j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\right\}\right.$$
$$\left.\times\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$-\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$\times \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$

$$\xrightarrow{P} t\big\{(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_3}\big\}$$

对于 $j_1 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ \ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$, 以及

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\left\{\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\right\}\right.$$

$$\times \left\{ \sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)} \Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3 j_4} \right\} \Big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big]$$

$$- \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1 j_2} \Big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right]$$

$$\times \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\big(\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)} \Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3 j_4} \Big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right]$$

$$\xrightarrow{P} t\big\{ (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1 j_3} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2 j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1 j_4} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2 j_3} \big\}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4 = 1,\ \cdots,\ p_2$，由此得到 (7.2)。接下来，我们将证明 (7.3)。要证明 (7.3)，只需证明

$$\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta \bar{W}_i^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right] \xrightarrow{P} 0 \tag{8.36}$$

对于 $j_1, j_2 = 1, \cdots, p_1, j_3 = 1, \cdots, \bar{r}$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} \Delta \bar{W}_i^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right] \xrightarrow{P} 0 \tag{8.37}$$

对于 $j_1 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ \bar{r}$，以及

$$\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} \Delta \bar{W}_i^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right] \xrightarrow{P} 0 \tag{8.38}$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_2,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ \bar{r}$。回想一下,

$$\mathbb{E}\Big[B_{i,n}^{(j_1)} B_{i,n}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] = \mathbb{E}\Big[B_{i,n}^{(j_1)} B_{i,n}^{(j_2)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] \mathbb{E}\Big[\Delta W_{1,i}^{(j_3)} \Big],$$

引理15和引理25给出

$$\mathbb{E}\Big[\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] = h_n^2 \big\{ R_i(1,\xi) + R_i(1,\xi) R_i(1,\delta) \big\}$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ r_1$。由于

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right] \right| &\le \sqrt{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left| \mathbb{E}\Big[\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] \right| \\
&\le \sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \mathbb{E}\Big[\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] \right| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i(1,\xi) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i(1,\xi) R_i(1,\delta) \right\} \\
&\xrightarrow{P} 0,
\end{aligned}$$

我们看到

$$\sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{1,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \right] \xrightarrow{P} 0 \tag{8.39}$$

对于 $j_1,\ j_2 = 1,\ \cdots,\ p_1,\ j_3 = 1,\ \cdots,\ r_1$。以类似的方式,

$$\mathbb{E}\Big[\Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)} \Delta \mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} \Delta W_{2,i}^{(j_3)} \big| \mathscr{F}_{i-1}^n \Big] = h_n^2 \big\{ R_i(1,\delta) + R_i(1,\xi) R_i(1,\delta) \big\}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1,\ j_3=1,\ \cdots,\ r_1$，这将得到

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta W_{2,i}^{(j_3)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.40}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,p_1,j_3=1,\cdots,r_2$。根据 $W_{1,t}$, $W_{2,t}$, $W_{3,t}$ 和 $W_{4,t}$ 的独立性，结论成立 t

$$\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta W_{3,i}^{(j_3)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]=0 \tag{8.41}$$

对于 $j_1,j_2=1,\cdots,p_1,j_3=1,\cdots,r_3$，以及

$$\mathbb{E}\Big[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta W_{4,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\Big]=0 \tag{8.42}$$

对于 $j_1,j_2=1,\cdots,p_1,j_3=1,\cdots,r_4$。因此，(8.39)-(8.42) 推出 (8.36)。类似地，我们得到 (8.37) 和 (8.38)。最后，我们证明 (7.4)。只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right|^4\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.43}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$,

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\right|^4\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.44}$$

对于 $j_1=1,\ \cdots,\ p_1,\ \ j_2=1,\ \cdots,\ p_2$, 并且

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\right|^4\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.45}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_2$。注意，对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$,

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\sqrt{n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right|^4\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\le C_1n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]+\frac{C_1}{n}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}^4.\end{aligned} \tag{8.46}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和引理20，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\le\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_1)}\right|^8\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^{\frac12}\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_2)}\right|^8\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^{\frac12}\le R_i(h_n^4,\xi)$$

and

$$\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\le\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j_1)}\right|^8\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^{\frac12}\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j_2)}\right|^8\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^{\frac12}\le R_i(h_n^4,\delta)$$

对于 $j_1,\ \ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$。回想一下，$\xi_{0,\ t}$ 和 $\delta_{0,\ t}$ 相互独立。由引理20可得

$$\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]=R_i(h_n^2,\xi)R_i(h_n^2,\delta)$$

对于 $j_1,\ \ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$, 因此，对于 $j_1,\ \ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$，有

$$\begin{aligned}0&\le C_1n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\right|^4\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\le C_1n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|(A_{i,n}^{(j_1)}+B_{i,n}^{(j_1)})(A_{i,n}^{(j_2)}+B_{i,n}^{(j_2)})\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\le C_2n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]+C_2n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|A_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\end{aligned}$$

$$+C_2n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j_1)}A_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]+C_2n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|B_{i,n}^{(j_1)}B_{i,n}^{(j_2)}\right|^4\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$\leq\frac{C_2}{n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\delta)\right\}\xrightarrow{P}0,$$

由此可得

$$C_1n^2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\right|^4\middle|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0\tag{8.47}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$。因此，我们由 (8.46) 和 (8.47) 得到 (8.43)。同样地，我们可以证明 (8.44) 和 (8.45)。 □

8.5. 证明**定理2-4的证明**。对于任意矩阵 M，$\mathbb{C}(M)$ 表示 M 的列空间。

引理 30 $M\in\mathbb{R}^{(p_1+p_2)\times(p_1+p_2)}$ 设为

$$M=\begin{pmatrix}M^{11}&M^{12}\\M^{12\top}&M^{22}\end{pmatrix},$$

其中 $M^{11}\in\mathbb{R}^{p_1\times p_1}$、$M^{12}\in\mathbb{R}^{p_1\times p_2}$ 和 $M^{22}\in\mathbb{R}^{p_2\times p_2}$。

(*i*) 如果 M^{11}是一个正定矩阵，并且 $M^{22}-M^{12\top}(M^{11})^{-1}M^{12}$是一个正定矩阵，那么$M$ 是一个正定矩阵。(*ii*) 如果 M^{11}是一个半正定矩阵，$M^{22}-M^{12\top}(M^{11})^{-}M^{12}$是一个半正定矩阵，并且 $\mathbb{C}(M^{12})\subset\mathbb{C}(M^{11})$，那么 M是一个半正定矩阵。

证明。参见 Harville [18] 中的定理14.8.5。 □

引理 31 $\boldsymbol{\Sigma}_0$、$\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 和 $\mathrm{V}(\boldsymbol{\Sigma}_0,\ \boldsymbol{\Sigma}(\theta))$ 是正定矩阵。

证明。首先，我们将 $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 分解为

$$\boldsymbol{\Sigma}(\theta)=\begin{pmatrix}T&U\\U^\top&V\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}&O_{p_1\times p_2}\\O_{p_2\times p_1}&\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon}\end{pmatrix},$$

其中

$$T=\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top,\ U=\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top,\ V=\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top+\boldsymbol{\Sigma}_{\zeta\zeta})\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top.$$

回顾 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 是一个半正定矩阵，可得

$$T=\left(\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}^{\frac{1}{2}}\right)^\top\geq 0.\tag{8.48}$$

注意，$\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^{-}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}=\mathbb{I}_{k_1}$ 且由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}$ 是满行秩矩阵，因此 $\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top(\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top)^{-}=\mathbb{I}_{k_1}$。正如其所成立的 s

$$\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^{-}T(\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top)^{-}=\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi},$$

我们得到

$$\begin{aligned}U^\top T^{-}U&=\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top T^{-}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top\\&=\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^{-}TT^{-}T(\boldsymbol{\Lambda}_{x_1}^\top)^{-}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top\\&=\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Psi}^{-1\top}\boldsymbol{\Lambda}_{x_2}^\top.\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}$ 是一个半正定矩阵，可得

$$\begin{aligned} V - U^{\top}T^{-}U &= \mathbf{\Lambda}_{x_2}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}\mathbf{\Psi}^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2}^{\top} \\ &= \left(\mathbf{\Lambda}_{x_2}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{\Lambda}_{x_2}\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta}^{\frac{1}{2}}\right)^{\top} \geq 0. \end{aligned} \tag{8.49}$$

此外，我们设

$$F = (\mathbf{\Lambda}_{x_1}^{\top})^{-}\mathbf{\Gamma}^{\top}\mathbf{\Psi}^{-1\top}\mathbf{\Lambda}_{x_2}^{\top},$$

由此得到 $U = TF$。因此，由 Harville [18] 中的引理 4.2.2 可知

$$\mathbb{C}(U) \subset \mathbb{C}(T). \tag{8.50}$$

因此，由引理 30 (ii)、(8.48)、(8.49) 和 (8.50) 可得

$$\begin{pmatrix} T & U \\ U^{\top} & V \end{pmatrix} \geq 0. \tag{8.51}$$

由于

$$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} - O_{p_1\times p_2}^{\top}\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta}^{-1}O_{p_1\times p_2} = \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} > 0,$$

由引理 30 (i) 可知

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{\delta\delta} & O_{p_1\times p_2} \\ O_{p_2\times p_1} & \mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} > 0. \tag{8.52}$$

因此，由 (8.51) 和 (8.52) 可知，$\mathbf{\Sigma}(\theta)$ 是一个正定矩阵。同理可得 $\mathbf{\Sigma}_0 > 0$。由于 $\mathbf{\Sigma}_0$ 和 $\mathbf{\Sigma}(\theta)$ 都是正定矩阵，因此有

$$\mathbf{\Sigma}(\theta) + \lambda_1\lambda_2(\mathbf{\Sigma}_0 - \mathbf{\Sigma}(\theta)) > 0$$

对于 λ_1，$\lambda_2 \in [0,1]$。注意到

$$\mathbb{D}_p^{+}x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

对于 $x \in \mathbb{R}^{\bar{p}}(\neq 0)$，如果 λ_2 不为零，则有

$$\begin{aligned} &\lambda_2 x^{\top}\mathbb{D}_p^{+\top}(\mathbf{\Sigma}(\theta) + \lambda_1\lambda_2(\mathbf{\Sigma}_0 - \mathbf{\Sigma}(\theta)))^{-1} \\ &\qquad \otimes (\mathbf{\Sigma}(\theta) + \lambda_1\lambda_2(\mathbf{\Sigma}_0 - \mathbf{\Sigma}(\theta)))^{-1}\mathbb{D}_p^{+}x > 0 \end{aligned}$$

对于 $\lambda_1\lambda_2 \in [0,1]$ 和 $x \in \mathbb{R}^{\bar{p}}(\neq 0)$。因此，对于 $x \in \mathbb{R}^{\bar{p}}(\neq 0$，我们得到 $x^{\top}\mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}_0,\ \mathbf{\Sigma}(\theta))\mathbf{x} > 0)$. □

引理 32 设 $f:\ \mathbb{R}^{p\times q}\times\mathbb{R}^{r}\to\mathbb{R}$ 表示一个连续函数，且 A 是 $\mathbb{R}^{r}$的一个紧子集。那么，

$$\sup_{\alpha\in A}|f(Y,\alpha) - f(Y_0,\alpha)| \longrightarrow 0$$

作为 $Y \longrightarrow Y_0$。

证明。 对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{r}$ 使得

$$\begin{aligned} &\sup_{\alpha\in A}|f(Y,\alpha) - f(Y_0,\alpha)| - \varepsilon \\ &\qquad < |f(Y,\alpha_0) - f(Y_0,\alpha_0)| \leq \sup_{\alpha\in A}|f(Y,\alpha) - f(Y_0,\alpha)|. \end{aligned} \tag{8.53}$$

由 f 的连续性，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|Y - Y_0\| < \delta \Longrightarrow |f(Y, \alpha_0) - f(Y_0, \alpha_0)| < \varepsilon. \tag{8.54}$$

因此，由 (8.53) 和 (8.54) 可知

$$\|Y - Y_0\| < \delta \Longrightarrow \sup_{\alpha \in A} |f(Y, \alpha) - f(Y_0, \alpha)| < 2\varepsilon,$$

这意味着

$$\sup_{\alpha \in A} |f(Y, \alpha) - f(Y_0, \alpha)| \longrightarrow 0$$

当 $Y \longrightarrow Y_0$ 时。 □

引理 33 当 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 且 [**D1**], 时,

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \xrightarrow{P} \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \quad \text{uniformly in } \theta,$$
$$\partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \xrightarrow{P} \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \quad \text{uniformly in } \theta.$$

证明。令

$$J_n = \big\{\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} \text{ is non-singular}\big\}.$$

由于 F 关于 θ 连续，根据引理 32，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \boldsymbol{\Sigma}_0\| < \delta \Longrightarrow \sup_{\theta \in \Theta} \big|\mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| < \varepsilon$$

在 J_n 上。因此，有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}\Big(\big\{\|\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \boldsymbol{\Sigma}_0\| < \delta\big\} \cap J_n\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{\theta \in \Theta} \big|\mathrm{F}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| < \varepsilon\right\} \cap J_n\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in \Theta} \big|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| < \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{8.55}$$

由定理1和引理31可知 $\mathbb{P}\big(J_n\big) \longrightarrow 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\big\{\|\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \boldsymbol{\Sigma}_0\| < \delta\big\} \cap J_n\Big) \longrightarrow 1$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时。因此，由 (8.55) 可得，对于所有 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in \Theta} \big|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1,$$

这意味着

$$\sup_{\theta \in \Theta} \big|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

同理，我们可以证明

$$\sup_{\theta \in \Theta} \big|\partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))\big| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$ □

引理34 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**], 如 $h_n \longrightarrow 0$所示时,

$$\mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) \xrightarrow{P} \mathrm{V}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta)),$$
$$\partial_{\theta^{(i)}} \mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) \xrightarrow{P} \partial_{\theta^{(i)}} \mathrm{V}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta))$$

对于 $i = 1, \cdots, q$。

证明。 可以用与引理 33 类似的方法得出这些结果。 □

引理35 在 [**E1**](ii) 的条件下, $\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta$是一个正定矩阵。

证明。 由引理31可知, $\mathbf{W}(\theta_0)$是一个正定矩阵, 这意味着

$$\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta = \big(\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}\big)\big(\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}\big)^\top \geq 0.$$

按照 Kusano 和 Uchida 中引理 6 的类似方法, [26], 我们可得

$$\det \Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \neq 0.$$

因此, $\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta$ 是一个正定矩阵。 □

定理*2*的证明。 我们首先证明

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0. \tag{8.56}$$

[**E1**](i) 和引理31推出

$$\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta)) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{vech} \mathbf{\Sigma}(\theta_0) - \operatorname{vech} \mathbf{\Sigma}(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta_0 = \theta.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|\hat{\theta}_n - \theta_0| > \varepsilon \Longrightarrow \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \delta.$$

ˆ 根据 θ_n 的定义,

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)) = \mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n) \leq \mathbb{F}_n(\theta_0) = \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta_0)).$$

注意到 $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{\Sigma}(\theta_0)$。由引理 33 可知

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta_0| > \varepsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \delta\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta}\big|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta))\big| > \frac{\delta}{3}\right) + 0 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

如 $n \longrightarrow \infty$, 由此得到（8.56）。

接下来, 我们证明

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N_q\big(0, \big(\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big)^{-1}\big).$$

ˆ ˆ $\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_n)$ 在 $\theta_n = \theta_0$ 附近的泰勒展开为

$$\partial_\theta \mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n) = \partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0) + \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda (\hat{\theta}_n - \theta_0),$$

¨ˆ ˆ ˆ 其中 $\theta_n = \theta_0 + \lambda(\theta_n - \theta_0)$。由于根据 θ_n 的定义可得 $\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_n) = 0$，因此有

$$-\sqrt{n}\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0) = \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0). \tag{8.57}$$

Let $\tilde{V}_n(\theta) = \mathrm{V}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \ \boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 。定理1和引理34表明，(8.57) 的左端为

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\partial_{\theta^{(i)}} \mathbb{F}_n(\theta_0) &= 2\big\{\partial_{\theta^{(i)}} \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)\big\}^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)) \\
&\quad - (\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))^\top \partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)) \\
&= 2\big\{\partial_{\theta^{(i)}} \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)\big\}^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1)
\end{aligned}$$

对于 $i = 1, \ \cdots, \ q$。因此，由定理1和引理34可得

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0) &= 2\Delta^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech} \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \\
&\xrightarrow{d} 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1} N_{\bar{p}}\big(0, \mathbf{W}(\theta_0)\big) \sim N_q\big(0, 4\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big).
\end{aligned} \tag{8.58}$$

令 $A_n = \big\{|\hat{\theta}_n - \theta_0| \le \rho_n\big\}$，其中 $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足当 $n \longrightarrow \infty$ 时 $\rho_n \longrightarrow 0$ 的正序列。注意到，$\partial_\theta^2 \mathbf{F}$ 在 Θ 上关于 θ 一致连续，因为 $\partial_\theta^2 \mathbf{F}$ 在 θ 上连续，且 Θ 是紧集。由于

$$\partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta_0)) = 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta,$$

我们看到

$$\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \Big\| \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| \longrightarrow 0 \tag{8.59}$$

作为 $n \longrightarrow \infty$。因此，由引理 33、(8.56) 和 (8.59) 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{P}\left(\Big\| \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \varepsilon \right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\left\{ \Big\| \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \varepsilon \right\} \cap A_n \right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\left\{ \Big\| \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \varepsilon \right\} \cap A_n^c \right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \Big\| \partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \varepsilon \right) + \mathbb{P}\big(A_n^c\big) \\
&\le \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \Big\| |\partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \Big\| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \Big\| \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P}\big(A_n^c\big) \\
&\le \mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta} \Big\| |\partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) \Big\| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \Big\| \partial_\theta^2 \mathrm{F}(\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \Big\| > \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P}\big(A_n^c\big) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

作为 $n \longrightarrow \infty$，由此得到

$$\int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda \xrightarrow{P} 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta. \tag{8.60}$$

因此，由（8.57）、（8.58）、（8.60）和引理35可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) &\xrightarrow{d} (2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1} N_q\big(0, 4\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big) \\ &\sim N_q\big(0, (\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1}\big).\end{aligned}$$

□

Pr ^^定理*3*的证明．$\mathbb{T}_n = n\mathbb{F}_n(\theta_n)$ 在 $\theta_n = \theta_0$ 处的泰勒展开为 b y

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n &= n\mathbb{F}_n(\theta_0) + n\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0)^\top(\hat{\theta}_n - \theta_0) \\ &\quad + n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^\top \left\{ \int_0^1 (1-\lambda)\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda \right\} (\hat{\theta}_n - \theta_0).\end{aligned} \tag{8.61}$$

与定理2类似，我们得到

$$\sqrt{n}\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0) = -2\Delta^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \tag{8.62}$$

under H_0 and

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = (\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1}\Delta^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \tag{8.63}$$

under H_0. 设

$$H_n(\theta_0) = \tilde{V}_n(\theta_0)\Delta(\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1}\Delta^\top \tilde{V}_n(\theta_0).$$

定理1、引理34、(8.62) 和 (8.63) 表明，(8.61) 右端的第二项可表示为

$$\begin{aligned}&n\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0)^\top(\hat{\theta}_n - \theta_0) \\ &= -2\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0))^\top H_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1)\end{aligned} \tag{8.64}$$

在 H_0 下。回顾 $A_n = \{\hat{}\theta_n - \theta_0| \le \rho_n\}$，其中正序列 $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\rho_n \longrightarrow 0$ as$n \longrightarrow \infty$。以类似于定理2的方式可知，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}0 &\le \mathbb{P}\left(\left\| \int_0^1 (1-\lambda)\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda - \Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \right\| > \varepsilon \right) \\ &\le \mathbb{P}\left(\left\{ \left\| \int_0^1 (1-\lambda)\big\{\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big\} d\lambda \right\| > \varepsilon \right\} \cap A_n \right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\{ \left\| \int_0^1 (1-\lambda)\big\{\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta\big\} d\lambda \right\| > \varepsilon \right\} \cap A_n^c \right) \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \left\| \partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \right\| > \varepsilon \right) + \mathbb{P}\big(A_n^c\big) \\ &\le \mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta} \left\| \partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - \partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta)) \right\| > \varepsilon \right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|\theta-\theta_0|\le\rho_n} \left\| \partial_\theta^2 \tilde{\mathrm{F}}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta)) - 2\Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \right\| > \varepsilon \right) + \mathbb{P}\big(A_n^c\big) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

在 $n \longrightarrow \infty$ 条件下，依据 H_0，从而

$$\int_0^1 (1-\lambda)\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n) d\lambda \xrightarrow{P} \Delta^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta \tag{8.65}$$

在 H_0 下。因此，定理1、引理34 和 (8.63) 表明，(8.61) 右端的第三项为

$$\begin{aligned} & n(\hat{\theta}_n-\theta_0)^\top\left\{\int_0^1(1-\lambda)\partial_\theta^2\mathbb{F}_n(\ddot{\theta}_n)d\lambda\right\}(\hat{\theta}_n-\theta_0) \\ =& \sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))^\top H_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))+o_p(1) \end{aligned} \tag{8.66}$$

在 H_0 下。因此，由 (8.64) 和 (8.66) 可知，(8.61) 可表示为

$$\mathbb{T}_n=\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))^\top(\tilde{V}_n(\theta_0)-H_n(\theta_0))\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))+o_p(1) \tag{8.67}$$

under H_0。设置

$$\gamma_n=\tilde{V}_n(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\operatorname{vech}\boldsymbol{\Sigma}(\theta_0))$$

and

$$P_n(\theta_0)=\tilde{V}_n(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}(\tilde{V}_n(\theta_0)-H_n(\theta_0))\tilde{V}_n(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

我们可以将 (8.67) 重写为

$$\mathbb{T}_n=\gamma_n^\top P_n(\theta_0)\gamma_n+o_p(1) \tag{8.68}$$

在 H_0 下。由引理34和连续映射定理可知，在 H_0下，

$$\tilde{V}_n(\theta_0)^{\frac{1}{2}}=f_1(\tilde{V}_n(\theta_0))\xrightarrow{P}f_1(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1})=\mathbf{W}(\theta_0)^{-\frac{1}{2}},$$

其中，对于 $X\in\mathbb{R}^{\bar{p}\times\bar{p}}$， $f_1(X)=X^{\frac{1}{2}}$。定理1和斯卢茨基定理表明，在 H_0 下，

$$\gamma_n\xrightarrow{d}\gamma, \tag{8.69}$$

其中 $\gamma\sim N_{\bar{p}}(0,\mathbb{I}_{\bar{p}})$。令

$$H(\theta_0)=\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta(\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1}\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}.$$

由引理34和连续映射定理可知，在 H_0 下，

$$H_n(\theta_0)=f_2(\tilde{V}_n(\theta_0))\xrightarrow{P}f_2(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1})=H(\theta_0), \tag{8.70}$$

其中，对于 $X\in\mathbb{R}^{\bar{p}\times\bar{p}}$,

$$f_2(X)=X\Delta(\Delta^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta)^{-1}\Delta^\top X.$$

由于引理34和连续映射定理表明，在 H_0 下，

$$\tilde{V}_n(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}=f_3(\tilde{V}_n(\theta_0))\xrightarrow{P}f_3(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1})=\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $f_3(X)=X^{-\frac{1}{2}}$ 对于 $X\in\mathbb{R}^{\bar{p}\times\bar{p}}$，由引理34、(8.70) 和斯卢茨基定理可知，在 H_0 下 ,

$$P_n(\theta_0)\xrightarrow{P}P(\theta_0), \tag{8.71}$$

其中

$$P(\theta_0)=\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}-H(\theta_0))\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，由连续映射定理和（8.69）可知，在 H_0 下，

$$\gamma_n^\top P(\theta_0)\gamma_n=f_4(\gamma_n)\xrightarrow{d}f_4(\gamma)=\gamma^\top P(\theta_0)\gamma, \tag{8.72}$$

其中，对于 $x \in \mathbb{R}^{\bar{p}}$， $f_4(x) = x^\top P(\theta_0)x$ 。由 (8.69) 可知，在 H_0 下 $\gamma_n = O_p(1)$，并且由 (8.71) 可得，

$$\gamma_n^\top P_n(\theta_0)\gamma_n - \gamma_n^\top P(\theta_0)\gamma_n \xrightarrow{P} 0 \tag{8.73}$$

在 H_0 下。因此，由 (8.68)、(8.72)、(8.73) 和斯卢茨基定理可得

$$\mathbb{T}_n \xrightarrow{d} \gamma^\top P(\theta_0)\gamma$$

在 H_0 下。由于可以按照 Kusano 和 Uchida [26], 中定理3的相同方式得到 $\gamma^\top P(\theta_0)\gamma \sim \chi^2_{\bar{p}-q}$

$$\mathbb{T}_n \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-q}$$

在 H_0 下。 □

引理 36 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**], [**D1**] 和 [**E2**], 的条件下， $h_n \longrightarrow 0$,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$$

在 H_1之下。

证明。 由 [**E2**], , 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|\hat{\theta}_n - \bar{\theta}| > \varepsilon \Longrightarrow \mathbb{U}(\hat{\theta}_n) - \mathbb{U}(\bar{\theta}) > \delta. \tag{8.74}$$

ˆ 根据 θ_n 的定义，我们有

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)) \leq \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})),$$

由引理 33 和 (8.74) 可知，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \bar{\theta}| > \varepsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\mathbb{U}(\hat{\theta}_n) - \mathbb{U}(\bar{\theta}) > \delta\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_{\mathrm{n}})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\bar{\theta})) > \frac{\delta}{3}\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta}\left|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta))\right| > \frac{\delta}{3}\right) + 0 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

在 H_1 下，当 $n \longrightarrow \infty$ 时，这意味着在 H_1 下有 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \bar{\theta}$ 。 □

定理*4*的证明。 由于 $\mathbb{U}(\theta)$ 关于 θ 连续，由连续映射定理和引理36可得

$$\mathbb{U}(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P} \mathbb{U}(\bar{\theta}) \tag{8.75}$$

在 H_1 下。由引理 33 和 (8.75) 可知，对于所有 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\mathbb{T}_n - \mathbb{U}(\bar{\theta})\right| > \epsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}, \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}_n)) - \mathbb{U}(\hat{\theta}_n)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\mathbb{U}(\hat{\theta}_n) - \mathbb{U}(\bar{\theta})\right| > \frac{\epsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta}\left|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}},\mathbf{\Sigma}(\theta))-\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}_0,\mathbf{\Sigma}(\theta))\right|>\frac{\epsilon}{2}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{U}(\hat{\theta}_n)-\mathbb{U}(\bar{\theta})\right|>\frac{\epsilon}{2}\right)\longrightarrow 0$$

在 H_1 下，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，这意味着

$$\frac{1}{n}\mathbb{T}_n\xrightarrow{P}\mathbb{U}(\bar{\theta}) \tag{8.76}$$

在 H_1下。注意，$\mathrm{vech}\ \mathbf{\Sigma}_0-\mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}(\theta)\neq 0$在 H_1下。由引理31可知，$\mathbb{U}(\theta)>0$在 H_1下。因此，Kitagawa 和 Uchida 的引理 3 [25] 以及 (8.76) 表明，在 H_1下，

$$\mathbb{P}\Big(\mathbb{T}_n>\chi^2_{\bar{p}-q}(\alpha)\Big)=1-\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\mathbb{T}_n\leq\frac{1}{n}\chi^2_{\bar{p}-q}(\alpha)\right)\longrightarrow 1$$

当 $n\longrightarrow\infty$ 时。 □

8.6. **定理5的证明。**

引理37 在 [**A1**]-[**A2**], [**B1**]-[**B2**], [**C1**]-[**C2**] 以及 [**D1**]-[**D2**], 下，当 $h_n\longrightarrow 0$ 且 $nh_n\longrightarrow\infty$ 时，

$$\mathbb{Q}_{\xi\xi,0}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_{\xi\xi,0},\ \mathbb{Q}_{\delta\delta,0}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_{\delta\delta,0},\ \mathbb{Q}_{\varepsilon\varepsilon,0}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon,0},$$
$$\mathbb{Q}_{\zeta\zeta,0}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_{\zeta\zeta,0},\ \mathbb{Q}_{\xi\delta,0}\xrightarrow{P}O_{k_1\times p_1},\ \mathbb{Q}_{\xi\varepsilon,0}\xrightarrow{P}O_{k_1\times p_2},$$
$$\mathbb{Q}_{\xi\zeta,0}\xrightarrow{P}O_{k_1\times k_2},\ \mathbb{Q}_{\delta\varepsilon,0}\xrightarrow{P}O_{p_1\times p_2},\ \mathbb{Q}_{\delta\zeta}\xrightarrow{P}O_{p_1\times k_2},\ \mathbb{Q}_{\varepsilon\zeta,0}\xrightarrow{P}O_{p_2\times k_2}.$$

*Pro*关于。 这些结果可以用与 Kusano 和 Uchida 的引理1类似的方法证明 [26] . □

证明 **定理*5*。**与定理1类似，引理37和斯卢茨基定理可得

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}\xrightarrow{P}\mathbf{\Sigma}_0.$$

接下来，我们考虑

$$\sqrt{n}(\mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}_0)\xrightarrow{d}N_{\bar{p}}(0,\mathbf{W}_0). \tag{8.77}$$

回忆

$$\sqrt{n}(\mathrm{vec}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}}-\mathrm{vec}\,\mathbf{\Sigma}_0)=\sum_{i=1}^{n}L_{i,n},$$

其中

$$L_{i,n}=\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\,\mathrm{vec}\,\Delta\mathbb{X}_i\Delta\mathbb{X}_i^{\top}-\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{vec}\,\mathbf{\Sigma}_0.$$

若能证明

$$\sum_{i=1}^{n}L_{i,n}\xrightarrow{d}N_{p^2}(0,\bar{\mathbf{W}}_0), \tag{8.78}$$

那么，以类似于定理1的方式，我们有 (8.77)。类似于 Kessler [24], 中的引理 5，若满足以下条件，则우우우우우우

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0, \tag{8.79}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[L_{i,n}L_{i,n}^{\top}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\mathbb{E}\left[L_{i,n}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]^{\top}\xrightarrow{P}\bar{\mathbf{W}}_0, \tag{8.80}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|L_{i,n}|^4|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0, \tag{8.81}$$

那么，根据 Hall和Heyde [16] 中的定理3.2和定理3.4，我们可以得到（8.78）。根据引理 21，可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0)_{j_1j_2}^{11}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{h_n}\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]-(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\\
&=\frac{h_n}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\delta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big\}\\
&=\sqrt{nh_n^2}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\delta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big\}\xrightarrow{P}0
\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$，由此得到

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.82}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_1$。类似地，

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.83}$$

对于 $j_1=1,\ \cdots,\ p_1$、$j_2=1,\ \cdots,\ p_2$，以及

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\xrightarrow{P}0 \tag{8.84}$$

对于 $j_1,\ j_2=1,\ \cdots,\ p_2$。因此，由 (8.82)-(8.84) 可得 (8.79)。接下来，我们考虑 (8.80)。由引理 21 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\
&\qquad\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&=\frac{1}{nh_n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\
&\quad-\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right](\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\\
&\quad-\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}\big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right](\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\\
&=(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4}+(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\\
&\quad+\frac{h_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\big\{R_i(1,\xi)+R_i(1,\delta)+R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\big\},
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\xrightarrow{P}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4}+(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\end{aligned}\tag{8.85}$$

对于 $j_1,j_2,j_3,j_4=1,\cdots,p_{1\circ}$ 此外，由引理 21 可得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right.\\&\qquad\left.\times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\\&\le\sqrt{nh_n^2}\times\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\delta)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i(1,\xi)R_i(1,\delta)\right\}\xrightarrow{P}0,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right.\\&\qquad\left.\times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\right|\xrightarrow{P}0\end{aligned}\tag{8.86}$$

对于 $j_1,j_2,j_3,j_4=1,\cdots,p_{1\circ}$ 因此，由 (8.85) 和 (8.86) 得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\qquad\times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\xrightarrow{P}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_4}+(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_4}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\end{aligned}$$

对于 $j_1,\ j_2,\ j_3,\ j_4=1,\ \cdots,\ p_{1\circ}$ 以类似的方式，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right.\\&\qquad\left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\right\}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\qquad\times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)}-\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\Big|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]\\&\xrightarrow{P}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_3}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_4}+(\boldsymbol{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{11})_{j_2j_3}\end{aligned}$$

用于 $j_1, j_2, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\right\}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\xrightarrow{P} (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_2j_3}
\end{aligned}$$

对于 $j_1, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_2, j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\right\}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\xrightarrow{P} (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{12\top})_{j_2j_3}
\end{aligned}$$

对于 $j_1, j_3 = 1, \cdots, p_1,\ \ j_2, j_4 = 1, \cdots, p_2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_2}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\right\}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{11})_{j_1j_2}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_3j_4}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\xrightarrow{P} (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{12})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_3}
\end{aligned}$$

对于 $j_1 = 1$、$\cdots$、p_1、j_2、j_3、$j_4 = 1$、$\cdots$、p_2，以及

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\right\}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_1)}\Delta\mathbb{X}_{1,i}^{(j_2)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_2}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right] \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}h_n}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_3)}\Delta\mathbb{X}_{2,i}^{(j_4)} - \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_3j_4}\,\middle|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\right]
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{P} (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_3}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_4} + (\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_1j_4}(\mathbf{\Sigma}_0^{22})_{j_2j_3}$$

对于 j_1、j_2、j_3、$j_4 = 1$、$\cdots$、p_2，由此得到（8.80）。类似于定理1，（8.81）成立。 □

8.7. **引理8的证明**。

引理*8*的证明。 与定理2类似，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$|\underline{\theta}_n - \theta_0| > \varepsilon \Longrightarrow \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\underline{\theta}_n)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \delta.$$

注意到 $\theta_0 \in \Theta$。根据 $\underline{\theta}_n$ 的定义，有

$$\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) = \inf_{\theta \in \underline{\Theta}} \mathbb{F}_n(\theta) \leq \mathbb{F}_n(\theta_0),$$

由引理 33 可知

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{P}\Big(|\underline{\theta}_n - \theta_0| > \varepsilon\Big) \\
\leq\ & \mathbb{P}\left(\mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\underline{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\underline{\theta}_n)) > \frac{\delta}{3}\right) \\
& + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\underline{\theta}_n)) - \tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \frac{\delta}{3}\right) \\
& + \mathbb{P}\left(\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) > \frac{\delta}{3}\right) \\
\leq\ & 2\mathbb{P}\left(\sup_{\theta \in \Theta}\big|\tilde{\mathrm{F}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}, \mathbf{\Sigma}(\theta)) - \mathrm{F}(\mathbf{\Sigma}(\theta_0), \mathbf{\Sigma}(\theta))\big| > \frac{\delta}{3}\right) + 0 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

当 $n \longrightarrow \infty$ 时，因此得到

$$\underline{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0. \tag{8.87}$$

$\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_n)$ 在 $\theta_n = \theta_0$ 处的泰勒展开为

$$\partial_\theta \mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) = \partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0) + \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n) d\lambda (\underline{\theta}_n - \theta_0),$$

其中 $\ddot{\underline{\theta}}_n = \theta_0 \pm \lambda(\theta_n - \theta_0)$。注意到

$$\underline{\theta}_n - \theta_0 = \Big((\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}^\top,\ 0^\top\Big)^\top,$$

我们有

$$\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) = \partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0) + \int_0^1 \partial^2_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n) d\lambda (\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}.$$

由 $\underline{\theta}_n$ 的定义可知，$\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) \equiv 0$，

$$-\sqrt{n}\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0) = \int_0^1 \partial^2_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n) d\lambda \sqrt{n}(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}. \tag{8.88}$$

由式（8.58）可得

$$\begin{aligned}
-\sqrt{n}\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0) &= 2\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech} \mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \operatorname{vech} \mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \\
&\xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, 4\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}\Big).
\end{aligned} \tag{8.89}$$

此外，类似于定理2，由（8.87）可得

$$\int_0^1 \partial^2_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n) d\lambda \xrightarrow{P} 2\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}. \tag{8.90}$$

回忆一下， $\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}$ 是非奇异的。因此，由（8.88）–（8.90）可知

$$\sqrt{n}(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{d} N_{|\mathcal{F}_1|}\Big(0, (\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1})^{-1}\Big). \qquad \square$$

8.8. **引理9的证明**。

引理*9*的证明。 $\theta_n = \theta_0$ 处的 $n\mathbb{F}_n(\theta_n)$的泰勒展开为

$$\begin{aligned} n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) &= n\mathbb{F}_n(\theta_0) + n\partial_\theta \mathbb{F}_n(\theta_0)^\top(\underline{\theta}_n - \theta_0) \\ &\quad + n(\underline{\theta}_n - \theta_0)^\top \int_0^1 (1-\lambda)\partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n)d\lambda(\underline{\theta}_n - \theta_0) \\ &= n\mathbb{F}_n(\theta_0) + n\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0)^\top(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \\ &\quad + n(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}^\top \int_0^1 (1-\lambda)\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}}^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n)d\lambda(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}. \end{aligned} \tag{8.91}$$

与引理8类似，定理1推出

$$-\sqrt{n}\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0) = 2\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1)$$

and

$$\sqrt{n}(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{A}_{\mathcal{F}}^{11}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \tilde{V}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \tag{8.92}$$

在 H_0下。令

$$\underline{H}_n(\theta_0) = \tilde{V}_n(\theta_0)\Delta_{\mathcal{F}_1}(\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1})^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \tilde{V}_n(\theta_0).$$

由定理1、(8.89)和(8.92)可知，在 H_0下，

$$\begin{aligned} &n\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}} \mathbb{F}_n(\theta_0)^\top(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \\ &= -2\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0))^\top \underline{H}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1). \end{aligned} \tag{8.93}$$

与定理3类似，(8.87)得出

$$\int_0^1 (1-\lambda)\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}}^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n)d\lambda \xrightarrow{P} \Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}$$

在 H_0 下，因此由定理1和（8.92）可知,

$$\begin{aligned} &n(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1}^\top \int_0^1 (1-\lambda)\partial_{\theta_{\mathcal{F}_1}}^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\underline{\theta}}_n)d\lambda(\underline{\theta}_n - \theta_0)_{\mathcal{F}_1} \\ &= \sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0))^\top \underline{H}_n(\theta_0)\sqrt{n}(\operatorname{vech}\mathbb{Q}_{\mathbb{X}\mathbb{X}} - \operatorname{vech}\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1) \end{aligned} \tag{8.94}$$

under H_0。令

$$\underline{P}_n(\theta_0) = \tilde{V}_n(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}(\tilde{V}_n(\theta_0) - \underline{H}_n(\theta_0))\tilde{V}_n(\theta_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

引理34和斯卢茨基定理表明，在 H_0 下，

$$\underline{H}_n(\theta_0) \xrightarrow{P} \underline{H}(\theta_0), \quad \underline{P}_n(\theta_0) \xrightarrow{P} \underline{P}(\theta_0),$$

其中

$$\begin{aligned} \underline{H}(\theta_0) &= \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}(\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1})^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top \mathbf{W}(\theta_0)^{-1}, \\ \underline{P}(\theta_0) &= \mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1} - \underline{H}(\theta_0))\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

回顾一下,

$$\gamma_n = \tilde{V}_n(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}(\mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}(\theta_0)).$$

与定理3类似，由 (8.91)、(8.93) 和 (8.94) 可知，在 H_0 下,

$$\begin{aligned}
&n\mathbb{F}_n(\bar{\theta}_n)\\
&= \sqrt{n}(\mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}(\theta_0))^\top\big(\tilde{V}_n(\theta_0) - \underline{H}_n(\theta_0)\big)\sqrt{n}(\mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}(\theta_0)) + o_p(1)\\
&= \gamma_n^\top \underline{P}_n(\theta_0)\gamma_n + o_p(1)\\
&\xrightarrow{d} \gamma^\top \underline{P}(\theta_0)\gamma.
\end{aligned}$$

由于$\mathbf{W}(\theta_0)$ 和 $H(\underline{\theta_0})$ 是对称矩阵，因此有 $P(\theta_0) = P(\theta_0)^\top$。此外，我们有

$$\underline{H}(\theta_0)\mathbf{W}(\theta_0)\underline{H}(\theta_0) = \underline{H}(\theta_0),$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\underline{P}(\theta_0)^2 &= \mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1} - \underline{H}(\theta_0)\big)\mathbf{W}(\theta_0)\big(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1} - \underline{H}(\theta_0)\big)\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\\
&= \mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1} - 2\underline{H}(\theta_0) + \underline{H}(\theta_0)\mathbf{W}(\theta_0)\underline{H}(\theta_0)\big)\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\\
&= \mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}}\big(\mathbf{W}(\theta_0)^{-1} - \underline{H}(\theta_0)\big)\mathbf{W}(\theta_0)^{\frac{1}{2}} = \underline{P}(\theta_0).
\end{aligned}$$

因此， $\underline{P}(\theta_0)$ 是一个投影矩阵，并且

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\,\underline{P}(\theta_0) &= \mathrm{tr}\,\underline{P}(\theta_0)\\
&= \mathrm{tr}\left(\mathbb{I}_{\bar{p}} - \mathbf{W}(\theta_0)\underline{H}(\theta_0)\right)\\
&= \bar{p} - \mathrm{tr}\left(\Delta_{\mathcal{F}_1}(\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1})^{-1}\Delta_{\mathcal{F}_1}^\top\mathbf{W}(\theta_0)^{-1}\right)\\
&= \bar{p} - \mathrm{tr}\,\mathbb{I}_{|\mathcal{F}_1|} = \bar{p} - |\mathcal{F}_1|.
\end{aligned}$$

因此，由 Kusano 和 Uchida 的引理 7 [26] 可得

$$\gamma^\top \underline{P}(\theta_0)\gamma \sim \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|},$$

这意味着

$$n\mathbb{F}_n(\underline{\theta}_n) \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-|\mathcal{F}_1|}$$

在 H_0 下。 □

8.9. **引理 11 的证明**。设 $\mathbf{W}(\theta) = \mathrm{V}(\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}(\theta)$。

引理 38 在 [**A1**], [**B1**], [**C1**] 和 [**D1**], 如 $h_n \longrightarrow 0$ 时,

$$\sqrt{n}(\tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta})) = O_p(1) \tag{8.95}$$

and

$$\sqrt{n}(\partial_{\theta^{(i)}}\tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \partial_{\theta^{(i)}}\bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta})) = O_p(1) \tag{8.96}$$

对于 $i = 1, \cdots, q$。

证明。令 $Y_n = \mathrm{vech}\,\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$ 和 $Y_0 = \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}_0$。由定理1可知

$$\sqrt{n}(Y_n - Y_0) \xrightarrow{d} Z, \tag{8.97}$$

其中 $Z \sim N_{\bar{p}}(0,\ \mathbf{W}_0)$。对于任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{p\times p}$，令 $V_\theta(X) = \mathrm{V}(\mathrm{X}\ \mathbf{\Sigma}(\theta))$，并且

$$g = \tilde{V}_{\bar{\theta}} \circ \mathrm{vech}^{-1},$$

其中 vech^{-1} 是 vech算子的逆。由 g 的定义和引理31可得

$$g(Y_n) = \tilde{V}_{\bar{\theta}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}) = \tilde{V}_n(\bar{\theta})$$

and

$$g(Y_0) = \tilde{V}_{\bar{\theta}}(\mathbf{\Sigma}_0) = \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}).$$

注意，对于 $i,\ j = 1,\ \cdots,\ p,\ \ g(y)_{ij}$ 在 $y = Y_0$ 处可微。因此，由德尔塔方法和（8.97）可知

$$\sqrt{n}(g(Y_n)_{ij} - g(Y_0)_{ij}) \xrightarrow{d} \partial_y g(Y_0)_{ij}^\top Z$$

对于 $i,\ j = 1,\ \cdots,\ p$，这意味着（8.95）。以类似的方式，可得（8.96）。 □

引理 *11* 的证明. $\mathbb{F}_n(\theta_n)$ 在 $\theta_n = \theta$ 处的泰勒展开为

$$\partial_\theta \mathbb{F}_n(\hat{\theta}_n) = \partial_\theta \mathbb{F}_n(\bar{\theta}) + \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\bar{\theta}}_n) d\lambda (\hat{\theta}_n - \bar{\theta}),$$

其中 $\theta_n = \theta + \lambda(\theta_n - \theta)$。根据 θ_n 的定义，得到

$$-\sqrt{n}\partial_\theta \mathbb{F}_n(\bar{\theta}) = \int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\bar{\theta}}_n) d\lambda \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta}). \tag{8.98}$$

且 $u_n = \mathrm{vech}\ \mathbb{Q}_{\mathbb{XX}} - \mathrm{vech}\ \mathbf{\Sigma}_0$ 且 $r = \mathrm{vech}\ \mathbf{\Sigma}_0 - \mathrm{vech}\ \mathbf{\Sigma}(\theta)$。注意，对于 $i = 1,\ \cdots,\ q$,

$$-\partial_{\theta^{(i)}} \mathbb{F}_n(\bar{\theta}) = 2\bar{\Delta}_i^\top V_n(\bar{\theta})(u_n + r) - (u_n + r)^\top \partial_{\theta^{(i)}} V_n(\bar{\theta})(u_n + r),$$

其中 $\Delta_i = \partial_{\theta^{(i)}} \mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}(\theta)$。有

$$\begin{aligned} -\partial_{\theta^{(i)}} \mathbb{F}_n(\bar{\theta}) = {} & 2\bar{\Delta}_i^\top \tilde{V}_n(\bar{\theta}) u_n + 2\bar{\Delta}_i^\top (\tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}))r + 2\bar{\Delta}_i^\top \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}) r \\ & - u_n^\top \partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) u_n - 2u_n^\top \partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) r \\ & - r^\top (\partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \partial_{\theta^{(i)}} \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}))r - r^\top \partial_{\theta^{(i)}} \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}) r. \end{aligned}$$

由于根据 θ 的定义可知即有

$$\partial_{\theta^{(i)}} \mathbb{U}(\bar{\theta}) = 2\bar{\Delta}_i^\top \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}) r - r^\top \partial_{\theta^{(i)}} \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}) r = 0,$$

定理1、引理34和引理 38 意味着

$$\begin{aligned} -\sqrt{n}\partial_{\theta^{(i)}} \mathbb{F}_n(\bar{\theta}) = {} & 2\bar{\Delta}_i^\top \tilde{V}_n(\bar{\theta}) \sqrt{n} u_n + 2\bar{\Delta}_i^\top \sqrt{n}(\tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}))r \\ & - u_n^\top \partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) \sqrt{n} u_n - 2\sqrt{n} u_n^\top \partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) r \\ & - r^\top \sqrt{n}(\partial_{\theta^{(i)}} \tilde{V}_n(\bar{\theta}) - \partial_{\theta^{(i)}} \bar{\mathbf{W}}(\bar{\theta}))r \\ = {} & O_p(1) \end{aligned} \tag{8.99}$$

在 H_1 条件下，对于 $i = 1,\ \cdots,\ q$。与定理2类似，由引理 36 可得

$$\int_0^1 \partial_\theta^2 \mathbb{F}_n(\ddot{\bar{\theta}}_n) d\lambda \xrightarrow{P} \partial_\theta^2 \mathbb{U}(\bar{\theta}) \tag{8.100}$$

在 H_1条件下。因此，由 (8.98)-(8.100) 和 [**F2**] 可知，在 H_1条件下，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \bar{\theta}) = O_p(1).$$ □

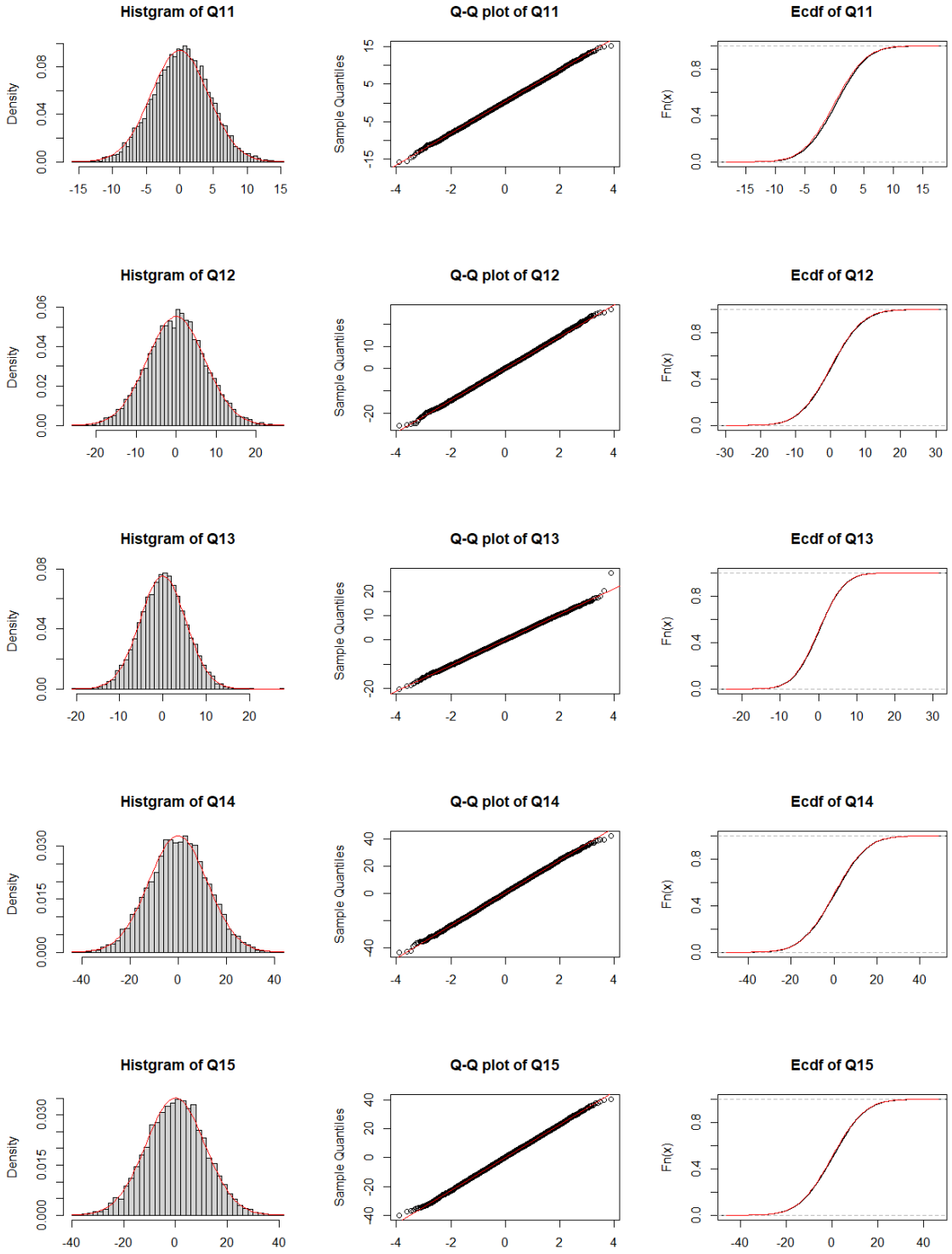
8.10. 遍历情形的模拟结果。设 $(n, h_n, T) = (10_6, 10^{-4}, 10_2)$。首先，我们考虑第5.2节中正确设定的参数模型。表 8、表 9 和 Table10 分别给出了 $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$、 θ_n 和 $\mathbb{T}_n$ 的样本均值和ˆ样本标准差。图12展示了 $\sqrt{n}((\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})^{ij} - (\mathbf{\Sigma}_0)^{ij})$在 $i \leq j$和 $i, j = 1, \cdots, 6$下的直方图、Q-Q 图和经验分布。图13展示了 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(i)} - \theta_0^{(i)})$在 $i = 1, \cdots, 15$下的直方图、Q-Q 图和经验分布。图14展示了检验统计量 $\mathbb{T}_n$的直方图、Q-Q 图和经验分布。从表 8–10 和图12–14来看，定理 5–7似乎适用于此例。–接下来，我们考虑第5.3节中设定错误的参数模型。表 11展示了模型A和模型B中拟似然比检验的拒绝次数。表 12展示了模型A和模型B中检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的四分位数，这表明定理 8适用于此例。

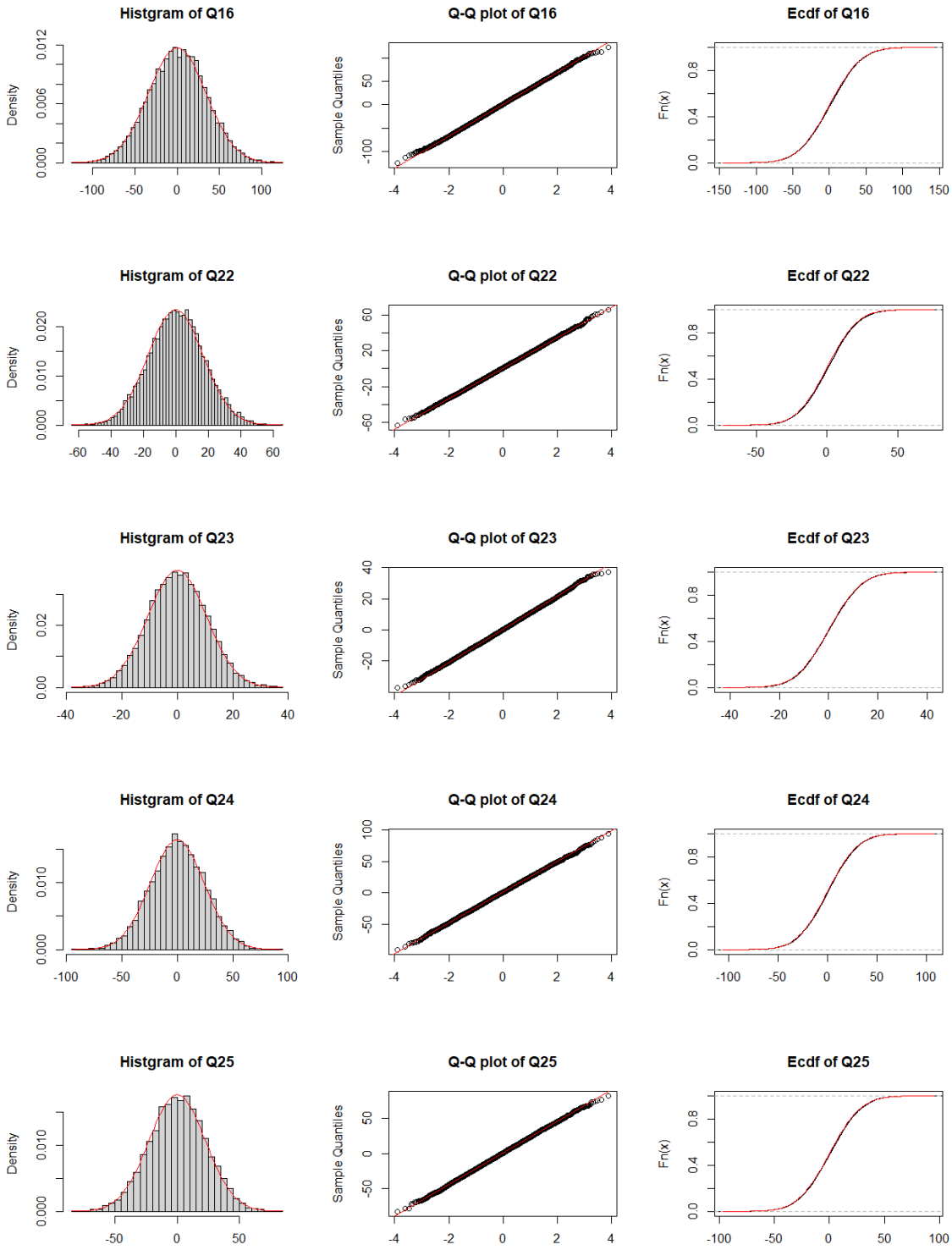
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{11}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{12}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{13}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{14}$
均值（真实值）	3.0003（3.0000）	4.0001 (4.0000)	2.0001（2.0000）	6.0002 (6.0000)
标准差（理论值）	0.0042 (0.0042)	0.0073 (0.0072)	0.0053 (0.0053)	0.0121 (0.0121)
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{15}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{16}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{22}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{23}$
均值（真实值）	6.0002（6.0000）	18.0008（18.0000）	12.0007（12.0000）	4.0002（4.0000）
标准差（理论值）	0.0114（0.0114）	0.0342（0.0341）	0.0171（0.0170）	0.0105（0.0106）
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{24}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{25}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{26}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{33}$
均值（真实值）	12.0006（12.0000）	12.0005（12.0000）	36.0017（36.0000）	8.0007（8.0000）
标准差（理论值）	0.0243（0.0242）	0.0227 (0.0227)	0.0680 (0.0681)	0.0113 (0.0113)
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{34}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{35}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{36}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{44}$
均值（真实值）	12.0002（12.0000）	10.0002（10.0000）	30.0006（30.0000）	37.0008（37.0000）
标准差（理论值）	0.0209（0.0210）	0.0186（0.0187）	0.0559 (0.0560)	0.0525 (0.0523)
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{45}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{46}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{55}$	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{56}$
均值（真实值）	30.0008 (30.0000)	90.0024 (90.0000)	31.0011 (31.0000)	90.0031 (90.0000)
标准差（理论值）	0.0453 (0.0452)	0.1364 (0.1357)	0.0439 (0.0438)	0.1298 (0.1294)
	$(\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{66}$			
均值（真实值）	279.0107 (279.0000)			
标准差（理论值）	0.3965 (0.3946)			

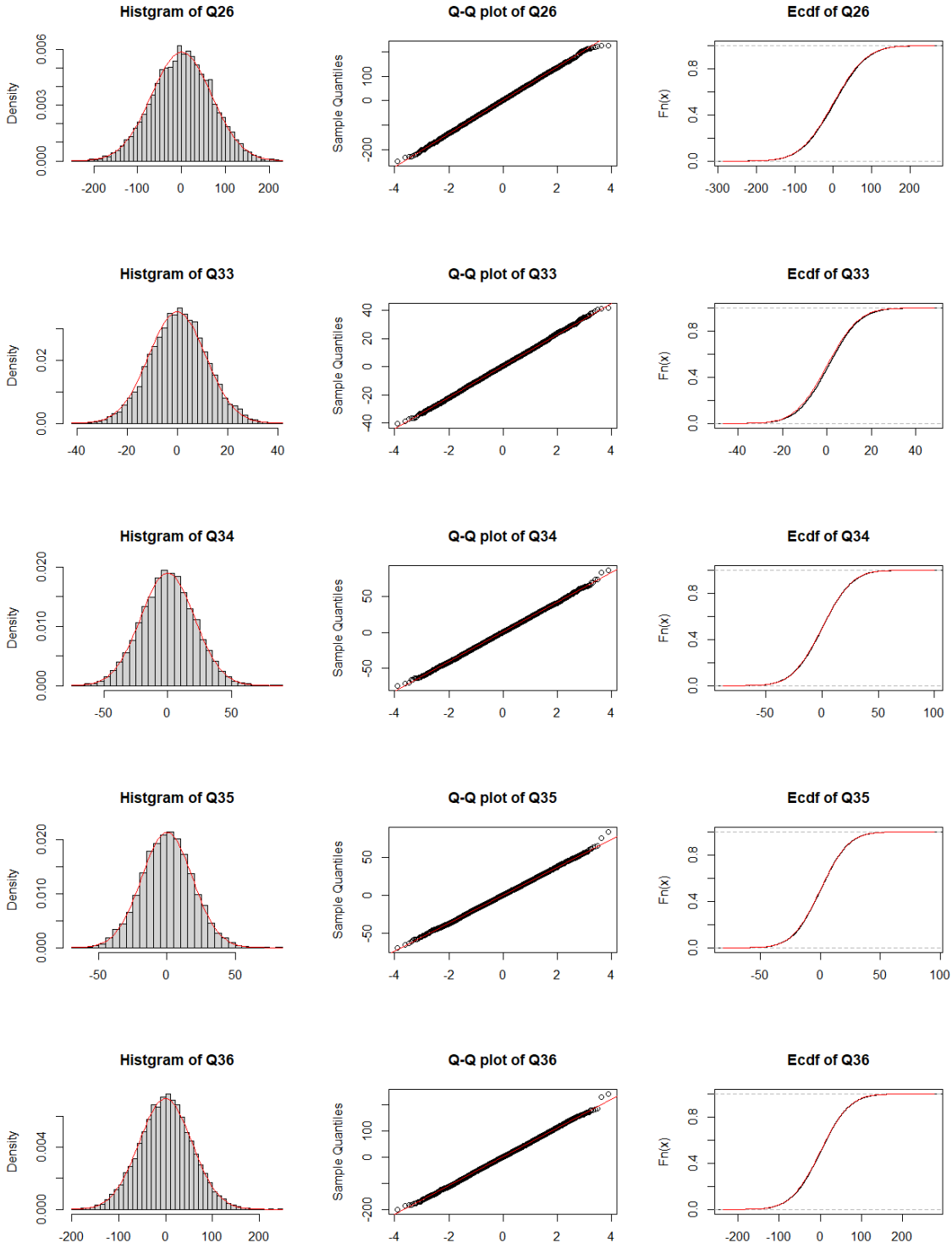
TABLE 8. $\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$的样本均值和样本标准差（标准差）。

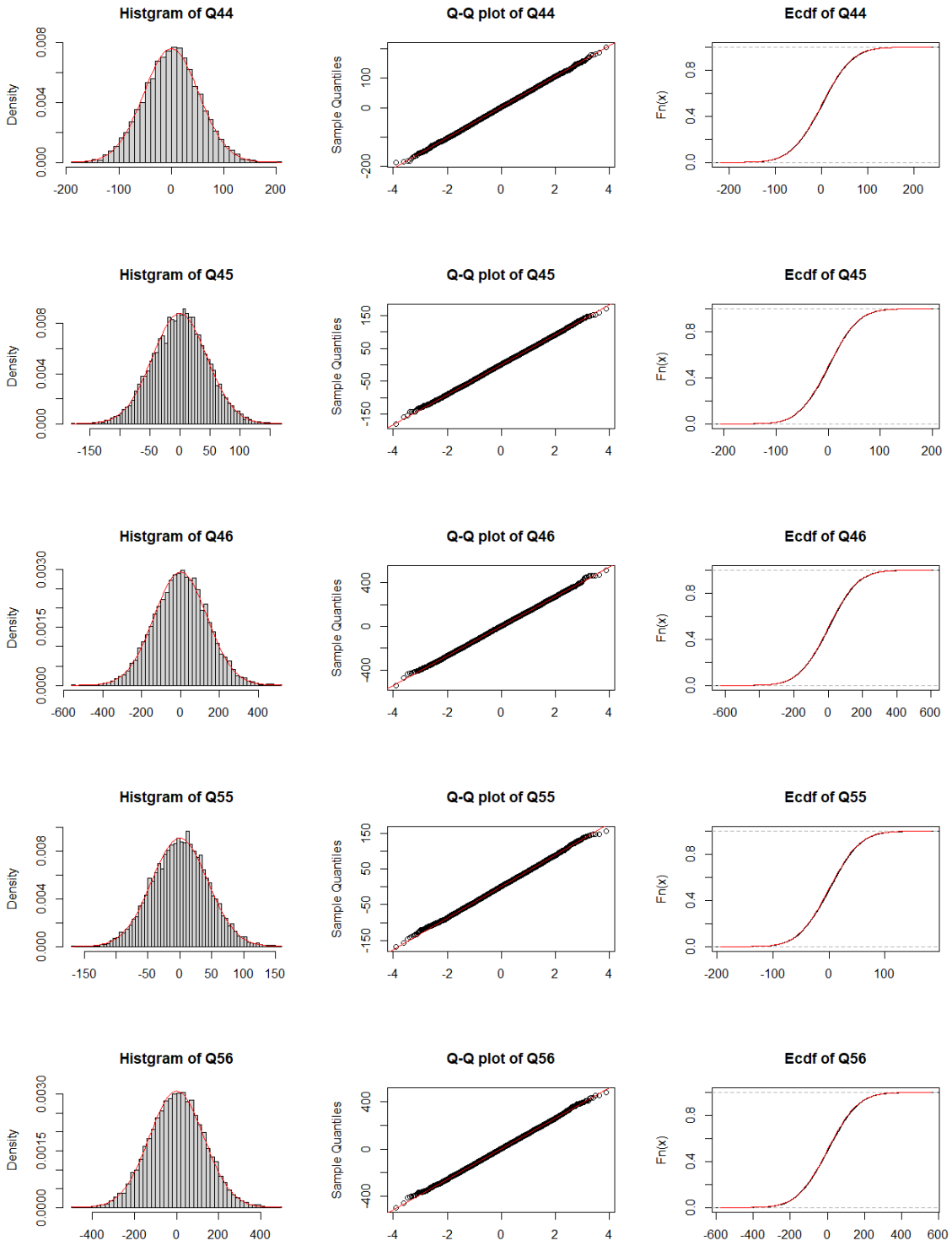
	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(2)}$	$\hat{\theta}_n^{(3)}$	$\hat{\theta}_n^{(4)}$
均值（真实值）	2.0000 (2.0000)	3.0000 (3.0000)	3.0000 (3.0000)	1.0000 (1.0000)
标准差（理论值）	0.0026 (0.0026)	0.0033 (0.0034)	0.0009 (0.0008)	0.0036 (0.0036)
	$\hat{\theta}_n^{(5)}$	$\hat{\theta}_n^{(6)}$	$\hat{\theta}_n^{(7)}$	$\hat{\theta}_n^{(8)}$
均值（真实值）	2.0000（2.0000）	2.0001（2.0000）	2.0000（2.0000）	4.0001（4.0000）
标准差（理论值）	0.0030 (0.0030)	0.0044 (0.0044)	0.0045 (0.0046)	0.0100 (0.0100)
	$\hat{\theta}_n^{(9)}$	$\hat{\theta}_n^{(10)}$	$\hat{\theta}_n^{(11)}$	$\hat{\theta}_n^{(12)}$
均值（真实值）	1.0002 (1.0000)	4.0004 (4.0000)	4.0006 (4.0000)	0.9999 (1.0000)
标准差（理论值）	0.0024 (0.0024)	0.0095 (0.0096)	0.0059 (0.0060)	0.0181 (0.0182)
	$\hat{\theta}_n^{(13)}$	$\hat{\theta}_n^{(14)}$	$\hat{\theta}_n^{(15)}$	
均值（真实值）	1.0001 (1.0000)	9.0013 (9.0000)	4.0002 (4.0000)	
标准差（理论值）	0.0038 (0.0038)	0.0342 (0.0343)	0.0110 (0.0109)	

TABLE 9. $\hat{\theta}_n$ 的样本均值和样本标准差（标准差）。


Histgram of Q11
Density
Q-Q plot of Q11
Sample Quantiles
Ecdf of Q11
Fn(x)
Histgram of Q12
Density
Q-Q plot of Q12
Sample Quantiles
Ecdf of Q12
Fn(x)
Histgram of Q13
Density
Q-Q plot of Q13
Sample Quantiles
Ecdf of Q13
Fn(x)
Histgram of Q14
Density
Q-Q plot of Q14
Sample Quantiles
Ecdf of Q14
Fn(x)
Histgram of Q15
Density
Q-Q plot of Q15
Sample Quantiles
Ecdf of Q15
Fn(x)


Histgram of Q16
Density
Q-Q plot of Q16
Sample Quantiles
Ecdf of Q16
Fn(x)
Histgram of Q22
Density
Q-Q plot of Q22
Sample Quantiles
Ecdf of Q22
Fn(x)
Histgram of Q23
Density
Q-Q plot of Q23
Sample Quantiles
Ecdf of Q23
Fn(x)
Histgram of Q24
Density
Q-Q plot of Q24
Sample Quantiles
Ecdf of Q24
Fn(x)
Histgram of Q25
Density
Q-Q plot of Q25
Sample Quantiles
Ecdf of Q25
Fn(x)


Histgram of Q26
Density
Q-Q plot of Q26
Sample Quantiles
Ecdf of Q26
Fn(x)
Histgram of Q33
Density
Q-Q plot of Q33
Sample Quantiles
Ecdf of Q33
Fn(x)
Histgram of Q34
Density
Q-Q plot of Q34
Sample Quantiles
Ecdf of Q34
Fn(x)
Histgram of Q35
Density
Q-Q plot of Q35
Sample Quantiles
Ecdf of Q35
Fn(x)
Histgram of Q36
Density
Q-Q plot of Q36
Sample Quantiles
Ecdf of Q36
Fn(x)


Histgram of Q44
Density
Q-Q plot of Q44
Sample Quantiles
Ecdf of Q44
Fn(x)
Histgram of Q45
Density
Q-Q plot of Q45
Sample Quantiles
Ecdf of Q45
Fn(x)
Histgram of Q46
Density
Q-Q plot of Q46
Sample Quantiles
Ecdf of Q46
Fn(x)
Histgram of Q55
Density
Q-Q plot of Q55
Sample Quantiles
Ecdf of Q55
Fn(x)
Histgram of Q56
Density
Q-Q plot of Q56
Sample Quantiles
Ecdf of Q56
Fn(x)

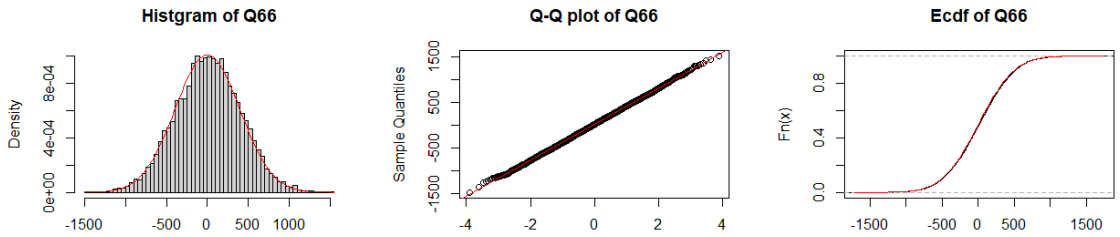
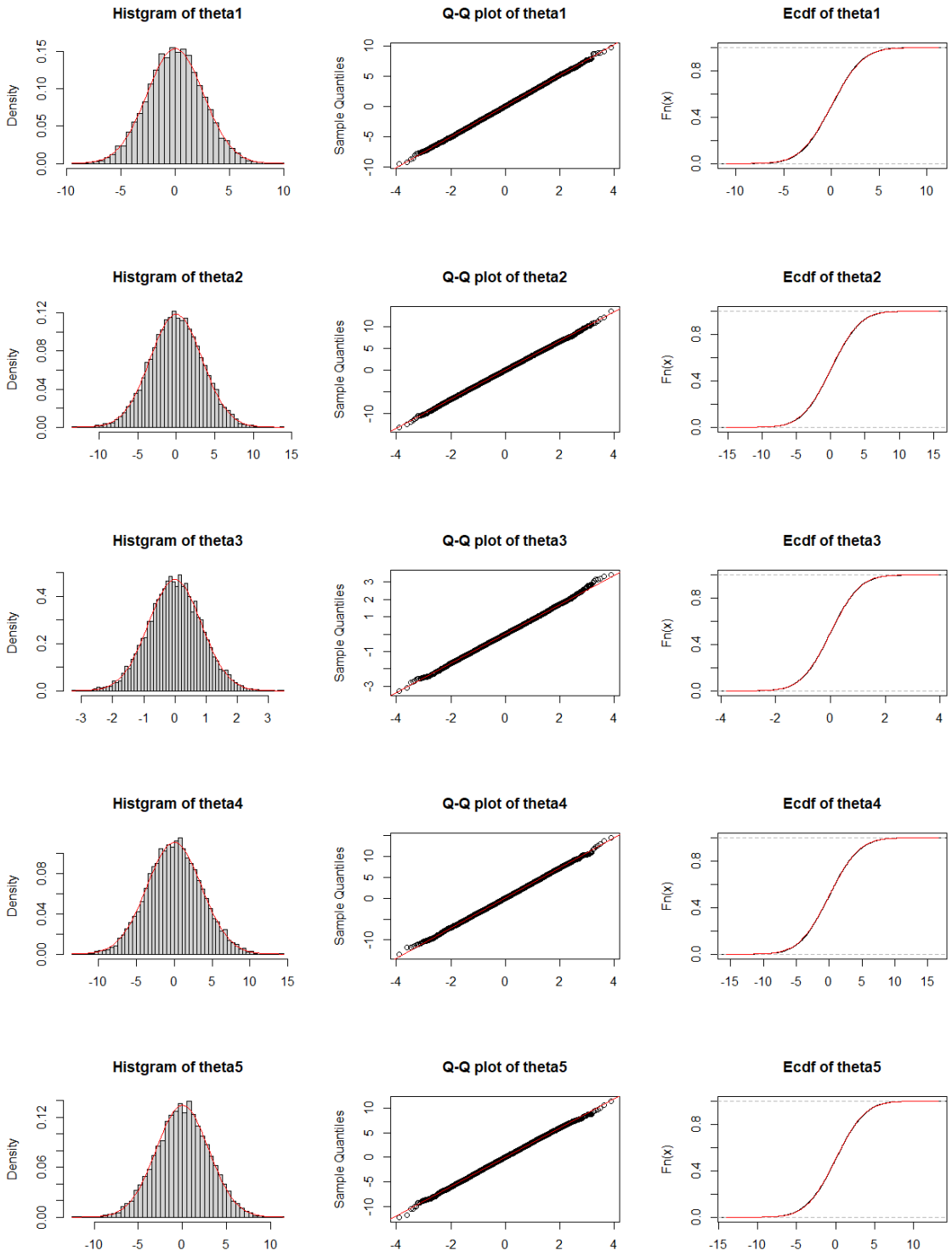
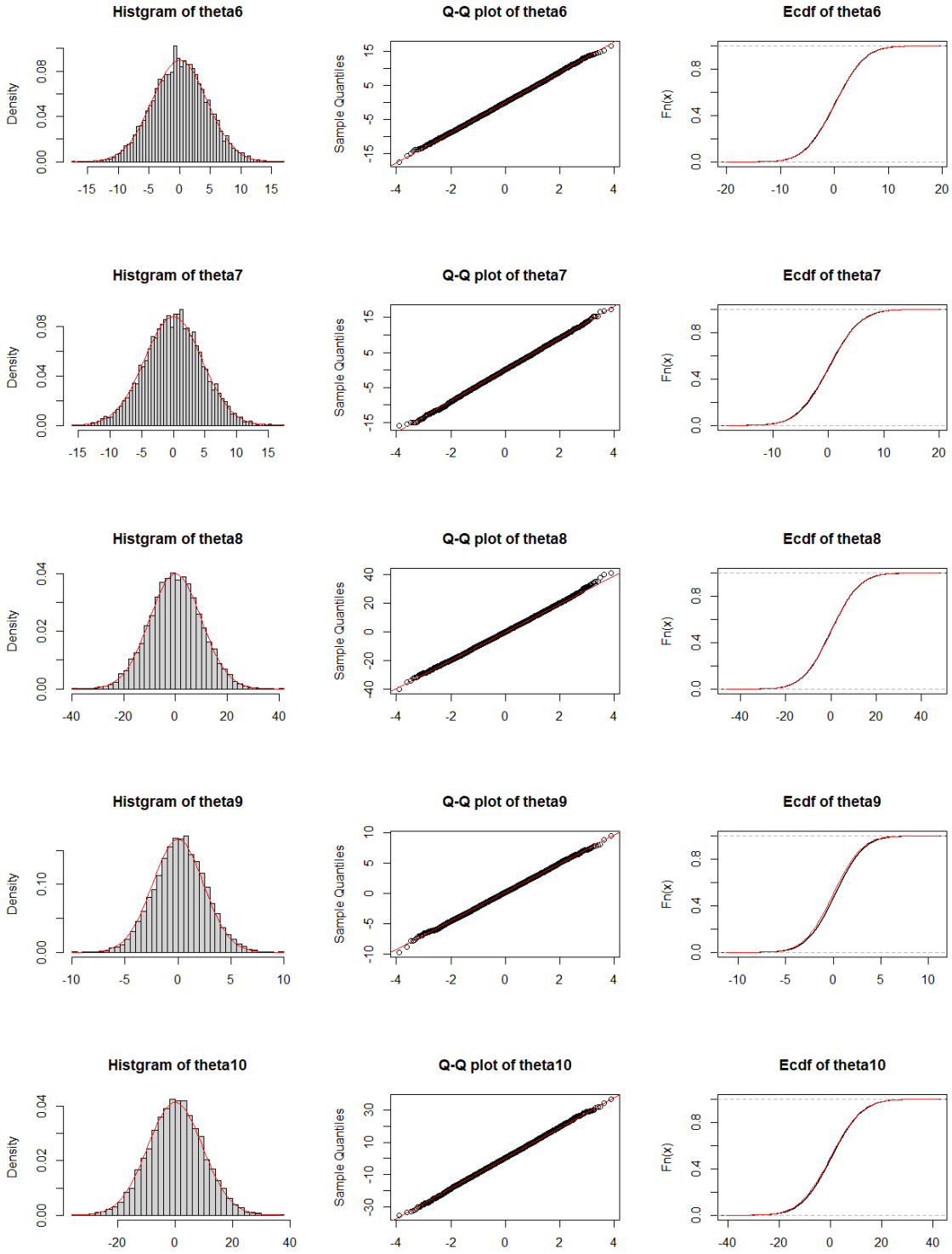


FIGURE 12. $\sqrt{n}$（$\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}}$）$_{ij}$ $^{-}$（$\mathbf{\Sigma}_0$）$_{ij}$的直方图（左）、Q-Q 图（中）和经验分布（右），对应于 $i \leq j$和 $i, j = 1, \cdots, 6$。红线为理论曲线。


Histgram of theta1
Density
Q-Q plot of theta1
Sample Quantiles
Ecdf of theta1
Fn(x)
Histgram of theta2
Density
Q-Q plot of theta2
Sample Quantiles
Ecdf of theta2
Fn(x)
Histgram of theta3
Density
Q-Q plot of theta3
Sample Quantiles
Ecdf of theta3
Fn(x)
Histgram of theta4
Density
Q-Q plot of theta4
Sample Quantiles
Ecdf of theta4
Fn(x)
Histgram of theta5
Density
Q-Q plot of theta5
Sample Quantiles
Ecdf of theta5
Fn(x)


Histgram of theta6
Density
Q-Q plot of theta6
Sample Quantiles
Ecdf of theta6
Fn(x)
Histgram of theta7
Density
Q-Q plot of theta7
Sample Quantiles
Ecdf of theta7
Fn(x)
Histgram of theta8
Density
Q-Q plot of theta8
Sample Quantiles
Ecdf of theta8
Fn(x)
Histgram of theta9
Density
Q-Q plot of theta9
Sample Quantiles
Ecdf of theta9
Fn(x)
Histgram of theta10
Density
Q-Q plot of theta10
Sample Quantiles
Ecdf of theta10
Fn(x)

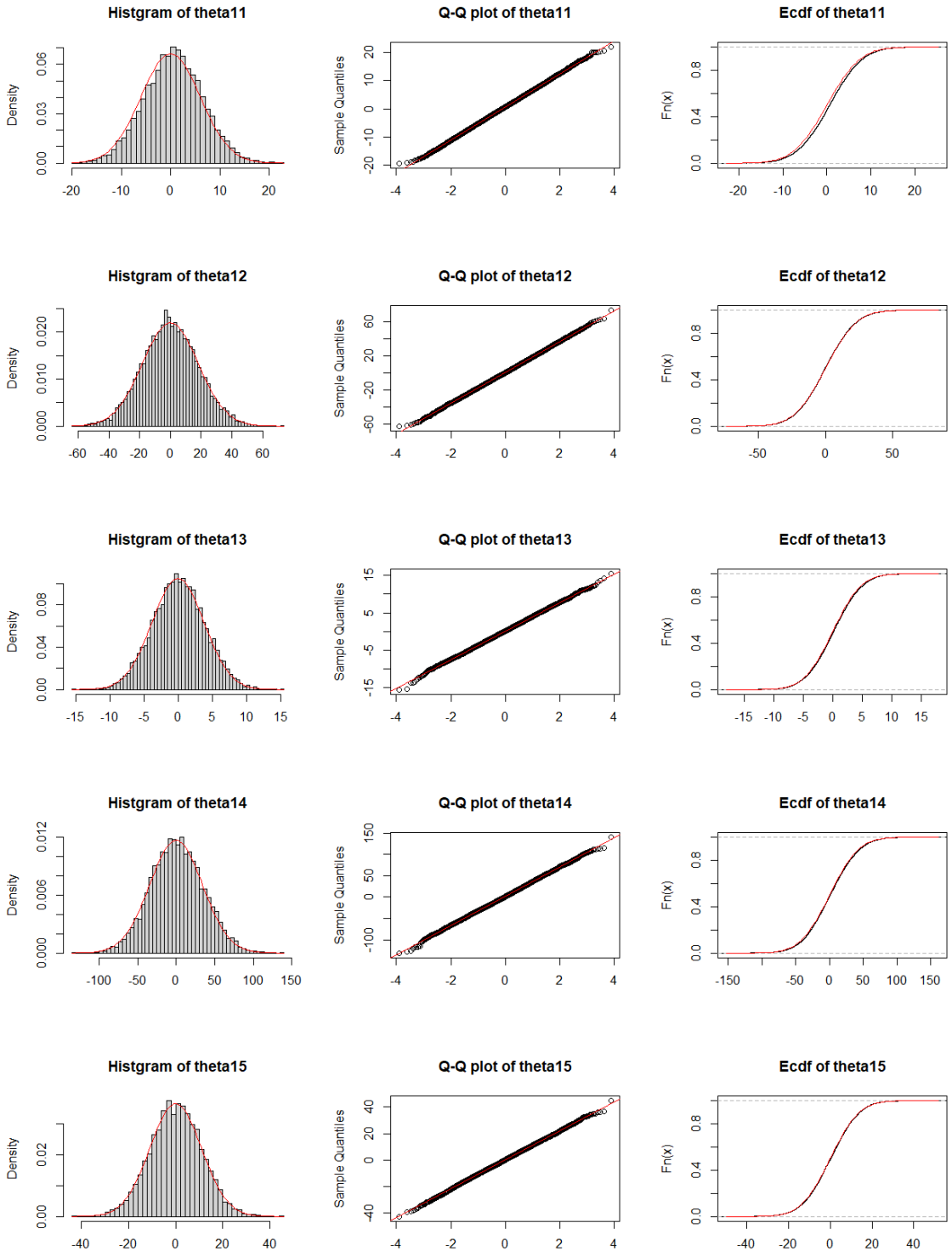


FIGURE 13. 直方图（左）、Q-Q 图（中）和 $i = 1$的经验分布（右），其中$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(i)} - \theta_0^{(i)})$ $\cdots$, $\cdots$, 15。红线表示理论曲线。

均值（真实值）	5.999 (6.000)
SD （理论值）	3.449 (3.464)

TABLE 10. 检验统计量的样本均值和样本标准差（SD） $\mathbb{T}_n$。

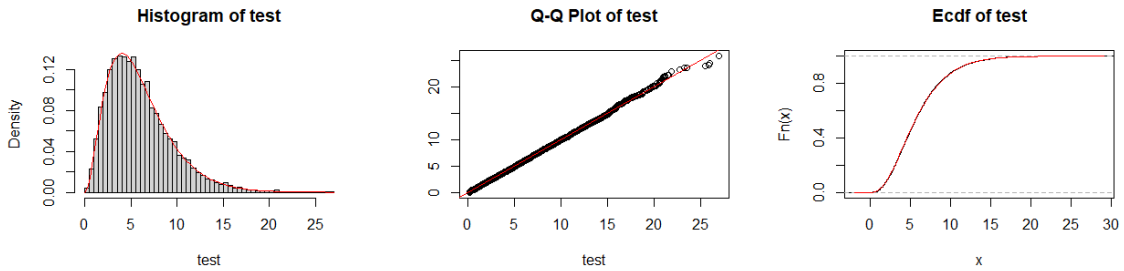


FIGURE 14. 检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的直方图（左）、Q-Q图（中）和经验分布（右）。红线为理论曲线。

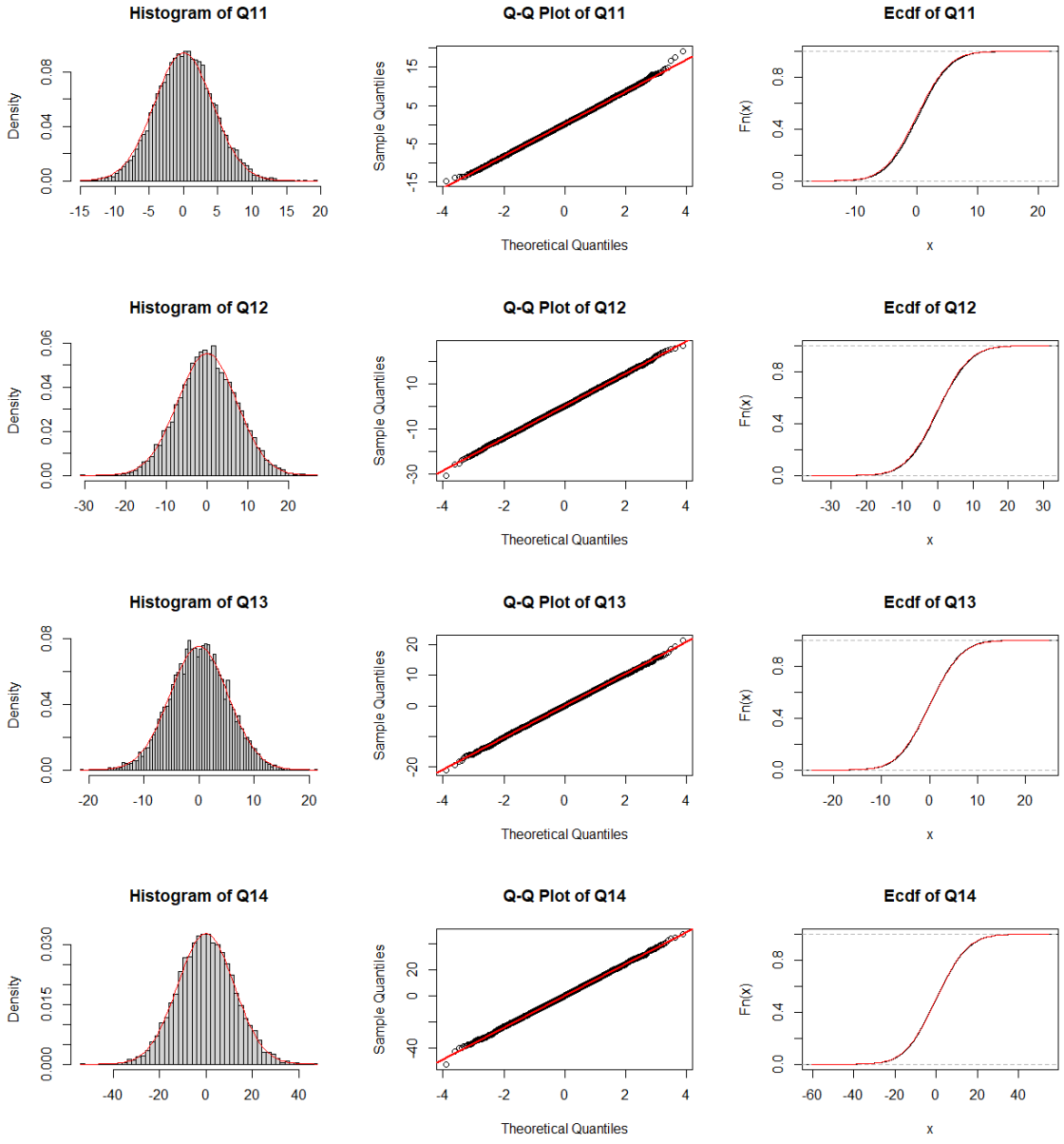
模型A	10000
模型B	10000

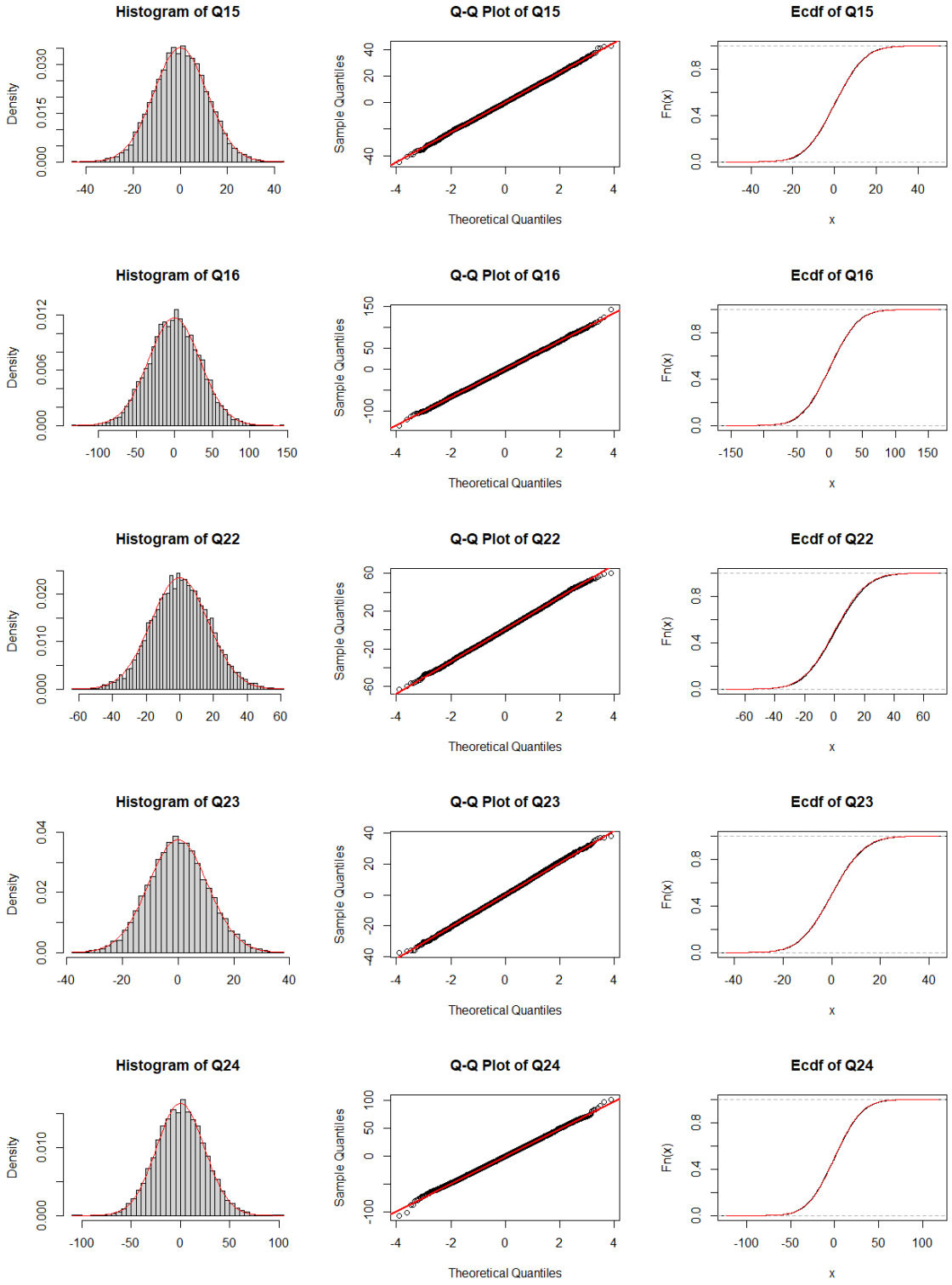
TABLE 11. 模型A和模型B中拟似然比检验的拒绝次数 .

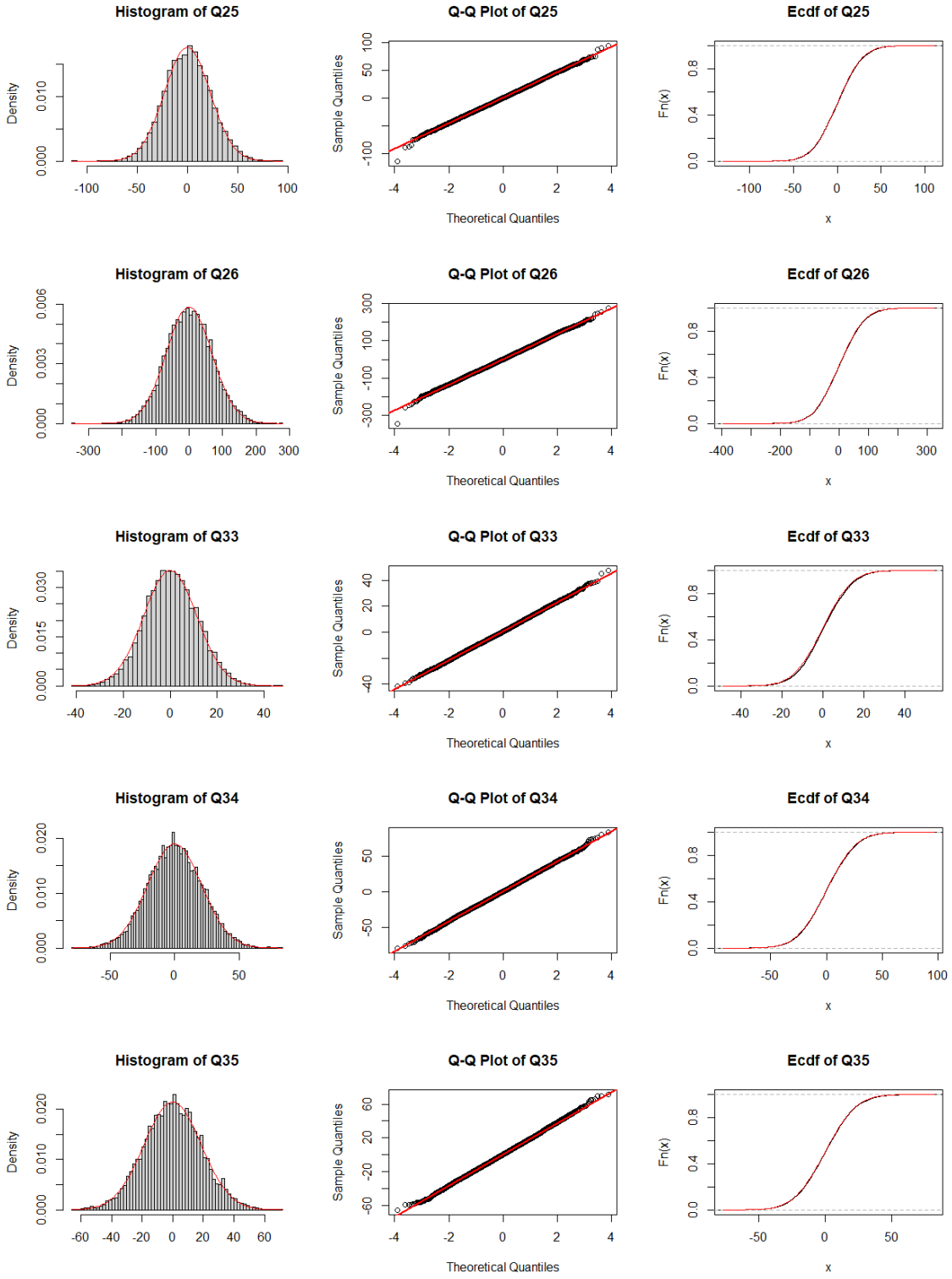
	Min	$Q1$	中位数	$Q3$	Max
模型A	274634	277845	278548	279250	282330
模型B	208785	211270	211870	212435	215120

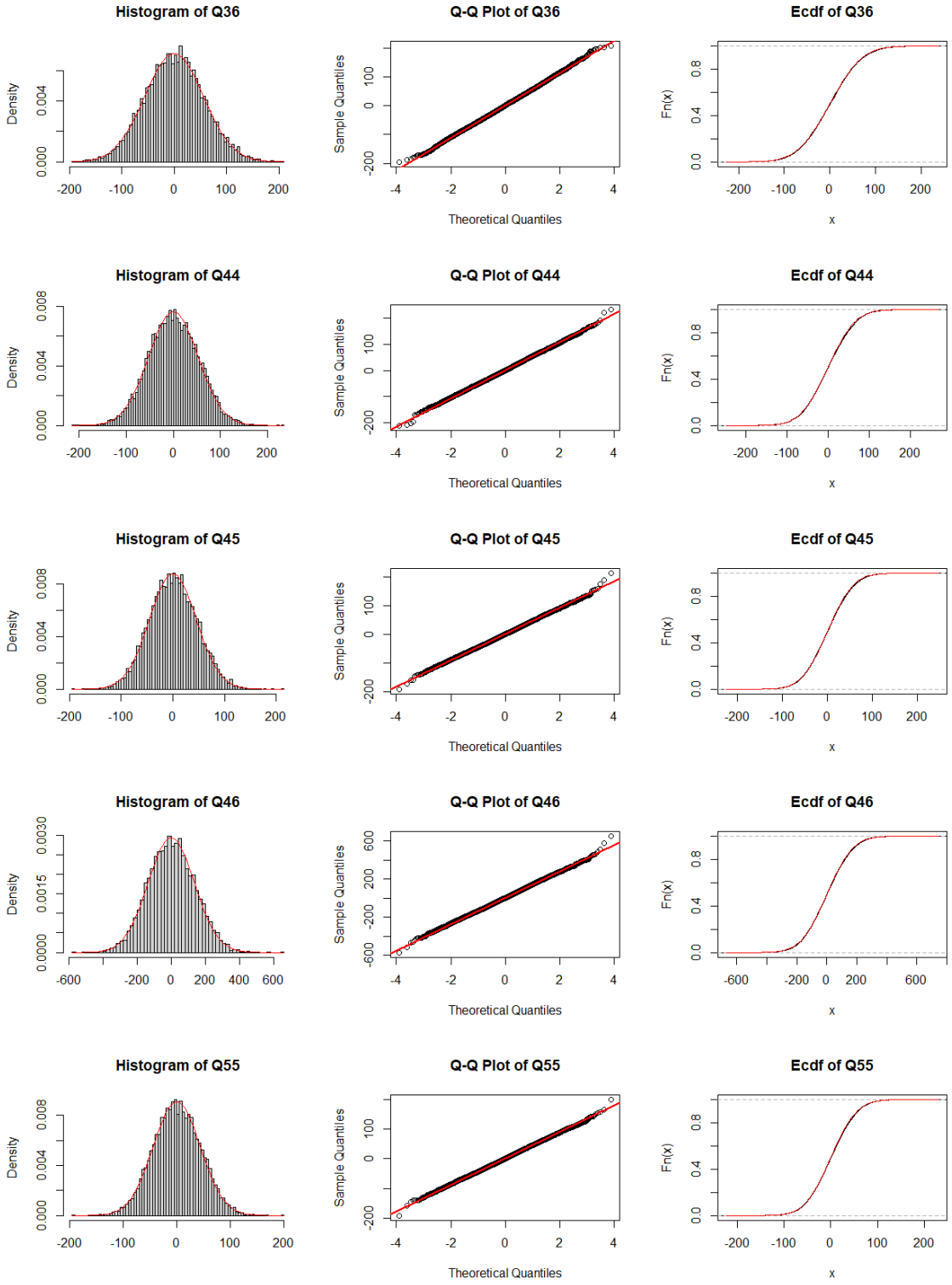
TABLE 12. 模型A和模型B中检验统计量 $\mathbb{T}_n$ 的四分位数。

8.11. 第5节模拟结果的详细信息。图15展示了 $i \leq j$ and $i,j = 1,\cdots,6$ 时 $\sqrt{n}((\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{ij} - (\mathbf{\Sigma}_0)_{ij})$ 的直方图、Q-Q 图和经验分布。图16展示了 $i = 1,\cdots,15$ 时 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(i)} - \theta_0^{(i)})$ 的直方图、Q-Q 图和经验分布。




Histogram of Q15
Density
Q-Q Plot of Q15
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q15
Fn(x)
x
Histogram of Q16
Density
Q-Q Plot of Q16
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q16
Fn(x)
x
Histogram of Q22
Density
Q-Q Plot of Q22
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q22
Fn(x)
x
Histogram of Q23
Density
Q-Q Plot of Q23
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q23
Fn(x)
x
Histogram of Q24
Density
Q-Q Plot of Q24
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q24
Fn(x)
x


Histogram of Q25
Density
Q-Q Plot of Q25
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q25
Fn(x)
x
Histogram of Q26
Density
Q-Q Plot of Q26
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q26
Fn(x)
x
Histogram of Q33
Density
Q-Q Plot of Q33
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q33
Fn(x)
x
Histogram of Q34
Density
Q-Q Plot of Q34
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q34
Fn(x)
x
Histogram of Q35
Density
Q-Q Plot of Q35
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q35
Fn(x)
x


Histogram of Q36
Density
Q-Q Plot of Q36
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q36
Fn(x)
x
Histogram of Q44
Density
Q-Q Plot of Q44
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q44
Fn(x)
x
Histogram of Q45
Density
Q-Q Plot of Q45
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q45
Fn(x)
x
Histogram of Q46
Density
Q-Q Plot of Q46
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q46
Fn(x)
x
Histogram of Q55
Density
Q-Q Plot of Q55
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of Q55
Fn(x)
x

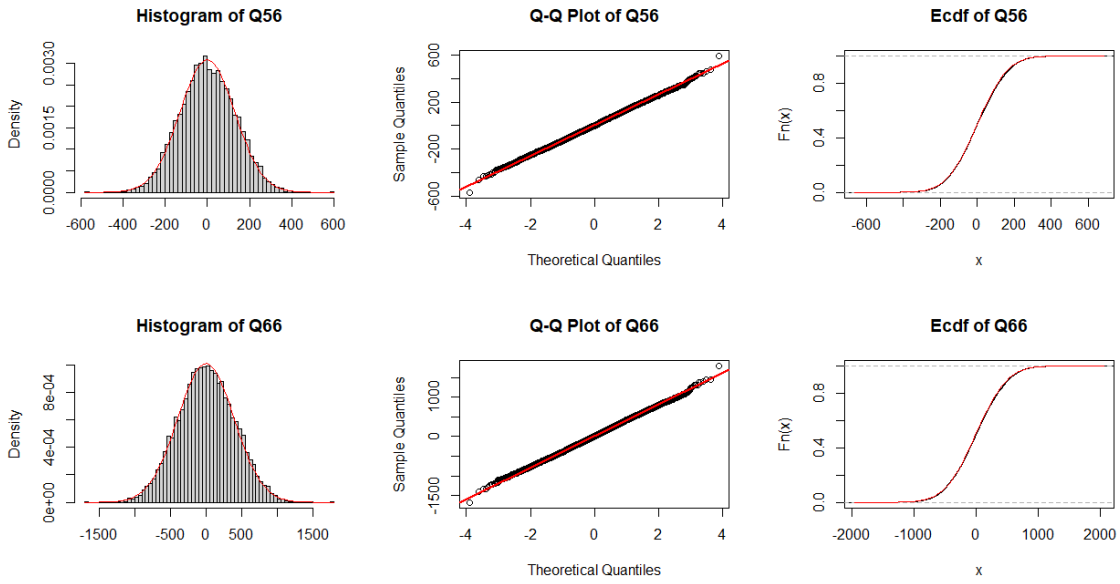
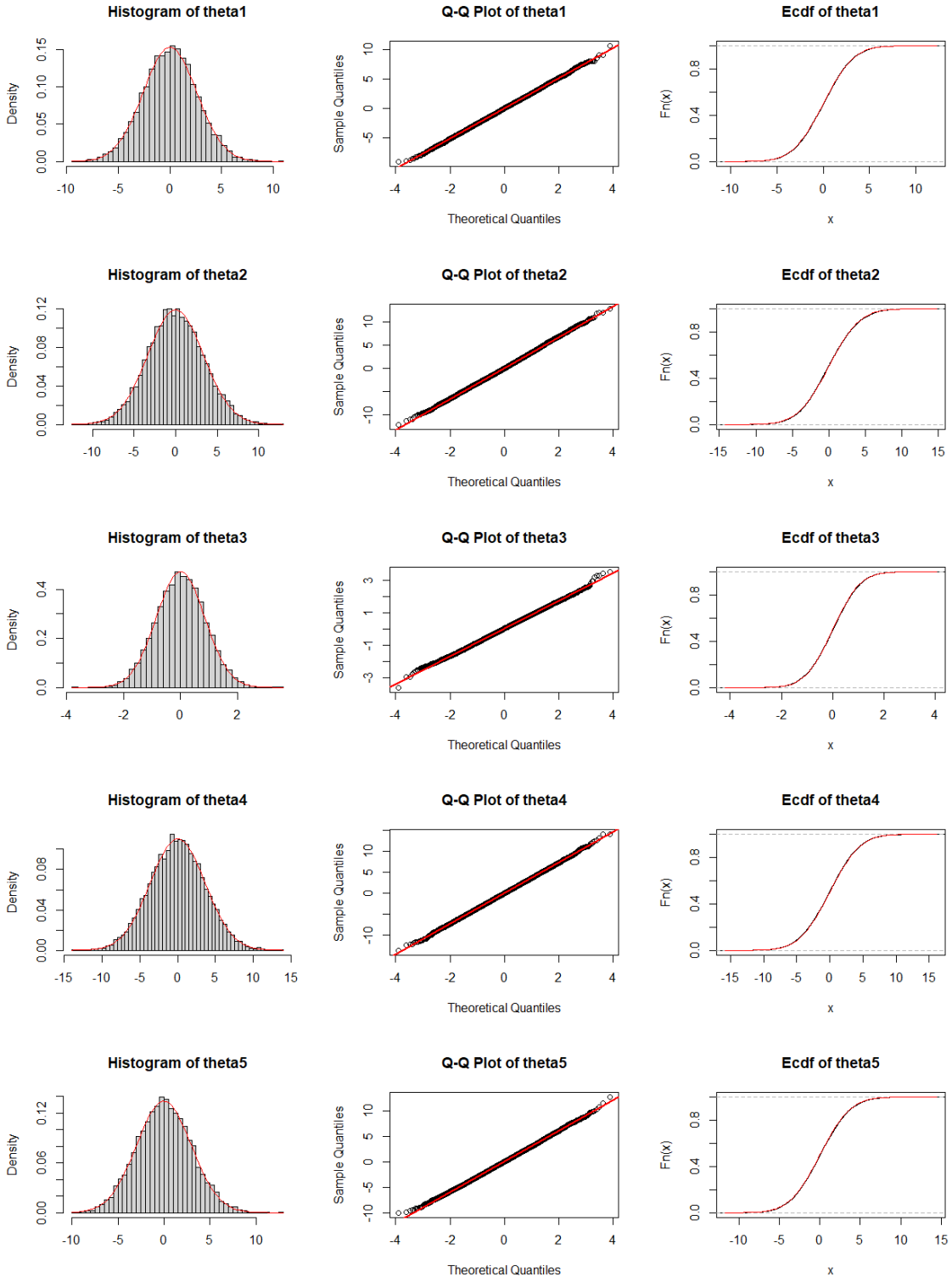
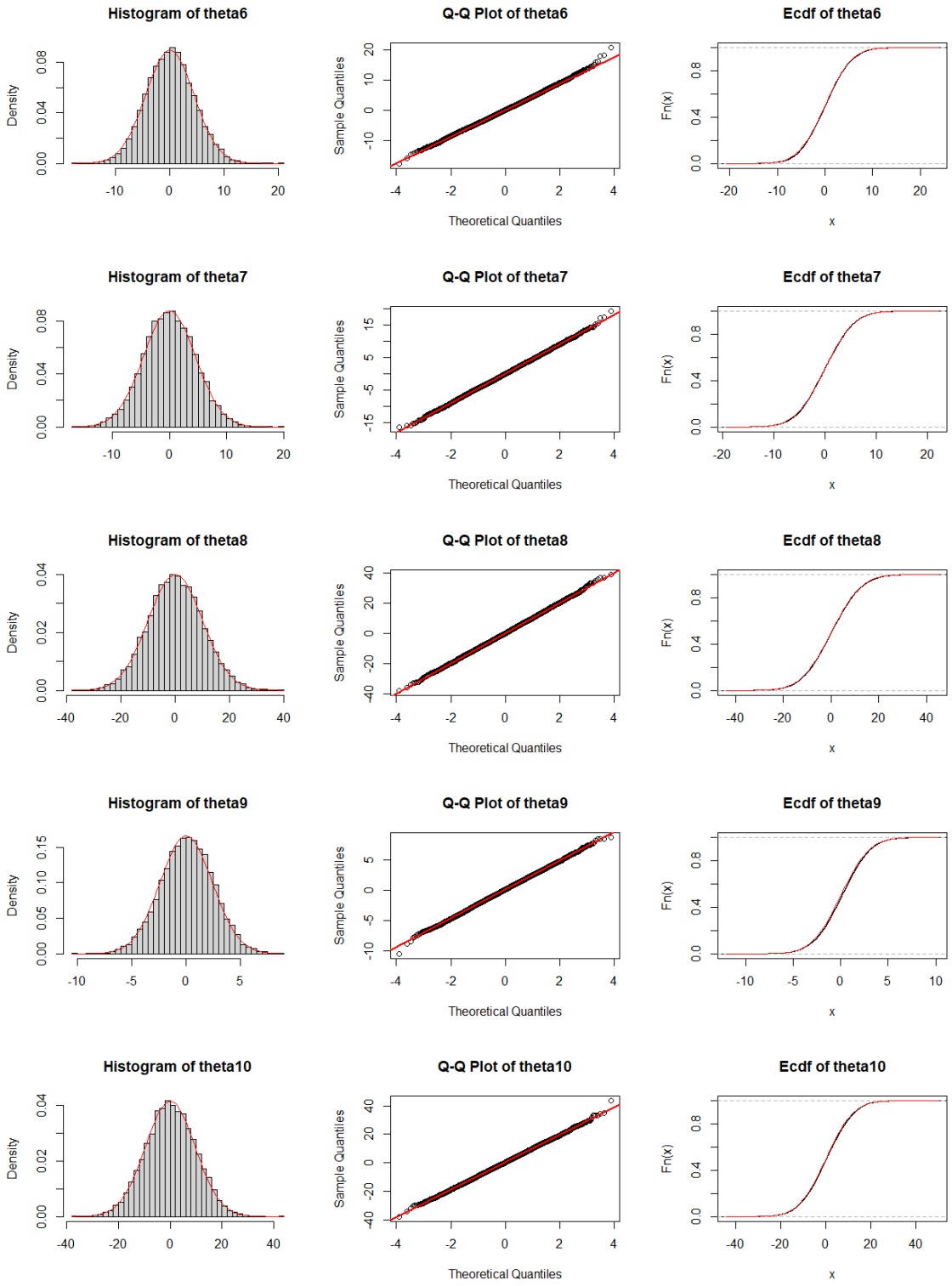


FIGURE 15. 直方图（左）、Q-Q 图（中）和$\sqrt{n}((\mathbb{Q}_{\mathbb{XX}})_{ij} - (\mathbf{\Sigma}_0)_{ij})$的经验分布（右），对应 $i \leq j$ 和 $\bar{i}$，$j = 1, \cdots, 6$。红线为理论曲线。


Histogram of theta1
Density
Q-Q Plot of theta1
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta1
Fn(x)
x
Histogram of theta2
Density
Q-Q Plot of theta2
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta2
Fn(x)
x
Histogram of theta3
Density
Q-Q Plot of theta3
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta3
Fn(x)
x
Histogram of theta4
Density
Q-Q Plot of theta4
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta4
Fn(x)
x
Histogram of theta5
Density
Q-Q Plot of theta5
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta5
Fn(x)
x


Histogram of theta6
Density
Q-Q Plot of theta6
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta6
Fn(x)
x
Histogram of theta7
Density
Q-Q Plot of theta7
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta7
Fn(x)
x
Histogram of theta8
Density
Q-Q Plot of theta8
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta8
Fn(x)
x
Histogram of theta9
Density
Q-Q Plot of theta9
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta9
Fn(x)
x
Histogram of theta10
Density
Q-Q Plot of theta10
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Ecdf of theta10
Fn(x)
x

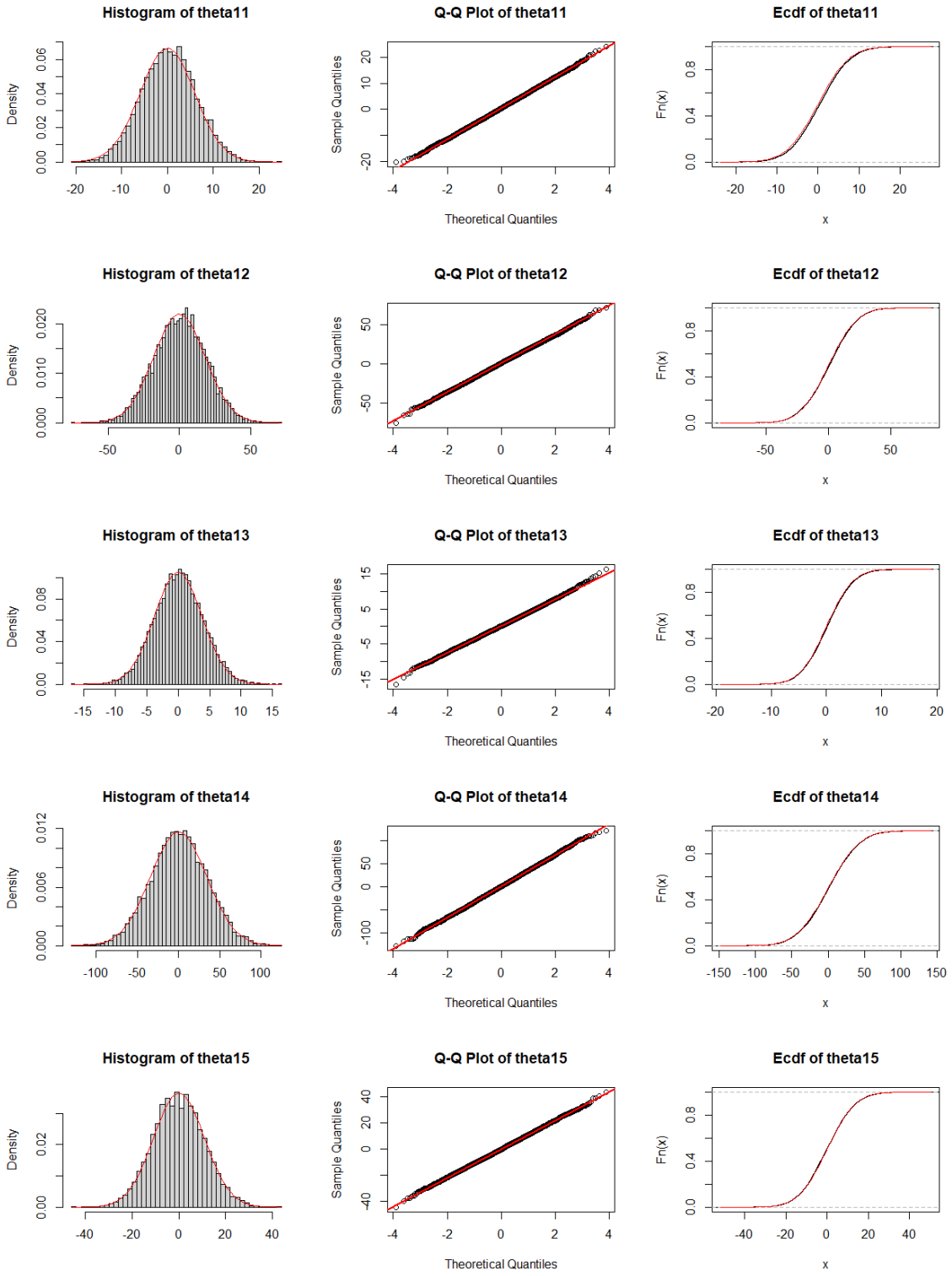


FIGURE 16. $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(i)} - \theta_0^{(i)})$ 的直方图（左）、Q-Q 图（中）和经验分布（右），对应 $i = 1, \cdots, 15$。红线表示理论曲线。