双参数变形 Virasoro 代数的中间系列模 [1]

周文、程永生河南大学数学与统计学院，中国开封 475004

arXiv:2305.02658v1 [math.RT] 4 May 2023

摘要：本文构造了一类双参数变形 Virasoro 代数的 Harish-Chandra 模，并对中间系列的不可分解 Harish-Chandra 模进行了分类。

关键词：双参数变形 Virasoro 代数；中间系列模；不可分解 Harish-Chandra 模。

§1. 引言

近年来，数学领域最前沿的趋势之一是如何对所有 Harish-Chandra 模进行分类，尤其是与维拉索罗代数相关的一些李代数。

在 [1], ，Kaplansky 于 1982 年研究了无中心维拉索罗代数的一类 Harish-Chandra 模，并于 1985 年对维拉索罗代数的所有不可分解 Harish-Chandra 模进行了分类（见 [2]）。K. Liu 于 1995 年给出了 Hom 型维拉索罗代数（无中心，q 不是单位根）的一类 Harish-Chandra 模，并对其所有不可分解 Harish-Chandra 模进行了分类（见 [6]）。Z. Zhang、G. Zhang 和 Y. Jia 构造了双参数变形维拉索罗代数的一类重数为 ≤ 1 的 Harish-Chandra 模，并证明了一个分类定理（见 [7]）。在 [4], ，J. Li 和 Y. Su 证明了 Schr¨odinger-Virasoro 代数上具有有限维权空间的不可约权模是最高/最低权模或一致有界模。此外，这些代数上的中间系列不可分解模也得到了完整确定。K. Zhao 和 R. Lv 对扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的所有 Harish-Chandra 模进行了分类，但计算过于复杂，计算量也过大（见 [5]）。在 [3]„ D. Liu 提出了一种统一方法，对若干与维拉索罗代数相关的李代数上的 Harish-Chandra 模进行了全面分类。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾 $V_{p,q}$ 的一些基本定义。在第 3 节中，我们给出一类双参数变形 Virasoro 代数的 Harish-Chandra 模，并证明一个分类定理。此外，我们对双参数变形 Virasoro 代数的不可分解 Harish-Chandra 模进行分类。特别地，在计算分类定理之后，我们发现本文中的量子整数与 [7] 替换后的结果一致。

[1]本研究得到国家自然科学基金（项目编号：11047030 和 11771122）的资助。

§2. 记号与预备知识

在 [8], E. Olivier 等人提出了 Hom-Lie 代数的定义 $V_{p,\ q}$。

定理 2.1 [8] 双参数变形 Virasoro 代数 $V_{p,q} = (\hat{L}, \hat{\alpha})$，其中 $\hat{L}$ 的基为$\{L_n, C | n \in \mathbb{Z}\}$，括号关系如下:

$$[L_n, L_m] := (\frac{[n]}{p^n} - \frac{[m]}{p^m})L_{n+m} + \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6(1+(q/p)^n)}\frac{[n-1]}{p^{n-1}}\frac{[n]}{p^n}\frac{[n+1]}{p^{n+1}}C,$$

$$[\hat{L}, C] := 0,$$

$\hat{}\ \hat{}\ \hat{}$ 以及 $\hat{\alpha}$: $L \longrightarrow L$ 是由以下方式定义的 L 的自同态

$$\hat{\alpha}(L_n) = ((1+(q/p)^n))L_n,\ \hat{\alpha}(C) = C.$$

我们回顾一下模的定义。

D定义 2.2 若存在一个映射，则称向量空间 **M** 为 $V_{p,q}$-模 :

$$V_{p,q} \times M \to M$$

$$(X, v) \mapsto Xv\ (\forall X \in V_{p,q}, v \in M)$$

使得

$$(p^{-n}q^n L_n L_m - p^{-m}q^m L_m L_n)v = (\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n})L_{m+n}v,\ (\forall m, n \in \mathbb{Z})$$

其中量子整数

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}.$$

如果满足 $M = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda$ where $M_\lambda = \{v \in M | L_0 v = \lambda v\}$，则称 $V_{p,q}$-模 **M** 为 Harish-Chandra 模。

定理 2.3 [7] $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$，我们按如下方式构造一个 $V_{p,q}$-模 $M_{a,b}$:

$$M_{a,b} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_k,$$

$$L_n(v_k) = (p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k - bp^{-k-n}q^k[n]_{p,q})v_{k+n}.\ (\forall n, k \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

直接计算可验证，$M_{a,b}$是一个$V_{p,q}$-模。显然，$M_{a,b}^{\lambda} = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_{a,b}^{\lambda}$，其中$M_{a,b}^{\lambda} = \{v \in M_{a,b} | L_0 v = \lambda v\}$。若$dim M_{a,b}^{\lambda} > 0$，则称 λ为一个权；$dim M_{a,b}^{\lambda}$称为 λ 的重数，记作 $mult\lambda$。我们将$M_{a,b}$ 的权集记为 $P(M_{a,b})$。显然，对于所有满足 $a \neq -\frac{1}{p-q}$的 $k \in \mathbb{Z}$，$P(M_{a,b}) = \{p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k | k \in \mathbb{Z}\}$，且 $mult(p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k) = 1$。

§3. V_p的中间系列模，$_q$

本节中，我们给出关于$M_{a的b}$的一些基本命题，随后研究双参数变形 Virasoro 代数$V_{p的q}$的中间系列模。

命题 3.1 设 $a \neq -\frac{1}{p-q}$，则 $M_{a,\ b} \simeq M_{a',\ b'}$ 当且仅当 $a = -p^{-m}[m]_{p,\ q} + p^{-m}q^m a'$、$b = p^{-m}q^m b'$ 对某个 $m \in \mathbb{Z}$。

证明。设 $M_{a,b} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_i$, $M_{a',b'} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_i'$.

令 ϕ 为 t 从 $M_{a,b}$ 到 $M_{a',b'}$ 的同构。由 $P(M_{a,b}) = P(M_{a',b'})$ 可得，：

$$p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k = p^{-k'}[k']_{p,q} - a'p^{-k'}q^{k'},$$

then

$$a = p^{k-k'}\frac{q^{k-k'}}{p^{k'-k}} + p^{k-k'}q^{k'-k}a',$$

令 $k' - k = m$，我们得到

$$a = -p^{-m}[m]_{p,q} + p^{-m}q^m a'$$

对于某个 $m \in \mathbb{Z}$。由 $\phi(L_n v_k) = L_n(\phi(v_k))$，可知：$b = p^{-m}q^m b'$。

定义映射 $\phi : M_{a,b} \to M_{a',b'}$，令 $v_i \mapsto v'_{i+m}$。根据 $\phi(L_n v_k) = L_n(v'_{k+m})$，显然 ϕ 是一个模同构。

□

命题 3.2 设 $a \neq -\frac{1}{p-q}$, $M_{a,b} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_i$ 可约，当且仅当 $a = -p^{-m}[m]_{p,q}, b = -p^{-m}q^m or\ 0$ 对于某个 $m \in \mathbb{Z}$。

证明。设 U 是 $M_{a,b}$的一个非零真子模。根据 L_0的作用，可知存在一个 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $v_k \in U$。因此，可以找到某些 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k - bp^{-k-n}q^k[n]_{p,q} = 0$。下面分两种情况讨论：

情形 1。则 n 唯一。于是对所有 $i \neq n + k$, $v_i \in \mathbb{C}L_{i-k}v_k \subset U$。令 $m = -n - k$，可得 $U = \oplus_{i\neq -m}\mathbb{C}v_i$。利用 $L_{i-m}v_{-i} = 0\ (\forall i \neq m)$，得到

$$p^i[-i]_{p,q} - ap^i q^{-i} - bp^m q^{-i}[i-m]_{p,q} = 0,$$

然后：$a = -p^{-m}[m]_{p,q}$, $b = -p^{-m}q^{-m}$。

情形 2。n 并不唯一。假设存在 n_1、$n_2 \in \mathbb{Z}$，使得

$$p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k - bp^{-k-n_1}q^k[n_1]_{p,q} = 0,$$

$$p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k - bp^{-k-n_2}q^k[n_2]_{p,q} = 0,$$

因此， $b=0$、$a=q^{-k}[k]_{p,\ q}$ 和 $U=\mathbb{C}v_k$。

假设 $a=-p^{-m}[m]_{p,\ q}, b=-p^{-m}q^m or\ 0$，这是一个简单的论证。 □

在给出分类定理之前，我们需要以下引理。

引理 3.3 V 由 $L_{\pm1}, L_{\pm2}$生成。

定理 3.4 设 $M=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_k$ 是 $V_{p,\ q}$ 上的一个不可约 Harish-Chandra 模，满足$L_nv_k\in\mathbb{C}v_{n+k}$, $Ann_M(L_{\pm1})=0$ 以及 $-\frac{1}{p-q}\bar{\in}P(M)$。那么存在 $a,b\in\mathbb{C}$，使得 $M\simeq M_{a,\ b}$。证明。显然，$a\neq-\frac{1}{p-q}$。由于对所有 $k>0$，$v_k\in\mathbb{C}L_1^kv_0$，且对所有 $k<0$，$v_k\in\mathbb{C}L_{-1}^{-k}v_0$，我们得到

$$L_0v_k=(p^{-k}[k]_{p,q}-ap^{-k}q^k)v_k,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

令 $L_1v_i=a_iv_{i+1}$, $L_{-1}v_i=b_iv_{i-1}$, $(i\in\mathbb{Z},\ a_i,b_i\in\mathbb{C}^*)$。将 $n=1,m=-1$ 代入（3.1），我们得到

$$(p^{-1}qL_1L_{-1}-pq^{-1}L_{-1}L_1)v_i=pq[-2]_{p,q}L_0v_i, \tag{3.2}$$

thus

$$p^{-1}qa_{i-1}b_i-pq^{-1}a_ib_{i+1}=pq[-2]_{p,q}(p^{-i}[i]_{p,q}-ap^{-i}q^i),\ i\in\mathbb{Z}.$$

设 b 是方程 $a_0b_1=(-a-xp^{-1}[1]_{p,\ q})(p^{-1}[1]_{p,\ q}-ap^{-1}q-xq[-1]_{p,\ q})$ 的一个解，则由 (3.3) 得

$$\begin{aligned}b_{i+1}a_i=&(p^{-i-1}[i+1]_{p,q}-ap^{-i-1}q^{i+1}-bp^{-i}q^{i+1}[-1]_{p,q})\\&(p^{-i}[i]_{p,q}-ap^{-i}q^i-bp^{-i-1}q^i[1]_{p,q}),\ (\forall i\in\mathbb{Z}).\end{aligned} \tag{3.3}$$

固定 v_0，并通过下式确定 v:

$$L_1v_i=(p^{-i}[i]_{p,q}-ap^{-i}q^i-bp^{-i-1}q^i[1]_{p,q})v_{i+1},\ (\forall i\in\mathbb{Z}). \tag{3.4}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 我们推得

$$L_{-1}v_i=(p^{-i}[i]_{p,q}-ap^{-i}q^i-bp^{-i+1}q^i[-1]_{p,q})v_{i-1},\ (\forall i\in\mathbb{Z}). \tag{3.5}$$

Set

$$L_2v_j=(f(j)+p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j-2}q^j[2]_{p,q})v_{j+2}, \tag{3.6}$$

$$L_{-2}v_j=(g(j)+p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j+2}q^j[-2]_{p,q})v_{j-2}, \tag{3.7}$$

其中 $f(j)\ g(j)\in\mathbb{C}$。利用

$$(p^{-2}q^2L_2L_{-1}-pq^{-1}L_{-1}L_2)v_j=(\frac{[-1]_{p,q}}{p^{-1}}-\frac{[2]_{p,q}}{p^2})L_1v_j,$$

$$(p^2q^{-2}L_{-2}L_1-p^{-1}qL_1L_{-2})v_j=(\frac{[1]_{p,q}}{p}-\frac{[-2]_{p,q}}{p^{-2}})L_{-1}v_j,$$

我们推导出

$$\begin{aligned}&q^{-3}f(j)(p^{-j-2}[j+2]_{p,q}-ap^{-j-2}q^{j+2}-bp^{-j-1}q^{j+2}[-1]_{p,q})\\&=p^{-3}f(j-1)(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j+1}q^j[-1]_{p,q}),\end{aligned}\tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}&p^3g(j+1)(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j-1}q^j[1]_{p,q})\\&=q^3g(j)(p^{-j+2}[j-2]_{p,q}-ap^{-j+2}q^{j-2}-bp^{-j+1}q^{j-2}[1]_{p,q}).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Then

$$f(j)=\frac{p^{-3j}q^{3j}F}{(p^{-j-2}[j+2]_{p,q}-ap^{-j-2}q^{j+2}-bp^{-j-1}q^{j+2}[-1]_{p,q})(p^{-j-1}[j+1]_{p,q}-ap^{-j-1}q^{j+1}-bp^{-j}q^{j+1}[-1]_{p,q})},\tag{3.10}$$

$$g(j)=\frac{p^{-3j}q^{3j}G}{(p^{-j+2}[j-2]_{p,q}-ap^{-j+2}q^{j-2}-bp^{-j+1}q^{j-2}[1]_{p,q})(p^{-j+1}[j-1]_{p,q}-ap^{-j+1}q^{j-1}-bp^{-j}q^{j-1}[1]_{p,q})},\tag{3.11}$$

其中

$$F=f(0)(p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bp^{-1}q^2[-1]_{p,q})(p^{-1}-ap^{-1}q-bq[-1]_{p,q}),$$

$$G=g(0)(p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2})(p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bq^{-1}).$$

令 $x=q^{-j}[j]_{p,\ q}$，则有

$$\begin{cases}p^jq^{-j}f(j)=\frac{F}{(x+p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bp^{-1}q^2[-1]_{p,q})(x+p^{-1}-ap^{-1}q^1-bq[-1]_{p,q})},\\p^jq^{-j}f(j-2)=\frac{p^6q^{-6}F}{(x-a-bp[-1]_{p,q})(x+p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bp^2q[-1]_{p,q})},\\p^jq^{-j}g(j)=\frac{G}{(x+p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2})(x+p[-1]_{p,q}-apq-bq^{-1})},\\p^jq^{-j}g(j+2)=\frac{p^{-6}q^6G}{(x-a-bp^{-1})(x+p^{-1}-ap^{-1}q-bp^{-2}q)},\end{cases}\tag{3.12}$$

由 $(p^{-2}q^2L_2L_{-2}-p^2q^{-2}L_{-2}L_2)v_j=p^{-2}q^2[-4]_{p,\ q}L_0v_j$，我们得到

$$\begin{aligned}
&p^{-2}q^2\big((p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j+2}q^j[-2]_{p,q})f(j-2)+\\
&(p^{-j+2}[j-2]_{p,q}-ap^{-j+2}q^{j-2}-bp^{-j}q^{j-2}[2]_{p,q})g(j)+f(j-2)g(j)\big)=\\
&p^2q^{-2}\big((p^{-j-2}[j+2]_{p,q}-ap^{-j-2}q^{j+2}-bp^{-j}q^{j+2}[-2]_{p,q})f(j)+\\
&(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-bp^{-j-2}q^j[2]_{p,q})g(j+2)+f(j)g(j+2)\big).
\end{aligned}\tag{3.13}$$

利用 (3.13) 和 (3.14)，我们得到

$$\begin{aligned}
&p^{-4}q^4(x+p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bp^{-1}q^2[-1]_{p,q})(x+p^{-1}-ap^{-1}q^1-bq[-1]_{p,q})\\
&(x-a-bp^{-1})(x+p^{-1}-ap^{-1}q-bp^{-2}q)\big(p^6q^{-6}F(x+p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2})\\
&(x+p[-1]_{p,q}-apq-bq^{-1})(x-a-bp^2[-2]_{p,q})+G(x-a-bp[-1]_{p,q})\\
&(x+p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bp^2q[-1]_{p,q})(x+p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2}[2]_{p,q})+p^6q^{-6}FG\big)\\
=&(x-a-bp[-1]_{p,q})(x+p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bp^2q[-1]_{p,q})(x+p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2})\\
&(x+p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bq^{-1})\big(F(x-a-bp^{-1})(x+p^{-1}-ap^{-1}q-bp^{-2}q)\\
&(x+p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bq^2[-2]_{p,q})+p^{-6}q^6G(x+p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bp^{-1}q^2[-1]_{p,q})\\
&(x+p^{-1}-ap^{-1}q-bq[-1]_{p,q})(x-a-bp^{-2}[2]_{p,q})+p^{-6}q^6FG\big)
\end{aligned}\tag{3.14}$$

显然，(3.15) 是一个多项式恒等式。比较两边最高次项的系数，我们得到 $F=-p^{-6}q^6G$，若 $F=0$，则可知需要 $M\simeq M_{a,\ b}$；若 $F\neq 0$，则有

$$\begin{cases}
f_1(x)= & x-a-bp^{-1},\\
f_2(x)= & x+p^{-1}-ap^{-1}q-bp^{-2}q,\\
f_3(x)= & x+p^{-2}[2]_{p,q}-ap^{-2}q^2-bp^{-1}q^2[-1]_{p,q},\\
f_4(x)= & x+p^{-1}-ap^{-1}q^1-bq[-1]_{p,q},\\
f_5(x)= & (x-a-bp^{-1})(x+p^{-1}-ap^{-1}q-bp^{-2}q)(x-a-bp^2[-2]_{p,q})-\\
 & (x-a-bp[-1]_{p,q})(x+p[-1]_{p,q}-apq^{-1}-bp^2q[-1]_{p,q})\\
 & (x+p^2[-2]_{p,q}-ap^2q^{-2}-bpq^{-2}[2]_{p,q})-p^6q^{-6}F,
\end{cases}$$

and

$$\begin{cases} g_1(x) = & x - a - bp[-1]_{p,q}, \\ g_2(x) = & x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - bp^2q[-1]_{p,q}, \\ g_3(x) = & x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - bq^{-1}, \\ g_4(x) = & x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - bpq^{-2}, \\ g_5(x) = & (x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - bpq^{-2})(x + p[-1]_{p,q} - apq - bq^{-1}) \\ & (x + p^{-2}[2]_{p,q} - ap^{-2}q^2 - bq^2[-2]_{p,q}) - (x + p^{-2}[2]_{p,q} - ap^{-2}q^2 - bp^{-1}q^2[-1]_{p,q}) \\ & (x + p^{-1} - ap^{-1}q^1 - bq[-1]_{p,q})(x - a - bp^{-2}[2]_{p,q}) - F. \end{cases}$$

因此，(3.15) 变为

$$f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)f_5(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)g_5(x). \tag{3.15}$$

通过直接计算，我们可以发现,

$$deg f_5(x) \leq 1, deg g_5(x) \leq 1. \tag{3.16}$$

关于 $f_i(x)$ $g_i(x)$,$(1 \le i \le 4)$, 我们得到:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow b = 0,\\
&f_2(x) = g_1(x) \Leftrightarrow a - b\frac{q^{-1} + p^{-2}q}{1 - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_1(x) = g_2(x) \Leftrightarrow a - b\frac{pq^{-2} - q^{-1}}{pq^{-1} - 1} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_2(x) = g_2(x) \Leftrightarrow a - b\frac{p^{-1}q + pq^{-2}}{pq^{-1} - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_1(x) = g_3(x) \Leftrightarrow a - b\frac{p^{-1} - q^{-1}}{pq^{-1} - 1} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_2(x) = g_3(x) \Leftrightarrow a - b\frac{p^{-2}q - q^{-1}}{pq^{-1} - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_1(x) = g_4(x) \Leftrightarrow a - bp^{-1} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_2(x) = g_4(x) \Leftrightarrow a - bp^{-1} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_3(x) = g_1(x) \Leftrightarrow a - b\frac{q^{-1} - p^{-2}q}{1 - p^{-2}q^2} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_4(x) = g_1(x) \Leftrightarrow a - b\frac{q^{-1} - p^{-1}}{1 - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_3(x) = g_2(x) \Leftrightarrow a - b\frac{pq^{-2} - p^{-2}q}{pq^{-1} - p^{-2}q^2} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_4(x) = g_2(x) \Leftrightarrow a - b\frac{pq^{-2} - p^{-1}}{pq^{-1} - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_3(x) = g_3(x) \Leftrightarrow a - b\frac{-p^{-2}q - q^{-1}}{pq^{-1} - p^{-2}q^2} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_4(x) = g_3(x) \Leftrightarrow a - b\frac{-1}{p-q} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_3(x) = g_4(x) \Leftrightarrow a - b\frac{-pq^{-2} - p^{-2}q}{p^2q^{-2} - p^{-2}q^2} = -\frac{1}{p-q},\\
&f_4(x) = g_4(x) \Leftrightarrow a - b\frac{-p^{-1} - pq^{-2}}{p^2q^{-2} - p^{-1}q} = -\frac{1}{p-q}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

由 $a \neq -\frac{1}{p-q}$ 和 (3.17) 可知, $f_i(x)$ $g_i(x)$ 满足以下四种情况之一:

(1) $f_i(x) \neq g_i(x)$, $(\forall 1 \le i, j \le 4)$;

(2) $f_1(x) = g_1(x)$ $f_i(x) \neq g_i(x)$ 对于其他情况;

(3) $f_1(x) = f_2(x) = g_3(x) = g_4(x)$ $f_i(x) \neq g_i(x)$ 对其他情形;

(4) $f_3(x) = f_4(x) = g_1(x) = g_2(x)$ $f_i(x) \neq g_i(x)$ 对其他情形。

若 $f_i(x) \neq g_i(x)$，则 $(f_i(x)\ g_i(x)) = 1$。 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)g_4(x)$ 整除 $f_5(x)$， $f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)$ 整除 $g_5(x)$。由 (3.17)，可得

$$f_5(x) = g_5(x) = 0. \tag{3.18}$$

Thus

$$\begin{aligned} F = &(x - a - bp^{-1})(x + p^{-1} - ap^{-1}q - bp^{-2}q)(x + p^{-2}[2]_{p,q} - ap^{-2}q^2 - bq^2[-2]_{p,q}) \\ &- (x + p^{-2}[2]_{p,q} - ap^{-2}q^2 - bp^{-1}q^2[-1]_{p,q})(x + p^{-1} - ap^{-1}q - bq[-1]_{p,q})(x - a - bp^{-2}[2]_{p,q}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} G = &(x - a - bp[-1]_{p,q})(x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - bp^2q[-1]_{p,q})(x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - bpq^{-2}[2]_{p,q}) \\ &- (x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - bpq^{-2})(x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - bq^{-1})(x - a - bp^{-2}[2]_{p,q}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

代入 (3.7)、(3.8)，并利用 (3.11) 和 (3.12)，可得

$$\begin{aligned} L_2(v_j) = &\frac{(p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - bp^{-j-1}q^j)(p^{-j-1}[j+1]_{p,q} - ap^{-j-1}q^{j+1} - bp^{-j-2}q^{j+1}))}{(p^{-j-2}[j+2]_{p,q} - ap^{-j-2}q^{j+2} - bp^{-j-1}q^{j+2}[-1]_{p,q})} \\ &\frac{(p^{-j-2}[j+2]_{p,q} - ap^{-j-2}q^{j+2} - bp^{-j}q^{j+2}[-2]_{p,q})}{(p^{-j-1}[j+1]_{p,q} - ap^{-j-1}q^{j+1} - bp^{-j}q^{j+1}[-1]_{p,q})}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} L_{-2}(v_j) = &\frac{(p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - bp^{-j-1}q^j[-1]_{p,q})(p^{-j+1}[j-1]_{p,q} - ap^{-j+1}q^{j-1} - bp^{-j+2}q^{j-1}[-1]_{p,q}))}{(p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - bp^{-j+1}q^{j-2})} \\ &\frac{(p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - bp^{-j}q^{j-2}[-2])}{(p^{-j+1}[j-1]_{p,q} - ap^{-j+1}q^{j-1} - bp^{-j}q^{j-1})} \end{aligned} \tag{3.22}$$

我们选取 $h_0 = 1$、$h_i \in \mathbb{C}^*$ $(\forall i \in \mathbb{Z})$，使得

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} = \frac{p^{-i-1}[i+1]_{p,q} - ap^{-i-1}q^{i+1} - bp^{-i}q^{i+1}[-1]_{p,q}}{p^{-i}[i]_{p,q} - ap^{-i}q^i - bp^{-i-1}q^i}$$

令 $u_j = h_j v_j$，可以找到

$$L_n u_j = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - b'p^{-j-n}q^j[n]_{p,q})u_{n+j},$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$、$n = \pm 1$、± 2 和 $b' = 1 - a(p-q) - b$ 是方程 $a_0 b_1 = (-a - xp^{-1}[1]_{p,\ q})(p^{-1}[1]_{p,\ q} - ap^{-1}q - xq[-1]_{p,\ q})$ 的另一个解。

由引理可证明 $M \simeq M_{a,\ b'}$。 □

$U_q(sl_2)$是最简单的量子化包络代数，设元素 K、 E、 F、 K^{-1}张成 $U_q(sl_2)$。 $T_{\omega l}$ 是它的一个表示空间，定义作用于 V_l 上的算子 $T_{\omega l}(K)$、 $T_{\omega l}(E)$、 $T_{\omega l}(F)$如下：

$$T_{\omega l}(K)e_m = \omega q^{2m} e_m,$$

$$T_{\omega l}(E)e_m = ([l-m][l+m+1])^{\frac{1}{2}} e_{m+1},$$

$$T_{\omega l}(F)e_m = \omega([l+m][l-m+1])^{\frac{1}{2}} e_{m-1},$$

其中 $\omega \in \{-1,+1\}$, $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q-q^{-1}}$, V_l 是一个 $2l+1$ 维复向量空间，其基为$e_m, m = -l, -l+1, \cdots, l$。根据 $U_q(sl_2)$的表示，我们有 K 在 $e,\ m$ 上的特征根变化一个 $\pm q^2$的因子，并且 $T_{\omega l}(F)T_{\omega l}(E)e_m = \omega([l-m][l+m+1])e_m$，若设 $q^{-m}[m] = x$，则 $[l-m][l+m+1]$ 是关于 x的二次多项式，因此 e_m在 $q^{-2m}T_{\omega l}(F)T_{\omega l}(E)(e_m)$中的系数是关于 x的二次多项式。这一事实将在下面的证明中反复使用。

然后我们可以考虑 L_{-1} 或 L_1 湮灭的情形。

情形 I:

利用 $V_{p,q}$ 的反向模，我们可以假设 L_{-1} 消去某个 v_i。令 $L_{-1}v_0 = 0$，利用 (3.1)，可得 $b = aq$, 于是

$$L_{-1}L_1(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-1}q^{j+1})(p^{-j-1}[j+1]_{p,q}), j \in \mathbb{Z}, \tag{3.23}$$

$$L_1L_{-1}(v_j) = (p^{-j+1}[j-1]_{p,q} - ap^{-j+1}q^{j-1} - ap^{-j}q^j)(p^{-j}[j]_{p,q}), j \in \mathbb{Z}, \tag{3.24}$$

由于 v_j 在 $p^{2j}q^{-2j}L_{-1}L_1$（或 $p^{2j}q^{-2j}L_1L_{-1}$）中的系数是关于 x 的二次多项式：$=q^{-j}[j]_{p,q}$ 根据定理 3.4，至多还存在另一个被 L_{-1} 消去的 v_j。 L_{-1} 和 L_1 有以下两个子情形：

子情形 i：若 dim(核L_{-1}) $= 2$，则核(L_{-1}) $= \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_{-1}$;

子情形 ii：要么 dim(核L_1) < 2，要么 dim(核L_{-1}) < 2。

子情形 i 的证明。若 dim(核L_{-1}) $= 2$，我们可以假设 $L_{-1}v_{-r} = 0$ ，此外还有 $L_{-1}v_0$，其中r 是一个整数。将 $j = r$、 $r-1$、 $\cdots$、2、1 代入

$$p^{-j}q^jL_jL_{-1}(v_{-r}) - pq^{-1}L_{-1}L_j(v_{-r}) = (\frac{[-1]_{p,q}}{p^{-1}} - \frac{[j]_{p,q}}{p^j})L_{j-1}(v_{-r}),\ j \in \mathbb{Z},$$

我们看到 $L_{r-1}(v_{-r}) = 0, L_{r-2}(v_{-r}) = 0, \cdots, L_1(v_{-r}) = 0, L_0(v_{-r}) = 0$，那么 $p^r[-r]_{p,\ q} - ap^rq^{-r} = 0$ 由 $L_0v_k = (p^{-k}[k]_{p,\ q} - ap^{-k}q^k)v_k$可得，所以 $a = q^r[-r]_{p,\ q}$。由 (3.23) 可知

$(p^r[-r]_{p,\ q})(p^{r+1}[-r-1]_{p,\ q}-ap^{r+1}q^{-r-1}-ap^rq^{-r})=0$，那么 $r=1$ 或 $r=0$，因此 Ker(L_{-1}) $=\mathbb{C}v_0\oplus\mathbb{C}v_{-1}$。

子情形 ii 的证明。假设 $\dim(\mathrm{Ker}L_1)=2$，且 $\dim(\mathrm{Ker}L_{-1})=2$，由子情形 i 的证明可得 Ker($L_{-1}$) $=\mathbb{C}v_0\oplus\mathbb{C}v_{-1}$ 以及 $r=1$，于是 $a=-1,b=q$。若 $L_1(v_j)=0, j\in\mathbb{Z}$，由 (6.24)， j满足

$$(p^{-j-1}[j+1]_{p,q})(p^{-j}[j]_{p,q}-p^{-j}q^{j+1}[-1]_{p,q}-p^{-j-1}q^{j+2}[-1]_{p,q})=0, j\in\mathbb{Z}$$

于是 $j=-2$ 或 $j=-1$，因此 Ker(L_1) $=\mathbb{C}v_{-1}\oplus\mathbb{C}v_{-2}$。接下来，我们考虑以下两个方程:

$$pq^{-1}L_{-1}L_2(v_j)-p^{-2}q^2L_2L_{-1}(v_j)=(\frac{[2]_{p,q}}{p^2}-\frac{[-1]_{p,q}}{p^{-1}})L_1(v_j), j\in\mathbb{Z}, \tag{3.25}$$

$$p^2q^{-2}L_{-2}L_1(v_j)-p^{-1}q^1L_1L_{-2}(v_j)=(\frac{[1]_{p,q}}{p^1}-\frac{[-2]_{p,q}}{p^{-2}})L_{-1}(v_j), j\in\mathbb{Z}, \tag{3.26}$$

令 $j=-1$ 属于 (3.25) 和 (3.26)，可得 $L_2(v_{-1})=0$ 以及 $L_{-2}(v_{-1})=0$；类似地，令 let $j=0$ 属于 (3.26)，可得 $L_{-2}(v_1)=0$；令 $j=-2$ 属于 (3.25)，可得 $L_2(v_{-3})=0$。由此可知， $\mathbb{C}v_{-1}$ 在 $V_{p,\ q}$ 作用下保持不变，因此是 $V_{p,\ q}$的一个子模，这与 $V_{p,\ q}$不可分解的假设相矛盾，从而证明了子情形 ii。

接下来，我们考虑 $L_{\pm2}$ 的作用。设 $L_{-1}(v_j)=m_jv_{j-1}$，其中 $m_j\in\mathbb{C}$，将 v_j 替换为

$$\frac{p^{-1}[1]_{p,q}p^{-2}[2]_{p,q}\cdots p^{-j}[j]_{p,q}}{m_1m_2\cdots m_j}v_j,\ j\in\mathbb{Z},$$

此外，对于 $j\geq1$，我们有 $m_j\neq0$，那么

$$L_{-1}(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{j-1},\ j\geq0, \tag{3.27}$$

由（3.23）可知,

$$L_1(v_j)=(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-ap^{-j-1}q^{j+1})v_{j+1},\ j\geq0. \tag{3.28}$$

由 (3.25)、(3.27)、(3.28) 以及对 j 的归纳，我们得到

$$L_2(v_j)=(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-ap^{-j-2}q^{j+1}[2]_{p,q})v_{j+2},\ j\geq0. \tag{3.29}$$

Set

$$L_{-2}(v_j)=(f(j)+(p^{-j}[j]_{p,q}-ap^{-j}q^j-ap^{-j+2}q^{j+1}[-2]_{p,q}))v_{j-2},\ j\in\mathbb{Z}, \tag{3.30}$$

利用 (3.26)、(3.27)、(3.28) 和 (3.30)，我们得到

$$p^2q^{-2}f(j+1)(p^{-j}[j]_{\,p,q}-ap^{-j}q^j-ap^{-j-1}q^{j+1})=p^{-1}qf(j)(p^{-j+2}[j-2]_{p,q}-ap^{-j+2}q^{j-2}-ap^{-j+1}q^{j-1}), \tag{3.31}$$

其中 $j \geq 2$。显然，存在一个 $j_0 \geq 2$ 使得

$$p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - ap^{-j+1}q^{j-1} \neq 0,\ j \geq j_0 \geq 2. \tag{3.32}$$

假设 $f(j) \neq 0, j \geq j_0$，由 (3.31) 可得

$$\begin{aligned} f(j) = & \frac{p^{-3(j-j_0)}q^{3(j-j_0)}(p^{-j_0+1}[j_0-1]_{p,q} - ap^{-j_0+1}q^{j_0-1} - ap^{-j_0}q^{j_0})}{(p^{-j+1}[j-1]_{p,q} - ap^{-j+1}q^{j-1} - ap^{-j}q^{j})} \\ & \frac{p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - ap^{-j+1}q^{j-1}}{p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - ap^{-j+1}q^{j-1}}, j \geq j_0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

利用 (3.29)、(3.30) 和 (3.33)，可得

$$\begin{aligned} p^j q^{-j} L_{-2}(v_j) &= p^j q^{-j}(f(j) - (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j+2}q^{j+1}[-2]_{p,q}))v_{j-2} \\ &= \frac{F(x)}{G(x)} v_{j-2},\ j \geq j_0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} p^j q^{-j} L_2(v_{j-2}) &= p^j q^{-j}(p^{-j+2}[j-2]_{p,q} - ap^{-j+2}q^{j-2} - ap^{-j+4}q^{j-2}[-2]_{p,q})v_j \\ &= (x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - ap^4q^{-2}[-2]_{p,q})v_j,\ j \geq 2, \end{aligned} \tag{3.35}$$

其中

$$F(x) = (p^{-j_0+1}[j_0-1]_{p,q} - ap^{-j_0+1}q^{j_0-1} - ap^{-j_0}q^{j_0})(p^{-j_0+2}[j_0-2]_{p,q} - ap^{-j_0+2}q^{j_0-2} - ap^{-j_0+1}q^{j_0-1})$$

$$p^{3j_0}q^{-3j_0}f(j_0) + (x - a - ap^2[-2]_{p,q})(x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - apq^{-1})(x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - a),$$

$$G(x) = (x + p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - apq^{-1})(x + p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - a),$$

且 $x := q^{-j}\{j\}$。

由于 $p^{2j}q^{-2j}L_2L_{-2}(v_j)$ 中 v_j 的系数是关于 x 的二次多项式，这迫使 $f(j) = 0, j \geq j_0$，因此

$$L_{-2}(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j+2}q^{j+1}[-2]_{p,q})v_{j-2},$$

$$L_{-2}L_2(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-2}q^{j+1}[2]_{p,q})(p^{-j-2}[j+2]_{p,q} - ap^{-j-2}q^{j+2} - ap^{-j}q^{j+3}[-2]_{p,q})v_j,$$

其中 $j \geq j_0$。我们已知 $p^{2j}q^{-2j}L_{-2}L_2(v_j)$ 中 v_j 的系数是关于 x 的二次多项式，并且根据 $j \in \mathbb{Z}$ 的定理 3.4 的证明，该系数已被确定为 $(x-a-ap^{-2}[2]_{p,\ q})(x+p^{-2}[2]_{p,\ q}-ap^{-2}q^2-aq^2[-2]_{p,\ q})$，因此

$$L_{-2}L_2(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-2}q^{j+1}[2]_{p,q})(p^{-j-2}[j+2]_{p,q} - ap^{-j-2}q^{j+2} - ap^{-j}q^{j+3}[-2]_{p,q})v_j, \tag{3.36}$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$。 □

利用关于 L_{-1} 和 L_1的子情形，我们可以推出以下两种情况:

引理 3.5 要么 Ker(d_{-1}) $= \mathbb{C}v_0$，要么 Ker(d_{-1}) $= \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_{-1}$ 且 Ker(d_1) $= 0$。

证明。假设 Ker(d_{-1}) $= \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_{-1}$ 且 Ker(d_1) $= 0$，则根据引理 (6.6) 的证明， $\alpha = -1$，因此 (3.36) 变为

$$\begin{aligned} L_{-2}L_2(v_j) =&(p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^{j+1}[-1]_{p,q} - ap^{-j-2}q^{j+1}[-1]_{p,q}) \\ &(p^{-j-2}[j+2]_{p,q} - p^{-j-2}q^{j+3} - p^{-j}q^{j+3}[-2]_{p,q}[-1]_{p,q})v_j,\ j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

令 $j = -1$ 属于 (3.25)，我们有 $L_2(v_{-1}) \neq 0$；令 $j = -1$ 和 $j = -2$ 属于 (3.37)，我们有 $L_{-2}(v_1) = 0$且 $L_{-2}(v_0) \neq 0$。由此可知，对于 $j = 0$，(3.26)不成立，因此得到 Ker(L_{-1}) $= \mathbb{C}v_0$。 □

需要指出的是，我们所有的计算都基于 $L_{-1}(v_0) = 0$这一假设。通过适当地对$v_j's$ 进行归一化，使其满足 j 为负，我们可以将 (3.27) 加强为

$$L_{-1}(v_j) = p^{-j}[j]_{p,q}v_{j-1}, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.38}$$

由 (3.25)，我们得到

$$L_1(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-1}q^{j+1})v_{j+1},\ j \neq -1, \tag{3.39}$$

由 (3.25)、(3.29)、(3.38) 和 (3.39)，并对 $j \leq -3$ 进行归纳，我们得到

$$L_2(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-2}q^{j+1}[2]_{p,q})v_{j+2},\ j \neq \{-1, -2\}. \tag{3.40}$$

Let

$$L_1(v_{-1}) = Hv_0,\ L_2(v_{-2}) = Dv_0,\ L_2(v_{-1}) = Ev_1, \tag{3.41}$$

w这里 $H, D, E \in \mathbb{C}$。将 $j = -1$ 代入 (3.25)，并利用 (3.38) 和 (3.41)，我们得到

$$q^{-1}E - p^{-1}q^2[-1]_{p,q}D = p^{-1}(q^{-1}[2]_{p,q} - q^2[-1]_{p,q})H. \tag{3.42}$$

对于方程 $p^{-x}[x]_{p,q} - ap^{-x}q^x - ap^{-x-2}q^{x+1}[2]_{p,q} = 0$，令 j_0 表示其整数解存在时的解，即

$$p^{-j_0}[j_0]_{p,q} - ap^{-j_0}q^{j_0} - ap^{-j_0-2}q^{j_0+1}[2]_{p,q} = 0. \tag{3.43}$$

此外，由 (3.36) 和 (3.40) 可得

$$L_{-2}(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j+2}q^{j+1}[-2]_{p,q})v_{j-2},\ j \neq \{1, 0, j_0 + 2\}. \tag{3.44}$$

类似地，记

$$L_{-2}(v_0) = Fv_{-2},\ L_{-2}(v_1) = Gv_{-1}, \tag{3.45}$$

将 $j=-1$ 和 $j=-2$ 代入 (3.36)，分别可得

$$EG = (p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - ap^{-1}[2]_{p,q})(p^{-1} - ap^{-1}q - apq^2[-2]_{p,q}), \tag{3.46}$$

$$DF = (p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - aq^{-1}[2]_{p,q})(-a - ap^2q[-2]_{p,q}). \tag{3.47}$$

取　　将 $j=-1$ 和 $j=1$ 代入 (3.26)，并利用 (3.38)、(3.39)、(3.44) 和 (3.45)，可得

$$FH = -pq^{-2}a(1+[2]_{p,q}a),\ \text{when } j_0 \neq -3 \in \mathbb{Z}, \tag{3.48}$$

$$GH = -q^{-1}(1+[2]_{p,q}a)(a+p^{-1}),\ \text{when } j_0 \neq 0 \in \mathbb{Z}. \tag{3.49}$$

现在我们考虑四种情形。

情形 1：　$a \neq 0, -\frac{1}{p+q}, -p^{-1}$，则由 (3.43) 得　$j_0 \neq -3, 0$，并由 (3.48) 得　$H \neq 0$。将 $(p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - a)v_j$ 中的 $v_j's$ 替换为$j \leq -1$，并将其中的　$v_j's$ 替换为　$j \geq 0$（依据　Hv_j），可得

$$H = p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - a. \tag{3.50}$$

于是可得

$$F = pq^{-1}a,\ G = a + p^{-1} \tag{3.51}$$

由 (3.48)、(3.49) 和 (3.50) 得出。将 (3.51) 应用于 (3.46) 和 (3.47)，可得

$$D = p^2[-2]_{p,q} - ap^2q^{-2} - aq^{-1}[2]_{p,q},\ E = p[-1]_{p,q} - apq^{-1} - ap^{-1}[2]_{p,q}. \tag{3.52}$$

综上，我们有

$$L_n(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-n}q^{j+1}[n]_{p,q})v_{n+j},\ n = 0, \pm 1, 2, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.53}$$

$$L_{-2}(v_j) = (p^{-j}[j]_{p,q} - ap^{-j}q^j - ap^{-j-n}q^{j+1}[-2]_{p,q})v_{j-2},\ j \neq j_0 + 2, \tag{3.54}$$

根据 (3.36)，我们可以验证当　$j = j_0 + 2$ 时 (3.54) 成立。因此，对于所有　$n = 0$、± 1、± 2 以及所有　$j \in \mathbb{Z}$，(3.53) 均成立。因此，$V = V_{p,q}(a, b)$，其中　$b = aq$。

情况 2：　$a = -\frac{1}{p+q}$，则由 (3.43) 得到　$j_0 \neq -3$。根据 (3.42)、(3.46)、(3.47) 和 (3.48)，我们可以推导出

$$H = 0,\ q^{-1}E = p^{-1}q^2[-1]_{p,q}D,\ EG = \frac{p^{-2}q^2}{p^2 - q^2},\ DF = \frac{p^2q^{-2}}{(p+q)^2}. \tag{3.55}$$

类似地，将 $v_j's$ 替换为 $j\leq -1$，通过 $(p^2[-2]_{p,\ q}-ap^2q^{-2}-aq^{-1}[2]_{p,\ q})v_j$，并将那些 $v_j's$ 替换为 $j\geq 0$，通过 Dv_j，我们得到

$$F=-\frac{pq^{-1}}{p+q},\ E=\frac{p^{-1}q}{p+q},\ G=\frac{p^{-1}q}{p-q}. \tag{3.56}$$

将这些结果与 (3.38)、(3.39)、(3.40) 和 (3.44) 结合起来，我们还可得 (3.53) 和 (3.54) 成立。类似地，根据 (3.36)，我们可以验证当 $j=j_0+2$ 时 (3.54) 成立。因此，对于所有 $n=0$、± 1、± 2 以及所有 $j\in\mathbb{Z}$，(3.53) 均成立。因此，$V=V_{p,\ q}(a,b)$，其中 $b=-\frac{q}{p+q}$、$a=-\frac{1}{p+q}$。

情形 3：$a=-p^{-1}$，(3.43) 推出 $j_0=-3$。由 (3.46)、(3.47) 和 (3.49)，可得

$$DF=[-1]_{p,q},\ EG=0,\ GH=0, \tag{3.57}$$

于是由 (3.42)，我们有 $G=0$。将 $v_j's$ 根据 Fv_j 替换为 $j\leq -1$，并将那些 $v_j's$ 根据 $(-a-ap^2q[-2]_{p,\ q})v_j$ 替换为 $j\geq 0$，可得

$$F=-a-ap^2q[-2]_{p,q},$$

因此 $D=p^{-1}$。综上，我们得到

$$L_n(v_j)=p^{-n-j-1}[n+j+1]_{p,q}v_{n+j},\ n=\pm 1,\pm 2, j\neq -1. \tag{3.58}$$

在上述假设下，分别将 $j=-1$ 代入方程 (3.25) 和 (3.26)，可得

$$L_1(v_{-1})=Hv_0,\ L_2(v_{-1})=p^{-2}q^3[-1]_{p,q}+p^{-2}[3]_{p,q}H,\ L_{-2}(v_{-1})=p^3[-3]_{p,q}+p^3q^{-3}H, \tag{3.59}$$

然后，选择适当的复数 α，使得 $H=-q[-1]_{p,\ q}+[-1]_{p,\ q}[2]_{p,\ q}p^{-1}q\alpha$，于是得到

$$L_n(v_{-1})=(-q^n[-n]_{p,q}+[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}p^{-n}q^n\alpha)v_{n-1},\ n=\pm 1,\pm 2. \tag{3.60}$$

然后 $V_{p,\ q}(a,b)=V_{p,\ q}(\alpha)$，其中

$$V_{p,q}(\alpha)=\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-n-j-1}[n+j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -1,\\ L_n(v_{-1})=(-q^n[-n]_{p,q}+[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}p^{-n}q^n\alpha)v_{n-1}, & j=-1.\end{cases} \tag{3.61}$$

情形 4：$a=0$，由 (3.43) 可得 $j_0=0$。根据 (3.46)、(3.47) 和 (3.48)，我们得到

$$EG=[-1]_{p,q},\ DF=0,\ FH=0, \tag{3.62}$$

因此由（3.42）可得 $F=0$。用 Gv_j 中的 $j\leq -1$ 替换 $v_j's$，并用 $-p^{-1}$中的 $j\geq 0$ 替换 $v_j's$，可得 $G=-p^{-1}$，因此 $E=p[-1]_{p,\ q}$。综上，我们得到

$$L_n(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j},\ n,j=\pm 1,\pm 2, n+j\neq 0. \tag{3.63}$$

在前述假设下，分别将 $j=-1$ 和 $j=1$ 代入方程（3.25）和（3.26），可得

$$L_1(v_{-1})=Hv_0,\ L_2(v_{-2})=p^2q^{-3}-p^3q[-3]_{p,q}H,\ L_{-2}(v_2)=p^{-3}[3]_{p,q}+p^{-3}q^3H, \tag{3.64}$$

然后我们选取一个适当的复数 α'，使得 $H=p[-1]_{p,q}+[-1]_{p,q}[2]_{p,q}pq^{-1}\alpha'$，于是得到

$$L_n(v_{-n})=(p^n[-n]_{p,q}+p^nq^{-n}[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha')v_0,\ n=\pm1,\pm2. \tag{3.65}$$

然后 $V_{p,q}(a,b)=V'_{p,q}(\alpha')$，其中

$$V'_{p,q}(\alpha')=\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -n,\\ L_n(v_{-n})=(p^n[-n]_{p,q}+p^nq^{-n}[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha')v_0, & j=-n.\end{cases} \tag{3.66}$$

然后，当 L_{-1} 消去某个 $v_j, j\in\mathbb{Z}$ 时，我们可以得到三个 $V_{p,q}$-模：$V_{p,q}(a,b), V_{p,q}(\alpha)$, $V'_{p,q}(\alpha')$.

情形 II:

与 L_{-1} 消去的讨论类似，我们可以得到 $V_{p,q}$ 的其他模，即

$$V_{p,q}(\beta)=\begin{cases}L_n(v_j)=-q^{n+j-1}[-n-j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq 1,\\ L_n(v_1)=(-q^n[-n]_{p,q}+p^{-n}q^n[n]_{p,q}[-n+1]_{p,q}\alpha)v_{n+1}, & j=1,\end{cases} \tag{3.67}$$

and

$$V'_{p,q}(\beta')=\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -n,\\ L_n(v_{-n})=(p^n[-n]_{p,q}+p^nq^{-n}[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha')v_0, & j=-n.\end{cases} \tag{3.68}$$

现在我们有以下定理:

定理 3.6 Le　　若 q 不是单位根，且 V 是一个不可分解的 Harish-Chandra $V_{p,\ q}$-模

具有一维　　维权空间，则 V 同构于以下某个 $V_{p,\ q}$-模　　$e:$

$$V_{p,q}(a,b):L_n(v_j)=(p^{-k}[k]_{p,q}-ap^{-k}q^k-bp^{-k-j}q^k[j]_{p,q})v_{n+j},$$

$$V_{p,q}(\alpha):\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-n-j-1}[n+j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -1,\\ L_n(v_{-1})=(-q^n[-n]_{p,q}+[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}p^{-n}q^n\alpha)v_{n-1}, & j=-1.\end{cases}$$

$$V_{p,q}^{'}(\alpha^{'}):\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -n,\\ L_n(v_{-n})=(p^n[-n]_{p,q}+p^nq^{-n}[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha^{'})v_0, & j=-n.\end{cases}$$

$$V_{p,q}(\beta):\begin{cases}L_n(v_j)=-q^{n+j-1}[-n-j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq 1,\\ L_n(v_1)=(-q^n[-n]_{p,q}+p^{-n}q^n[n]_{p,q}[-n+1]_{p,q}\alpha)v_{n+1}, & j=1.\end{cases}$$

$$V_{p,q}^{'}(\beta^{'}):\begin{cases}L_n(v_j)=p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j\neq -n,\\ L_n(v_{-n})=(p^n[-n]_{p,q}+p^nq^{-n}[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha^{'})v_0, & j=-n.\end{cases}$$

其中 α、β、$\alpha^{'}$、$\beta^{'}$、a、$b\in\mathbb{C}$。

参考文献

[1] I. Kaplansky, 《维拉索罗代数》, 《Commun. Math. Phys.》, 1982, 86：49–54。[2] I. Kaplansky, L. J. Santharoubane, 《维拉索罗代数上的 Harish-Chandra 模》, Springer New York, 1985, 4：217–231。

[3] D. Liu, 《与维拉索罗代数相关的某些李代数上的 Harish-Chandra 模分类》, 《Journal of Algebra》, 2016, 447：548–559。

[4] J. Li, Y. Su, 《Schr¨odinger–维拉索罗代数的表示》, 《J. Math. Phys.》, 2008, 49, 文章编号 053512。

[5] R. Lv、K. Zhao, 《扭曲海森堡-维拉索罗代数上的不可约权模分类》, Commun. Contemp. Math. 2010, 12(2): 183-205.

[6] K. Liu, 《维特代数上张量场模的量子化》, Can. J. Math. 1993,45(4): 820-834.

[7] Z. Zhang、G. Zhang、Y. Jia, 《维拉索罗代数的双参数变形的表示》, Acta Mathematica Scientia(English Series), 2003, 23B(3): 309-315.

[8] O. Elchinger、K. Lundengard、A. Makhlouf、S. Silvestrov, 《带有 (τ,σ)-导子的括号以及维特代数和维拉索罗代数的 (p,q)-变形》[J]。Forum Mathematicum, 2016, 28(4): 657-673.