arXiv:2305.02661v1 [math.QA] 4 May 2023

源于 Hom 型二参数变形维拉索罗代数的二参数量子群 [1]

WenZhou, Yongsheng Cheng河南大学数学与统计学院，中国开封 475004

摘要：本文首先利用玻色振子构造了一个二参数变形维拉索罗代数，它是一个非乘性 Hom-李代数。其次，本文给出了与二参数变形维拉索罗代数相关的非平凡霍普夫结构，即构造了一个新的二参数量子群。

关键词：Hom-李代数；玻色振子；二参数变形维拉索罗代数；霍普夫代数

§1. 引言

许多作者分别给出了 q-变形的维拉索罗代数（参见 [1, 6, 8, 11, 13, 15, 16]），它们可视为量子群在物理学中典型应用的实例。量子群是一类非交换且余交换的霍普夫代数，由 Drinfeld 和 Jimbo 引入，作为李代数 [4, 5, 7, 14] 的泛包络代数的 q- 变形。双参数量子形变是单参数量子形变的推广。已知双参数量子包络代数具有广义根空间结构，而其 Drinfeld 实现在 [12] 中得到了研究。

作为李代数的推广，Hom-李代数由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov 于 [8] 引入，作为研究 Witt 代数和维拉索罗代数变形的一部分。研究 Hom-李结构的动机与物理学以及李代数的变形有关，特别是向量场李代数 [2, 3, 6, 16]。Hom-李代数是一个三元组（L, $[\cdot,\cdot]$, α），其中 L 是一个向量空间，α 是 L 的端同态，且反对称括号满足以下条件

$$[x,y] = -[y,x] \quad (skew\ symmetry), \tag{1.1}$$

$[\alpha(x)\ [y,z]] + [\alpha(y)\ [z,x]] + [\alpha(z)\ [x,y]] = 0,\ \forall x,y,z \in V$（广义雅可比恒等式）。显然，李 (1.2) 代数是 Hom-李代数的特例，其中 α 是恒等映射。在 [6], O. Elchinger 等人引入了双参数变形维拉索罗代数 $V_{p,\ q}$，其

h

[1]S由中国国家自然科学基金（项目编号：11047030 和 11771122）资助 .

is ˆ 一个 Hom-李代数。$V_{p,\ q} = (L, \hat{}\alpha)$ 以 $\{L_n, C|n \in \mathbb{Z}\}$ 为基，其括号关系为 :

$$[L_n, L_m] : = (\frac{[n]}{p^n} - \frac{[m]}{p^m})L_{n+m} + \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6(1+(q/p)^n)}\frac{[n-1]}{p^{n-1}}\frac{[n]}{p^n}\frac{[n+1]}{p^{n+1}}C,$$

$$[\hat{L}, C] : = 0,$$

ˆ ˆ ˆ 和 $\hat{}\alpha$: $L \longrightarrow L$ 是由 $\hat{}\alpha(L_n) = ((1+(q/p)^n))L_n$、$\hat{}\alpha(C) = C$ 定义的 L 的端同态。主要工具是 (σ, τ)-导子，它们是通过线性映射扭曲莱布尼茨法则的广义导子。

1998年，Hu 在 [10] 中给出了 q-形变的维拉索罗代数的量子群结构。在[2], 中，Cheng 和 Su 提出了一种构造 q-形变的海森堡–维拉索罗代数（这是一种 Hom-李代数）的方法，并介绍了海森堡–维拉索罗代数的量子变形，该变形具有非平凡的霍普夫结构。在 [17], 中，Yuan 利用物理学中的玻色振子和费米振子实现了 q-形变$W(2, 2)$，并进一步确定了李代数 $W(2, 2)$ 上 q-形变的量子群结构。对于超版本， [9]构造了具有两个奇简单根的非标准简单根系中的李超代数的双参数量子形变。

振子中的玻色振子 a 及其厄米共轭 a^+ 满足以下对易关系:

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 1,\ [1, a^+] = [1, a] = 0. \tag{1.3}$$

根据 [2], 代数上的霍普夫结构如下。所谓代数上的霍普夫结构A，是指 A 与三元组（Δ， ϵ， S）相关联，其中余乘 Δ: $A \to A \otimes A$ 是代数同态，余单位 ϵ: $A \to \mathbb{F}$ 是代数同态，而对极 S: $A \to A$ 是反同态，使得

$$(1 \otimes \Delta)\Delta(x) = (\Delta \otimes 1)\Delta(x)\ \ (coassociativity),$$

$$m((1 \otimes \epsilon)\Delta(x)) = x = m((\epsilon \otimes 1)\Delta(x))\ \ (counit\ axiom),$$

$$m((1 \otimes S)\Delta(x)) = \epsilon(x) = m((S \otimes 1)\Delta(x))\ \ (antipode\ axiom),$$

对所有 $x \in A$，其中 m: $A \otimes A \to A$ 是 A 的乘法映射。霍普夫代数是配备了霍普夫结构的代数。

本文的目标有两个。首先，我们利用玻色振子构造一个二参数变形维拉索罗代数，它是一个非乘性 Hom-李代数。其次，本文给出了一个与二参数变形维拉索罗代数相关的非平凡霍普夫结构，

也就是说，我们构造了一个与维拉索罗代数相关的新型二参数量子群。本文结构如下：第 2 节中，我们利用玻色振子构造一个二参数变形维拉索罗代数。第 3 节中，我们给出了二参数变形维拉索罗代数的一个非平凡、非交换且余交换的霍普夫结构。

§2. 双参数变形维拉索罗代数 $V_{p,\ q}$

本节中，我们计算双参数变形维拉索罗代数的包络代数。

利用 (1.3)，并通过对 n 归纳可得

$$[a,(a^+)^n]=n(a^+)^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

以下形式的生成元

$$L_n\equiv(a^+)^{n+1}a$$

实现了无中心维拉索罗李代数，其括号如下：

$$[L_m,L_n]=(n-m)L_{m+n},\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

下面介绍维拉索罗代数的单参数变形。

取一个 $q\in\mathbb{C}^*$，使得 q 不是单位根。我们不采用方程 (1.3)，而是假设

$$[a,a^+]_{(1,q)}=1, \tag{2.1}$$

这里我们使用以下记号

$$[A,B]_{(\alpha,\beta)}=\alpha AB-\beta BA. \tag{2.2}$$

由 (2.1)，对 n 应用归纳法可得

$$[a,(a^+)^n]_{(1,q^n)}=\{n\}_q(a^+)^{n-1}, \tag{2.3}$$

对任意 n，其中一般记号

$$\{n\}_q=\frac{q^n-1}{q-1} \tag{2.4}$$

会用到。归纳法的步骤如下。

$$\begin{aligned}[a,(a^+)^2]_{(1,q^2)}&=a(a^+)^2-q^2(a^+)^2a\\&=a(a^+)^2-qa^+aa^++qa^+aa^+-q^2(a^+)^2a\\&=\{2\}_qa^+.\end{aligned}$$

假设 $n-1$ 成立，我们有

$$[a,(a^+)^{n-1}]_{(1,q^{n-1})}=\{n-1\}_q(a^+)^{n-2},$$

then

$$\begin{aligned}[a,(a^+)^n]_{(1,q^n)}&=a(a^+)^n-q^n(a^+)^na\\&=(a(a^+)^{n-1}-q^{n-1}(a^+)^{n-1}a)a^+\\&+q^{n-1}(a^+)^{n-1}aa^+-q^n(a^+)^na\\&=\{n-1\}_q(a^+)^{n-1}+q^{n-1}(a^+)^{n-1}(aa^+-qa^+a)\\&=\{n\}_q(a^+)^{n-1},\end{aligned}$$

因此归纳法成立。

命题 2.1 生成元 $L_n\equiv(a^+)^{n+1}a$ $(n\in\mathbb{Z})$ 满足以下关系：

$$[L_n,L_m]_{(q^n,q^m)}=(\{m\}_q-\{n\}_q)L_{m+n},\ \forall m,n\in\mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

证明。显然，方程（5.6）对 $m=n$ 成立，因为两边都等于 0。现在假设 $n\neq m$。

$$\begin{aligned}[L_n,L_m]_{(q^n,q^m)}&=q^nL_nL_m-q^mL_mL_n\\&=q^n(a^+)^{n+1}a(a^+)^{m+1}a-q^m(a^+)^{m+1}a(a^+)^{n+1}a\\&=q^n(a^+)^{n+1}\big(\{m+1\}_q(a^+)^m+q^{m+1}(a^+)^{m+1}a\big)a\\&-q^m(a^+)^{m+1}\big(\{n+1\}_q(a^+)^n+q^{n+1}(a^+)^{n+1}a\big)a\\&=q^n\{m+1\}_q(a^+)^{m+n+1}a+q^{m+n+1}(a^+)^{n+m+2}aa\\&-q^m\{n+1\}_q(a^+)^{m+n+1}a-q^{m+n+1}(a^+)^{n+m+2}aa\\&=\big(q^n\{m+1\}_q-q^m\{n+1\}_q\big)(a^+)^{m+n+1}a\\&=\big(\{m\}_q-\{n\}_q\big)L_{m+n}.\end{aligned}$$

□

以下内容介绍维拉索罗代数的双参数变形。我们假设：

$$[a,a^+]_{(p,q)}=paa^+-qa^+a=1. \tag{2.6}$$

由（2.6），对 n 进行归纳法可得

$$[a,(a^+)^n]_{(p^n,q^n)}=[n]_{p,q}(a^+)^{n-1}, \tag{2.7}$$

对于任意的 n，其中量子整数

$$[n]_{p,q}=\frac{p^n-q^n}{p-q} \tag{2.8}$$

被使用。归纳法的步骤如下。

$$\begin{aligned}[a,(a^+)^2]_{(p^2,q^2)}&=p^2a(a^+)^2-q^2(a^+)^2a\\&=p\big(paa^+-qa^+a\big)a^++pqa^+aa^+-q^2(a^+)^2a\\&=[2]_{p,q}a^+.\end{aligned}$$

假设 $n-1$ 为真，我们看到的是

$$[a,(a^+)^{n-1}]_{(p^{n-1},q^{n-1})}=[n-1]_{p,q}(a^+)^{n-2},$$

then

$$\begin{aligned}[a,(a^+)^n]_{(p^n,q^n)}&=p^na(a^+)^n-q^n(a^+)^na\\&=p(p^{n-1}a(a^+)^{n-1}-q^{n-1}(a^+)^{n-1}a)a^+\\&+pq^{n-1}(a^+)^{n-1}aa^+-q^n(a^+)^na\\&=p[n-1]_{p,q}(a^+)^{n-1}+q^{n-1}(a^+)^{n-1}(paa^+-qa^+a)\\&=[n]_{p,q}(a^+)^{n-1},\end{aligned}$$

因此，归纳法成立。
接下来我们计算双参数变形维拉索罗代数的包络代数。

Lem命题 2.2 生成元 $L_n\equiv(a^+)^{n+1}a$ $(n\in\mathbb{Z})$ 满足以下关系：

$$\begin{aligned}[L_n,L_m]&=\big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m}-\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big)L_{m+n},\\&=\big(q^n[m]_{p,q}-q^m[n]_{p,q}\big)p^{-(m+n)}L_{m+n}.\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

当 $p=1$时，The 双参数变形维拉索罗代数的包络代数必须

与维拉索罗代数的单参数变形相同，我们得到:

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= Aq^n L_n L_m - Bq^m L_m L_n \\ &= Aq^n (a^+)^{n+1} a (a^+)^{m+1} a - Bq^m (a^+)^{m+1} a (a^+)^{n+1} a \\ &= Aq^n (a^+)^{n+1} \big(p^{-m-1}[m+1]_{p,q} (a^+)^m + p^{-m-1} q^{m+1} (a^+)^{m+1} a\big) a \\ &- Bq^m (a^+)^{m+1} \big(p^{-n-1}[n+1]_{p,q} (a^+)^n + p^{-n-1} q^{n+1} (a^+)^{n+1} a\big) a,\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}Aq^n p^{-m-1}[m+1]_{p,q} (a^+)^{m+n+1} a - Bq^m p^{-n-1}[n+1]_{p,q} (a^+)^{m+n+1} a \\ = \big(q^n [m]_{p,q} - q^m [n]_{p,q}\big) p^{-(m+n)} (a^+)^{m+n+1} a.\end{aligned}$$

由于

$$q^n [m]_{p,q} - q^m [n]_{p,q} = p^{-1} q^n [m+1]_{p,q} - p^{-1} q^m [n+1]_{p,q},$$

我们有

$$Aq^n p^{-m-1}[m+1]_{p,q} - Bq^m p^{-n-1}[n+1]_{p,q} = \big(p^{-1} q^n [m+1]_{p,q} - p^{-1} q^m [n+1]_{p,q}\big) p^{-(n+m)},$$

于是，我们看到

$$A = p^{-n},\ B = p^{-m}.$$

因此，我们得到

$$[L_n, L_m] = p^{-n} q^n L_n L_m - p^{-m} q^m L_m L_n.$$

双参数变形维拉索罗代数具有生成集 $\{L_n, C \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 以及以下关系:

$$\begin{aligned}p^{-n} q^n L_n L_m - p^{-m} q^m L_m L_n &= \big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big) L_{m+n} \\ &+ \delta_{m+n,0} \frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1 + (q/p)^n\big)} \frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}} \frac{[n]_{p,q}}{p^n} \frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}} C, \qquad (2.10)\end{aligned}$$

$$q^n L_n C = C L_n. \qquad (2.11)$$

§3. V_p的量子群结构$_{,q}$

本节中，我们直接构造 $V_{p,q}$ 的霍普夫代数结构。$\mathcal{U}_{p,q}$ 定义为由 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}^{-1}$、L_n （$n \in \mathbb{Z}$）、C 生成的结合代数，其关系

如下:

(R1) $\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = 1 = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$;

(R2) $\mathcal{T}^m L_n = p^{m(n+1)} q^{-m(n+1)} L_n \mathcal{T}^m$;

(R3) $q^m \mathcal{T}^m C = p^m C \mathcal{T}^m$;

(R4) $q^n p^{-n} L_n L_m - q^m p^{-m} L_m L_n = [L_n, L_m]$;

(R5) $q^n L_n C = p^n C L_n$;

在给出 $\mathcal{U}_{p,q}$ 上霍普夫代数结构的构造之前，我们必须检验上述五个关系 (R1)-(R5) 是否能保证得到非平凡的结合代数 $\mathcal{U}_{p,q}$。

下面的命题给出了肯定的答案。

命题 3.1 由生成元 $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{-1}$, L_n ($n \in \mathbb{Z}$), C 和关系 (R1)-(R5) 给出的结合代数 $\mathcal{U}_{p,q}$ 是非平凡的。

证明。令 $M := \{L_n, C, \mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$。设 $T(M)$ 为 M 的张量代数，它是由 M 生成的自由结合代数。于是有

$$T(M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T(M)_m,$$

其中 $T(M)_m = M \otimes \ldots \otimes M = span\{v_1 \otimes \ldots \otimes v_m | v_i \in M, i = 1, \ldots, m\}$. 特别地,

$$T(M)_0 = \mathbb{C} \ \ and \ \ T(M)_1 = M.$$

$T(M)$ 上的乘积自然定义为

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m.$$

设 I 为由以下元素生成的 $T(M)$ 的双边理想

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^{-1} - \mathcal{T}^{-1} \otimes \mathcal{T}; \tag{3.1}$$

$$T^m \otimes L_n - p^{m+n} q^{-m(n+1)} L_n \otimes T^m; \tag{3.2}$$

$$q^n p^{-(m+n)} L_n \otimes L_m - q^m p^{-(m+n)} L_m \otimes L_n; \tag{3.3}$$

$$q^m T^m \otimes C - C \otimes T^m \tag{3.4}$$

对于所有的 m、$n \in \mathbb{Z}$，且其中 $T^{-n} = (T^{-1})^n$。令

$$S(M) := T(M)/I.$$

显然，S(M) 也是一个 $\mathbb{Z}$ 分次代数，其基为

$$\widetilde{B} = \{T^{d}(\mathcal{T}^{-1})^{d'} L_{i_1}^{k_{i_1}} \dots L_{i_m}^{k_{i_m}} C^{d_1}\}, \tag{3.5}$$

其中 $k_{i_p}, d, d', d_1 \in \mathbb{N}$； $i_p \in \mathbb{Z}_+$； $i_1 < \ldots < i_m$。令 $\widetilde{J}$ 为由以下元素生成的 $T(M)$ 的另一个双边理想

$$q^n p^{-(m+n)} L_n \otimes L_m - q^m p^{-(m+n)} L_m \otimes L_n - [L_n, L_m] \tag{3.6}$$

以及 (3.1)、(3.2) 和 (3.4) 中的那些元素。于是令

$$\widetilde{\mathcal{U}_{p,q}} := T(M)/\widetilde{J}.$$

~ ‾我们的目标是证明，(3.5) 中定义的 B 也是 $\mathcal{U}_{p,\ q}$ 的一组基。

令

$$\widetilde{B}' = \{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_m} | v_i \in M, 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_m, m \ge 0\}$$

是 $T(M)$ 的一个子集，并令 U' 为 $T(M)$ 中由 $\widetilde{B}'$ 张成的子空间。我们断言

$$T(M) = U' \oplus \widetilde{J}. \tag{3.7}$$

对于任意 $v \in T(M)$，我们可以写成 $v = v^{(m)} + v^{(m-1)} + \ldots + v^{(0)}$，其中 $v^{(m)} \neq 0$，对某个 $m \ge 0$ 成立，且 $v^{(i)} \in T(M)_i$，其中 $i = 0$、1、.....、m。我们称 m 为 v 的次数。由 (3.1)、(3.2)、(3.4) 和 (3.6) 可得

$$v_{i_1} \otimes \ldots \otimes \left(v_{i_k} \otimes v_{i_{k+1}} - v_{i_{k+1}} \otimes v_{i_k} - [v_{i_k}, v_{i_{k+1}}]\right) \otimes \ldots v_{i_m} \in \widetilde{J},$$

也就是说，$v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} \otimes v_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes v_{i_m}$ 与 $a v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_{k+1}} \otimes v_{i_k} \otimes \ldots \otimes v_{i_m}$ ~ （对某个 $a \in \mathbb{C}^*$ 而言）之差是 J 中的一个元素，且其次数小于 m。因此，对 v 的次数使用归纳法，可得 $T(M) = U' + \widetilde{J}$。

仍需证明方程 (3.7) 是直和，这等价于 $\widetilde{\mathcal{U}_{p\ q,}}$ 中 $\widetilde{B}$ 的线性无关性。假设 $\widetilde{B}'$ 中元素的一个非零线性组合 v 属于 $\widetilde{J}$。由 (3.1)、(3.2)、(3.4) 和 (3.6) 可知， v 中具有最高次数的齐次分量 $v^{(m)}$ 必须属于 kerπ（比较 (3.3) 和 (3.6)），其中 π: $T(M) \to S(M)$ 是自然的 $\mathbb{Z}$-分次代数同态，即，

$$\pi(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_m}) = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_m}.$$

然而， $v^{(m)}$ 是 $\widetilde{B}'$中元素的非零线性组合，不可能出现在~ ‾ ‾kerπ 中。这个矛盾表明 B 是$\mathcal{U}_{p,\ q}$的一组基。由于显然有$\mathcal{U}_{p,\ q} \cong \mathcal{U}_{p,\ q}/J$，其中 J

是由 $\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}-1$生成的 $\widetilde{\mathcal{U}_p}$ ，q 的双边理想，我们得到一个以.....为基的非平凡结合代数

$$\widetilde{B}' = \{T^d L_{i_1}^{k_{i_1}} \dots L_{i_m}^{k_{i_m}} C^{d_1}\} \tag{3.8}$$

其中 $d \in \mathbb{Z}$； $d_1 \in \mathbb{N}$； $i_p, j_q \in \mathbb{Z}_+ (i, p = 1, 2, \dots, m;\ j, q = 1, 2, \dots, n)$； $i_1 < \dots < i_m$。 □

有了上述命题，我们现在可以着手在 $\mathcal{U}_{p,q}$ 上构造 Hopf$\widetilde{\ }$ 代数结构。下面将通过若干引理来完成这一工作。

引理 3.2 存在唯一的代数同态 $\Delta: \mathcal{U}_{p,q} \to \mathcal{U}_{p,q} \times \mathcal{U}_{p,q}$ ，满足

$$\Delta(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \Delta(\mathcal{T}^{-1}) = \mathcal{T}^{-1} \otimes \mathcal{T}^{-1}, \tag{3.9}$$

$$\Delta(L_n) = L_n \otimes \mathcal{T}^n + \mathcal{T}^n \otimes L_n, \tag{3.10}$$

$$\Delta(C) = C \otimes 1 + 1 \otimes T, \tag{3.11}$$

$$\epsilon(L_n) = \epsilon(C) = 0, \tag{3.12}$$

$$S(L_n) = -\mathcal{T}^{-n} L_n \mathcal{T}^{-n}, \tag{3.13}$$

$$S(C) = -C. \tag{3.14}$$

证明。显然，对于任意 $m \in \mathbb{Z}, \epsilon$，有 $\Delta(\mathcal{T}^m) = \mathcal{T}^m \otimes \mathcal{T}^m$ ；$(\mathcal{T}^m) = 1$， $S(\mathcal{T}^m) = \mathcal{T}^{-m}$。我们看到， $\Delta(\mathcal{T})$、 $\Delta(\mathcal{T}^{-1})$、 $\Delta(L_n)$ 满足关系 (R1)-(R5)。(R1) 显然成立。(R2) 和 (R3) 可直接由 (3.9)-(3.14) 得出。现在来看 (R4)，我们看到

$$\begin{aligned}
\Delta(L_n)\Delta(L_m) &= (L_n \otimes \mathcal{T}^n + \mathcal{T}^n L_n)(L_m \otimes \mathcal{T}^m + \mathcal{T}^m L_m) \\
&= L_n L_m \otimes \mathcal{T}^{m+n} + L_n \mathcal{T}^m \otimes \mathcal{T}^n L_m + \mathcal{T}^n L_m \otimes L_n \otimes \mathcal{T}^m + \mathcal{T}^{m+n} \otimes L_n L_m \\
&= L_n L_m \otimes \mathcal{T}^{m+n} + p^{n(m+1)} q^{-n(m+1)} L_n \mathcal{T}^m \otimes L_m \mathcal{T}^n \\
&+ p^{n(m+1)} q^{-n(m+1)} L_m \mathcal{T}^n \otimes L_n \mathcal{T}^m + \mathcal{T}^{m+n} \otimes L_n L_m.
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta(L_m)\Delta(L_n) &= L_m L_n \otimes \mathcal{T}^{m+n} + p^{m(n+1)} q^{-m(n+1)} L_m \mathcal{T}^n \otimes L_n \mathcal{T}^m \\
&+ p^{m(n+1)} q^{-m(n+1)} L_n \mathcal{T}^m \otimes L_m \mathcal{T}^n + \mathcal{T}^{m+n} \otimes L_m L_n.
\end{aligned}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&q^n p^{-n}\Delta(L_n)\Delta(L_m) - q^m p^{-m}\Delta(L_m)\Delta(L_n)\\
&= (q^n p^{-n} L_n L_m \otimes \mathcal{T}^{m+n} - q^m p^{-m} L_m L_n \otimes \mathcal{T}^{m+n}) + (q^n p^{-n}\mathcal{T}^{m+n} \otimes L_n L_m - q^m p^{-m}\mathcal{T}^{m+n} \otimes L_m L_n)\\
&= \big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big)(L_{m+n} \otimes \mathcal{T}^{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1+(q/p)^n\big)}\frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}}\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}}C \otimes \mathcal{T}^{m+n})\\
&+ \big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big)(\mathcal{T}^{m+n} \otimes L_{m+n} + \mathcal{T}^{m+n} \otimes \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1+(q/p)^n\big)}\frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}}\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}}C)\\
&= \big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big)\Delta(L_{m+n}) + \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1+(q/p)^n\big)}\frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}}\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}}\Delta(C)
\end{aligned}
$$

此外，我们需要证明 $(S(\mathcal{T})\ S(\mathcal{T}^{-1})\ S(L_m))$ 满足 $\mathcal{U}^{opp}_{p\,q}$，中的关系 (R1)-(R5)。为将 $\mathcal{U}^{opp}_{p\,q}$，中的乘法与 $\mathcal{U}_{p,\ q}$ 中的乘法区分开来，我们用“ $\cdot$ ”表示前者。容易得到 $S(\mathcal{T}^m) = \mathcal{T}^{-m}$ $(m \in \mathbb{Z})$。对于 (R2)，我们得到:

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{T}^m)\cdot S(L_m) &= S(L_m)S(\mathcal{T}^m)\\
&= -\mathcal{T}^{-m}L_m\mathcal{T}^{-m}\mathcal{T}^{-m}\\
&= -\mathcal{T}^{-m}p^{m(m+1)}q^{-m(m+1)}\mathcal{T}^{-m}L_m\mathcal{T}^{-m}\\
&= p^{m(m+1)}q^{-m(m+1)}S(\mathcal{T}^m)S(L_m)\\
&= p^{m(m+1)}q^{-m(m+1)}S(L_m)\cdot S(\mathcal{T}^m).
\end{aligned}
$$

对于（R4）:

$$
\begin{aligned}
q^n p^{-n}S(L_n)\cdot S(L_m) &= q^n p^{-n}\mathcal{T}^{-m}L_m\mathcal{T}^{-m}\mathcal{T}^{-n}L_n\mathcal{T}^{-n}\\
&= q^n p^{-n}p^{n(m+1)}q^{-n(m+1)}\mathcal{T}^{-m-n}L_m p^{-m(n+1)}q^{m(n+1)}L_n\mathcal{T}^{-m}L_n\mathcal{T}^{-n}\\
&= q^m p^{-m}\mathcal{T}^{-m-n}L_m L_n\mathcal{T}^{-m-n},
\end{aligned}
$$

thus

$$
q^m p^{-m}S(L_m)\cdot S(L_n) = q^n p^{-n}\mathcal{T}^{-m-n}L_n L_m\mathcal{T}^{-m-n}.
$$

然后我们看到的是

$$
\begin{aligned}
&q^n p^{-n} S(L_n)\cdot S(L_m) - q^m p^{-m} S(L_m)\cdot S(L_n)\\
&= \mathcal{T}^{-m-n}\Big(-\big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big) - \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1+(q/p)^n\big)}\frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}}\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}}C\Big)\mathcal{T}^{-m-n}\\
&= \big(\frac{[m]_{p,q}}{p^m} - \frac{[n]_{p,q}}{p^n}\big)S(L_{m+n}) + \delta_{m+n,0}\frac{(q/p)^{-n}}{6\big(1+(q/p)^n\big)}\frac{[n-1]_{p,q}}{p^{n-1}}\frac{[n]_{p,q}}{p^n}\frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n+1}}S(C).
\end{aligned}
$$

类似地，可以验证 (R3) 和 (R5) 在 S 作用下也保持不变。因此，确实存在满足 (3.13) 和 (3.14) 的同态 $S:\mathcal{U}_{p,q}\to\mathcal{U}_p^{opp}{}_{,q}$，或反同态 $S:\mathcal{U}_{p,q}\to\mathcal{U}_{p,q}$。现在，$S^2$ 是从 $\mathcal{U}_{p,q}$ 到 $\mathcal{U}_{p,q}$ 的普通同态。容易在生成元上验证 $S^2=id$，这意味着 S 是双射。容易看出，$\epsilon(\mathcal{T})=\epsilon(\mathcal{T}^{-1})=1$、$\epsilon(L_n)=\epsilon(C)=0$ 满足关系 (R1)-(R5)。因此，我们得到代数同态 ϵ。□

The定理 3.3 ($\mathcal{U}_{p,q},\Delta,\epsilon,S$) 由 (R1)-(R5) 和 (3.9)-(3.14) 定义，是一个 Hopf 代数 $ra.$

推论 5.7 作为向量空间，有以下结论：

$$\mathcal{U}_{p,q}\cong\mathbb{C}[\mathcal{T},\mathcal{T}^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}U_{p,q},$$

其中 $U_{p,q}=U(V_{p,q})$ 是由 $L_n(n\in\mathbb{Z})$ 生成、满足关系 (2.5) 的 $V_{p,q}$ 的包络代数。

参考文献

[1] E. Arbarello、C. De Concini、V.G. Kac、C. Procesi，曲线模空间与表示论，《数学物理通讯》，117（1988），1-36。

[2] Y. Cheng、Y. Su，《海森堡-维拉索罗代数的量子变形》。《代数学通讯》2013, 20(2): 299-308。

[3] Y. Cheng，Y. Su，《Hom-Leibniz代数的（上）同调与泛中心扩张》。《数学学报》（英文版），2011，27(5)：813-830。

[4] V.G. Drinfeld，霍普夫代数与量子杨-巴克斯特方程，《苏联数学文献》32（1985），254-258。

[5] D.W. Delius，M.D. Gould，《量子李代数：其存在性、唯一性与 q- 反对称性》，《数学物理通讯》，185（1997），709-722。

[6] O. Elchinger、K. Lundengard、A. Makhlouf、S. Silvestrov，带有 (τ,σ) -导子以及 Witt 代数和 Virasoro代数的（p，q）-形变[J]。《Forum Mathematicum》，2016年，28(4)：657-673。[7] E. Frenkel、N. Reshetikhin，量子仿射代数及 Virasoro 代数和W代数的变形，《数学物理通讯》，178（1996年），237-264。[8] J.T. Hartwig、D. Larsson、S.D. Silvestrov，利用 σ-导子对李代数进行变形，代数杂志，295（2006年），314-361。[9] A. Hegazi、M. Mansour，李超代数的双参数量子形变。Chaos, Solitons and Fractals，2001年，12：445-452。[10] N. Hu，q-形变的维拉索罗代数的量子群结构。Letters in Mathematical Physics，1998年，44(2)：99-103。[11] N. Hu，q-Witt代数、q-Virasoro代数、q-李代数、q-全纯自同构群结构及其表示，Colloq. Algebra，6(1)（1999年）51-70。⩒[12] N. Hu、M. Rosso、H. Zhang，双参数量子仿射代数$U_{r,t}$（sl_n），Drinfeld 实现与量子仿射Lyndon基。《数学物理通讯》，2008年，278：453-486。[13] C. Kassel，微分算子、维拉索罗代数及其 q-类比的循环同调，《数学物理通讯》146（1992年），343–356。[14] M. Mansour、E.H. Tahri，具有霍普夫结构的维拉索罗代数和 Kac-Moody代数的 q-形变，现代物理快报，14（1999年），733-743。[15] C.H. Oh 和 K Singh， q-海森堡代数和 q-维拉索罗代数的实现，物理学杂志A：数学与一般，27（1994年），3439-3444。[16] D. Yau，作为变形与同调的 Hom代数，李理论杂志，19，409-421（2009年）。[17] L. Yuan，与量子群相关的 W (2, 2) 李代数的 q-形变[J]。《数学学报（英文版）》，2012年，28(11)：2213-2226。