arXiv:2305.02671v1 [physics.plasm-ph] 4 May 2023

旋转磁化等离子体中布里渊共振的准线性理论

J.-M. Rax[1,2], R. Gueroult[3] 和 N. J. Fisch[4]

[1]安德林格能源与环境中心 + 普林斯顿大学，美国新泽西州普林斯顿，邮编 08540 ，
美国[2]IJCLab，巴黎-萨克雷大学，法国奥赛 91405[3]LAPLACE，图卢兹大学、法国国家科学研究中心、图卢兹国立综合理工学院、图卢兹第三大学，法国图卢兹 31062[4]普林斯顿大学天体物理科学系，美国新泽西州普林斯顿 08540

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

自旋角动量和轨道角动量都可以在旋转波与旋转磁化等离子体之间交换。通过共振，波的自旋角动量和轨道角动量可以与粒子的回旋旋转和漂移旋转耦合。然而，研究表明，经典上用于描述波与粒子间共振能量-动量交换的朗道共振条件和回旋共振条件，在旋转磁化等离子体柱中已不再适用。在这种情况下，研究发现了一种新的共振条件：波频率、受惯性效应修正的回旋频率与导引中心旋转的谐波之间须满足共振匹配。随后推导出一个新的准线性方程，用于描述通过这些新的布里渊共振发生的轨道角动量和自旋角动量交换，并借此揭示由波驱动的径向电流，该电流负责角动量吸收。

1. 引言

如何维持并控制旋转磁化等离子体柱的角动量，是应用等离子体物理和基础等离子体物理中的核心问题。在应用方面，旋转非中性等离子体的首个成功应用，是由布里渊提出理论的磁控管微波源（Brillouin 1945）。此后，旋转等离子体构型的一项重要动因一直是热核聚变（Lehnert 1971），包括旋转托卡马克（Rax et al. 2017；Ochs & Fisch 2017）和旋转磁镜（Bekhtenev et al. 1980；Hassam 1997；Fetterman & Fisch 2008, 2010；Teodorescu et al. 2010）。除聚变之外，旋转等离子体还因离子加速（Janes 1965；Janes et al. 1965, 1966）和质量分离（Bonnevier 1966；Krishnan et al. 1981；Prasad & Krishnan 1987）而受到关注，例如，这些技术可用于核废料清理（Gueroult et al. 2015）、乏核燃料后处理（Gueroult & Fisch 2014；Timofeev 2014；Vorona et al. 2015；Dolgolenko & Muromkin 2017）或稀土元素回收（Gueroult et al. 2018）。在基础研究方面，磁化旋转等离子体理论已被证明有助于理解脉冲星动力学和辐射传输（Gueroult et al. 2019b）、旋转增强陀螺性（Gueroult et al. 2020），以及等离子体中的图像旋转（亦称法拉第-菲涅耳效应）（Rax & Gueroult 2021）。旋转磁化等离子体中角动量扰动的绝热理论，也为几何贝里相位提供了一种有趣的实现（Rax & Gueroult 2019）。

两种电场构型可以维持磁化等离子体的稳态旋转。一种是具有径向磁场和轴向电场的霍尔构型。这

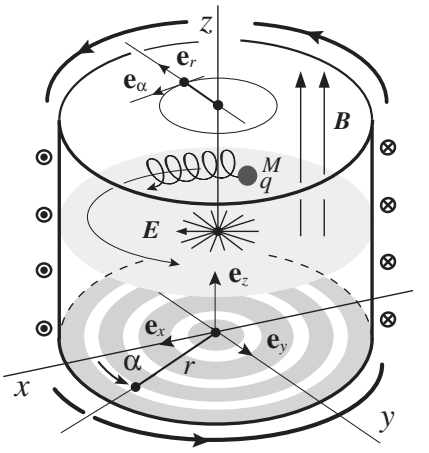

FIGURE 1. 绕 z 轴旋转的等离子体中的电场和磁场构型，α 为极角， r 为极半径。

是固定式等离子体推进器中采用的构型。另一种如图1所示，是布里渊构型，具有轴向磁场和径向电场。这种构型主要用于质谱分离器（Gueroult等，2019年*c*）和单极装置（Barber 等，1972）。在本研究中，我们将把分析限定于后一种构型，并研究旋转布里渊构型中波与粒子之间角动量交换的准线性理论。

通常设想通过使用同心环形直流偏置端电极，向旋转圆柱形磁化等离子体柱注入稳态角动量，以补偿耗散，如图1中的灰色部分所示。这是 Lehnert（Lehnert 1970、1973年）最初提出的方案，其中假定电极驱动直流径向电场，使其垂直于直流轴向磁场。然而，近期研究表明，电场穿透鞘层并沿磁力线传播会对可实现的电场施加若干限制（Gueroult等2019年*a*；Poulos 2019；Liziakin 等 2020年、2021年；Trotabas 与 Gueroult，2022）。与此同时，过去十年间关于旋转磁镜（Fetterman 与 Fisch，2008、2010年）和旋转托卡马克（Rax 等 2017年；Ochs 与 Fisch，2017）的研究强调了利用电磁波，通过共振波粒角动量吸收驱动等离子体旋转并补偿耗散弛豫的潜力。尽管这些研究很有前景，但其依据的是简单的光子图像。

研究共振波粒相互作用的标准工具是准线性理论。对于处于静止状态的无限均匀磁化等离子体，准线性方程已广为人知（Rax 2011），并且已被证明对于评估热核等离子体中的能量吸收和电流产生特别有用（Fisch 1978、1987年）。处于静止状态的圆柱形非磁化等离子体的准线性方程也已被推导出来（Kaufman1971），而针对非均匀等离子体的广义准线性理论也已于近期建立（Dodin 2022）。然而，尽管如上所述，准线性理论对于重要应用似乎至关重要，但据我们所知，针对旋转磁化等离子体的准线性理论尚未建立。在本文中，我们将处理这一问题，推导旋转波和旋转磁化等离子体的准线性方程。该方程在动力学框架内描述角动量吸收/发射，并利用它揭示轨道角动量（OAM）、自旋角动量（SAM）与有限拉莫尔半径（FLR）效应之间的相互作用。

本文的组织结构如下。我们首先在第2 节回顾波和粒子角动量的基本要素。随后在第3 节推导由径向电场维持的磁化旋转等离子体的哈密顿描述，并阐明用于描述粒子动力学的角度/作用量变量的物理和几何意义。接着，我们在第4节利用这些正则角-作用量变量，确定正则角动量与动力学角动量之间的关系；并在第5节将旋转波扰动对旋转粒子动力学的影响建模为受扰哈密顿量。随后，在第6节利用这一形式体系确定新的共振条件，并在第7节推导描述作用量空间中分布函数时间演化的准线性动理学方程。最后，我们在第8节利用这一新的动理学方程研究 OAM 和 SAM 吸收，并在第9节推导波驱动径向电流的表达式。最后，第10 节总结本研究并概述主要发现。

2. 波与粒子的角动量

下文中，我们使用 (r, α, z) 表示柱坐标系，其基底为 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z)$。与之对应的笛卡尔坐标为 (x, y, z)，其基底为 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$。沿 z 的垂直轴方向为背景静态磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 的方向，而直流电场 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$ 沿径向。该构型如图 1 所示。

电磁波可以同时携带自旋角动量——与右旋（R）和左旋（L）圆偏振相关——以及轨道角动量（Gough 1986年；van Enk & Nienhuis 1994；Barnett& Allen 1994；G¨otte 等人, 2007年；Barnett 等人2017年）。事实上，携带轨道角动量的等离子体波在过去十年中一直是活跃的研究课题，研究对象既包括非磁化等离子体（Mendon.ca 2012年；Chen 等人, 2017年；Bliokh & Bliokh 2022年），也包括磁化等离子体（Shukla 2012年；Stenzel & Urrutia 2015年；Stenzel 2016年）。这类波的矢量场具有螺旋相位前沿结构，通常可写为

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathbf{e}_x \pm j\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\mathcal{E}_\pm(r)\exp j\left(n\alpha + \beta z - \omega t\right)\right]. \tag{2.1}$$

这里，$(\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y)\,\mathcal{E}_+$ 是右旋圆偏振场，而 $(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)\,\mathcal{E}_-$ 是左旋圆偏振场；电场 $\mathcal{E}(r)$ 是麦克斯韦方程组径向部分的解，ω 是波频率，$n \in \mathbb{Z}$ 是方位模数，$\beta \in \mathbb{R}$是轴向波矢。位于固定点 (r_0, α_0, z_0) 的观察者对方位角方向上的波电场振幅 $|\mathcal{E}_\pm(r_0)|$ 进行探测时，将测得以角速度 $d\alpha/dt = \omega/n$旋转的场分布 $|\mathcal{E}_\pm(r_0)|$，该波由式 (2.1) 描述。式 (2.1) 所给出的波矢量场中自旋角动量（SAM）和轨道角动量（OAM）成分的形式化识别，以及与之相关的 SAM 和 OAM 算符 S 和 L 的定义，见附录 A。

与此同时，轴对称场中的磁化带电粒子也可以同时携带自旋角动量和轨道角动量。前者与回旋运动相关，而后者与绕 z 轴的导引中心运动相关。需要注意的是，对于经典粒子，将角动量分解为回旋自旋角动量和漂移轨道角动量并非源自量子分析。这只是柯尼希定理的一个简单应用，该定理指出，一个系统的角动量可以分解为外部轨道部分和内部部分。如今，即使在经典框架内，这一内部部分对于波和磁化电荷也被称为自旋部分。还需注意，尽管带电粒子的量子自旋角动量 $\pm\hbar/2$ 应该

原则上，也可以将其与回旋自旋角动量和漂移轨道角动量一并考虑，但由于本研究假设等离子体温度远高于 $\hbar\omega_c$，因此将忽略这一因素。对于质子和 1 特斯拉的磁场， $\hbar\omega_c$的量级为 10^{-7} eV。现在更具体地考虑图 1 所示的等离子体柱，其背景磁场为轴向磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ，径向电场为 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$，这会导致导引中心绕 z 轴旋转。一个电荷为 q 、质量为 M 的离子由以下两项描述：(i) 其瞬时位置 $\mathbf{r} = \mathbf{R}_G + \rho_L$，其中 $\mathbf{R}_G$ 为导引中心位置，$\rho_L(t)$ 为拉莫尔半径；(ii) 其速度 $\mathbf{v} = \mathbf{V}_G + \mathbf{v}_c$，其中 $\mathbf{V}_G \sim (E/B)\,\mathbf{e}_\alpha$为导引中心漂移速度，而 $\mathbf{v}_c(t) = \omega_c \mathbf{e}_z \times \rho_L$ 为回旋速度，其中$\omega_c = qB/M$ 为离子回旋频率。瞬时角动量定义为 $M\mathbf{r} \times \mathbf{v}$，其在快速回旋运动上的平均值 $\langle\rangle$ 为

$$M\,\langle(\mathbf{R}_G + \rho_L) \times (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}_c)\rangle \cdot \mathbf{e}_z = MR_G^2\varpi + M\rho_L^2\omega_c = L_z + S_z. \tag{2.2}$$

其中 $\varpi = (E/BR_G)$ 是角 $E\times B$ 漂移速度。式（2.2）中的轨道角动量部分为 $L_z = M_G\varpi$ 其中 $M_G = MR_G^2$ 是离子相对于 z 轴的导引中心转动惯量。回旋自旋部分 S_z 定义为（$2M/q$） μ 其中 $\mu = m\omega_c^2\rho_L^2/2B$ 为拉莫尔磁矩。由此可得经典旋磁因子 $q/2M$。

上文介绍的波与粒子角动量分量之间的耦合，可以是绝热耦合，也可以是共振耦合。在流体层面，线性绝热耦合由介电张量的厄米部分描述，而线性共振耦合则由介电张量的反厄米部分和准线性方程描述。先来看绝热耦合：波的自旋角动量与粒子自旋角动量之间的耦合会产生经典的法拉第旋转（Chen 1984；Rax 2005）。波的自旋角动量与粒子轨道角动量之间的绝热耦合会产生机械法拉第效应——也称偏振拖曳（Jones1976）——其在等离子体中的特性近期已有研究（Gueroult 等2019年*b*、2020年）。最后，波的轨道角动量与粒子轨道角动量之间的绝热耦合，会产生近期在特里维尔皮斯–古尔德模和螺旋波模中发现的法拉第–菲涅耳旋转与分裂（Rax 与 Gueroult，2021）。再来看共振耦合：波的自旋角动量与粒子自旋角动量之间的耦合，常用于托卡马克中的电子和离子回旋共振加热（ECRH/离子回旋共振加热）（Rax 2011），也有人提出将其用于质量分离或粒子加速（Loeb 与 Friedland 1986；Pendergast等1988；Rax 等2007；Rax 与 Robiche 2010）。此外，正如引言中所述，已有研究提出利用波的轨道角动量与粒子轨道角动量之间的共振耦合来控制磁镜（Fetterman 与 Fisch，2008、2010年）和托卡马克（Rax 等2017年；Ochs 与 Fisch，2017）。

在本研究中，我们将通过推导准线性动理学方程来拓展这些结果。该方程能够帮助我们确定精确的共振条件，并据此揭示圆柱形旋转磁化等离子体中波与粒子自旋角动量（SAM）和轨道角动量（OAM）之间的耦合。这一新的共振条件完善了等离子体中已确定的共振耦合体系：（*i*）非磁化等离子体中的朗道共振，（*ii*）磁化等离子体中的回旋共振，以及（*iii*）激光驱动等离子体中的康普顿共振（Rax 1992）。由于我们的研究动机主要源于旋转磁镜、直线型托卡马克和质量过滤器，而其中的共振群体是离子群体，因此我们将采用非相对论框架。在这一假设下，我们将证明有限拉莫尔半径效应会导致轨道角动量与自旋角动量耦合的混合，表明旋转磁化等离子体具有比非磁化等离子体或普通中性物质更为复杂的角动量动力学。

3. 旋转等离子体的哈密顿描述

本节将阐述轴向磁化等离子体柱中由直流径向电场驱动的未扰动旋转的哈密顿描述。我们假设轴向磁场由一组线圈产生，这些线圈在等离子体柱边缘承载方位向直流电流。径向电场可以通过等离子体两端的直流极化同心电极产生，前提是满足电场穿透条件（Gueroult 等 2019年； Poulos 2019； Liziakin等2020、 2021； Trotabas 与 Gueroult, 2022）。或者，在非中性等离子体中（Davidson2001），电场就是空间电荷场，因此无需同心电极。我们聚焦于准中性等离子体中的离子群体，但所得结果也可以很容易地推广到准中性和非中性等离子体中的电子群体。

3.1. 布里渊模

质量为 M、电荷为 $q>0$的离子与静态径向线性电场$\mathbf{E}$ 和轴向均匀磁场 $\mathbf{B}$ 相互作用，如图 1 所示，并定义为

$$\frac{q}{M}\mathbf{E}=\left(\frac{\omega_c^2-\Omega^2}{4}\right)r\ \mathbf{e}_r, \tag{3.1}$$

$$\frac{q}{M}\mathbf{B}=\omega_c\mathbf{e}_z. \tag{3.2}$$

离子轨道因此是慢速和快速布里渊旋转的组合（Davidson 与 Krall, 1969；Davidson 2001）。与这些快速和慢速旋转相关的快速 Ω_+ 和慢速 Ω_- 角速度由下式给出

$$\Omega_\pm=-\frac{\omega_c}{2}\mp\sqrt{\frac{\omega_c^2}{4}-\frac{qE}{rM}}\underset{|\frac{E}{rB}|\ll\omega_c}{\approx}-\frac{\omega_c}{2}\mp\frac{\omega_c}{2}\pm\frac{E}{rB}, \tag{3.3}$$

其中 E 是在给定半径 r 处的直流径向电场，且 $4qE<Mr\omega_c^2$是经典的布里渊条件(Davidson 2001)。这两个解以归一化电场为自变量绘于图 2中。在弱电场区间 $|E/(rB)|\ll\omega_c$（图 2中的灰色区域）内，导引中心绕 z轴的角速度趋于经典的 $E\times B$ 漂移，而回旋运动绕导引中心的角速度则趋于通常的回旋运动。这对应于式（3.3）右侧的渐近极限。

由式（3.1），布里渊极限给出了简单的要求 $\Omega^2>0$ 其中

$$\Omega=\sqrt{\frac{q^2B^2}{M^2}-4\frac{qE}{Mr}}. \tag{3.4}$$

注意， Ω回旋频率 ω_c 和波频率 ω 在本研究中均假定为正。理解条件 $\Omega>0$ 的另一种方式是认识到，对于给定的场构型，方程（3.1， 3.2）中，径向不受限离子与径向受限离子之间的截止质量 M^* 是方程 Ω^2（M^*） $=0$的解。满足 $M<M^*$的离子会继续受限于构型轴线周围。另一方面，满足 $M>M^*$的离子会以指数速率向径向外侧逸出。因此，本研究假设 $M<M^*$或 $\Omega>0$，是研究径向有界旋轮线轨道的必要条件。

根据 Ω 在式（3.4）中定义的通常慢、快布里渊模由式（3.3）改写为

$$\Omega_\pm=-\frac{\omega_c\pm\Omega}{2}. \tag{3.5}$$

可以验证， $\Omega_++\Omega_-=-\omega_c$ 和 $\Omega_+-\Omega_-=-\Omega$。还需注意， $\Omega_+<0$ 和

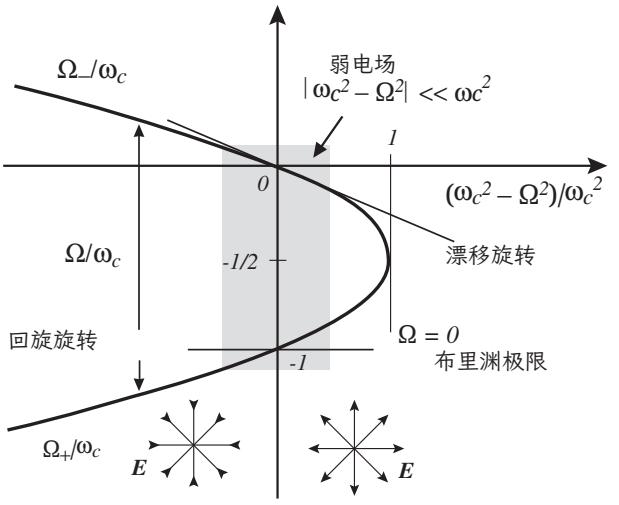

FIGURE 2. 慢角速度和快角速度随电场的变化关系。在灰色区域，弱电场下导引中心与拉莫尔半径的区分十分明显。

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2\Omega_+\Omega_-$。均匀电荷密度 $2\varepsilon_0 M\Omega_+\Omega_-/q$ 是偏离准中性的小量，正是它产生了径向电场。

3.2. 哈密顿描述

现在考虑这样一个单位制，使得 $q = 1$ 并且 $M = 1$。在这个简单的单位制中，式（3.1）和式（3.2）中给出的电场和磁场分别源自标量势

$$\Phi = \frac{\Omega^2 - \omega_c^2}{8}\left(x^2 + y^2\right) \tag{3.6}$$

以及矢势

$$\mathbf{A} = \frac{\omega_c}{2}\left(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x\right). \tag{3.7}$$

未受扰的哈密顿量 H_0 在经典力学中是动能 $\mathbf{v}^2/2$ 与势能 $\Phi(\mathbf{r})$之和，即

$$H_0\left(\mathbf{p},\mathbf{r}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Phi = \frac{1}{2}\left[\mathbf{p} - \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)\right]^2 + \Phi\left(\mathbf{r}\right), \tag{3.8}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是速度，而 $\mathbf{p} = p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y + p_z\mathbf{e}_z$ 是与离子的位置 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 共轭的正则动量。在笛卡尔坐标中，式（3.8）改写为

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{\omega_c}{2}\left(yp_x - xp_y\right) + \frac{\Omega^2}{8}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{p_z^2}{2}. \tag{3.9}$$

这是笛卡尔动量和位置变量的二次型，因此 H_0是可积的（Rax 2021年）。

现在引入从旧的笛卡尔动量（p_x、 p_y、 $p_z = P$）和位置（x、 y、 z）到新的作用量（J、D、 P）和角变量的正则变量变换

（φ、θ、z）变量，定义为

$$x=\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\cos\theta-\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\cos\varphi,\quad y=\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\sin\theta+\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\sin\varphi, \tag{3.10}$$

$$p_x=-\sqrt{\frac{\Omega D}{2}}\sin\theta+\sqrt{\frac{\Omega J}{2}}\sin\varphi,\quad p_y=\sqrt{\frac{\Omega D}{2}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\Omega J}{2}}\cos\varphi, \tag{3.11}$$

与 $J\geqslant 0$，$D\geqslant 0$，$\varphi\in[0,2\pi]$ 和 $\theta\in[0,2\pi]$。将方程（3.10，3.11）代入方程（3.9）即可得到

$$H_0=-\Omega_+J+\Omega_-D+\frac{1}{2}P^2. \tag{3.12}$$

如预期，这一结果与角变量（φ，θ，z）无关。另请注意，根据方程（3.5），回旋（动能）部分的能量 $-\Omega_+J$ 始终为正，而漂移（势能）部分 Ω_-D 则可能为正，也可能为负。粒子垂直于磁场的速度$\mathbf{v}$ 定义为 $p_x\mathbf{e}_x+p_y\mathbf{e}_y$ $^-\mathbf{A}$，极半径 r定义为 $\sqrt{x^2+y^2}$，由将方程（3.10，3.11）代入笛卡尔坐标定义即可得到：

$$\mathbf{v}=\left(-\Omega_+\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\sin\varphi-\Omega_-\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\sin\theta\right)\mathbf{e}_x + \left(-\Omega_+\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\cos\varphi+\Omega_-\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\cos\theta\right)\mathbf{e}_y \tag{3.13}$$

and

$$r^2=x^2+y^2=2\frac{J+D}{\Omega}-4\frac{\sqrt{JD}}{\Omega}\cos\left(\theta+\varphi\right). \tag{3.14}$$

确定了一组描述离子与电场和磁场相互作用的正则角变量（φ、θ、z）和作用量（J、D、P）后（见方程（3.6、3.7））， 我们现在可以尝试阐明这些新变量的物理意义。首先， z 和 P分别是通常的笛卡尔坐标和动量$P=Mv_z$，其物理含义十分直观。另一方面，（J、φ）和（D、θ）的含义则不那么明显。为帮助理解，图3展示了 $D>J$ 时离子在（x、y）平面内的运动。离子的瞬时位置为 $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r=$ OC，可视为旋转的拉莫尔半径 GC 与旋转的导引中心 OG 之和。从图3可知， θ 是 $\mathbf{e}_x$ 与 OG 之间的逆时针夹角，而 φ 是 $-\mathbf{e}_x$ 与 GC 之间的顺时针夹角。由方程（3.10）可得，导引中心 |OG| $=\sqrt{2D/\Omega}$，而拉莫尔半径 |GC| $=\sqrt{2J/\Omega}$。方程（3.14）就是对 OGC 三角形应用余弦定理，其中所用的角是图3中的灰色角。

根据图 J， φ) 对 (D， θ) 提出的几何解释假设了 3。若现在考虑 $D>J$，正则描述式（ $J>D$3.10，3.11，3.12）仍然成立，但轨道图像应替换为图 4所示的情形。正如我们将在下一节展示的，这两种状态 可以根据粒子 正则角动量的符号加以区分。实际上，本研究中的大多数物理解释都将基于 $D>J$ 这一排序展开，因为它最直观，但应牢记，所有关系在两种情况下均成立 $J\lesseqgtr D$。

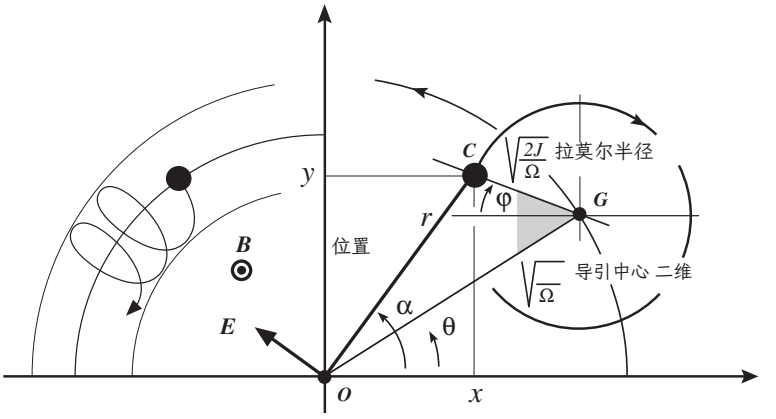

FIGURE 3. 角度（φ、θ）和作用量（$J < D$）变量在真实（x、y）空间中的物理意义。

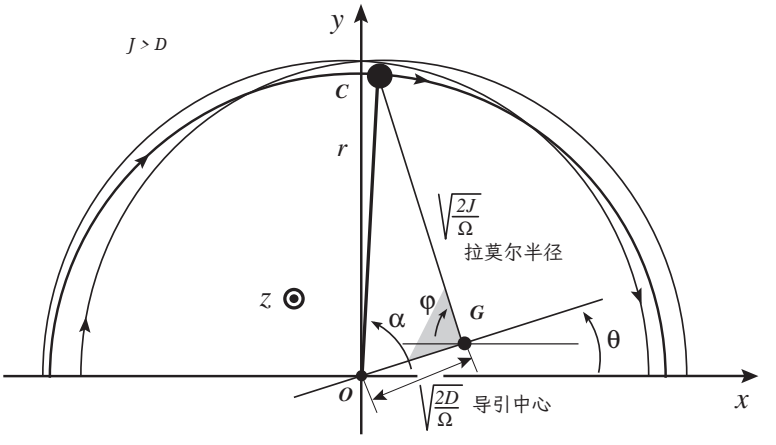

FIGURE 4. 角度（φ，θ）和作用量（$J > D$）变量在实（x，y）空间中的物理意义。

最后，可以验证，哈密顿方程

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial D} = \Omega_-, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = -\Omega_+, \tag{3.15}$$

从而得到预期的经典布里渊结果（Davidson 2001）。快速（回旋）旋转前面的负号仅仅是由于将 φ 的角度定义为顺时针方向所致（若将 θ定义为逆时针方向，则会得到相反的结果）。不过，此处必须强调，拉莫尔半径角度 φ 并不会以回旋频率 $-\Omega_+ \neq \omega_c$旋转。同样，θ 导引中心的角度 也不会随其 $E \times B$ 速度 $\Omega_- \neq -E_r/rB$旋转。这是惯性效应所导致的结果。因此，将运动解释为缓慢的 $E \times B$ 漂移$\Omega_- \approx -E_r/rB$ 与快速的回旋旋转之和，$\Omega_+ \approx -\omega_c$ 仅在弱电场极限 $|E_r/B| \ll r\omega_c$ 下才有意义，该极限在图 2 中以灰色突出显示。

3.3. 弱场极限

为了更深入地理解弱场区间的物理特性——这一区间与准中性等离子体的应用实验相关——我们将离子轨道表示为 $E \times B$ 缓慢旋转与快速回旋旋转的组合。我们

引入导引中心半径 R_G 和拉莫尔半径 ρ_L

$$x = R_G \cos\left(-\frac{E}{rB}t\right) - \rho_L \cos(\omega_c t), \tag{3.16}$$

$$y = R_G \sin\left(-\frac{E}{rB}t\right) + \rho_L \sin(\omega_c t). \tag{3.17}$$

方程（3.16、3.17）只是将方程（3.10改写为弱场极限下的形式 $|E_r/rB| \ll \omega_c$。在此弱场极限下 $\Omega \approx \omega_c$，作用量 J 和 D 分别可与回旋轨道的磁通量 $\Psi_L = \pi\rho_L^2 B$ 以及导引中心轨道的磁通量联系起来$\Psi_G = \pi R_G^2 B$，其中

$$D \approx \frac{\omega_c}{2} R_G^2 = \frac{\Psi_G}{2\pi}, \tag{3.18}$$

$$J \approx \frac{\omega_c}{2} \rho_L^2 = \frac{\Psi_L}{2\pi}. \tag{3.19}$$

请注意，这两个磁通量分别是阿尔芬理论中的第一和第三绝热不变量。由此恢复了作用量变量与绝热不变量之间通常的联系。

进一步假设 $J \ll D$，即拉莫尔半径较小，并为清晰起见，暂时重新引入离子质量和电荷 M 及 q，则在弱场条件下可得

$$-\Omega_+ J \approx \frac{M}{2} v_c^2, \tag{3.20}$$

$$\Omega_- D \approx q\Phi\left(R_G\right) + \frac{M}{2}\frac{E^2}{B^2}. \tag{3.21}$$

将这些结果代入方程（3.12）可得

$$H_0 \underset{|\frac{E}{rB}| \ll \omega_c}{\approx} \frac{M}{2} v_c^2 + \frac{1}{2M} P^2 + \frac{M}{2}\frac{E^2}{B^2} + q\Phi. \tag{3.22}$$

因此，在此极限下，哈密顿量简化为四项之和：回旋动能 $Mv_c^2/2$、导引中心的静电势能 $q\Phi(R_G)$、漂移动能 $ME^2/2B^2$ 以及平行动能。

现在，若考虑对哈密顿量 H_0 的波扰动 δH_0，方程（3.22）表明，在弱场极限下，该扰动会导致以下能量增加或减少：（i）回旋动能 $Mv_c\delta v_c$、（ii）势能 $q\delta\Phi$ 以及（iii）轴向动能 $Mv_z\delta v_z$。未受扰哈密顿量（方程（3.12））的结构确实使得在这种情况下，旋转波能够向旋转粒子传递轴向线动量、动能$-\Omega_+\delta J \approx Mv_c\delta v_c$ 和/或势能 $\Omega_-\delta D \approx q\delta\Phi$。当弱场近似不再成立时，惯性效应使这一图景变得更加复杂，此时角度—作用变量（φ，θ，z）和（J，D，P）便为理解其动力学提供了合适的框架。为简化代数运算，我们定义 J、$\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$，使得

$$\mathbf{J} = (J, D, P) \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\varphi, \theta, z), \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} = (-\Omega_+, \Omega_-, P). \tag{3.25}$$

最后，我们指出，由于 H_0 是可积的，因此存在无穷多组正则角变量和作用量变量。选择 $\boldsymbol{\theta}$和$\mathbf{J}$，只是因为它们具有直观明了的几何解释，如图3 和图4所示，而且在弱场区域具有清晰的物理意义。

4. 正则角动量与动力学角动量

根据方程（3.10、3.11和3.13）， z 分量的正则角动量和动力学角动量分别可写为

$$L_C = xp_y - yp_x = D - J \tag{4.1}$$

and

$$L_K = xv_y - yv_x = \frac{2\Omega_-}{\Omega} D + \frac{2\Omega_+}{\Omega} J + \frac{2\omega_c}{\Omega} \sqrt{JD} \cos(\theta + \varphi). \tag{4.2}$$

如上一节所述， J 和 D 的排列取决于 L_C的符号。具体而言， $L_C > 0$ 会导致图3 所示的轨道拓扑，而 $L_C < 0$ 会导致图4所示的轨道拓扑。还需注意， L_C 由于圆柱对称性而与时间无关，但 L_K 是时间的函数，因为 $\theta + \varphi = (\Omega_- - \Omega_+) t$。

通过考虑质量为 $M = 1$的旋转离子的转动惯量，可以对式（4.2）作出物理解释。再次将旋转离子视为旋转导引中心与旋转拉莫尔半径之和，导引中心的转动惯量为 $M_G = 2D/\Omega$，而拉莫尔半径的转动惯量为 $M_L = 2J/\Omega$。相应的角动量分别为 $M_G d\theta/dt = M_G \Omega_-$（$\theta$ 为逆时针方向）和$-M_L d\varphi/dt = M_L \Omega_+$（$\varphi$ 为顺时针方向）。可以验证，这两个角动量之和 $M_G \Omega_- + M_L \Omega_+$ 确实与由式（ $\langle L_K \rangle$ 4.2）计算得到的 $\langle\rangle$ 相匹配，其中平均值取遍角度 $\theta + \varphi$。

定义磁通量

$$\Psi = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\omega_c}{2} \oint (x dy - y dx) = \pi \omega_c r^2 \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{C}$ 沿着 $\Delta\alpha = 2\pi$ 轨道绕行一周的轮廓，并且 r^2 由式（3.14）给出，式（3.14、4.1、4.2还可进一步用于写出

$$L_C = L_K + \frac{\Psi}{2\pi}. \tag{4.4}$$

因此我们看到， $L_C \lessgtr 0$这一判据被确定为决定轨道拓扑类型的条件（即图3 所示的类型，或图4所示的类型），可以改写为$2\pi L_K \lessgtr -q\Psi$。最后这个条件可以解释为动能与磁耦合之间的一种大小关系。

5. 旋转波的哈密顿描述

现在我们考虑与旋转传播势相关的波扰动。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\phi(r) \exp j(n\alpha + \beta z - \omega t)\right], \tag{5.1}$$

以及 R 或 L 矢势

$$\mathbf{a}_\pm(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[a(r) \exp j(n\alpha + \beta z - \omega t) \frac{\mathbf{e}_x \pm j\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\right], \tag{5.2}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$。函数 $a(r)$ 是麦克斯韦-安培方程径向部分的实振幅解。麦克斯韦-法拉第方程通过 $\mathcal{E} = -\partial \mathrm{a}_\pm/\partial t$ 和 $\mathcal{B} = \nabla \times \mathrm{a}$ 得到满足，其中 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是波的电场和磁场。函数 $\phi(r)$ 是泊松方程的解。最近发现，对于啸声波或螺旋波分支以及

旋转等离子体中的 Trievelpiece-Gould 模式（Rax 和 Gueroult 2021年）。如附录 A 所示，波 $\mathbf{a}_{\pm}(\mathbf{r}\ t)$ 同时是自旋角动量和轨道角动量的本征函数，因为

$$\left(\widehat{L}_z + \widehat{S}_z\right) \cdot \mathbf{a}_{\pm} = (n \mp 1)\, \mathbf{a}_{\pm}, \tag{5.3}$$

且标量势波 $\phi(\mathbf{r}\ t)$ 是一个轨道角动量本征函数。

受扰哈密顿量 H 描述了离子与直流约束场（方程（3.6、3.7））及旋转射频波（方程（5.1、5.2））的相互作用，因此可写为

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 + \Phi - (\mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_{\pm} + \frac{\mathbf{a}_{\pm}^2}{2} + \phi. \tag{5.4}$$

这里我们忽略了相互作用的二阶有质动力部分

$$\mathbf{a}_{\pm}^2/2 \ll \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\pm} \tag{5.5}$$

但保留了一阶偶极耦合$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\pm} + \phi$，它负责波与粒子之间能量和动量的准线性共振交换。这种将偶极扰动与有质动力扰动分开处理的做法很常见，我们在此不探讨这两种耦合之间的相互作用（Ochs& Fisch 2021a，b，2022年，2023年），这种相互作用与波的瞬态建立有关。定义

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_{\pm} + \phi = v_x a_{\pm x} + v_y a_{\pm y} + \phi, \tag{5.6}$$

并假设 $V_n \ll H_0$，则可写为

$$H = H_0(\mathbf{J}) + V_n(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t), \tag{5.7}$$

也就是说 H 分解为未扰动部分 H_0，其形式见方程（3.12），以及波扰动。利用方程（3.13、5.1、5.2），可得波扰动为

$$V_n = \mathrm{Re}\left[\mp j a(r)\left[\Omega_+\sqrt{\frac{J}{\Omega}}\exp(\mp j\varphi) - \Omega_-\sqrt{\frac{D}{\Omega}}\exp(\pm j\theta)\right]\exp j(n\alpha + \beta z - \omega t)\right] + \mathrm{Re}\left[\phi(r)\exp j(n\alpha + \beta z - \omega t)\right]. \tag{5.8}$$

最后一步是将 $a(r)$ 和 $\phi(r)$ 都表示为 (J, D) 和 (φ, θ) 的形式，从而将 V_n 写成适合进行准线性分析的形式。这需要找到一个方便的基底来表示 $a(r)$ 和 $\phi(r)$。对于静止均匀等离子体中的准线性理论，这个基底是与平移不变性相关联的平面波傅里叶集合。在随机相位近似（RPA）的框架下，每个傅里叶分量随后在准线性扩散算子中独立起作用；该算子是对这些傅里叶分量振幅平方求和。

在我们关注的情形下，鉴于问题具有圆柱对称性，采用傅里叶-贝塞尔展开似乎更为自然。选择这种展开方式的另一个理由是，近期关于轨道角动量法拉第-菲涅耳效应的研究（Rax & Gueroult 2021年）表明，旋转等离子体中啸叫波分支的本征模属于式（5.2）所描述的类型；在此情形下，$a(r)$ 为第一类贝塞尔函数 $J_n(kr)$。研究还表明，旋转等离子体中 Trievelpiece-Gould 分支的本征模属于式（5.1）所描述的类型；在此情形下，$\phi(r)$ 与 $J_n(kr)$ 成正比，且在每种情形下，k 均满足相应的色散关系。最后，傅里叶-贝塞尔展开定理指出，旋转等离子体中等离子体波谱的所有其他分支也都可以用式（5.1、5.2）所示类型的波来表示，并且 $a(r)$ 可表示为 $\tilde{a}(k)$，即 $a(r) = \int k\tilde{a}(k)\, J_n(kr)\, dk$，其中 $\tilde{a}(k) = \int r a(r)\, J_n(kr)\, dr$。因此，不失一般性，我们考虑横向和纵向旋转且

传播的柱面波，其类型为

$$\mathbf{a}_{\pm}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathcal{E}(\omega)}{j\omega}J_n(kr)\exp j(n\alpha+\beta z-\omega t)\frac{\mathbf{e}_x\pm j\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\right], \tag{5.9}$$

$$\phi(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left[\phi(\omega)J_n(kr)\exp j(n\alpha+\beta z-\omega t)\right]. \tag{5.10}$$

这里 $\mathcal{E}(\omega)$ 和 $\phi(\omega$分别是给定柱面波包的横向电场和势的谱分量。最终的准线性算子关于$\mathcal{E}$和 ϕ呈二次形式，最终将对完整的 ω 和 $k(\omega)$ 谱求和。不过，在本研究中，我们不指定 ω 谱以及 $k(\omega,\ \beta,\ n)$ 色散关系。为得到一般性结果，我们转而分析单个柱面分量作用下的准线性动力学，见方程（5.9，5.10）。波包的准线性效应只需将各傅里叶-贝塞尔分量的效应相加，与平面波的情形相同。

对于静止的均匀磁化等离子体，通常利用雅可比-安格尔展开来识别平面波的谐波回旋共振。对于方程（5.9，5.10）所描述的柱面波，我们则考虑图**OGC** 中的三角形，见图3 和图4 ，并应用格拉夫加法定理

$$J_n(kr)\exp(jn\alpha)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}J_{l+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_l\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right)\exp j\left[(l+n)\theta+l\varphi\right]. \tag{5.11}$$

在拉莫尔半径为零的极限下，右侧的求和化简为 $l=0$项，而 $l\neq 0$ 项则体现有限拉莫尔半径效应。可以验证， k 越大且 J/D越大，要使等式（5.11）左侧的结果得到更好的逼近，就需要更多项。将此结果代入方程（5.7、5.8），哈密顿量可写为

$$H=H_0(\mathbf{J})+\mathrm{Re}\left[\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}V_{nl\sigma}(J,D)\exp j\left[(l+\sigma)\varphi+(l+n)\theta+\beta z-\omega t\right]\right] \tag{5.12}$$

其中，我们引入了 $\sigma\in[-1,0,+1]$ 自旋角动量指标，使得 L、R 和标量波扰动 $V_{nl\sigma}$ 由下式给出。

$$\begin{aligned}V_{n,l,\sigma=+1}=&\mathcal{E}\frac{\Omega_+}{\omega}\sqrt{\frac{J}{\Omega}}J_{l+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_l\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right)\\&-\mathcal{E}\frac{\Omega_-}{\omega}\sqrt{\frac{D}{\Omega}}J_{l+1+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right),\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}V_{n,l,\sigma=-1}=&\mathcal{E}\frac{\Omega_-}{\omega}\sqrt{\frac{D}{\Omega}}J_{l-1+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_{l-1}\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right)\\&-\mathcal{E}\frac{\Omega_+}{\omega}\sqrt{\frac{J}{\Omega}}J_{l+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_l\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right),\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$V_{n,l,\sigma=0}=\phi J_{l+n}\left(k\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)J_l\left(k\sqrt{\frac{2J}{\Omega}}\right). \tag{5.15}$$

为简化符号表示，我们定义向量

$$\mathbf{N}=[(l+\sigma),(l+n),\beta] \tag{5.16}$$

并将其用作索引，以指定 n、 l 和 σ。方程（5.7）中的哈密顿量可写为

用紧凑形式表示

$$H\left(\mathbf{J},\boldsymbol{\theta},t\right)=H_0\left(\mathbf{J}\right)+\sum_{\mathbf{N}}V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right)\exp j\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}-\omega t\right), \tag{5.17}$$

其中，为了便于阅读，我们省略了 Re 的表述，且 $\sum_{\mathbf{N}}=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}$。这意味着，当我们分别研究 L、R 和势波时，柱面波方程（5.9、5.10）中的轨道角动量方位数 n 以及自旋角动量数 σ 均保持不变。

对于纯旋转波，其特征为 n， σ 以及 $\beta=0$，关系式（5.17）的结构揭示了波所引起的作用量和能量微小增量之间的若干选择定则。这些选择定则还给出了作用量交换之间的分支比。为说明这一点，考虑哈密顿方程

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-j\omega\sum_{\mathbf{N}}V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right)\exp j\left(\mathbf{N}\cdot\theta-\omega t\right) \tag{5.18}$$

$$\frac{dL_C}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\varphi}-\frac{\partial H}{\partial\theta}=j\left(\sigma-n\right)\sum_{\mathbf{N}}V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right)\exp j\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}-\omega t\right) \tag{5.19}$$

波所诱导的离子能量 δH 的微小变化，因而意味着角动量 δL_C 也会发生微小变化，通过

$$\frac{\delta L_C}{\delta H}=\frac{n-\sigma}{\omega}. \tag{5.20}$$

使用 $\delta H=\Omega_-\delta D-\Omega_+\delta J$，我们可以将回旋动能通道与势能通道之间的分支比表示为

$$\frac{\delta J}{\delta H}=\frac{l+\sigma}{\omega}, \tag{5.21}$$

$$\frac{\delta D}{\delta H}=\frac{l+n}{\omega}. \tag{5.22}$$

这些关系为优化相空间设计提供了首要的基础工具。例如，可以设定径向电流（$\delta D\neq 0$），同时避免离子回旋共振加热（$\delta J=0$）。在这种情况下，方程（5.21、5.22）指出，应选择满足 $l+\sigma=0$ 但不满足 $l+n\neq 0$ 的波。然而，要在各种能量通道之间优化功率沉积，最佳策略是考虑动理学方程。

6. 布里渊共振

6.1. 共振条件

哈密顿量方程（5.17）使我们能够确定共振耦合的条件。为此，只需将未受扰运动 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\Omega}t+\boldsymbol{\theta}_0$ 代入每个 $j\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}-\omega t\right)$ 扰动的振荡相位 $V_{\mathbf{N}}\exp j\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}-\omega t\right)$ 中。随后得到相位因子 $j\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)t+j\boldsymbol{\theta}_0$，当共振条件满足时，它将停止旋转并变为定常

$$\omega=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}=-\left(l+\sigma\right)\Omega_++\left(l+n\right)\Omega_-+\beta P. \tag{6.1}$$

得以满足。该共振条件取代了经典的朗道-回旋共振条件

$$\omega-\beta v_z=m\omega_c \tag{6.2}$$

其中 $m\in\mathbb{Z}$，且 v_z 是沿磁场方向的速度。由于式（6.1）涉及的是慢、快布里渊模，而非回旋频率

我们将式（6.1）称为布里渊共振条件。可以验证，正如预期，当式（3.1）中的静电场为零时，式（6.1）将化为式（6.2）。将式（6.1）改写为

$$\omega - \beta P - (n+\sigma)\Omega_- = l(\omega_c + 2\Omega_-) + \sigma\omega_c, \tag{6.3}$$

左侧只是同时考虑轴向平移和方位角旋转后的多普勒频移波频率（Garetz 1981年；Courtial 等人1998年）。因此，右侧第一项 l（$\omega_c+2\Omega_-$）可以解释为经惯性效应修正的正常（$l>0$）或反常（$l<0$）多普勒效应。事实上，$\omega_c+2\Omega_-$ 是离子以角频率 Ω_-旋转时，经科里奥利力修正的回旋频率。正常／反常多普勒效应这一经典却微妙的图景，可以扩展到导引中心的螺旋运动（P，Ω_-）慢于或快于轴向（ω/β）和方位角（ω/n）相速度的情形（Nezlin 1976年）。

在共振时，$\exp j\,(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}-\omega)\;t = \exp j\,(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}_0)$。一些粒子获得能量－动量，另一些则失去能量－动量，变化的符号由相位因子 $\mathrm{Re}\,(\exp j\,(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}_0))$ 决定。在随机相位近似（RPA）框架下，可以描述作用量的这种扩散行为：对 $\exp\,j\,(\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}_0)$ 下作用量变化的平方取平均，从而构造准线性扩散方程。构建这种动力学描述并导出准线性方程，可以从相空间的拉格朗日或欧拉视角进行（Rax 2021年）。本文将采用后一种方法，相关回顾见附录B。

最后请注意，共振条件式（6.1）可以从简单的光子图像中推导出来。为此，我们回顾一下，与式（2.1）所描述的波相关联的光子携带能量 $\hbar\omega$ 以及沿 z 轴的线动量 $\hbar\beta$。当该光子被旋转离子吸收时，粒子能量 H_0 和线动量 P 的变化为

$$\delta H_0 = \hbar\omega, \quad \delta P = \hbar\beta. \tag{6.4}$$

除了能量和轴向线动量外，与波式（2.1）相关联的光子还携带沿 $n\mp1$）$\hbar$ 轴的轨道角动量和自旋角动量（ z）（见附录 A）。当该光子被旋转离子吸收时，离子正则角动量的变化 L_C 为

$$\delta L_C = (n\mp1)\,\hbar. \tag{6.5}$$

式（3.9）揭示了哈密顿量 H_0的谐振子结构。因此，我们可以类比磁化量子粒子的朗道能级哈密顿量，并得出结论：在量子层次上，作用量 J 和 D 只能是 $\hbar$的整数倍，即

$$\delta J = n_J\hbar, \quad \delta D = n_D\hbar \tag{6.6}$$

其中（n_J，n_D）$\in\mathbb{Z}^2$ 是一对整数。实际上，我们考虑的是量子数较大的准经典极限：$n_J+1/2\sim n_J$和 $n_D+1/2\sim n_D$。于是，由式（3.12，4.1）可得

$$\delta L_C = \delta D - \delta J, \tag{6.7}$$

$$\delta H_0 = \Omega_-\delta D - \Omega_+\delta J + \delta P^2/2. \tag{6.8}$$

这两个关系与半经典展开 $\delta P^2 = 2\hbar\beta P + O\left(\hbar^2\right)$最终导致

$$\omega - \beta P = -n_J\Omega_+ + (n_J + n\mp1)\,\Omega_- + O\left(\hbar\right) \tag{6.9}$$

如果 $\hbar = 0$，我们会发现这与式（6.1）中确定的共振条件类似，其中 $n_J = l \pm 1$，这支持了简单的光子图像。

6.2. 扩散路径

除了共振线方程（6.1）之外，我们还可以从哈密顿量中识别出作用量空间中的扩散路径，沿着这些路径会发生共振能量—动量交换。将研究限制在方程（$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{J})$ 中的单个共振耦合上，根据哈密顿方程，靠近共振方程（5.17）时，方程（6.1）写作

$$\left.\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right|_{\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\omega} = -j\mathbf{N}V_{\mathbf{N}} \exp j\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}_0, \tag{6.10}$$

$$\left.\frac{dH}{dt}\right|_{\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\omega} = -j\omega V_{\mathbf{N}} \exp j\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta}_0. \tag{6.11}$$

与共振能量变化δH 相关的共振作用量变化（波踢） $\delta\mathbf{J}$ 因而满足关系

$$\omega\delta\mathbf{J} = \mathbf{N}\delta H. \tag{6.12}$$

实际上 δH 可以在附录 δH_0 B 所回顾的双时间尺度准线性框架中取为B。事实上，无需利用长期准线性演化与快速 ω 振荡之间的排序关系，我们只需计算方程（ $H_0$3.12）中的变化量，并考虑方程（6.12），即可得到

$$\delta H_0 = \boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\mathbf{J} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{N}\frac{\delta H}{\omega} = \delta H \tag{6.13}$$

因为 $\omega = \mathrm{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}$。因此，旋转波与旋转粒子之间共振能量交换所对应的共振波踢 $\delta\mathrm{J}$ 为

$$[\delta J, \delta D, \delta P] = [(l+\sigma),(l+n),\beta]\,\frac{\delta H_0}{\omega} \tag{6.14}$$

对于给定的 $V_{\mathbf{N}}$ 耦合。在弱场极限下，这可简化为

$$[\omega_c\rho_L\delta\rho_L, \omega_c R_g\delta R_g, \delta v_z] = [(l+\sigma),(l+n),\beta]\,\frac{\delta H_0}{M\omega} \tag{6.15}$$

wh这[illegible]频率 la[illegible]关系式（6.12）表明，存在一个作用量的线性组合[illegible]，在波耦合所规定的时间演化下保持不变$V_{\mathbf{N}}\exp j\,(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\theta} - \omega t)$，即

$$\delta\,(\mathbf{N}\times\mathbf{J}) = 0. \tag{6.16}$$

聚焦于布里渊共振而非朗道共振，我们将分析限制在 $\beta P = 0$ 的情形。对于单个 $V_{\mathbf{N}}$ 式（6.12、6.16）由此确定作用量空间中的一条扩散路径（J， D）。具体而言，经过共振点（J_0， D_0）的路径表示为

$$(l+n)\,(J-J_0) = (l+\sigma)\,(D-D_0)\,. \tag{6.17}$$

如图 5所示。方程（6.17）所示的扩散路径在单个 $V_{\mathbf{N}}$ 耦合作用下的动力学过程中保持不变。只要满足方程（6.1）所示的共振条件，且 $|V_{nl\sigma}$ （J_0， D_0）| 不太小，作用量空间中的准线性扩散就会沿着这些扩散路径进行。图 5 还表示了等能线，也就是 即（J，D）空间中 H_0 为常数的点。对于 $\Omega > \omega_c > 0$，电场具有约束作用

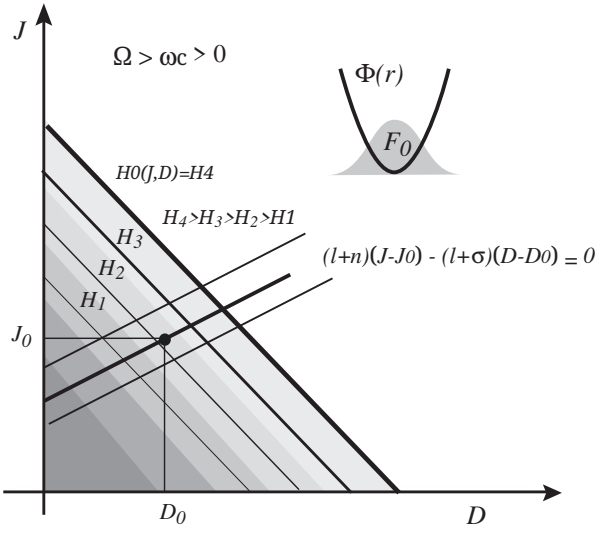

FIGURE 5. 等能级 H_0 和（J， D）作用量空间中的扩散路径。

因此我们可以考虑一个正则平衡分布函数

$$F_0\left(\mathbf{J}\right)=\frac{\Omega^2-\omega_c^2}{4\sqrt{2\pi}\left(k_BT\right)^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{H_0\left(\mathbf{J}\right)}{k_BT}\right) \tag{6.18}$$

其中 T 是温度，并且我们采用了归一化 $\int d\mathbf{J}F_0=1$。图 5中以灰色标示了（J,D）空间中相应的密度等值线。对于$0<\Omega\leqslant\omega_c$ 正则分布函数，式（6.18）无法归一化，因为势 $\phi(r)$）并不具有约束性，而是平坦的（$\Omega=\omega_c$）或呈山丘状（$\Omega<\omega_c$）。

6.3. 小拉莫尔半径极限

当拉莫尔半径 $\sqrt{2J/\Omega}$ 相对于径向波长 $2\pi/k$较小时，也就是说

$$k\sqrt{\frac{J}{2\Omega}}<1, \tag{6.19}$$

耦合系数$V_{n,\ l,\ \sigma}$ 在公式（5.13、5.14、5.15）中可以通过使用小参数展开式进行简化

$$J_l\left(k\sqrt{\frac{J}{2\Omega}}\right)\sim\frac{\left(k\sqrt{\frac{J}{2\Omega}}\right)^l}{l!}. \tag{6.20}$$

我们看到，在这一极限下， $l=0$ 项最为有效，因为它对应于最大的$V_{n,\ l,\ \sigma}$。因此，对于6.1式中的共振条件，当 $l=0$ 时，可得 $\omega-\beta P=-\sigma\Omega_++n\Omega_-$，而基频 $l=0$ 多普勒移频回旋共振项 $\sigma\Omega_+$仅由波的自旋角动量成分引起。

如果进一步假设 $\sigma=0$，如标量情形方程（5.10）所示，并且 $\beta P=0$，则可避免回旋项和朗道项，从而得到纯轨道角动量谐波布里渊–朗道共振

$$\omega=n\Omega_- \tag{6.21}$$

漂移旋转 Ω_- 与波的轨道角动量之间。这是维持等离子体柱旋转的最佳选择。

。式（6.21）的物理解释很简单：波的角速度 $d\alpha/dt = \omega/n$ 等于粒子导引中心的角速度 $-d\theta/dt = \Omega_-$。

6.4. 特殊示例

我们通过三个精选示例来说明布里渊耦合背后的物理机制。首先考虑一个势波 $\sigma = 0$，即式（5.10），其中 $\beta = 0$，并采用小拉莫尔半径近似，使得 $l = 0$。在这些条件下，$\mathbf{N} = [0, n, 0]$，式（6.14）可写为

$$\frac{\delta J}{\delta H_0} = 0, \quad \frac{\delta D}{\delta H_0} = \frac{1}{\Omega_-} \tag{6.22}$$

因为布里渊共振式（6.1）意味着 $\omega = n\Omega_-$。这一结果可以这样理解：在吸收过程中，$\delta H_0 > 0$，波能量通过波所诱导的导引中心在静电势 $\Phi(r)$ 中的径向运动转化为势能。在发射过程中，$\delta H_0 < 0$，粒子的势能则转化为波能量。磁控管利用这种不稳定性产生微波。还要指出，在旋转托卡马克中，通过提取自由能（Fisch & Rax 1992年，1993；Fisch & Herrmann 1994，1995；Herrmann & Fisch 1997年，同时冷却（$\delta H_0 < 0$）并清除 α粒子灰分（$\delta D > 0$）在这些波条件下最为理想。能量提取与径向排出的比率可通过Ω_-进行调节。

现在考虑一个矢量波 $\sigma = \pm 1$，即式（5.9），其中 $\beta = 0$，且没有 OAM（$n = 0$），并采用小拉莫尔半径近似，使得 $l = 0$。在这些条件下$\mathbf{N} = [\sigma, 0, 0]$，式（6.14）写为

$$\frac{\delta D}{\delta H_0} = 0, \quad \frac{\delta J}{\delta H_0} = -\frac{1}{\Omega_+} \tag{6.23}$$

因为布里渊共振式（6.1）意味着 $\omega = -\sigma\Omega_+$（请记住 $\Omega_+ < 0$）。在这种情况下，波能量直接转化为回旋能量 $-\Omega_+\delta J$。这就是受到惯性效应修正的纯离子回旋共振加热情形。

最后，考虑一个势波 $\sigma = 0$，即式（5.10），其中 $\beta = 0$ 且没有 OAM（$n = 0$），但存在有限拉莫尔半径效应 $l \neq 0$。在这些条件下 $\mathbf{N} = [l, l, 0]$，式（6.12）写为

$$\frac{\delta D}{\delta H_0} = \frac{1}{\Omega}, \quad \frac{\delta J}{\delta H_0} = \frac{1}{\Omega} \tag{6.24}$$

由于布里渊共振方程（6.1）意味着 $\omega = -l\Omega_+ + l\Omega_- = l\Omega$。这一结果可以这样理解：对于吸收过程 $\delta H_0 > 0$，波能量同时转化为动能 $-\Omega_+\delta J$ 和势能 $\Omega_-\delta D$，如方程（3.12）所示。然而，这两种能量通道之间的分配必须满足正则角动量守恒 $\delta L_C = 0$；由方程（4.1）可得 $\delta D = \delta J$。守恒 L_C 确实是哈密顿量 $H_0 + V$在旋转变换下不变的结果，因为此处的波既不携带轨道角动量（$n = 0$），也不携带自旋角动量（$\sigma = 0$）。

7. 旋转磁化等离子体中的准线性理论

波在等离子体中传播时，准线性排序对应两个时间尺度。一个是快速线性响应，在动力学层面由 Vlasov方程描述，其解给出介电响应的折射/色散部分

张量。另一个是缓慢的、对角度取平均的作用量分布函数的准线性演化 $F(\mathbf{J}\ t)$，在动力学层面由准线性方程描述。标准准线性方程式 (B10) 在附录 B中推导。

根据哈密顿量方程（5.17），磁化旋转等离子体中的作用量分布函数的演化$F(\mathbf{J}\ t)$由下式给出：

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\pi}{2}\sum_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\right)\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right]\left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\right)F\left(\mathbf{J},t\right)\tag{7.1}$$

其中，$V_{\mathbf{N}}$ 为方程（5.13、5.14、5.15）中推导出的量。算子$\mathbf{N}\cdot\partial_{\mathbf{J}}$ 参与了这种缓慢的（相对于 $1/\omega$而言）作用量空间扩散，其表达式为

$$\mathbf{N}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}=(l+\sigma)\frac{\partial}{\partial J}+(l+n)\frac{\partial}{\partial D}+\beta\frac{\partial}{\partial P}.\tag{7.2}$$

我们通过令 $\int d\mathbf{J}F(\mathbf{J}\ t)\ =1$来对 F进行归一化，并认为 $F(\mathbf{J}=+\infty,t)\ =0$以及$F($ $J<0,D<0,P=-\infty,t)\ =0$。

引入共振粒子密度 ρ后，波单位体积损失或获得的功率 W （等离子体获得或损失的功率）为

$$\frac{W}{\rho}=\frac{d}{dt}\int d\mathbf{J}H_{0}\left(\mathbf{J}\right)F\left(\mathbf{J},t\right)=\int d\mathbf{J}H_{0}\frac{\partial F}{\partial t}\tag{7.3}$$

积分应在 $-\infty<J$、D、$P<+\infty$上进行。利用方程（7.1），并对算子方程（7.2）进行分部积分，得到

$$\frac{W}{\rho}=-\frac{\pi}{2}\int d\mathbf{J}\omega\sum_{\mathbf{N}}\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right]\mathbf{N}\cdot\frac{\partial F}{\partial\mathbf{J}}\tag{7.4}$$

我们在方程（7.4）中看到，功率平衡由无碰撞介电张量的耗散部分给出。再进行一次分部积分，便可得到功率密度

$$W=\frac{\pi}{2}\rho\int d\mathbf{J}F\left(\mathbf{J},t\right)\omega\sum_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right].\tag{7.5}$$

通过下式定义 $w_{\mathbf{N}}(\mathbf{J})$

$$W=\rho\sum_{\mathbf{N}}\int d\mathbf{J}F\left(\mathbf{J}\right)w_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right),\tag{7.6}$$

方程（7.5）于是给出

$$w_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right)=\frac{\pi}{2}\omega\sum_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right].\tag{7.7}$$

因此，对于单个分量 $V_{\mathbf{N}}$，这个量可解释为位于 $\mathbf{J}$ 处的粒子与该 $V_{\mathbf{N}}$ 波相互作用分量交换的功率。由此，方程（6.12）可改写为

$$\left.\frac{\langle\delta\mathbf{J}\rangle}{\delta t}\right|_{\mathbf{N}}=\frac{\mathbf{N}}{\omega}\frac{\delta H_{0}\left(\mathbf{J}\right)}{\delta t}=\frac{\mathbf{N}}{\omega}w_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right),\tag{7.8}$$

其中 $\langle\rangle$ 是对波的快相位取平均，而 $\mathbf{N}$ 指标将波踢 $\delta\mathbf{J}$ 限制为单个分量 $V_{\mathbf{N}}$。将式（7.7）代入式（7.8），并使用张量积记号 $\otimes$ 可得

$$\frac{\langle\delta\mathbf{J}\rangle}{\delta t}=\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\cdot\sum_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\tag{7.9}$$

这个关系式（7.9）就是波诱导漂移系数 $\langle\delta\mathbf{J}\rangle/\delta t$ 与波诱导扩散系数之间通常的爱因斯坦关系（Fraiman & Kostyukov1995）

$$\frac{\langle\delta\mathbf{J}\otimes\delta\mathbf{J}\rangle}{2\delta t}=\frac{\pi}{2}\sum_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right] \tag{7.10}$$

用于将动理学方程式 (7.1) 写成具有漂移项和扩散系数的经典福克-普朗克形式

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\cdot\left[\frac{\langle\delta\mathbf{J}\rangle}{\delta t}F-\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\cdot\frac{\langle\delta\mathbf{J}\otimes\delta\mathbf{J}\rangle}{2\delta t}F\right] \tag{7.11}$$

而不是写成完全等价且更常用的准线性形式

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}}\cdot\left[\frac{\langle\delta\mathbf{J}\otimes\delta\mathbf{J}\rangle}{2\delta t}\cdot\frac{\partial F}{\partial\mathbf{J}}\right] \tag{7.12}$$

此处在式 (7.1) 中使用。爱因斯坦关系

$$\frac{\langle\delta\mathbf{J}\rangle}{\delta t}=\partial_{\mathbf{J}}\cdot\frac{\langle\delta\mathbf{J}\otimes\delta\mathbf{J}\rangle}{2\delta t} \tag{7.13}$$

是微观可逆性的结果（Rax 2021）。

8. 角动量吸收

如果不求解准线性方程（7.1），通过分析准线性导引中心径向速度 $\langle\delta D\rangle/dt$ 和准线性离子回旋共振加热$\langle\delta J\rangle/dt$ （见方程（7.8、7.9）），就能清楚地理解角动量吸收（或发射）的机制。总的来说，波的作用确实有两个方面：既驱动径向漂移流 δD，又产生离子回旋共振加热 δJ。然而，为了维持流体旋转，应避免或至少尽量减少后一种作用。原则上，可以通过选择合适的波来实现这一点。

8.1. 全局角动量守恒下的吸收

对于单粒子，在共振波粒相互作用过程中，波损失的自旋角动量（S_z）和轨道角动量（L_z）由粒子以正则角动量 L_C的形式获得。由方程（4.1）

$$-\frac{\langle\delta L_C\rangle}{\delta t}=\frac{\langle\delta J\rangle}{\delta t}-\frac{\langle\delta D\rangle}{\delta t} \tag{8.1}$$

利用方程（7.9）可将其改写为

$$-\frac{\langle\delta L_C\rangle}{\delta t}=(\sigma-n)\frac{\pi}{2}\sum_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\cdot\partial_{\mathbf{J}}\left[\left|V_{\mathbf{N}}\right|^{2}\delta\left(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}-\omega\right)\right]. \tag{8.2}$$

<escape>根据第6.1节末尾建立的简单光子图像，对于波与粒子组成的整个系统以及单个 $|V_{\mathbf{N}}|$ 耦合系数，全局角动量守恒可表示为</escape>

$$\delta\ L_z|_{wave}=-n\frac{\delta H_0}{\omega},\quad \delta\ S_z|_{wave}=\sigma\frac{\delta H_0}{\omega}. \tag{8.3}$$

准线性理论带来了额外的见解，因为它能够将波的角动量变化与分布函数对角动量的吸收联系起来。

$F(\mathbf{J}\ t)$。具体而言，对等离子体中作用量的分布对式（8.2）取平均，并通过分部积分可得

$$\left.\frac{d\left(L_z+S_z\right)}{dt}\right|_{wave}=\left(n-\sigma\right)\frac{\pi}{2}\iint dJdD\sum_l\left|V_{\mathbf{N}}\right|^2\mathbf{N}\cdot\partial_{\mathbf{J}}\ F|_{P=P_l}. \tag{8.4}$$

这里，P_l 是满足关系 $\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\omega$ 的共振轴向动量，对给定的波场和直流场构型而言，也就是说

$$\beta P_l=\omega+\left(l+\sigma\right)\Omega_+-\left(l+n\right)\Omega_-. \tag{8.5}$$

请注意，由于 $-\infty<P<\infty$ 对于给定的 P_l，方程（8.5）总有一个解 $(l,\ n)\ \in\mathbb{Z}^2$。另请注意，利用方程（7.4），可以从方程（8.3）等价地推导出方程（8.4）。

式(8.4)中推导出的角动量吸收系数，可以通过考虑式$F(\mathbf{J}\ t)$所给出的动力学演化（见式(7.1)），并加入与碰撞相关的弛豫项来求得。假设等离子体平衡仅受到波的微弱扰动，我们可以认为 $F\sim F_0$ 如式(6.18)所示。

8.2. 物理图像

为了更深入地理解准线性角动量交换的物理机制，我们定义平均动力学角动量

$$\left\langle L_K\right\rangle=\left\langle xv_y-yv_x\right\rangle_{\theta+\varphi}=\frac{2\Omega_-}{\Omega}D+\frac{2\Omega_+}{\Omega}J \tag{8.6}$$

以及穿过该轨道的平均磁通量

$$\left\langle\Psi\right\rangle=\omega_c\pi\left\langle x^2+y^2\right\rangle_{\theta+\varphi}=2\pi\frac{\omega_c}{\Omega}D+2\pi\frac{\omega_c}{\Omega}J. \tag{8.7}$$

根据准线性理论的规定，括号 $\langle\rangle$ 表示对方程（3.14、4.2、4.3）进行角度平均。同时，方程（4.4）给出了正则角动量变化的关系

$$\delta L_C=\delta\left\langle L_K\right\rangle+\delta\left\langle\Psi\right\rangle/2\pi. \tag{8.8}$$

由方程（8.6）和方程（8.7）可得动能分量和磁分量 $\delta\langle L_K\rangle$ 以及 $\delta\langle\Psi\rangle$，进而写为

$$\Omega\delta\left\langle L_K\right\rangle=2\Omega_-\delta D+2\Omega_+\delta J, \tag{8.9}$$

$$\Omega\delta\left\langle\Psi\right\rangle=2\pi\omega_c\delta D+2\pi\omega_c\delta J. \tag{8.10}$$

这些结果可以作如下物理解释，其中我们再次聚焦于更直观的排序方式 $D>J$。

从动能分量方程（8.9）出发，回顾第4 节可知，质量为$M=1$ 的离子相对于z 轴具有一个导引中心转动惯量 $M_G=2D/\Omega$，并且相对于导引中心具有一个回旋运动的转动惯量 $M_C=2J/\Omega$。还要注意，该离子的导引中心以 $d\theta/dt=\Omega_-$旋转，而回旋旋转则以角频率 $\Omega_+=-d\varphi/dt$进行。现在，由于这两个角速度由方程（3.1、3.2）中的场决定，离子的动力学角动量 $\left\langle L_K\right\rangle=M_G\Omega_-+M_C\Omega_+$（$\theta$ 为逆时针方向，而 φ 为顺时针方向）的变化必然来自转动惯量的变化，而不是角速度的变化，因此有

$$\frac{\delta\left\langle L_K\right\rangle}{\delta t}=\frac{\delta M_G}{\delta t}\Omega_-+\frac{\delta M_C}{\delta t}\Omega_+=\frac{2\Omega_-}{\Omega}\frac{\delta D}{\delta t}+\frac{2\Omega_+}{\Omega}\frac{\delta J}{\delta t}, \tag{8.11}$$

这正是方程（8.9）。

磁分量的解释

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\delta\langle\Psi\rangle}{\delta t}=\frac{\omega_c}{\Omega}\frac{\delta D}{\delta t}+\frac{\omega_c}{\Omega}\frac{\delta J}{\delta t}, \tag{8.12}$$

需要分析 δD 项和 δJ 项。正如我们将要说明的，这两项可以解释为背景磁场对离子施加的两种不同力矩。首先来看 D，可以从两种不同的图像来理解。第一种是考虑电荷 $q=1$ 径向运动时，磁力所产生的轴向力矩。该电荷的径向速度为

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)\mathbf{e}_r, \tag{8.13}$$

因此，该力矩可写为

$$\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\mathbf{e}_r\times\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\right)\mathbf{e}_r\times\omega_c\mathbf{e}_z\right]=-\frac{\omega_c}{\Omega}\frac{dD}{dt}\mathbf{e}_z. \tag{8.14}$$

第二种是考虑作用于沿半径为 $\sqrt{2D/\Omega}$ 的旋转圆周分布的 $q=1$ 电荷上的方位电动势（emf），它与径向运动导致的回路面积变化有关。该感应电场 E_{emf} 也是轴向力矩的来源

$$\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}\mathbf{e}_r\times E_{emf}\mathbf{e}_\alpha=-\frac{1}{2\pi}\frac{d\Psi_G}{dt}\mathbf{e}_z=-\frac{\omega_c}{\Omega}\frac{dD}{dt}\mathbf{e}_z, \tag{8.15}$$

其中，我们引入了穿过导引中心轨道的磁通量 Ψ_G，并应用了法拉第定律

$$-\frac{d\Psi_G}{dt}=\oint E_{emf}\mathbf{e}_\alpha\cdot ds\mathbf{e}_\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2D}{\Omega}}E_{emf}. \tag{8.16}$$

可以验证，两种分析都得出了离子因波驱动的径向运动而受到的相同轴向力矩，这恰好是式（8.12）右端的第一项。最后来看式（ δJ 8.12）中的项，也可以采用类似的电流环图像，不过这次考虑的是沿拉莫尔半径分布的 $q=1$ 电荷 $\sqrt{2J/\Omega}$。穿过这个变化的拉莫尔半径的磁通量实际上为 $\Psi_L=2\pi\ (\omega_c/\Omega)\ J$，其时间导数恰好给出式（8.12）右端的第二项。

总之，式（8.8）右端的第一项对应于粒子的转动惯量因准线性径向漂移和拉莫尔半径演化而发生的变化。式（8.8）右端的第二项对应于磁通量变化所产生的力矩。在此按弱场极限进行解释时，这两项都必须由波传递相应的角动量来平衡。不过请注意，波的准线性主要效应并非力矩，而是波驱动的径向电流。

9. 径向电流产生

可以根据准线性动理学方程构建两种类型的模型，该方程推导于式（7.1）中。一种方案是在动力学层面将分布函数的准线性演化与碰撞演化相平衡，然后对解 F（**J**）进行平均，以

获得稳态流体图像。另一种方法是对准线性动力学取平均，推导质量、电荷和动量的流体准线性流，然后将这些流体流与经典输运理论中涉及的耗散项相平衡。下文采用后一种方法，并为简化起见，进一步假设沿 z轴向均匀。

我们来写下

$$\boldsymbol{\Gamma}(r) = \Gamma_r \mathbf{e}_r + \Gamma_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \Gamma_z \mathbf{e}_z \tag{9.1}$$

由波功率吸收所产生的波驱动粒子通量$w_{\mathbf{N}}(r)$ 在半径 r处。径向流 Γ_r 是由波驱动导引中心径向速度引起的，我们已经证明该速度与 $\langle \delta D \rangle / \delta t$成正比。方位流 Γ_α 是一种较小的抗磁效应，与非均匀波驱动离子回旋共振加热有关，且与$\langle \delta J \rangle / \delta t$成正比。轴向流 Γ_z 则仅仅是由 Fisch 1978、1987年所述的经典电流产生机制引起的波驱动电流，其来源为 $\langle \delta P \rangle / \delta t$。这些通量的幅值由演化方程 Eq. (7.8) 决定。

径向流的解析表达式 Γ_r 可以通过再次聚焦于熟悉的极限情况 $J < D$推导得出。在这一极限下，共振粒子的平均径向位置为$r^2 = 2D/\Omega$，因此平均拉格朗日径向速度为 $r\Omega dr/dt = dD/dt$。根据方程（7.8）， D 的相位平均演化与吸收功率 $w_{\mathbf{N}}$成正比，该吸收功率与方位数为 l 的旋转波所对应的 n次谐波布里渊共振相关，因此有

$$\left.\frac{\langle \delta D \rangle}{\delta t}\right|_{\mathbf{N}} = \frac{l+n}{\omega}\, w_{\mathbf{N}}|_{D=\frac{\Omega r^2}{2}} . \tag{9.2}$$

重新引入粒子质量 M，并使用等离子体吸收的功率密度 $W_{\mathbf{N}}$ （单位为瓦特/米^3），而非 $w_{\mathbf{N}}$ （单位为瓦特），则波驱动的共振粒子通量为

$$\Gamma_r = \frac{(l+n)}{rM\Omega\omega} W_{\mathbf{N}} \quad \mathrm{s}^{-1}.\,\mathrm{m}^{-2}. \tag{9.3}$$

考虑现在以绝热方式在 $t = -\infty$开启波功率密度 $W_{\mathbf{N}}(t)$，其中 $W_{\mathbf{N}}(-\infty) = 0$。该波会使一些共振粒子穿过磁场，从而产生径向电流 $J_W(t)$，满足 $J_W(t = -\infty) = 0$ 且 $J_W(t = 0) = q\Gamma_r$。由此产生的径向电场随时间的演化可描述如下。从电学角度来看，这一建立过程相当于介电介质中电容性电场的建立，类似于圆柱形电容器的充电过程。通过将等离子体视为具有低频介电常数的介电体，

$$\varepsilon = 1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 \tag{9.4}$$

其中 ω_{pi} 为离子等离子体频率，因此在整个瞬态阶段，电场 $\mathbf{E}(t)$由麦克斯韦-安培方程确定。

$$\varepsilon_0 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + J_W(t)\, \mathbf{e}_r = \mathbf{0}. \tag{9.5}$$

从力学角度来看，这一累积阶段对应于通过 $J_W(t)\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}$ 力输入角动量，而该动量被转化为等离子体$E \times B$ 漂移。事实上，在瞬态阶段对方程（9.5）积分可得

$$\int_{-\infty}^{0} J_W(t)\, \mathbf{e}_r \times \mathbf{B} dt = -N_p M \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}}{B^2} \tag{9.6}$$

其中，$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(t = 0)$， M 为离子质量， N_p 为离子密度，这证实了这一点。

动量平衡。请注意，在写出方程（9.5）时，已忽略离子抗磁效应。还需注意，由于沿磁力线方向的电导率通常远大于垂直于磁力线方向的电导率，电荷会沿磁力线迅速离开波的活跃区域，而这些区域随后会变为等势区域。

最后，对于 $t > 0$，波引起的电荷分离会被等离子体的垂直电导率短路（Helander & Sigmar 2005；Rax等，2019年；Kolmes 等，2019年）。在这种稳态耗散状态下，波驱动电流 $q\Gamma_r \mathbf{e}_r$由较弱的放电欧姆电流 $\mathbf{J}_{\text{conduction}}$平衡，其中

$$\nabla \cdot [q\Gamma_r \mathbf{e}_r + \mathbf{J}_{\text{conduction}}] = 0. \tag{9.7}$$

因此，与轴向电流产生不同，稳态由等离子体的几何形状决定。这个问题留待未来研究。

10. 结论

尽管波与旋转等离子体之间的角动量交换对天体物理学（Goldreich& Julian 1969；Julian 1973年；Ferri`ere 2006）和实验室等离子体（Shvets 等2002年；Kostyukov 等2002年；Thaury 等2013年都很重要，但据我们所知，此前尚未有人提出描述这种相互作用的动力学模型。本研究针对这一问题，推导了描述旋转波与旋转磁化等离子体之间相互作用的准线性方程。我们还利用这一动力学模型分析了角动量吸收／发射，并探究了轨道角动量（OAM）、自旋角动量（SAM）与有限拉莫尔半径（FLR）效应之间的相互影响。

首先，推导了旋转等离子体中未受扰布里渊旋转动力学的正则角度—作用量哈密顿描述。角度—作用量变量的确定，使我们能够将未受扰运动中的快速部分（角变量）与恒定部分（可积系统）或缓慢部分（绝热系统）（作用量）区分开来。通过这一过程，我们确定了三个正则作用量 D、 J 和 P。后者是沿 B 方向的经典动量。对于前两个作用量 D 和 J，我们证明，在弱场极限下，即当横场漂移频率 $E/(rB)$ 相较于离子回旋频率较小时，它们分别与穿过回旋轨道和导引中心轨道的磁通量相关。

随后，波粒耦合被表示为这些角度—作用量变量的函数，形式为一个受扰哈密顿量。这种方法使我们得以确定一个新的共振条件，它将经典的朗道—回旋共振推广到了旋转等离子体与旋转波相互作用的情形。这个新条件，即式（6.1），称为布里渊共振。该条件通过式（5.13、5.14、5.15）明确体现了有限拉莫尔半径效应；这些效应被发现是谐波（l）布里渊共振产生的原因。结合这一共振条件，我们确定了作用量空间中的扩散路径，并展示了弱场极限下的具体示例。最后，我们通过对等离子体对扰动的动力学响应在运动的快速部分（角变量）上取平均，推导出准线性方程（式（7.1））， 该方程描述了能量—动量交换如何随时间演化为作用量分布函数的变化。

通过分析准线性方程所预测的正则作用量 D 和 J 变化，最终提出了一种关于动量吸收的物理图景。具体而言，研究表明，波的角动量会传递给等离子体，形式为等离子体惯性张量的变化，或磁通量的变化。方程（8.11，8.12）。这项分析还表明，径向通量可视为等离子体中角动量注入的来源

。一个值得探讨的方向是将这项工作推广到磁场非均匀性的情形。例如，采用作用角坐标描述恒定梯度直磁场中的运动（Brizard 2022年），或许能够捕捉磁镜几何中的弹跳共振，而非此处考虑的均匀 z 平移多普勒频移。

最后，由于径向电流与吸收功率成正比，要利用波维持稳态旋转，就需要调整波功率沉积分布，使其满足式（9.7）。功率沉积的优化将是未来研究的课题，不过我们注意到，例如，对于旋转磁化等离子体柱中的共振**N** ，若沿磁力线的电导率较大 $\eta_{\shortparallel}$ ，而垂直磁力线方向的电导率较小 $\eta_{\perp}$，式（9.7）给出

$$W_{\mathbf{N}}(r) \approx \eta_{\perp} \frac{M^2}{q^2} \frac{\Omega\omega}{(l+n)} \left(\frac{\omega_c^2 - \Omega^2}{4} \right) r^2. \tag{10.1}$$

要了解如何将这种功率密度沉积到等离子体中，需要掌握旋转等离子体柱的正规模，尤其是表征这些模式的色散关系，而不只是对齐转子的简单情形（Gueroult 等人2019年*b*、2020年、2023年）。这一重要问题将在后续研究中探讨。

致谢

作者感谢 I. E. Ochs 博士、E. J. Kolmes、T. Rubin 和 M. E. Mlodik 提供富有建设性的讨论。本研究获得以下资助：美国能源部拨款 DE-SC0016072、美国国家核安全管理局拨款 DE-SC0021248，以及法国国家研究署项目 ANR-21-CE30-0002（WaRP 项目）。JMR 感谢普林斯顿大学和安德林格能源与环境中心提供 ACEE 奖学金，使本研究得以完成。

附录 A. 矢量场的自旋角动量和轨道角动量

考虑波场 A (r) exp $j\omega t$。通过分析波在平移和旋转下的变换性质，可以识别 (i) 线动量、(ii) 自旋和 (iii) 轨道角动量本征态。

为此，首先考虑矢量场 A(r) 在主动（改变对象 A）或被动（改变用于描述 A 的参考系和坐标）$\widehat{\ }$微小平移 T 下的变化，该平移与小矢量 δr相关

$$\widehat{T}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r} \pm \delta\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \pm \delta\mathbf{r}.\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{A 1}$$

负号或正号分别对应被动或主动的观点。方程（A1）可改写为近似恒等变换

$$\widehat{T}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{I} \pm j\delta\mathbf{r}.\widehat{\mathbf{P}}\right]\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{A 2}$$

$\widehat{\ }$其中 I 为恒等算子。线动量算子 P 按

$\widehat{\ }$通常方式定义为 $\mathrm{P} = -j\nabla$。线动量算子 P 的本征向量是$\widehat{\ }$平面波， $P_z(\exp j\beta z) = \beta(\exp\ j\beta z)$；它们也是均匀线性色散等离子体中麦克斯韦-安培方程和麦克斯韦-法拉第方程的解，条件是$\beta(\omega)$满足色散关系。

现在考虑矢量场 A(r) 在主动或被动的无穷小旋转 $\widehat{\ }$下的变化，该旋转 R 对应于绕由给定单位 $\delta\alpha$ 向量所指示的轴进行的小幅转动

$$\begin{aligned}\widehat{R}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \pm\delta\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}\pm\delta\alpha\mathbf{n}\times\mathbf{r})\\ &= \mathbf{A}(\mathbf{r})\pm\delta\alpha\left[\mathbf{n}\times+(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).\nabla\right]\mathbf{A}(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{A 3}$$

公式（A3）可以改写为近似恒等变换，从而展现轨道角动量和自旋角动量算符之间的分离

$$\widehat{R}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{I}\pm j\delta\alpha\mathbf{n}\cdot\left(\widehat{\mathbf{L}}+\widehat{\mathbf{S}}\right)\right]\mathbf{A}(\mathbf{r}).\tag{A 4}$$

因此，轨道角动量算符 L 和自旋角动量算符 S 按照通常的关系定义

$$\widehat{\mathbf{L}} = -j\mathbf{r}\times\nabla\tag{A 5}$$

$$\widehat{\mathbf{S}} = -j\mathbf{n}\times\tag{A 6}$$

注意，由于 $\widehat{S}_x^2+\widehat{S}_y^2+\widehat{S}_z^2 = 2$I，我们恢复了向量的通常角动量规则：$\widehat{\mathrm{S}}^2 = s(s+1)$I，其中 $s = 1$。

现在，我们将变换限制为绕磁场方向 的旋转，此时角动量算符化简为其 z 分量 L_z+S_z。 (i) 轨道角动量算符 L_z 和 (ii) 自旋角动量算符 S_z 的本征向量分别为：(i) $\exp\pm jn\alpha$，其中 α 是绕磁场的极角；(ii) 左旋和右旋圆偏振波基底，其本征值分别为 ±1 和 $\mathbf{e}_z$，另有一个零本征值

$$\left(\widehat{L}_z+\widehat{S}_z\right)\left(\frac{\mathbf{e}_x\pm j\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\exp jn\alpha\right) = (n\mp1)\left(\frac{\mathbf{e}_x\pm j\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\exp jn\alpha\right).\tag{A 7}$$

当磁轴同时也是旋转轴时，具有因子 $\exp\pm jn\alpha$ 的麦克斯韦-安培方程和麦克斯韦-法拉第方程的解在旋转磁化等离子体中具有确定的轨道角动量。具有偏振 $\mathbf{e}_x\pm j\mathbf{e}_y$ 的麦克斯韦-安培方程和麦克斯韦-法拉第方程的解具有确定的自旋角动量。

附录 B. 正则准线性方程

在本附录中，我们简要回顾正则拟线性方程（Rax2021）的推导。

考虑一个可积哈密顿量 H_0（绝热阱）和一个振荡扰动（波），使得 $V \ll H_0$。波与粒子相互作用的动力学描述可通过双时间尺度分离来进行：$F(\mathbf{J},t)$ 是作用量空间中的分布函数，用于描述给定粒子的缓慢演化（$\partial_t F(\mathbf{J},t)\sim O\left(V^2\right)$）；而 $f(\mathbf{J},\boldsymbol{\theta},t)\sim O(V)$ 描述相空间中的快速振荡演化（$\partial_t f(\mathbf{J},\boldsymbol{\theta},t)\sim O(V)$）

$$\mathcal{H} = H_0(\mathbf{J})+V(\mathbf{J},\theta,t),\tag{B 1}$$

$$\mathcal{F} = F(\mathbf{J},t)+f(\mathbf{J},\theta,t).\tag{B 2}$$

其中，$(\mathbf{J},\boldsymbol{\theta})$ 是未扰动动力学的一组作用量-角变量，$\boldsymbol{\Omega} = \partial H_0/\partial\mathbf{J}$、$\mathcal{H}$ 是受扰哈密顿量，$\mathcal{F}$ 是描述受扰动力学的分布函数。借助泊松括号，刘维尔方程可写为 $\partial_t\mathcal{F} = \{\mathcal{H},\mathcal{F}\}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(F+f) = \{(H_0+V),(F+f)\}\tag{B 3}$$

因为 $\{H_0, F\} = 0$ 我们可以将这一关系分解为（i）一个 O（V）快速演化——Vlasov方程（B4）——以及（ii）一个 $O\left(V^2\right)$ 缓慢的长期演化——准线性方程（B5）——，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{V, F\} + \{H_0, f\} \sim O\left(V\right), \tag{B 4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \langle \{V, f\} \rangle_{\boldsymbol{\theta}} \sim O\left(V^2\right), \tag{B 5}$$

其中，我们记 $\langle\rangle_{\boldsymbol{\theta}}$ 对快速旋转角变量 $\boldsymbol{\theta}$的平均。

下一步是对 $O(V)$ 振荡的 Vlasov 项进行傅里叶分解。由于 f 和 V 是角度 $\boldsymbol{\theta}$ 的周期函数，这种分解总是可行的，不过傅里叶系数的推导通常需要进行一些冗长的计算

$$V\left(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t\right) = \sum_{\mathbf{N}} V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right) \exp j\left(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \omega t\right) \tag{B 6}$$

$$f\left(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}, t\right) = \sum_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right) \exp j\left(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\theta} - \omega t\right) \tag{B 7}$$

其中 $N \in \mathbb{Z}^3$。经过这一傅里叶分解，Vlasov方程（式 B4）变为一个代数方程，其解为

$$f = \sum_{\mathbf{N}} \frac{V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right)}{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \omega} \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}} + j\pi \sum_{\mathbf{n}} V_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{J}\right) \delta\left(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \omega\right) \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}}. \tag{B 8}$$

我们可以识别出等离子体响应的绝热部分，它最终给出介电张量的厄米部分；还可以识别出共振部分，它描述了无碰撞耗散。为了对式（B5）求平均

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{J}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{J}} \right\rangle_{\boldsymbol{\theta}} \tag{B 9}$$

我们使用通常的规则 $\langle \mathrm{Re}[a\left(u\right)] \mathrm{Re}[b\left(u\right)] \rangle_u = \mathrm{Re}\left[a\left(u\right) b^*\left(u\right)\right]/2$，最终得到规范形式

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \partial_{\mathbf{J}} \cdot \sum_{\mathbf{N}} \mathbf{N}\, \mathrm{Re}\left(j \frac{V_{\mathbf{N}} f_{\mathbf{N}}^*}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \cdot \left[\sum_{\mathbf{N}} \mathbf{N} \left|V_{\mathbf{N}}\right|^2 \delta\left(\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \omega\right) \mathbf{N} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}}\right]. \tag{B 10}$$

用于方程（7.1）

REFERENCES

Barber, P. B., Swift, D. A. & Tozer, B. A. 1972 单极配置中旋转等离子体的形成。*J. Phys. D: Appl. Phys.* **5** (4), 693–。Barnett, S. M. & Allen, L. 1994 轨道角动量与非傍轴光束。*Opt. Commun.* **110** (5-6), 670–678。Barnett, S. M., Babiker, M. & Padgett, M. J. 2017 光学轨道角动量。*Philos. Trans. R. Soc. A* **375** (2087), 20150444。Bekhtenev, A. A. Volosov V. I. Pal'chikov V. E. Pekker M. S. & Yudin Y. N. , , , , , , 1980 *Nucl. Fusion* **20** 5 , 旋转等离子体热核反应堆的问题。( ), 579–598。Bliokh, K. Y. & Bliokh, Y. P. 2022 各向同性无碰撞等离子体中波的动量、角动量和自旋。 *Phys. Rev. E* **105** (6), 065208。Bonnevier, B. 1966 多组分等离子体中的离子-离子碰撞扩散。 *Ark. Fys.* **33** 255 , 。

Brillouin, L. 1945 拉莫尔定理及其对磁场中电子的重要性。*Phys. Rev.* **67** (7-8), 260–266。
Brizard, A. J. 2022 恒定梯度直磁场中运动的作用量–角坐标。
Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **114**, 106652。Chen,
F. F. 1984 *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 第2版。Springer。Chen,
Q., Qin, H. & Liu, J. 2017 等离子体中具有轨道角动量的光子、声子和等离激元。
Scientific Reports **7** (1)。Courtial, J., Robertson, D. A., Dholakia, K., Allen,
L. & Padgett, M. J. 1998 光束的旋转频移。 *Phys. Rev. Lett.* **81** (22), 4828–4830。
Davidson, R. C. 2001 *Physics of Nonneutral Plasmas*。帝国理工学院出版社。Davidson,
R. C. & Krall, N. A. 1969 磁场中电子气的 Vlasov 描述。 *Phys. Rev. Lett.* **22** (16), 833–
837。Dodin, I. Y. 2022 非均匀等离子体的准线性理论。 *J. Plasma Phys.* **88** (4)。
Dolgolenko, D. A. & Muromkin, Y. A. 2017 等离子体中化学元素混合物的分离。
Phys. Usp. **60** (10), 994。van Enk,
S. J. & Nienhuis G. 1994 *Europhys.* , 光子
Lett. **25** 7 497 501
的自旋和轨道角动量。( ), – 。Ferrière,
K. M. 2006 *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions*, 章节：旋转环境中的波与不稳定性，第157页。 *Geophysical Monograph Series* 169。Wiley。Fetterman,
A. J. & Fisch N. J. 2008 *Phys. Rev.* , 旋转
Lett. **101** 20 205003
等离子体中的阿尔法粒子通道化。( ), –。Fetterman, A. J. & Fisch, N. J. 2010 驻波作用下旋转等离子体中的阿尔法粒子通道化。 *Phys. Plasmas* **17** (4), 042112。Fisch,
N. & Herrmann M. 1994 *Nucl.* , 利用
Fusion **34** 12 1541 1556
波提取阿尔法粒子能量的效用。( ), – 。Fisch,
N. & Herrmann M. 1995 *Nucl. Fusion* , 双波
35 12 1753 1760
阿尔法功率通道化。( ), – 。Fisch, N. J. 1978 利用射频驱动电流约束托卡马克等离子体。
Phys. Rev. Lett. **41** (13), 873–876。Fisch, N. J. 1987 等离子体电流驱动理论。
Rev. Mod. Phys. **59** (1), 175–234。Fisch, N. J. & Rax, J.-M. 1992 高能阿尔法粒子与强下混杂波的相互作用。 *Phys. Rev. Lett.* **69** (4), 612–615。Fisch,
N. J. & Rax J.-M. 1993 *Phys.* , 波致
Fluids B **5** 6 1754 1759
扩散作用下等离子体中的自由能。( ), – 。Fraiman, G. M. & Kostyukov, I. Y. 1995 外部非均匀静场对带电粒子束与电磁波包相互作用的影响。*Phys. Plasmas* **2** (3), 923–934。Garetz,
B. A. 1981 角多普勒效应。 *J. Opt. Soc. Am.* **71** (5), 609。Goldreich, P. & Julian,
W. H. 1969 脉冲星电动力学。 *Astrophys. J.* **157**, 869。Götte, J. B., Barnett,
S. M. & Padgett, M. 2007 关于旋转介质对光的拖曳。 *Proc. R. Soc. A* **463** (2085), 2185。
Gough, W. 1986 辐射角动量。 *European J. Phys.* **7** (2), 81–87。Gueroult, R. & Fisch,
N. J. 2014 等离子体质量过滤：分离锕系元素与镧系元素。 *Plasma Sources Sci. Technol.* **23** (3), 035002–。Gueroult, R., Hobbs, D. T. & Fisch, N. J. 2015 核废料处理的等离子体过滤技术。 *J. Hazard. Mater.* **297**, 153–159。Gueroult, R., Rax, J. M. & Fisch, N. J. 2018 稀土元素回收中的等离子体分离技术机遇。 *J. Clean. Prod.* **182**, 1060–1069。Gueroult, R.,
Rax, J.-M. & Fisch, N. J. 2019*a* 磁化等离子体中垂直电场控制的必要条件。
Phys. Plasmas **26** (12), 122106。Gueroult, R., Rax, J.-M. & Fisch, N. J. 2020 旋转等离子体中增强的可调旋光能力。 *Phys. Rev. E* **102** (5), 051202(R)。Gueroult, R., Rax,
J.-M. & Fisch, N. J. 2023 旋转磁化等离子体中的波传播。 *Plasma Phys. Control. Fusion* **65** (3), 034006。

Gueroult, R., Shi, Y., Rax, J.-M. & Fisch, N. J. 2019*b* 确定脉冲星中的旋转方向。 *Nat. Commun.* **10** (1), 3232. Gueroult, R., Zweben, S. J., Fisch, N. J. & Rax, J.-M. 2019*c* 用于高通量等离子体质量分离的E x b构型：可能性与挑战展望。

Phys. ( ), .

Plasmas **26** 4 043511
Hassam, A. B. 1997 用于聚变的稳态离心约束等离子体。 *Comments Plasma*
Phys. Controlled Fusion **18** 263 , .

Helander, P. & Sigmar, D. J. 2005 *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. 剑桥大学出版社. Herrmann, M. C. & Fisch, N. J. 1997 利用波冷却托卡马克中的高能粒子。 *Phys. Rev. Lett.* **79** (8), 1495–1498. Janes,

G. S. 1965 *Phys.* 磁产生并约
Rev. Lett. **15** 4 135 138
束的电子云实验。 ( ), – . Janes, G. S., Levy, R. H., Bethe, H. A. & Feld, B. T. 1966 重离子的新型加速器。 *Phys. Rev.* **145** (3), 925–952. Janes,

G. S. Levy R. H. & Petschek H. E. 1965 *Phys.* , , , , BeV势
Rev. Lett. **15** 4 138 140
阱的产生。 ( ), – . Jones, R. V. 1976 旋转以太拖曳。 *Proc. R. Soc. A* **349** (1659), 423–439. Julian, W. H. 1973 脉冲星电动力学。II。 *Astrophys. J.* **183**, 967.Kaufman, A. N. 1971 柱形等离子体中粒子与正规模之间的共振相互作用。 *Phys. Fluids* **14** (2), 387. Kolmes,

E. J. Ochs I. E. Mlodik M. E. Rax J.-M. Gueroult R. & Fisch N. J. , , , , , , , , , 2019
高电离线性等离子体装置中的径向电流与旋转剖面调控。 *Phys. Plasmas* **26** (8), 082309. Kostyukov, I. Y., Shvets, G., Fisch, N. J. & Rax, J. M. 2002 相对论激光通道中的磁场产生与电子加速。 *Phys. Plasmas* **9** (2), 636–648. Krishnan, M., Geva, M. & Hirshfield, J. L. 1981 等离子体离心机。 *Phys. Rev. Lett.* **46** (1), 36–38.Lehnert, B. 1970 部分电离等离子体离心机。 *Phys. Scr.* **2** (3), 106. Lehnert, B. 1971 旋转等离子体。 *Nucl. Fusion* **11** (5), 485–. Lehnert, B. 1973 部分电离等离子体离心机。 *Phys. Scr.* **7**(3), 102. Liziakin, G., Gavrikov, A. & Smirnov, V. 2020 磁化电子柱形等离子体中的负电势。 *Plasma Sources Sci. Technol.* **29** (1), 015008. Liziakin, G., Oiler, A., Gavrikov, A., Antonov, N. & Smirnov, V. 2021 具有纵向磁场的柱形等离子体中等离子体电势的径向分布。 *J. Plasma Phys.* **87** (4), 905870414. Loeb, A. & Friedland, L. 1986 自共振激光加速器。 *Phys. Rev. A* **33** (3), 1828– 1835.Mendonça, J. T. 2012 等离子体中的扭曲波。 *Plasma Phys. Controlled Fusion* **54** (12), 124031.Nezlin,

M. V. 1976 *Sov. Phys. Usp.* 负能波与反
19 11 946 954
常多普勒效应。 ( ), – . Ochs, I. E. & Fisch, N. J. 2017 力平衡波驱动旋转环面中的粒子轨道。 *Phys. Plasmas* **24**, 092513.Ochs,

I. E. & Fisch N. J. 2021*a* *Phys. Rev. Lett.* , 阿尔法粒
127 2 025003
子通道化中的非共振扩散。 ( ), . Ochs,

I. E. & Fisch N. J. 2021*b* *Phys.* , 驱动电流
Plasmas **28** 10 102506
和旋转的波驱动力矩。 ( ), . Ochs, I. E. & Fisch, N. J. 2022 电流驱动和阿尔法粒子通道化介导的旋转驱动中的动量守恒。 *Phys. Plasmas* **29** (6), 062106. Ochs,

I. E. & Fisch N. J. 2023 *Phys. Plasmas* , 电磁波的
30 2 022102
有质动力反冲。 ( ), . Pendergast, K., Danley, B., Temkin, R. & Wurtele, J. 1988 回旋管自共振脉泽放大器的自洽模拟。 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **16** (2), 122–128. Poulos, M. J. 2019 大磁化等离子体中发射阴极运行的模型。 *Phys. Plasmas* **26** (2), 022104.

Prasad, R. R. & Krishnan M. 1987 *J. Appl.* ,真 *Phys.* **61** 9 4464 4470
空电弧离心机中的同位素分离。 ( ) , –。Rax, J. M. 1992 超高强度激光波下的康普顿谐波共振、随机不稳定性、准线性扩散和无碰撞阻尼。 *Phys. Fluids B* **4** (12), 3962–3972.Rax,
J. M. 2005 *Physique des plasmas*。Dunod, 巴黎。Rax, J.-M. 2011 *Physique des tokamaks*。巴黎: 巴黎综合理工学院出版社。Rax, J.-M. 2021 *Mécanique Analytique*。Dunod, 巴黎。Rax,
J.-M. & Gueroult, R. 2019 布里渊流中的几何相位。 *Phys. Plasmas* **26** (12), 122111.Rax,
J.-M. & Gueroult, R. 2021 旋转等离子体中法拉第–菲涅耳旋转及携带轨道角动量的波的分裂。 *J. Plasma Phys.* **87** (5), 905870507。Rax, J. M., Gueroult, R. & Fisch, N. J. 2017 波驱动刚体旋转环形约束的效率。 *Phys. Plasmas* **24** (3), 032504。Rax, J. M., Kolmes, E. J., Ochs, I. E.,
Fisch, N. J. & Gueroult, R. 2019 轴对称直流和射频驱动旋转等离子体中的非线性欧姆耗散。 *Phys. Plasmas* **26** (1), 012303。Rax, J.-M. & Robiche, J. 2010 展开式回旋加速器理论。 *Physics of Plasmas* **17** 10 ( ), –。Rax,
J.-M., Robiche, J. & Fisch, N. J. 2007 自共振离子回旋同位素分离。*Phys. Plasmas* **14** (4), 043102。Shukla,
P. K. 2012 ´ *Phys. Lett.* 携带轨道角 *A* **376** 44 2792 2794
动量的扭曲剪切阿尔芬波。 ( ) , –。Shvets, G., Fisch, N. J. & Rax, J.-M. 2002 圆偏振辐射与带电粒子之间通过角动量交换产生磁场。 *Phys.* ( ), –。 *Rev. E* **65** 4 046403
Stenzel, R. L. 2016 空间和实验室等离子体中的携带角动量的哨声波及其在自由空间中的对应波。 *Adv. Phys. X* **1** (4), 687–710。Stenzel, R. L. & Urrutia, J. M. 2015 均匀等离子体中的螺旋波模。III. 角动量。 *Phys. Plasmas* **22** (9), 092113。Teodorescu,
C. Young W. C. Swan G. W. S. Ellis R. F. Hassam A. B. & Romero- , , , , , , , , , , Talamas C. A. 2010
超音速等离子体旋转产生的离心力对成形开放磁场沿线等离子体的约束。 *Phys. Rev. Lett.* **105** (8), 085003。Thaury, C., Guillaume, E., Corde, S., Lehe, R., Le Bouteiller, M., Ta Phuoc,
K.,Davoine Rax Rousse , X., ,
J. M., , A. & Malka, V. 2013 激光等离子体加速器中的角动量演化。 *Phys. Rev. Lett.* **111** (13), 135002–。Timofeev,
A. V. 2014 *Sov. Phys.* 乏核燃料等 *Usp.* **57** 10 990
离子体处理理论。 ( ) , –。Trotabas, B. & Gueroult, R. 2022 使用负偏压发射端电极进行垂直电场控制时的权衡。 *Plasma Sources Sci. Technol.* **31**, 025001。Vorona, N. A., Gavrikov, A. V.,
Samokhin, A. A., Smirnov, V. P. & Khomyakov, Y. S.2015年 关于通过等离子体方法再处理乏核燃料和放射性废物的可能性。 *Phys. Atomic Nuclei* **78** (14), 1624–1630。