arXiv:2305.02684v1 [math.PR] 4 May 2023

高阶斯特林数与记录

F. A. Shiha[1*]

[*]通讯作者：fshiha@mans.edu.eg[1]埃及曼苏拉曼苏拉大学理学院数学系

摘要

本文展示了高阶第一类斯特林数与所谓的 F^{α}-方案中记录数及记录时刻的概率分布之间的联系。此外，我们确定了高阶第一类斯特林数的最大值的位置。

数学学科分类：60C05、62E15、11B75。

关键词：第一类斯特林数、中心阶乘数、记录、 F^{α}-方案、斯特林数的最大值。

1 引言

给定一个正整数 s，高阶第一类斯特林数（阶数为 s），记作 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$，由 Tweedie [33]引入：

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+i^s)=\sum_{k=0}^{n}\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s x^k \qquad ,n\geq 0. \tag{1}$$

注意，当 $s=1$, $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]=(-1)^{n-k}s(n,k)$ 是第一类斯特林数（非负值）时 [9]。对于 $s=2$, $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_2=(-1)^{n-k}\,t(2n,2k)$，其中$t(n,k)$ 是由以下给出的第一类中心阶乘数。

$$x^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}t(n,k)x^k, \qquad (\text{see } [5,\ 17,\ 30]), \tag{2}$$

其中 $x^{[n]} = x\left(x+\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(x-\frac{n}{2}+1\right)$、 $n \geq 1$、 $x^{[0]} = 1$.

回顾一下， $u(n,k) = t(2n,2k)$ 称为偶数指标的第一类中心阶乘数，参见例如 [14, 23, 31]。

这些数 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$ 满足递推关系

$$\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s = \left[\!\left[{n-1 \atop k-1} \right]\!\right]_s + (n-1)^s \left[\!\left[{n-1 \atop k} \right]\!\right]_s, \quad n,k \geq 1, \tag{3}$$

其中 $\left[\!\left[{0 \atop 0} \right]\!\right]_s = 1$ 且 $\left[\!\left[{n \atop 0} \right]\!\right]_s = \left[\!\left[{0 \atop k} \right]\!\right]_s = 0$，对所有 $n \geq 1$均成立。

最近， [19, 20], 研究了这些数 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$ 的组合性质，并讨论了它们与其他序列（如高阶多重柯西数、伯努利多项式和中心阶乘数）之间的一些关系。在 [18, 21], 中，引入并研究了二级多重柯西数，以及高阶多重柯西数 s，作为原始多重柯西数的推广。

这些数 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$ 具有以下特殊取值（见 [19]）：

$$\left[\!\left[{n \atop 1} \right]\!\right]_s = ((n-1)!)^s, \tag{4}$$

$$\left[\!\left[{n \atop 2} \right]\!\right]_s = ((n-1)!)^s \; H_{n-1}^{(s)}, \tag{5}$$

$$\left[\!\left[{n \atop 3} \right]\!\right]_s = ((n-1)!)^s \sum_{k=1}^{n-2} \frac{H_k^{(s)}}{(k+1)^2}, \tag{6}$$

其中， $H_n^{(k)}$是由下式定义的 k 阶广义调和数

$$H_n^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^k}, \quad n > 0, \tag{7}$$

其中 $H_0^{(k)} = 0$， 且 $H_n = H_n^1$ 是满足 $H_0 = 0$的调和数。

下面给出数组 $\left(\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s\right)_{n,k\geq 0}$ 在$0 \leq n$， $k \leq 5$时的前几个值。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^s & 1+2^s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6^s & 2^s+3^s+6^s & 1+2^s+3^s & 1 & 0 \\ 0 & 24^s & 6^s+8^s+12^s+24^s & 2^s+3^s+4^s+6^s+8^s+12^s & 1+2^s+3^s+4^s & 1 \end{pmatrix}.$$

由于似乎每一行都没有对称性，自然会想知道每一行的最大值出现在哪里。也就是说，对于固定的 n，哪些值

使得 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$ 取得最大值。在本文中，我们将回答这个问题。此外，值得注意的是，经典的斯特林数及其许多推广都与记录密切相关（见 [2, 3, 6, 7, 8, 32]）。类似地，我们将展示，$\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$ 描述了 F^{α}-方案中某些记录统计量的分布。

2 一些预备知识

本节介绍经典记录方案和 F^{α}-方案中的记录概念。设 $X_1, X_2, \ldots$ 为一列相互独立的随机变量。若对所有 $i = 1, 2, \ldots, j-1$，均有 $X_j > X_i$，则称随机变量 X_j 为记录（上记录）（按惯例，X_1 为记录）。令 N_n表示 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ 中记录的数量。再令 L_n为记录时刻，$n = 1, 2, \ldots$ 则 $L_1 = 1$ 以概率 1 成立，并且

$$L_{n+1} = min\{j : X_j > X_{L_n}\}, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

而 X_{L_n} 为相应的记录值。

N_n 和 L_n 的分布显然与分布无关，因为它们只取决于序列 X_1, X_2,.... 中的秩。

R´enyi [29] 得到了以下结果。

引理 1. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 为独立同分布随机变量，其共同的连续分布函数为 $F(x)$, 并设

$$I_i = \begin{cases} 1, & if\ X_i > max\{X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}\},\ i.e.\ X_i\ is\ a\ record \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

那么，指示变量 I_1、I_2、.....相互独立，且

$$P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

由此结果以及 $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ 这一事实，R´enyi [29] 得到了用第一类无符号斯特林数表示的 N_n 和 L_n 的概率函数。

Nevzorov [25, 26, 27, 28] 提出并讨论了由独立非同分布随机变量构成的序列中的记录。这是所谓的 F^{α}-方案的一种推广。Deheuvels 和 Nevzorov [12] 针对 F^{α}-方案中的随机变量 N_n 和 L_n 得到了各种极限定理（中心极限定理、大数定律、重对数律）。

设 X_1, X_2,... 是一列相互独立的随机变量，其分布函数为 $F_1(x)$ $F_2(x)$ .....，如果这一序列是一个 F^{α}-方案，则称之为.....

$$F_i(x) = [F(x)]^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

其中， $F(x)$ 是任意连续分布函数， α_1、 α_2、.....是正数常数（不失一般性，假设 $\alpha_1 = 1$）。

引理 2.（Nevzorov [26, 27]）在 F^{α}-方案中，按引理 1 中的定义，记录指示变量$I_1, I_2, \ldots$ 也相互独立，且

$$P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

因此，对于 F^{α}方案，记录数 N_n 也可以表示为独立指标变量之和 $I_1 + I_2 + \cdots + I_n$。Balakrishnan 和 Nevzorov [3] 用广义无符号第一类斯特林数表示了 N_n 和 L_n 的概率函数。对于几何递增总体，Charalambides [8] 用无符号 q-第一类斯特林数表示了 N_n 和 L_n 的概率函数及二项式矩。Ahsanullah [1] 展示了如何通过独立随机加数之和的分布，表示基于非同分布指数随机变量序列的记录分布。

3 记录数量和记录时刻的分布

在本节中，我们将用层级为 s 的第一类斯特林数，求出记录数量 N_n 和记录时刻 L_n 的概率函数。

引入相互独立的随机变量 I_i、 $i = 1$、2、.....，其中每个变量以如下概率取值 0 和 1

$$p_i = P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = \frac{1}{1 + (i-1)^s}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

考虑一列相互独立但不同分布的随机变量$X_1, X_2, \ldots$，其分布函数依次为 $F(x)^{\alpha_1}, F(x)^{\alpha_2}, \ldots$，其中 $F(x)$ 是任意连续函数，而 α_i 是正数，并且

$$p_i = P(I_i = 1) = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

序列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可由 $p_i, i=2,3,\ldots$ 反向确定:

$$\alpha_i=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{i-1})\frac{p_i}{1-p_i},\quad i=2,3,\ldots. \tag{13}$$

从 $\alpha_1=1$ 开始，我们得到

$$\alpha_2=1,\quad \alpha_3=\frac{2}{2^s},\quad \alpha_4=\frac{2(1+2^s)}{2^s(3^s)},\quad \alpha_5=\frac{2(1+2^s)(1+3^s)}{2^s(3^s)(4^s)}$$

因此，我们将 F^{α}-方案的系数表示为

$$\alpha_1=1,\quad \alpha_i=\prod_{j=2}^{i}\frac{(1+(j-2)^s)}{(j-1)^s},\quad i=2,3,\ldots. \tag{14}$$

因此

$$\alpha_{i+1}=\prod_{j=2}^{i+1}\frac{(1+(j-2)^s)}{(j-1)^s}=\alpha_i\,\frac{1+(i-1)^s}{i^s}, \tag{15}$$

那么，序列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足一阶递推关系。

$$i^s\,\alpha_{i+1}=(1+(i-1)^s)\,\alpha_i\quad \Rightarrow \alpha_i=i^s\,\alpha_{i+1}-(i-1)^s\,\alpha_i,\quad \alpha_1=1.$$

对 $i=1$、2、.....、j 求和，得到,

$$\sum_{i=1}^{j}\alpha_i=\sum_{i=1}^{j}\left(i^s\alpha_{i+1}-(i-1)^s\alpha_i\right)=j^s\,\alpha_{j+1}. \tag{16}$$

记 $A_0=0$、 $A_j=\sum_{i=1}^{j}\alpha_i$，则 A_j 是严格递增函数，由（16）可得

$$\frac{A_j}{\alpha_{j+1}}=j^s,\quad j\geq 1. \tag{17}$$

由于记录数 N_n 由 $N_n=\sum_{i=1}^{n}I_i$得到，因此 N_n 的概率生成函数将是伯努利随机变量 I_1、I_2、.....、I_n的 n 个生成函数的乘积,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(t^{N_n})&=\prod_{i=1}^{n}(1-p_i+p_it)=\prod_{i=1}^{n}p_i\prod_{i=1}^{n}\left(t+\frac{1-p_i}{p_i}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}p_i\prod_{i=1}^{n}\left(t+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}p_i\prod_{i=1}^{n}\left(t+\frac{A_{i-1}}{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}p_i\prod_{i=1}^{n}(t+(i-1)^s)\\
&=\prod_{i=1}^{n}p_i\sum_{k=0}^{n}\left[\!\!\left[{n\atop k}\right]\!\!\right]_s t^k=\sum_{k=0}^{n}t^k\left[\!\!\left[{n\atop k}\right]\!\!\right]_s\prod_{i=1}^{n}p_i
\end{aligned}$$

利用 $\mathrm{E}(t^{N_n}) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(N_n = k)$ 这一事实，我们得到

$$P(N_n = k) = \left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s \prod_{i=1}^{n} p_i = \frac{\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s}{\prod_{i=1}^{n}(1 + (i-1)^s)}, \qquad 1 \le k \le n. \tag{18}$$

记录数 N_n 的期望值（均值）可通过

$$\mathrm{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} k P(N_n = k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 + (1-i)^s)} \sum_{k=1}^{n} k \left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s. \tag{19}$$

现在， L_k 的概率函数可以由截至时间 n的记录数 N_n 的概率函数推导得出。由于以下等式对任意 n、 $= 1$、2、.....以及 k、 $= 1$、2、.....均成立。

$$P(L_k = n) = P(N_{n-1} = k-1, N_n = k) = P(N_{n-1} = k-1, I_n = 1),$$

由于事件 $\{N_{n-1} = k-1\}$ 和 $\{I_n = 1\}$ 在F^{α}-方案中相互独立，因此由（18）式可得

$$\begin{aligned} P(L_k = n) &= P(N_{n-1} = k-1) P(I_n = 1) \\ &= \frac{\left[\!\left[{n-1 \atop k-1} \right]\!\right]_s}{\prod_{i=1}^{n}(1 + (i-1)^s)}, \quad n = k, k+1, \ldots. \end{aligned} \tag{20}$$

4 $\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s$的最大值

确定斯特林数的最大值是一个值得研究的有趣问题。斯特林数构成一个强对数凹序列[16, 22]。由于斯特林数具有对数凹性，只需确定一个最大值的位置 [13, 15]。Mez¨o [24] 给出了一个估计，指出序列中 r-斯特林数取得最大值时的最大指标。Corcino 等人 [10] 确定了第一类非中心斯特林数序列达到最大值时的估计指标。

在本节中，我们确定层级为 s 的第一类斯特林数的最大值的位置以及相应的最大值。

如果存在一个指标 k，使得 $1 \le k \le n$，并且

$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \ge a_{k+1} \ge$，则称实数序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 是单峰的。

$\cdots \ge a_n$。一种更强的性质称为对数凹性，它意味着单峰性。若序列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 满足

$$(a_k)^2 \ge a_{k-1}\, a_{k+1}, \qquad \text{for } k = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{21}$$

若将式（21）中的“ $\geq$ ”替换为“ $>$ ”，则该序列称为严格对数凹序列。牛顿的下述定理为证明严格对数凹性提供了一种有用的方法，见 [4, 22, 34]。

定理 1. 如果多项式 $\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ 只有实根，那么序列 $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ 是严格对数凹的，并且也是单峰的。

对于任意固定的正整数 n，式 (1) 中给出的多项式只有非正实根。定理 1 立即推出系数序列 $\{\llbracket {n \atop k} \rrbracket_s\}_{k=0}^{n}$ 严格对数凹:

$$\left(\left\llbracket {n \atop k} \right\rrbracket_s\right)^2 - \left\llbracket {n \atop k-1} \right\rrbracket_s \left\llbracket {n \atop k+1} \right\rrbracket_s > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{22}$$

因此是单峰的。根据 Hammersley [15] 和 Erdos [13]，对于所有固定的 $n \geq 3$, 存在一个唯一的指标 $k_{n,s}$，使得它对应于第 s 级第一类 Stirling 数的最大值。

$$\left\llbracket {n \atop 1} \right\rrbracket_s < \left\llbracket {n \atop 2} \right\rrbracket_s < \cdots < \left\llbracket {n \atop k_{n,s}-1} \right\rrbracket_s < \left\llbracket {n \atop k_{n,s}} \right\rrbracket_s > \left\llbracket {n \atop k_{n,s}+1} \right\rrbracket_s > \cdots > \left\llbracket {n \atop n} \right\rrbracket_s.$$

为了找到最大化指标，我们使用 Darroch[4, 11] 的以下定理。

定理 2. 设 $G(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ 是一个仅有实根的多项式，满足 $G(1) > 0$。设 k_n 是 $G(x)$ 系数序列的最大化指标。设 $\mu = G'(1)/G(1)$。那么我们有

$$|k_n - \mu| < 1. \tag{23}$$

令 $G_s(x) = \sum_{k=0}^{n} \llbracket {n \atop k} \rrbracket_s\, x^k$ 和 $\mu_{n,s} = G'(1)/G(1)$。因此，如果我们能计算$\mu_{n,s}$，就至多需要检查 $\llbracket {n \atop k} \rrbracket_s$ 的两个值，才能找到序列 $\{\llbracket {n \atop k} \rrbracket_s\}_{k=1}^{n}$的最大值。在下一个定理中，我们计算$\mu_{n,s}$，然后就能确定任意固定 $n > 2$时序列 $\{\llbracket {n \atop k} \rrbracket_s\}_{k=1}^{n}$最大值的位置（误差至多为 1）。

定理 3. 对于任意固定的正整数 $n > 2$，设 $k_{n,s}$ 为序列 $\{\llbracket {n \atop k} \rrbracket_s\}_{k=1}^{n}$ 取得其最大值时的最大索引，则

$$\left| k_{n,s} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i-1)^s} \right| < 1. \tag{24}$$

证明。对于 $n > 2$，我们有

$$G_s(1) = \sum_{k=0}^{n} \left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s = \prod_{i=1}^{n} (1 + (i-1)^s) > 0,$$

and

$$G'_s(x) = \sum_{k=0}^{n} k \left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s x^{k-1} \quad \Rightarrow \quad G'_s(1) = \sum_{k=0}^{n} k \left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s.$$

为了计算 $G'_s(1)$，我们注意到，式 (19) 中给出的 $\mathrm{E}(N_n)$ 也可以根据随机变量 N_n 表示为一组相互独立且不同分布的伯努利随机变量之和这一事实，写成等价形式。因此，随机变量 N_n 服从泊松二项分布，其均值为

$$\mathrm{E}(N_n) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(I_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i-1)^s}, \tag{25}$$

由式 (19) 和 (25)，我们得到

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 + (1-i)^s)} \sum_{k=1}^{n} k \left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i-1)^s}.$$

因此，我们得到

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{n} k \left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s = \prod_{i=1}^{n} (1 + (1-i)^s) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i-1)^s}. \tag{26}$$

Then

$$\mu_{n,s} = \frac{G'(1)}{G(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i-1)^s}. \tag{27}$$

□

注意，对于任意 n 和 s，$\mu_{n,s}$ 的值都可以轻松计算；使 $\left[\!\left[n \atop k_{n,s} \right]\!\right]_s$ 取得最大值的 $k_{n,s}$ 的唯一取值与 $\mu_{n,s}$ 的距离不超过 1。

一些特殊情况 利用递推关系 (3) 和任意计算机代数系统，都可以轻松得到任意 n 和 s 下数组 $\left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_s$ 的值。

情况 1：当 $s = 1$ 时，我们有 $\left[\!\left[n \atop k \right]\!\right]_1 = |s(n,k)|$，即无符号第一类斯特林数，在这种情况下 $\mu_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$，这与 [4] 结果一致。

例1. 对于 $n=6$，我们得到 $\mu_{6,\ 1}=2.45$ 因此，序列 $\{|s(6,k)|\}_{k=1}^{6}$ 的最大化指标满足 $|k_{6,\ 1}-2.45|<1$，于是 $k_{6,\ 1}=2$ 或 3。因此，我们只需检查两个值： $|s(6,2)|$ 和 $|s(6,3)|$。事实上，$|s(6,2)|=274$ 是最大的。

例2。对于 $n=100$，我们有 $\mu_{100,\ 1}=5.187$，于是 $k_{100,\ 1}=5$ 或 6。事实上，$|s(100,5)|=1.971\cdot 10^{157}$ 是序列 $\{|s(100,k)|\}_{k=1}^{100}$ 的最大值。

情形2：当 $s=2$ 时，我们有 $\left[\!\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2=(-1)^{n-k}u(n,k)$，其中 $u(n,k)$ 是具有偶数指标的第一类中心阶乘数。

例3。对于 $n=5$，我们有 $\mu_{5,\ 2}=\sum_{i=1}^{5}{}^{1}{}_{1+}{}_{(i-1)_2=}=1.859$，且序列 $\{\left[\!\left[\begin{smallmatrix}5\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2\}_{k=1}^{5}$ 的最大化指标 $|k_{5,\ 2}-1.859|<1$，于是 $k_{5,\ 2}=1$ 或 2。因此，我们只需检查 $\left[\!\left[\begin{smallmatrix}5\\1\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2$ 和 $\left[\!\left[\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2$ 的值。事实上，$\left[\!\left[\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2=820$ 是最大值。

例4. 对于 $n=100$，我们有 $\mu_{100,\ 2}=2.067$，于是 $k_{100,\ 2}=2$ 或 3。事实上，$\left[\!\left[\begin{smallmatrix}100\\2\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2=1.4239\cdot 10^{312}$ 是序列 $\{\left[\!\left[\begin{smallmatrix}100\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2\}_{k=1}^{100}$ 的最大值。

注意，$\mu_{n,\ 2}$ 随着 n 缓慢增加，其最小值为 1.7，最大值为 2.074。对于任意固定的 $n\geq 3$，我们发现序列 $\{\left[\!\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_2\}_{k=1}^{n}$ 的最大值出现在 $k=2$。

情形3：当 $s=3$ 时，$\left[\!\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_3$ 的一些取值如表1所示，其中 $3\leq n\leq 12$。结果表明，序列的每一行的最大值

表1： $\left[\!\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_3$ 在 $3\leq n\leq 12$ 时的取值

$n\,/\,k$	1	2	3	4	5	6
3	8	9	1	0	0	0
4	216	251	36	1	0	0
5	13820	16280	2555	100	1	0
6	$1.728\cdot 10^6$	$2.049\cdot 10^6$	$3.357\cdot 10^5$	15060	225	1
7	$3.732\cdot 10^8$	$4.443\cdot 10^8$	$7.455\cdot 10^7$	$3.588\cdot 10^6$	63660	441
8	$1.280\cdot 10^{11}$	$1.528\cdot 10^{11}$	$2.602\cdot 10^{10}$	$1.305\cdot 10^9$	$2.542\cdot 10^7$	$2.149\cdot 10^5$
9	$6.555\cdot 10^{13}$	$7.834\cdot 10^{13}$	$1.347\cdot 10^{13}$	$6.942\cdot 10^{11}$	$1.432\cdot 10^{10}$	$1.355\cdot 10^8$
10	$4.778\cdot 10^{16}$	$5.718\cdot 10^{16}$	$9.900\cdot 10^{15}$	$5.196\cdot 10^{14}$	$1.113\cdot 10^{13}$	$1.131\cdot 10^{11}$
11	$4.778\cdot 10^{19}$	$5.722\cdot 10^{19}$	$9.957\cdot 10^{18}$	$5.295\cdot 10^{17}$	$1.165\cdot 10^{16}$	$1.242\cdot 10^{14}$
12	$6.360\cdot 10^{22}$	$7.621\cdot 10^{22}$	$1.331\cdot 10^{22}$	$7.147\cdot 10^{20}$	$1.604\cdot 10^{19}$	$1.770\cdot 10^{17}$

$\{\left[\!\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]\!\right]_3\}$, $3\leq n\leq 12$ 在指标 $k=2$ 处取得。事实上，当 n 取更大的值时，我们得到的最大化指标相同。

值得注意的是，对于固定的 $n \geq 3$，有 $\mu_{n,\ 2} > \mu_{n,\ 3} > \mu_{n,\ 4} > \cdots$。表2给出了 $3 \leq s \leq 8$ 时 $\mu_{n,\ s}$ 的最小值和最大值。

表2：$\mu_{n,s}$ 的最小值和最大值，其中 $3 \leq s \leq 8$

	$\mu_{n,3}$	$\mu_{n,4}$	$\mu_{n,5}$	$\mu_{n,6}$	$\mu_{n,7}$	$\mu_{n,8}$
最小值	1.611	1.559	1.530	1.515	1.508	1.504
最大值	1.686	1.578	1.536	1.517	1.508	1.504

事实上，我们可以看到，随着 s 增大，$\mu_{n,s} = 1.5 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{1+i^s}$ 趋近于1.5。因此，最大化指标必定等于1或2。根据(4)和(5)，我们有 $\left[\!\left[{n \atop 1} \right]\!\right]_s < \left[\!\left[{n \atop 2} \right]\!\right]_s$，由此得到以下结果。

推论1。对于任意固定整数 $n \geq 3$ 和任意整数 $s \geq 2$，序列 $\{\left[\!\left[{n \atop k} \right]\!\right]_s\}_{k=1}^{n}$ 的最大值为 $\left[\!\left[{n \atop 2} \right]\!\right]_s = ((n-1)!)^s \ H_{n-1}^{(s)}$。

5 结论

本文用第 s 级第一类斯特林数表示了上记录数量 N_n 的概率函数和均值。因此，也用第 s 级第一类斯特林数得到了记录时刻 L_n 的概率函数。最后，我们确定了第 s 级第一类斯特林数的最大值的位置。

参考资料

[1] Ahsanullah, M., Nevzorov, V.B. (2017). 关于非同分布指数随机变量序列中的记录. J. Stat. The- ory Appl., 16(3), 284–287.[2] Arnold, B. C., Balakrishnan, N., & Nagaraja, H. N. (1998). 记录. Wiley, 纽约.[3] Balakrishnan, N., Nevzorov, V. B. (1997). 斯特林数与记录. 载于《组合方法及其在概率与统计中的应用进展》. Birkh¨auser, 波士顿 189–200.
[4] B´ona, M. (2004). 《排列组合学》. Chapman & Hall/CRC.

[5] Butzer, P. L., Schmidt, K., Stark, E. L., & Vogt, L. (1989年). 中心阶乘数；其主要性质及若干应用. Numer. Funct. Anal. Optim., 10(5&6), 419–488.[6] Charalambides, Ch. A. (2007年). 几何递增总体中记录统计量的分布. J. Statist. Plann. Infer., 137, 2214–2225.[7] Charalambides, Ch. A. (2007年). r记录数以及 r记录与相邻 r记录之间时距的精确分布. Comm. Statist. Theory Methods, 36, 1305–1317.[8] Charalambides, Ch. A. (2007年). 递增总体中记录值的分布与矩. JIRSS., 6(1), 47–60.[9] Comtet, L. (1974年). 《高级组合学》. Reidel, 多德雷赫特/波士顿.[10] Corcino, R. B., Corcino, C. B., & Aranas, P. J. B. (2015年). 第一类非中心斯特林数的峰值. Int. J. Math. Math. Sci., 文章 982812. https://doi.org/10.1155/2015/982812[11] Darroch, J.N. (1964年). 独立试验中成功次数的分布. Ann. Math. Stat., 35, 1317–1321.[12] Deheuvels, P., Nevzorov, V. B. (1996年). F$^{\alpha}$-方案中的记录。I. 鞅性质. J. Math. Sci., 81(1), 2368–2378.[13] Erd¨os, P. (1953年). 关于 Hammersley 猜想. J. London Math. Soc., 28, 232–236.[14]Gelineau, Y., Zeng, J. (2010年). 雅可比-斯特林数的组合解释. Electron. J. Combin., 17, 文章编号：R70.[15] Hammersley, J.M. (1951). 自然数乘积之和. Proc. London Math. Soc., 3(1), 435–452.[16] Harper, L.H. (1967年). 斯特林行为渐近正态. Ann. Math. Stat., 38, 410–414.[17] Kim, T. (2018年). 关于中心阶乘数的一则注记. Proc. Jangjeon Math. Soc., 21(4), 575–588.[18] Komatsu, T., Pita-Ruiz, C. (2020). 二级多重柯西数. Integral Transform. Spec. Funct., 317, 570–585.

[19] Komatsu, T.、Ram´ırez, J. L. 和 Villamizar, D.（2021）。一种研究高阶第一类斯特林数的组合方法。匈牙利科学数学研究，58，293–307。[20] Komatsu, T.、Ram´ırez, J. L. 和 Villamizar, D.（2021）。一种研究广义中心阶乘数的组合方法。地中海数学杂志，18:192。[21] Komatsu, T.、Sirvent, V. F.（2023）。高阶多重柯西数。Symmetry，15(354)。https://doi.org/10.3390/sym15020354[22] Lieb, E.H.（1968）。斯特林数的凹性性质及其生成函数。组合理论杂志，5，203–206。[23] Merca, M.（2016）。中心阶乘数与伯努利多项式之间的联系。匈牙利数学期刊，73(2)，259–264。[24] Mez¨o, I.（2008）。关于 r-斯特林数的最大值。应用数学进展，41，293–306。[25] Nevzorov, V.B.（1984）。记录时刻与非同分布随机变量的情形。概率论及其应用，29，845–846。[26] Nevzorov, V.B.（1987）。非同分布随机变量序列中的记录数。J. Math. Sci.，38，2375–2382。https://doi.org/10.1007/BF01095080。[27] Nevzorov, V.B.（1987）。非同分布随机变量序列的记录时刻与记录间隔时间。苏联数学杂志，36，510–516。[28] Nevzorov, V.B.（1988）。记录。概率论及其应用，32，201–228。[29]R´enyi, A.（1962）。一列观测值中显著元素的理论。载于：概率论中的组合方法研讨会，数学研究所，奥胡斯大学，丹麦，104–115。[30] Riordan, J.（1968）。组合恒等式。John Wiley & Sons, Inc.：纽约。[31] Shiha, F. A.（2020）。偶数指标的 r-中心阶乘数。微分方程进展，2020:298。https://doi.org/10.1186/s13662- 020-02763-1。

[32] Sibuya, M., Nishimura, K.（1997）。记录值突破的预测。Statistica Sinika，7，893–906。[33] Tweedie., C.（1918）。斯特林数和多项式。Proc. Ed- inburgh Math. Soc.，37，2–25。[34] Wilf, H.S.（1994）《生成函数学》。学术出版社/哈考特·布雷斯·约万诺维奇。