arXiv:2305.02686v1 [math.SP] 4 May 2023

平面上磁诺伊曼特征值的几何界

BRUNO COLBOIS、CORENTIN L´ENA、LUIGI PROVENZANO 和 ALESSANDRO SAVO

Abstract. 我们研究有界区域 Ω 上磁拉普拉斯算子的特征值，其中 Ω 位于 $\mathbb{R}^2$ ，具有均匀磁场 $\beta > 0$ ，并满足磁诺伊曼边界条件。我们为基态能量 λ_1 给出上界和下界，并针对特征值的第一黎兹平均，提供具有 Kr¨oger 风格的半经典估计。我们还讨论了黎曼曲面上的单连通区域中，非恒定磁场 $\beta = \beta(x)$ 对应的第一特征值的上界。

具体而言：我们证明了一般平面区域的上界 $\lambda_1 < \beta$ ，以及当 Ω 为单连通区域时，可变磁场对应的上界 $\lambda_1 <$sup $_{x\in\Omega} |\beta(x)|$ 。
对于光滑区域，我们证明了一个下界 λ_1 ，它仅取决于磁场强度 β和区域的滚动半径。

关于黎兹平均的估计推出了前 k 个特征值平均值的一个上界；当 $k \to \infty$ 时，该上界是尖锐的，并由半经典极限 $\frac{2\pi k}{|\ |}$ Ω 加上一个振荡项构成。

我们还构造了若干例子，展示拓扑的重要性：特别地，我们证明，任意小的泛型简单闭曲线的管状邻域，其最低特征值都有一个严格为正的下界；这与小面积单连通区域的情形相反，对于后者， λ_1 总是很小。

Contents

1. 引言 1 2. 记号与结果陈述 4 2.1. 磁拉普拉斯算子的一般性质 4 2.2. 常磁场 5 2.3. λ_1 5的上界 2.4. λ_1 7的下界 2.5. 高阶特征值及平均值的上界 7 2.6. 嵌入曲线第一特征值的反向法贝尔-克拉恩不等式 8 2.7. 磁特征值的若干性质 8 3. λ_1 9的上界 4. 变磁场 λ_1 的上界 14 5. λ_1 16的下界 6. 特征值平均值的半经典估计 20 附录 A. 嵌入曲线及薄管状邻域的特征值 26 附录 B. 圆盘的特征值 27 附录C. 更多例子 30 参考文献 34

1. 引言

本文的主要目标是推导具有常数磁场 $\beta > 0$ 且满足磁诺伊曼边界条件的区域上的磁拉普拉斯算子特征值的上界和下界

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35P15，35J25，81Q10。*Key words and phrases.* 磁拉普拉斯算子，常磁场，诺伊曼特征值，上界与下界，半经典估计。第一作者感谢瑞士国家科学基金会（SNSF）项目“几何谱理论”（Geometric Spectral Theory）的资助，项目编号为200021-19689。第三和第四作者感谢意大利国家高等数学研究所（INdAM）下属的代数结构、几何结构及其应用国家研究组（GNSAGA）的资助。

$\mathbb{R}^2$. 谱 具体而言，我们将考虑与以下势 1-形式相关联的磁拉普拉斯算子

$$A = \frac{\beta}{2}(-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \tag{1.1}$$

它生成强度为 β 的磁场，其意义是 $dA = \beta dv$ 其中 dv 是体积二形式。注意，将 β 替换为 $-\beta$ 不会改变谱，因此考虑 $\beta > 0$ 并不失一般性，参见第 2.7 小节。特征值对应于二维区域内受恒定强度横向磁场作用的量子带电粒子的能级 β。显然，对相应谱的研究源于量子力学和数学物理。关于这一主题的更详细讨论，请参阅著作 [14, 26] 。

然而，近几十年来，这一主题在分析学和几何学领域也引起了广泛关注。在这些背景下通常提出的相关问题包括特征值的几何界和等周不等式。本文将着重讨论特征值界，尤其关注区域的几何形状如何影响特征值，并特别关注基态能量 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$，其结果为正。关于磁诺伊曼问题特征值界的既有研究，请参阅 [7, 8, 10, 11, 15, 20, 22]。

本文中，记号 $\lambda_j(\Omega\ \beta)$ 表示具有诺伊曼边界条件、势 A 如式（1.1）所示的磁拉普拉斯算子的第 j 个特征值。（当 Ω 非单连通时，生成磁场 β 的势形式选择可能会影响其谱，见第 2.2 小节。）

若在式（1.1）中令 $\beta = 0$，即令 $A = 0$，则回到诺伊曼拉普拉斯算子的情形；关于其特征值界已有大量文献。按本文的记号，$\lambda_1(\Omega,0) = 0$，而 $\lambda_2(\Omega, 0) > 0$ 是（非磁）诺伊曼拉普拉斯算子的第一个正特征值。另一方面，当 $\beta > 0$时，磁谱，尤其是 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$，与通常的拉普拉斯谱相比呈现出一种特殊行为。下面我们仅列举几个例子，略作说明。

– 首先，第一特征值在位似变换下的行为取决于磁场的强度：对于任意 $\alpha > 0$，都有：

$$\lambda_j(\alpha\Omega, \beta) = \frac{1}{\alpha^2}\lambda_j(\Omega, \beta\alpha^2).$$

– 由此以及上界（2.17）可知，当 $\alpha \to 0^+$ 时，$\lambda_1(\alpha\Omega\ \beta) \to 0$：区域经位似缩小后，第一特征值趋于零。

– 然而，当 $|\Omega| \to 0^+$ 时，第一特征值不一定趋于 0：存在面积任意小但第一特征值有正下界的区域（事实上，“一般”的简单闭曲线的一个小管状邻域，其第一特征值有正下界，见例 C.3）。

– 仍就位似变换而言，给定任意区域 Ω，当 $\alpha \to +\infty$ 时，有 $\lambda_1(\alpha\Omega\ \beta) \to \Theta_0\beta$，其中 $\Theta_0 \approx 0.590106$ 是一个普适常数（德·热纳常数，见 [14, 第 3]章）。这表明，体积任意大并不意味着第一特征值很小。此外，请注意，函数 $\alpha \mapsto \lambda_1(\alpha\Omega\ \beta)$ 通常并非递增（当 Ω 为圆盘时，见图3）。

– 存在一些凸区域，其 内半径有一个正的下界，而第一特征值 e 可以任意小（见 例 5.12）。

– Th两者之间存在很大 triki差异：磁性诺伊曼特征值与磁性狄利克雷特征值 .

对此我们简要评论如下。令 $\lambda_1^D(B_R, \beta)$ 表示半径为 R 的圆盘上的第一磁性狄利克雷特征值。证明 $\lambda_1^D(B_R, \beta)$ 随 $R \in$ 单调递减（$R \in \in(0, +\infty)$），从 $+\infty$ 降至 β（这是一个严格且尖锐的下界），是相当标准的；并且对于任意 R，第一特征函数都是实值且径向对称的（例如见 [29]）。此外，法贝尔-克拉恩不等式适用于 $\lambda_1^D(\Omega\ \beta)$，见 [12]。另一方面，关于圆盘上的第一诺伊曼特征值 $\lambda_1(B_R, \beta)$ 随 R 变化的规律，我们尚未完全了解：第一特征函数的角动量随 R 增大；特征值有一致上界，在 $R \to 0^+$ 时趋于零，并且随 R 呈振荡（即非单调）变化；数值研究表明，对于所有 R，$\lambda_1(B_R, \beta) < \Theta_0\beta$，但目前我们尚无证明。图1给出了 $\lambda_1^D(B_R,1)$ 和 $\lambda_1(B_R,1)$ 随 R 变化的曲线。关于圆盘上的诺伊曼问题的更多细节，参见附录 B。

– 最后，我们指出，关于第一磁性诺伊曼特征值的反向法贝尔-克拉恩不等式仍然是一个未解决的问题，而且对于多重连通区域，该不等式显然不成立。事实上，在 [15] 中，作者证明，对于给定的圆环 Ω，存在 $\beta_0(\Omega)$，使得对于任意 $\beta > \beta_0$ $\lambda_1(\Omega^*,\ \beta) < \lambda_1(\Omega\ \beta)$,

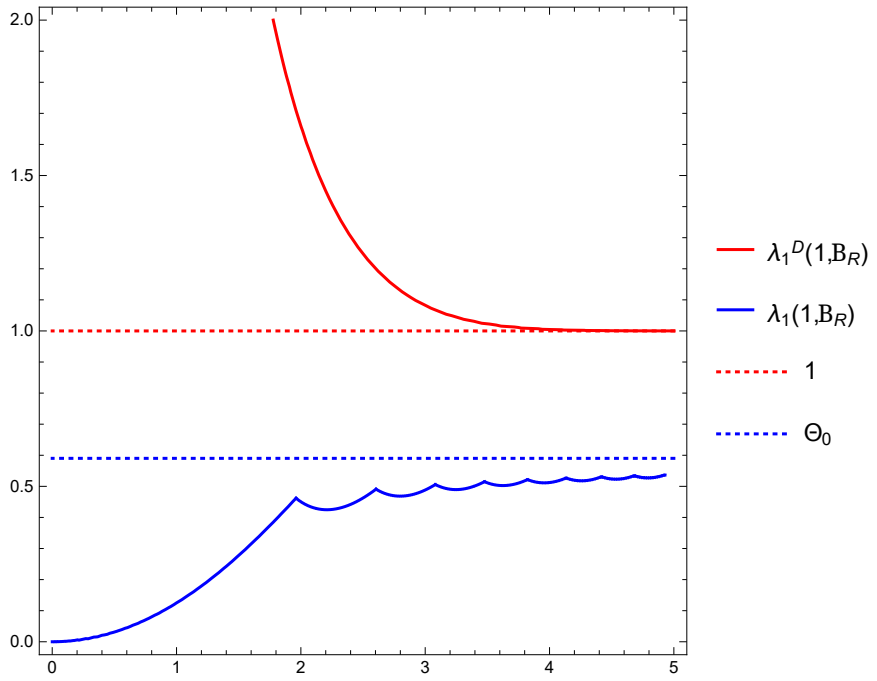

FIGURE 1. 圆盘的第一磁性狄利克雷特征值（红色） B_R 随 R 的变化；圆盘的第一磁性诺伊曼特征值（蓝色） B_R 随 R 的变化。这里 $\beta = 1$。

其中 Ω^* 是一个圆盘， $|\Omega^*| = |\Omega|$。注意，这是一个渐近反例。更简单地说，从我们的例 C.3 可知，对任意 $\beta > 0$，存在许多非单连通区域，其第一特征值大于与其体积相同的圆盘的第一特征值。事实上，如前所述，一条“典型”简单闭曲线的小管状邻域（面积较小）具有一致地远离零的第一特征值，而面积相同的小圆盘则具有较小的第一特征值。

这些例子表明，要理解哪些几何性质会导致 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的上界或下界并非易事。

本文以不同方式改进了已知的界。首先，我们关注基态能量 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$，它对于任意 $\beta > 0$ 都严格为正。我们证明了一个适用于任意区域的普适上界，该上界是严格的，且由 β（磁场强度）给出（定理 2.1）。对于某些类别的区域（包括子图和自铺砌区域），我们证明上界为 $\Theta_0\beta$（定理 2.2）；鉴于渐近行为 $\lambda_1(\Omega\ \beta) = \Theta_0\beta + o(\beta)$（当 $\beta \to +\infty$ 时，见第 [14, 章），该上界是最优的。我们还针对单连通黎曼曲面上的磁场非恒定情形，证明了第一特征值的一个普适上界，该上界以磁场的上确界范数表示（见定理 2.3；关于非单连通情形的讨论，另见第 4 节）。

接下来，我们将讨论 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的下界。我们的出发点是 [11] 中证明的单连通区域下界，并以此导出任意光滑区域的新下界，其形式为 β 或 β^2，具体取决于区域的滚动半径 δ，见定理 2.5。

接下来，我们考虑整个谱，并证明了类似于 Kr¨oger [19], 的特征值平均半经典估计，这些估计在渐近意义下是尖锐的（定理 2.6）。这些估计给出了任意阶单个特征值的上界。请注意，特征值平均的界最终等价于首个黎兹平均 $R_1(z)$ 的界，这遵循 Berezin 和 Li-Yau [3, 23]的传统。对于可变磁场情形下的黎兹平均下界，也已在 [7]中得到。对于狄利克雷磁性特征值，黎兹平均的上界已在 [13] 中给出（另见 [16]）。我们注意到，我们关于 R_1 的下界表现与狄利克雷黎兹平均的上界表现有显著差异 [13], ，并体现了区域面积、磁场强度与特征值指标之间的相互作用。

我们附上三篇附录，讨论一些与特征值界相关、但本身也具有研究价值的结果。具体而言，我们考察嵌入曲线上的磁拉普拉斯算子，并在这一背景下建立一种“反向法贝尔–克拉恩”不等式。我们还讨论圆盘的情形，并汇集了另外几个例子，这些例子有助于理解在建立精确界时所面临的一些困难。

本文组织如下。在第2节中，我们介绍数学问题，确定记号，并陈述主要结果。在第 3 节和第 5 节中，我们分别证明关于$\lambda_1(\Omega,\beta)$的上界和下界。在第 4 节中，我们证明黎曼曲面上可变磁场情形下第一特征值的上界。在第 6 节中，我们证明黎兹平均及其平均值的渐近锐半经典估计。在附录 A 中，我们研究将磁势限制在嵌入曲线上所得到的特征值问题，并证明一个等周结果。在附录 B 中，我们汇总圆盘上磁特征值的若干性质。在附录C中，我们给出更多示例，以帮助阐明寻找良好界限时所面临的困难。

2. 记号与结果陈述

2.1. 磁拉普拉斯算子的一般性质。设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域，且 A 是一个光滑实1-形式。我们将光滑复值函数 u 的磁微分定义为如下复1-形式：

$$d^A u = du - iuA.$$

d^A 的伴随算子是算子 δ^A，它作用于1-形式 ω 时定义为 $\delta^A\omega = \delta\omega + i\omega(A^\sharp)$，其中 $A^\sharp$ 是 A 的对偶向量场，而 δ 是 d 的伴随算子（注意 $\delta = -\mathrm{div}$）。与势 A 相关联的磁拉普拉斯算子定义为 $\Delta_A u = \delta^A d^A u.$。标准计算可得

$$\Delta_A u = \Delta u + |A|^2 u + 2i\langle du, A\rangle + iu\,\mathrm{div}\,A,$$

其中 $\mathrm{div}A = -\delta A$ 是1-形式 A的通常散度。注意，本文中 Δ 表示正定算子 $\Delta := -\partial^2_{x_1x_1} - \partial^2_{x_2x_2}.$。我们用 x 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点，其笛卡尔坐标为 $(x_1,\ x_2)$。我们常使用极坐标 $(r,\ t)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]$。特别地 $r = |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$。

我们通常会出于表述上的简便（且在不会引起混淆的情况下），将形式 A 与其对应的对偶向量场 $A^\sharp$（矢势）视为同一对象；磁拉普拉斯算子因而可以写成以下形式，这种形式在文献中经常出现：

$$\Delta_A = -(\nabla - iA)^2.$$

对偶地，我们将复值函数 u 的磁梯度定义为

$$\nabla^A u := \nabla u - iuA$$

其中 A 被视为矢势。我们考虑 Ω 中带有磁诺伊曼边界条件 的磁拉普拉斯算子的特征值问题，即

$$\begin{cases} \Delta_A u = \lambda u\,, & \text{in } \Omega,\\ \langle \nabla^A u, N\rangle = 0\,, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，N是 $\partial\Omega$的外单位法向量。第二行中，可以将 $\langle\nabla^A u, N\rangle$ 视为 u的磁法向导数。

问题 m (2.1) 按弱意义理解如下：求 $u\in H^1(\Omega)$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 at

$$\int_\Omega \langle \nabla^A u, \overline{\nabla^A\phi}\rangle = \lambda\int_\Omega u\overline{\phi}\,,\quad \forall\phi\in H^1(\Omega). \tag{2.2}$$

这里，$H^1(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)$ 中具有弱一阶导数的 $L^2(\Omega)$ 复值函数的标准索 Sobole夫空间。

众所周知，在对 Ω 作出合理假设（例如，Ω 为利普希茨区域）时，可以证明问题 (2.2) 存在一个递增的正特征值序列，且每个特征值具有有限重数，并趋于 $+\infty$

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_j\le\cdots\nearrow+\infty.$$

在本文余下部分中，我们将默认假设 Ω 是一个有界区域，且 (2.2) 的谱是离散的。其特征值可通过变分方式刻画如下。

$$\lambda_j = \min_{\substack{U\in H^1(\Omega)\\ \dim U=j}} \max_{0\neq u\in U} \frac{\int_\Omega |\nabla^A u|^2}{\int_\Omega |u|^2}. \tag{2.3}$$

注意， $\lambda_j = \lambda_j(\Omega, A)$ 通常同时依赖于区域和势 1-形式；然而，我们注意到谱具有众所周知的规范不变性，根据这一性质，对于任意光滑函数 f，若将 A 替换为 $A + df$，谱将保持不变：

$$\lambda_j(\Omega, A) = \lambda_j(\Omega, A + df).$$

2.2. 常数磁场。 在本文中，我们主要考虑（2.1）中的以下势 1-形式A：

$$A = \frac{\beta}{2}(-x_2 dx_1 + x_1 dx_2), \tag{2.4}$$

我们通常将其称为标准势；其中 β 是一个正常数。注意， $dA = \beta dv$ 是强度为 β的常磁场。另请注意，$\operatorname{div} A = 0$。这里 dv 是 $\mathbb{R}^2$中的通常面积元素。

在表述需要时，我们将强调特征值 λ_j 对 β 和 Ω 的依赖关系，并将其记为

$$\lambda_j(\Omega, \beta). \tag{2.5}$$

换言之，(2.5) 中的记号指的是具有 (2.4) 中所示势函数形式的磁拉普拉斯算子的特征值。

关于这一点，或许有必要在此作一番说明。注意，若 Ω 是单连通的，那么（2.1）的谱只取决于 β，而与势 A 无关。事实上，若 A, A' 是满足 $dA = dA' = \beta dv$ 的两个势，则它们之差是一个闭 1-形式；只要 Ω 是单连通的，该形式就是恰当形式。在这种情况下，由于规范不变性，采用 A 和 A' 时（2.1）的谱相同。若区域不是单连通的，情况则完全不同：此时，对于相差一个闭 1-形式的 A, A'，对应的谱一般可能并不相同。在这种情况下，正如我们已经说明的，我们考虑的是由（2.4）定义的、采用 A 时（2.1）的谱。

2.3. λ_1 的上界。 此处列出有关基态能量 $\lambda_1(\Omega, \beta)$ 上界的主要结果。

第一个结果是关于 $\lambda_1(\Omega, \beta)$ 的上界，对 $\mathbb{R}^2$ 中任意有界区域均成立。其证明见第3节（定理 3.1）。

定理 2.1。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域。那么

$$\lambda_1(\Omega, \beta) < \beta. \tag{2.6}$$

实际上，上界 (2.6) 是定理 3.1 中所证明的一个更精确上界的推论，即

$$\lambda_1(\Omega, \beta) \leq \begin{cases} \beta - \frac{1}{2R_\Omega^2}, & \text{if } R_\Omega > \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \\ \frac{R_\Omega^2 \beta^2}{2}, & \text{if } R_\Omega \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \end{cases}$$

其中 R_Ω 表示 Ω 的外接半径，即包含 Ω 的最小圆盘的半径。或者说，对于单连通区域的上界 (2.6) 由

$$\lambda_1(\Omega, \beta) \leq \beta(1 - e^{-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}})$$

得到，我们将在定理 4.2 中证明这一点（见下文的定理 2.3）。注意，后一个界意味着，对于单连通区域，$\lambda_1(\Omega, \beta) \to 0$ as $|\Omega| \to 0^+$。若 Ω 非单连通，则此结论不再成立，见例 C.3。

对于某些类的区域，我们证明了一个渐近精确的上界。这个上界依赖于一个普适的正常数，即德·热纳常数 $\Theta_0 \approx 0.590106$，我们将在下一小节中更详细地讨论它（见 (2.14)）。具体而言，我们证明了以下结果

定理 2.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界区域。假设在等距变换下，以下条件之一成立：

1) Ω 是一个子图，即 $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ a < x_1 < b, 0 < x_2 < g(x_1)\}$ 其中某个光滑的 $g : (a, b) \to [0, +\infty)$；

2) Ω 包含于某个条带 $(a, b) \times (0, +\infty)$ 中，且包含 $(a, b) \times (0, 2\sqrt{\Theta_0/\beta})$。那么

$$\lambda_1(\Omega, \beta) < \Theta_0 \beta. \tag{2.7}$$

假设：

3) Ω 是自铺砌的，即 $\Omega = \mathrm{Int}\,(\bigcup_{i=1}^m \omega_i)$，其中每个 ω_i 都与 $\frac{1}{\sqrt{m}}\Omega$等距。

Then

$$\lambda_1(\Omega, \beta) \leq \Theta_0 \beta. \tag{2.8}$$

常数 Θ_0 与 $\lambda_1(\Omega, \beta)$在 $\beta \to +\infty$时的渐近行为有关。事实上，对于任意光滑的 Ω，都有 $\Theta_0 = \lim_{\beta \to +\infty} \lambda_1(\Omega, \beta)/\beta$（见 (2.13)）。因此，从这个意义上说，界 (2.7)-(2.8) 是最优的。于是，我们可以提出以下问题。

开放问题 1. 证明对于所有 Ω，$\lambda_1(\Omega, \beta) < \Theta_0 \beta$。

请注意，我们的定理 2.2 不涵盖所有圆盘的情形（半径较小的圆盘已由定理 2.1 和 2.3 涵盖）。然而，数值证据（见附录 B）表明，$\Theta_0 \beta$ 是所有圆盘的严格上界。

开放问题 2. 证明对于任意圆盘 B，$\lambda_1(B, \beta) < \Theta_0 \beta$。

定理 2.2 的第 1）和第 2）点在定理 3.3 中证明，而第 3）点在定理 3.7 中证明。对于情形 3），我们实际上在定理 3.7 中证明了 $\lambda_1(\Omega, \beta) \leq \Lambda(\Omega)\beta$，其中 $\Lambda(\Omega) \leq \Theta_0$ 由 $\lim_{\beta \to +\infty} \lambda_1(\Omega, \beta)/\beta$ 给出。对于某些具有凸角的区域，可以证明 $\Lambda(\Omega) < \Theta_0$，见[4]。具有这一性质的自铺砌区域，例如三角形和平行四边形。

关于 λ_1，我们还研究了单连通黎曼曲面上可变磁场 $\beta = \beta(x)$ 的情形。我们建立了一个仅依赖于磁场 β、而不依赖于磁势的一般上界。

定理 2.3。设Ω 为单连通、可定向的紧致黎曼曲面，设 A 为光滑1-形式，并设 $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ 由 $dA = \beta dv$定义。若 $\partial\Omega = \emptyset$，还假设 $\int_\Omega \beta = 0$。令 $\lambda_1(\Omega, A)$ 表示带磁势 A的(2.1) 的第一特征值。令 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 为下列方程的唯一解。

$$\begin{cases} \Delta\phi = \beta\,, & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0\,, & \text{on } \partial\Omega \text{ (if } \partial\Omega \neq \emptyset). \end{cases}$$

并令 $\beta^* := \max_\Omega |\beta|$, $\phi^* := \max_\Omega |\phi|$。以下不等式成立：

1) $\lambda_1(\Omega, A) < \beta^*$. *2)* 如果 $\beta \geq 0$，则 $\lambda_1(\Omega, A) \leq \beta^*(1 - e^{-2\phi^*})$。 *3)* 如果 $\beta \geq 0$ 且 Ω 是 $\mathbb{R}^2$的区域，则 $\lambda_1(\Omega, A) \leq \beta^*(1 - e^{-\frac{\beta^*|\Omega|}{2\pi}})$。 *4)* 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的区域，且 A 由标准势 (2.4)给出，则

$$\lambda_1(\Omega, A) = \lambda_1(\Omega, \beta) \leq \beta(1 - e^{-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}}).$$

定理 2.3 是定理 4.2 和推论 4.3 的推论。在第 4 节中，我们还讨论了非单连通区域情形下的界。

备注 2.4. 我们指出，如果 Ω 不是单连通的，3) 就不成立。事实上，正如我们在例 C.3 中所示，存在非单连通区域 ω_h，其 $|\omega_h| \to 0$ 为 $\lambda_1(\omega_h, \beta)$，且 $\to c > 0$ 为 $h \to 0^+$。另一方面，如果 Ω 是单连通的，3) 意味着 $\lambda_1(\Omega, A) \to 0$ 为 $|\Omega| \to 0$。在 $\beta > 0$ 为常数的情形下，这也可以由 [15, 定理 1.2]，推出，其意味着 $\lambda_1(\Omega, \beta) \leq \frac{\beta^2|\Omega|}{8\pi}$。

2.4. λ_1 **的下界**。下一个结果讨论 $\lambda_1(\Omega,\beta)$ 的下界。陈述该结果之前，我们回顾一下：如果对任意 $x\in\partial\Omega$，都存在一个半径为 $\delta>0$ 的圆盘，在 x 处与 $\partial\Omega$ 相切，且完全包含于 Ω 中，则称一个区域满足 δ-内切球条件，其中 $\delta>0$。更技术地说，这一条件也可以表述为：边界的单射半径有下界 δ。

定理 2.5。令Ω 为满足 δ-内球条件的光滑有界区域。则存在一个普适常数 $C>0$ 使得

1) $\lambda_1(\Omega,\beta)\geq C\beta^2\delta^2$ 若 $\beta\delta^2\leq 1$;
2) $\lambda_1(\Omega,\beta)\geq C\beta$ 若 $\beta\delta^2\geq 1$。

定理 2.5 在第 5 节中得到证明（定理 5.10）。其证明结合了 [11] 中磁特征值的下界（见定理 5.1）以及 [6] 中拉普拉斯特征值的下界（见定理 5.4）。值得注意的是，我们在 δ 和 β 中得到的下界的行为与定理 2.1 的上界一致。这也与第一特征值关于 β 的渐近行为一致，其中 $\beta\to 0^+$ 和 $\beta\to+\infty$。关于定理 2.5 中下界在 β 和 δ 下的尖锐行为，我们在注 5.11 中进行了进一步讨论。一系列例子表明，在许多情况下，定理 2.5 给出的界能够很好地刻画第一特征值的行为（见例 5.2、C.2、C.5）。在第 5 节中，我们还证明了星形区域的下界，该下界由两个圆盘 $B(p,R)$ $B(p,R_0)$ 的半径 $0<R<R_0$ 给出，且满足 $B(p,R)\subset\Omega\subset B(p,R_0)$（命题 5.6）。

2.5. 高阶特征值及平均值的上界。接下来的结果涉及所有特征值的上界。借助所谓的平均变分原理（定理 6.5），我们得到磁特征值 λ_j的第一黎兹平均 R_1 的渐近尖锐下界，其定义为 $R_1(z):=\sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda_j)_+$，其中 $a_+:=\max\{0,a\}$。这里我们省略 λ_j对 β和 Ω 的依赖关系。$R_1(z)$ 的下界等价于特征值平均值的上界。

定理 2.6. 对于所有 $z\geq 0$，我们都有

$$R_1(z)\geq\frac{|\Omega|}{8\pi}z^2-\frac{|\Omega|\beta^2}{2\pi}\psi^2\left(\frac{z}{2\beta}+\frac{1}{2}\right), \tag{2.9}$$

其中，$\psi(a)=a-[a]-\frac{1}{2}$表示 $a\in\mathbb{R}$的涨落函数，而 $[a]$ 表示 $a\in\mathbb{R}$的整数部分。此外，对于任意 $k\in\mathbb{N}$、$k\geq 1$，我们有

$$\begin{cases}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\leq\beta, & \text{if } k\leq\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\\ \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\leq\frac{2\pi k}{|\Omega|}+R\left(\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}\right), & \text{if } k>\frac{\beta|\Omega|}{2\pi},\end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $R(a)=\frac{\beta}{a}(a-[a])([a]-a+1)\in[0,\beta/4a]$。

定理 2.6 在第 6 节中证明（定理 6.1）。我们注意到，我们的上界是渐近锐利的；事实上，磁特征值的 Weyl 定律意味着，当 $z\to+\infty$ 时，$R_1(z)=\frac{|\Omega|}{8\pi}z^2+o(z^2)$，或者等价地，当 $k\to+\infty$ 时，$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=\frac{2\pi k}{|\Omega|}+o(k)$。定理 2.6 给出的界是 Kr¨oger 对拉普拉斯特征值平均值所给上界的对应形式 [19]。请注意，估计式 (2.10) 中仅当 k 较大时才会出现 Weyl 项 $\frac{2\pi k}{|\Omega|}$，这是自然的，因为磁特征值并不像拉普拉斯特征值那样按比例缩放。式 (2.10) 的第一个不等式告诉我们，对于较小的 k（取决于 β、$|\Omega|$），前 k 个特征值的平均值小于 β。这在某种程度上是锐利的，因为在圆盘的情形下可以观察到这种行为，见附录 B。然而，随着 $k\to+\infty$，上界由半经典极限 $\frac{2\pi k}{|\Omega|}$ 加上一个振荡、有界且为 $o(1/k)$ 阶的余项给出，其中 $k\to+\infty$。

作为 定理 2.6 的推论，我们得到单个特征值的上界（见推论 6.2）。

推论 2.7。对于所有 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$\lambda_{k+1}(\Omega,\beta)\leq\frac{8\pi k}{|\Omega|}+\beta. \tag{2.11}$$

注意，这与第二特征值可能趋于 $+\infty$ as $|\Omega|\to 0^+$ 这一事实相符（与第一特征值相反）。

2.6. 嵌入曲线第一特征值的反向法贝尔-克拉恩不等式。在附录 A 中，我们考虑一个与磁拉普拉斯算子相关的一维特征值问题。设 Γ 是一条简单闭曲线，其围成某个连通区域 Ω。我们考虑 $\lambda_1(\Gamma, \hat{A})$，这是将磁势 A 限制到 Γ 后得到的磁$\hat{}$算子的第一特征值。我们将 A 称为这种限制：根据定义，对于所有切向量 X，$A(X) = A(X)$。

事实证明（见定理 A.1），

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) = \frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2} \min_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \right)^2 .$$

注意，$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) = 0$ 当且仅当 $\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \in \mathbb{N}$。由此我们得到以下等周不等式（见定理 A.2）：

定理 2.8。设 Ω 是一个有界的单连通区域，其边界为 Γ，并设 Ω^* 是一个圆盘，满足 $|\Omega| = |\Omega^*|$ 且边界为 Γ^*。那么

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \le \lambda_1(\Gamma^*, \hat{A}). \tag{2.12}$$

若 $\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \notin \mathbb{N}$，则等号成立当且仅当 $\Omega = \Omega^*$。

2.7. 磁特征值的若干性质。本小节汇总了（2.1）中特征值的一些性质，这些性质将在后文中发挥作用。

首先，我们重新称 $\lambda_j(\Omega, \beta)$ 在等距变换下保持不变，即如果 M 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个等距变换，则 then

$$\lambda_j(\Omega, \beta) = \lambda_j(M(\Omega), \beta).$$

证明参见 [21,附录 A]。

对于任意 $\beta \in \mathbb{R}$，不难证明

$$\lambda_j(\Omega, \beta) = \lambda_j(\Omega, -\beta).$$

通过观察可知，当且仅当 $\bar{u}$ 是对应于 $\lambda_j(\Omega, -\beta)$ 的特征函数时，u 才是对应于 $\lambda_j(\Omega, \beta)$ 的特征函数。因此，只考虑 β 的正值并不失一般性。

对于较强磁场下 $\lambda_1(\Omega, \beta)$ 的渐近行为，已有深入研究（参见例如 [14, §8]）。结果表明，如果 Ω 是光滑的，那么

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\lambda_1(\Omega, \beta)}{\beta} = \Theta_0 \tag{2.13}$$

其中 $\Theta_0 > 0$ 是一个普适常数（德·热纳常数），定义为

$$\Theta_0 = \min_{\xi\in\mathbb{R}} \mu_1(\xi) = \mu_1(\xi_0), \tag{2.14}$$

其中 $\mu_1(\xi)$ 是以下一维问题的第一特征值：

$$\begin{cases} -f''(t) + (\xi + t)^2 f(t) = \mu(\xi) f(t), & t \in (0, +\infty) \\ f'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$，标准的证明表明，问题 (2.15) 具有离散谱，该谱由一列简单的非负特征值构成，且这些特征值趋于 $+\infty$。已知（参见 [14]），即

$$\Theta_0 = \xi_0^2 \approx 0.590106,$$

以及 $\xi_0 < 0$。例如，我们可以参阅 [5]，了解 Θ_0 的数值近似，并估计余项。

极限 (2.13) 对一族相似域的第一特征值有一个令人惊讶的推论。由 (2.3) 可知（另见 [14]），对于所有 $\alpha > 0$

$$\lambda_j(\Omega, \beta) = \alpha^2 \lambda_j \left(\alpha\Omega, \frac{\beta}{\alpha^2} \right). \tag{2.16}$$

由（2.16）可知

$$\lambda_1(\alpha\Omega,\beta)=\frac{1}{\alpha^2}\lambda_1(\Omega,\alpha^2\beta)=\Theta_0\beta+o(1)\,,\quad \text{as } \alpha\to+\infty.$$

特别是, 渐近极限严格为正，且不依赖于区域的测度 n.

另一方面，当 $\alpha\to 0^+$ 时，由 [14, §1.5] 可知，存在一个势 1-形式 A' 和一个常数 $C_\Omega>0$，二者都依赖于 Ω，使得

$$\frac{\alpha^4\beta^2}{|\Omega|}\int_\Omega|A'|^2-C_\Omega\alpha^8\beta^4\le\lambda_1(\Omega,\alpha^2\beta)\le\frac{\alpha^4\beta^2}{|\Omega|}\int_\Omega|A'|^2. \tag{2.17}$$

如果 Ω 是单连通的， $A'=A_{can}$，其中 A_{can} 是一个特定的势 1-形式，它与 A 相差一个恰当 1-形式（其精确定义见第 4 节 A_{can}）。

这意味着

$$\lambda_1(\alpha\Omega,\beta)=\frac{1}{\alpha^2}\lambda_1(\Omega,\alpha^2\beta)=O(\alpha^2)\,,\quad \text{as } \alpha\to 0^+.$$

图3清楚地展示了磁性诺伊曼特征值的特殊行为。图中绘出了圆盘B_R 上的磁拉普拉斯算子特征值的解析分支，其中 $\beta=1:=B(0,R)$，并将其表示为 R的函数。第一特征值只需在所有解析分支中取最小值即可确定。当 $R\to 0^+$ 时，它以二次速度趋于零；随着 R增大，则呈现振荡行为。它始终有界，并在 $R\to+\infty$时收敛到 Θ_0。对于圆盘 B_R，由（2.17）（另见 [15]）可将 $R=0$ 时的渐近行为描述得更精确:

$$\lambda_1(B_R,\beta)=\frac{\beta^2R^2}{8}+o(R^2)\,,\quad \text{as R}\to 0^+. \tag{2.18}$$

3. λ_1的上界

本节将建立 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的上界。

In o为了陈述我们的第一个结果，我们回顾区域 Ω 的外接半径 R_Ω 的定义 :

$$R_\Omega:=\inf\left\{R>0:\text{there exists } x_R\in\mathbb{R}^2 \text{ such that } \Omega\subset B(x_R,R)\right\}.$$

我们有如下定理，它蕴含定理 2.1。

定理 3.1. 对于任意具有外接半径 R_Ω 的有界区域Ω，有

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\le\begin{cases}\beta-\frac{1}{2R_\Omega^2}\,, & \text{if } R_\Omega>\frac{1}{\sqrt{\beta}},\\ \frac{R_\Omega^2\beta^2}{2}\,, & \text{if } R_\Omega\le\frac{1}{\sqrt{\beta}}\end{cases} \tag{3.1}$$

特别地，若 $R_\Omega\le 1/\sqrt{\beta}$，则 $\lambda_1(\Omega\ \beta)\le\beta/2$。由此可得，对所有 $\beta>0$

$$\lambda_1(\Omega,\beta)<\beta.$$

证明。 在整个证明过程中，我们将 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 简记为 λ_1。令 (r,t) 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的标准极坐标，其中 $r=|x|$ 和 t 为角变量。我们定义函数族 $\{u_n(r,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$，并用极坐标表示，令 $u_n(r,t):=r^ne^{int}e^{-\frac{\beta r^2}{4}}$。回顾极坐标中的

$$\Delta_A u=-\partial_{rr}^2u-\frac{\partial_r u}{r}-\frac{\partial_{tt}^2u}{r^2}+\frac{\beta^2r^2}{4}u+i\beta\partial_t u, \tag{3.2}$$

标准证明可得 $\Delta_A u_n=\beta u_n$。标准计算（另见 [2]）表明

$$|\nabla^A u_n|^2=\beta|u_n|^2-\frac{1}{2}\Delta|u_n|^2.$$

因此，根据极小极大原理 (2.3)，我们得到对所有 $n\in\mathbb{N}$

$$\lambda_1\int_\Omega|u_n|^2\le\int_\Omega|\nabla^A u_n|^2=\beta\int_\Omega|u_n|^2-\frac{1}{2}\int_\Omega\Delta|u_n|^2. \tag{3.3}$$

现在，如果（3.3）的最后一项带负号，这将立即意味着 β 是严格的上界，但通常并非如此。

我们首先证明（3.1）中的第二个不等式。假设经过平移后，$\Omega \subset B(0,\ R_\Omega)$，并考虑带有 $n=0$ 的（3.3）。我们有

$$\lambda_1 \int_\Omega e^{-\frac{\beta r^2}{2}} \leq \beta \int_\Omega e^{-\frac{\beta r^2}{2}} + \frac{1}{2}\int_\Omega \beta(r^2\beta - 2)e^{-\frac{\beta r^2}{2}} = \frac{\beta^2}{2}\int_\Omega r^2 e^{-\frac{\beta r^2}{2}} \leq \frac{R_\Omega^2\beta^2}{2}\int_\Omega e^{-\frac{\beta r^2}{2}}.$$

这证明了式 (3.1) 中的第二个不等式。注意，该不等式对任意 β 均成立，但只有当 $R_\Omega < \sqrt{\frac{2}{\beta}}$ 时，它才能给出严格的 β 上界。

我们希望改进大 R_Ω 时的上界，并得出 (3.1) 的证明。证明 (3.1) 中第一个不等式的主要思路是对关于 n 的不等式 (3.3) 取平均。具体而言，我们将 (3.3) 两边乘以某个 $a_n > 0$，并对 n 求和，其中 n 遍历 $\mathbb{N}$ 的某个子集。通过以合适的方式选择权重 a_n，我们可以使 (3.3) 右端涉及 $\Delta|u_n|^2$ 的项之和为负，并且对其进行控制。于是令 $a_n > 0, n = 0, ..., N$。由 (3.3) 得到

$$\lambda_1 \int_\Omega \sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2 \leq \beta \int_\Omega \sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta\left(\sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2\right),$$

这意味着

$$\lambda_1 \leq \beta - \frac{1}{2}\frac{\int_\Omega \Delta\left(\sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2\right)}{\int_\Omega \sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2}. \tag{3.4}$$

现在，我们注意到

$$|u_n|^2 = e^{-\frac{\beta r^2}{2}} r^{2n},$$

因此

$$\sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2 = e^{-\frac{\beta r^2}{2}}\sum_{n=0}^N a_n r^{2n}.$$

现在的目标是选择合适的 $a_n > 0$，并令 $N \to \infty$取极限。这可以通过注意到以下事实来实现:

$$e^{\frac{\beta r^2}{2}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\beta^n}{2^n n!} r^{2n},$$

并且该收敛在 $\mathbb{R}^2$的任意紧子集上一致。接着我们选择

$$a_n = \frac{\beta^n}{c^n n!}$$

其中 $c > 0$。因此，在任意紧集上，我们有

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2 = e^{\frac{\beta r^2}{2c}(2-c)} \tag{3.5}$$

and

$$\lim_{N\to+\infty} -\Delta\left(\sum_{n=0}^N a_n|u_n|^2\right) = e^{\frac{\beta r^2}{2c}(2-c)}\beta\frac{(2c+(2-c)r^2\beta)(2-c)}{c^2}$$

现在，假设 $\Omega \subset B(0, R_\Omega)$。那么，对于 $r \leq R_\Omega$，我们有

$$\frac{(2c+(2-c)r^2\beta)(2-c)}{c^2} = \frac{2(2-c)}{c} + \frac{(2-c)^2 r^2\beta}{c^2} \leq \frac{2(2-c)}{c} + \frac{(2-c)^2 R_\Omega^2\beta}{c^2}.$$

现在考虑函数

$$g(c) = \frac{2(2-c)}{c} + \frac{(2-c)^2 R_\Omega^2\beta}{c^2}.$$

我们有 leswaku

$$g'(c) = -\frac{4}{c^3}(c + (2-c)R_\Omega^2)$$

and

$$\lim_{c\to 0^+} g(c) = +\infty\,, \quad \lim_{c\to+\infty} g(c) = \beta R_\Omega^2 - 2.$$

我们看到,

$$g'(c)=0 \iff c=\frac{2R_\Omega^2\beta}{R_\Omega^2\beta-1}.$$

现在，若 $R_\Omega>\frac{1}{\sqrt{\beta}}$，我们选择 $c=\frac{2R^2\,\Omega}{R_\Omega^2\beta-1}$，并采用这一选择 $g\left(\frac{2R^2\,\Omega}{R_\Omega^2\beta-1}\right)=-\frac{1}{\beta R_\Omega^2}$。由此可得，当 $c=\frac{2R^2\,\Omega}{R_\Omega^2\beta-1}$ 时，

$$\lim_{N\to+\infty}-\Delta\left(\sum_{n=0}^{N}a_n|u_n|^2\right) = e^{\frac{\beta r^2}{2c}(2-c)}\beta\frac{(2c+(2-c)r^2\beta)(2-c)}{c^2} \le -\frac{1}{R_\Omega^2}e^{\frac{\beta r^2}{2c}(2-c)}. \tag{3.6}$$

将 (3.5) 和 (3.6) 代入 (3.4)，即可推出 (3.1) 中的第一个不等式。

□

注记 3.2。关于 $R_\Omega\le\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ 的上界表明，其相对于 β 呈现出正确的二次变化行为，这一点可由 (2.16)、(2.17) 和 (2.18) 得出。

鉴于渐近行为（2.13），一个自然的问题是：对于任意区域 Ω，$\Theta_0\beta$ 是否是λ_1(Ω β)的上界？我们将针对某些特定类别的区域证明这一结果。

定理 3.3。设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个有界区域，满足以下两个条件之一（相差一个等距变换）：

1) Ω 是一个子图，即

$$\Omega=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : a<x_1<b\,, 0<x_2<g(x_1)\}$$

对于某个光滑的 $g:(a,b)\to[0,+\infty)$，$-\infty<a<b<+\infty$.

2) Ω 包含于某个条带 $(a,b)\times(0,+\infty)$，且包含 $(a,b)\times(0,-2\xi_0/\sqrt{\beta})$，其中 $\xi_0<0$ 是式 (2.14) 中定义的常数。

Then

$$\lambda_1(\Omega,\beta)<\Theta_0\beta. \tag{3.7}$$

证明。我们首先指出，只需证明 $\beta=1$ 的结果。事实上，由 (2.16) 可知λ_1(Ω β) $=\beta\lambda_1$(Ω{v7，1)，其中 Ω $'=\sqrt{\beta}$Ω。现在，Ω 是形式为 1) 的子图，当且仅当 Ω′ 是；Ω 满足条件 2)，当且仅当 Ω′ 满足该条件，且 $\beta=1$。

设 f 是 (2.15) 的第一特征函数，其对应的第一特征值为 Θ_0，由 (2.14) 定义，且 $\xi=\xi_0<0$。回顾 $\Theta_0=\xi_0^2$。我们可以在 $[0,+\infty)$ 上选取 $f>0$。我们回顾一下，f 满足

$$-f''(t)+(\xi_0+t)^2f(t)=\Theta_0 f(t)\,,\ t\in(0,+\infty)\,,\quad f'(0)=0. \tag{3.8}$$

我们证明 $f'<0$ 在 (0,+∞) 上，并且 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}f'(t)=0$。方程 (3.8) 表明$f''$在 (0,+∞) 内只有一个零点，即 $-2\xi_0$（此外，$f''(0)=0$）。这意味着 f'在 $(-2\xi_0,+\infty)$ 上单调；又由于 $f\in H^1((0,+\infty))$，因此必有 f'在 $(-2\xi_0,+\infty)$ 上递增至 0，且 $\lim_{t\to\infty}f'(t)=0$。另一方面，f'在 $(0,-2\xi_0)$ 上递减。此外，$f'(0)=0$ 且 $f(0)>0$。反设 f在 $(0,+\infty)$ 上并非递减。这将意味着存在 $t_0\in(0,+\infty)$，使得$f'(t_0)=0$。由于 $f'(0)=0$ 且 $\lim_{t\to+\infty}f'(t)=0$，这将意味着存在两个不同的点$t_1,t_2\in(0,+\infty)$，使得 $f''(t_1)=f''(t_2)=0$；但这是不可能的，因为 $f''(t)=0$ 在 (0,+∞) 上，当且仅当$t=-2\xi_0$。这就证明了 $f'<0$ 在 (0,+∞) 上。特别地，$\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$，因为 $f\in L^2((0,+\infty))$。

我们考虑磁拉普拉斯算子 $\Delta_{A'}$，其中 $A'=-(\xi_0+x_2)dx_1$。根据规范不变性，$\Delta_{A'}$ 在 Ω 上的诺伊曼谱与 Δ_A 在 Ω 上的诺伊曼谱相同（这两个形式相差一个恰当 1-形式）。从现在起，我们将 λ_1(1，Ω) 简记为 λ_1

我们现在可以证明 $\beta=1$ 的 1)。在（2.3）中取 $f(x_2)$ 作为试验函数，可得

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_\Omega f^2\le\int_\Omega|\nabla f|^2+(\xi_0+x_2)^2f^2&=\int_a^b\int_0^{g(x_1)}(f'(x_2)^2+(\xi_0+x_2)^2f^2(x_2))dx_2dx_1\\&=\Theta_0\int_\Omega f^2+\int_a^b f(g(x_1))f'(g(x_1))dx_1<\Theta_0\int_\Omega f^2.\end{aligned}$$

在分部积分中，我们用到了 $f'(0) = 0$ 这一事实；最后一个不等式成立是因为 f 为正且严格递减。

为了证明 2)（并重新证明 1)），我们在 (2.3) 中将 $f(x_2)$ 用作试验函数，并利用恒等式 $f'^2 = -ff'' + \frac{1}{2}(f^2)''$。我们得到

$$\lambda_1 \int_\Omega f^2 \le \int_\Omega |\nabla f|^2 + (\xi_0 + x_2)^2 f^2 = \int_\Omega (-ff'' + (\xi_0 + x_2)f^2) + \frac{1}{2}\int_\Omega (f^2(x_2))'' \tag{3.9}$$
$$= \Theta_0 \int_\Omega f^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (f^2)''$$

接下来需要研究 $\frac{1}{2}\int_\Omega (f^2)''$。事实上，只要满足 $\frac{1}{2}\int_\Omega (f^2)'' < 0$，上界 $\lambda_1 < \Theta_0$ 就成立。我们看到

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (f^2(t))'' = \frac{1}{2}\lim_{s\to+\infty}\int_0^s (f^2(t))'' = \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{2}(f^2(s))' = \lim_{t\to+\infty} f(s)f'(s) = 0$$

因为 $f'(0) = 0$。此外，利用恒等式 $f'^2 = -ff'' + \frac{1}{2}(f^2)''$ 以及 f 所满足的微分方程，我们发现

$$\frac{1}{2}(f^2(t))'' = (f'(t))^2 + tf^2(t)(t + 2\xi_0)$$

且该量对 $t \ge -2\xi_0$ 非负。

我们很容易得出两个事实：

a) $\frac{1}{2}\int_0^L (f^2(t))'' < 0$ 对所有 $L > 0$ 均成立。 b) $\frac{1}{2}\int_I (f^2(t))'' < 0$ 对所有满足 $(0, -2\xi_0) \subset I$ 的 $I \subset \mathbb{R}^+$ 均成立。

a）或 b）推出不等式（3.7）。现在我们证明，定理 3.3 陈述中的 1）和 2）分别推出 a）和 b）。事实上，我们可以将（3.9）的最后一项改写为

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (f^2)'' = \int_{P(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int_{E(x_1)} (f^2(x_2))'' dx_2 \right) dx_1$$

其中 $P(\Omega) = \{x_1 \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$ 并且，对于任意 $x_1 \in P(\Omega)$，$E(x_1) = \{x_2 \in (0, +\infty) : (x_1, x_2) \in \Omega\}$。回顾一下，我们假设 Ω 位于半平面 $x_2 > 0$ 中。假设我们处于假设 1) 或 2) 下：

1) Ω 是一个子图。因此，对于所有 x_1, $L(x_1) > 0$，我们有 $E(x_1) = (0, L(x_1))$，这就是 a)。2) Ω 包含于某个条带 $(a, b) \times (0, +\infty)$ 中，且 Ω 包含 $(a, b) \times (0, -2\xi_0)$，这就是 b)。

证明至此结束。

□

注 3.4。注意，定理 3.3 的情形 2) 蕴含了 λ_1 （ $\Theta_0\beta$ ）的一个上界，该上界适用于一类区域，其中也包括非单连通区域。我们只要求区域中包含一个合适的矩形。注意，随着 $\beta \to +\infty$ 矩形尺寸变小，允许用于该上界的区域也随之增多。随着 $\beta \to 0^+$，允许的区域则会减少。然而，通常 $\beta \to 0^+$ 时的上界优于 $\Theta_0\beta$；事实上，当 $\beta \to 0^+$ 时，上界的表现如 $C\beta^2$ （见 (2.17)，另见 [14]）。还要注意，形式为 1) 和 2) 的区域的适当并集仍满足上界 $\Theta_0\beta$。

现在，我们证明自铺砌区域的一个类似上界。

定义 3.5. 如果存在一个整数 $m \ge 2$ 使得，则称分片光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为自铺砌区域

$$\Omega = \mathrm{Int}\left(\bigcup_{i=1}^m \overline{\omega_i} \right),$$

其中，每个 ω_i 都与 $\frac{1}{\sqrt{m}}\Omega$ 等距。

注 3.6。这个定义当然具有局限性。然而，所有三角形和所有平行四边形都是自铺砌的。注意，并非所有自铺砌区域都包含在前面的定理 3.3 中，例如，平行四边形就不包含在内。

我们已经指出，对于任意光滑有界区域，极限 (2.13) 都成立。现在假设 Ω 的边界是一个曲边多边形，也就是说

$$\partial\Omega = \bigcup_{s=1}^{N} \gamma_s,$$

由彼此不相交的 γ_s being C^∞ 弧组成，但在端点处除外，其中 γ_{s-1} 和 γ_s 以角度 $\alpha_s \in]0,\ 2\pi[$ 相交（采用约定 $\gamma_0 = \gamma_N$）。在这一假设下，由 [4, 推论 1.3] 可知，存在一个常数 $\Lambda(\Omega) \le \Theta_0$，它仅取决于角度 α_s，使得

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\lambda_1(\Omega,\beta)}{\beta} = \Lambda(\Omega).$$

此外，正如 [4, 注释 2.6 和 4.3] 中所述，$\Lambda(\Omega) < \Theta_0$ 只要 $\min_{1\le s\le N} \alpha_s \le \frac{\pi}{2}$ 即成立。特别地，当 Ω 是三角形或平行四边形时，情况即是如此。

现在我们可以陈述下一个定理了。

定理 3.7。 设 Ω 是一个自铺砌曲边多边形。则

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \le \Lambda(\Omega)\,\beta. \tag{3.10}$$

证明。 该证明改编自 P´olya 的论证（见 [25]）。我们固定 Ω 的分解中的一个部分，记为 ω_1。对于所有 $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(\omega_1,\beta) \le \lambda_1(\Omega,\beta). \tag{3.11}$$

事实上，索 Sobole夫空间 $H^1(\Omega)$ 可以视为 $H^1(\Omega')$ 的子空间，其中

$$\Omega' := \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i. \quad \text{(the union is disjoint)}$$

希尔伯特空间 $H^1(\Omega')$ 本身可以视为直和

$$\bigoplus_{i=1}^{m} H^1(\omega_i).$$

最后这个对应关系告诉我们，$\lambda_1(\Omega',\beta) = \lambda_1(\omega_1,\beta)$，而包含关系 $H^1(\Omega) \subset H^1(\Omega')$ 根据特征值的变分定义可推出

$$\lambda_1(\Omega',\beta) \le \lambda_1(\Omega,\beta).$$

这就得到了 (3.11)。特别地，将 β 替换为 $m\beta$，我们有

$$\lambda_1(\omega_1, m\beta) \le \lambda_1(\Omega, m\beta)$$

对所有 $m > 0$。另一方面，磁特征值的缩放性质告诉我们

$$\lambda_1(\omega_1, m\beta) = \lambda_1\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\Omega, m\beta\right) = m\,\lambda_1(\Omega,\beta). \tag{3.12}$$

我们得到

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \le \frac{1}{m}\lambda_1(\Omega, m\beta). \tag{3.13}$$

对（3.13）反复迭代可得，对于所有正整数 k,

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \le \frac{1}{m^k}\lambda_1\left(\Omega, m^k\beta\right). \tag{3.14}$$

取 $k \to +\infty$，可得

$$\frac{\lambda_1(\Omega,\beta)}{\beta} \le \liminf_{k\to+\infty} \frac{\lambda_1\left(\Omega, m^k\beta\right)}{m^k\,\beta} \le \Lambda(\Omega). \qquad \square$$

证明至此结束。

4. 变磁场下 λ1 的上界

本节中，我们考虑问题 (2.1) 的第一特征值，其中 Ω 是一个平面域，或者更一般地说，是一个带边界的紧致可定向曲面； A 是一个一般的光滑磁势（光滑 1-形式），它产生磁场（变量） $dA = \beta dv$，其中 dv 是 Ω 的黎曼体积形式。在本节中，我们将问题 (2.1) 的第一特征值记为 $\lambda_1(\Omega\ A)$。正如我们在第 2.7 小节中已经讨论过的，如果 Ω 是单连通的， $\lambda_1(\Omega\ A)$ 仅取决于 β。若 Ω 不是单连通的，给定 A， A' 且满足 $dA = dA' = \beta dv$，一般而言， $\lambda_1(\Omega\ A) \neq \lambda_1(\Omega\ A')$。在这种情况下，我们将为 βdv 选取一个特定的原函数，并将其称为 A_{can}。为了定义 A_{can}，我们需要一些预备知识。

设 Ω 是一个带边界的紧致可定向曲面，并设 $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ 是给定的光滑函数。考虑问题

$$\begin{cases} \Delta\phi = \beta\,, & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0\,, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

问题 (4.1) 存在唯一解，当 $\beta = 1$ 时，该解化为扭转函数。我们将 A_{can} 称为由 $A_{can} = -\star d\phi$ 定义的 1-形式，其中 $\star$ 是作用于微分形式上的霍奇星算子，Ω 取定向。回顾一下，霍奇星算子由以下关系定义：对于任意一对 1-形式 ψ_1， ψ_2 ，有

$$\psi_1 \wedge \star\psi_2 := \langle \psi_1, \psi_2 \rangle dv,$$

并且 $\star 1 = dv$, $\star dv = 1$。例如，在 $\mathbb{R}^2$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 中表示标准内积，且在笛卡尔坐标 (x_1， x_2) 和正向标准正交基 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ 下，有 $\star 1 = dx_1 \wedge dx_2$, $\star dx_1 = dx_2$, $\star dx_2 = -dx_1$, $\star(dx_1 \wedge dx_2) = 1$。我们用 δ 表示余微分（对于 1-形式，有 $\delta = -\mathrm{div}$）。我们证明以下引理。

引理 4.1. 形式 A_{can} 是 βdv 的原函数，即 $dA_{can} = \beta dv$。

证明。 我们回顾一下 $\delta = -\star d\star$，这意味着，对于 1-形式， $\star\delta = -d\star$ 和 $\delta\star = -\star d$。考虑 1-形式 $A_{can} = -\star d\phi$，其中 ϕ 满足方程 (4.1)。那么

$$dA_{can} = -d \star d\phi = \star\delta d\phi = \star\Delta\phi = \star\beta = \beta dv.$$

□

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 4.2。 设 Ω 为单连通、可定向的紧致黎曼曲面，并设 $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$为一个光滑函数。设 A 为任意满足条件 $dA = \beta dv$ 的势 1-形式，并令 $\lambda_1(\Omega\ A)$ 表示带磁势 A的 (2.1) 的第一特征值。令 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 (4.1)的唯一解。那么

$$\lambda_1(\Omega, A) \leq \frac{\int_\Omega \beta(e^{2\phi} - 1)dv}{\int_\Omega e^{2\phi} dv}. \tag{4.2}$$

若Ω 不是单连通的，则该不等式对 $\lambda_1(\Omega\ A_{can})$成立。

证明。 显然，只需证明 $A = A_{can} = -\star d\phi$ 的断言。注意到此时，由于霍奇星算子是等距变换，我们有 $|A|^2 = |d\phi|^2$。若 u 是实值光滑函数，则由
(2.3)

$$\lambda_1(\Omega, A) \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + |A|^2 u^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla\phi|^2 u^2 \tag{4.3}$$

我们取 $u = e^\phi$，使得 $\Delta u = -u|\nabla\phi|^2 + u\Delta\phi = -u|\nabla\phi|^2 + u\beta$。分部积分，并注意到在 $\partial\Omega$ 上有 $u = 1$ 和 $\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial\phi}{\partial N}$，再对最后一个边界积分应用格林公式，可得:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega u\Delta u + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial N} = -\int_\Omega |\nabla\phi|^2 u^2 + \int_\Omega \beta(u^2 - 1).$$

将此恒等式代入 (4.3) 的右侧，即得所述断言。 □

令 $\beta^* = \max_\Omega |\beta|$, $\phi^* = \max_\Omega |\phi|$。由定理 4.2 可推出以下 g

推论 4.3. 设Ω 为单连通、可定向的紧致黎曼曲面，设 A 为任意光滑1-形式，且 $dA = \beta dv$，其中 $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ 光滑。则

1)

$$\lambda_1(\Omega, A) < \beta^*. \tag{4.4}$$

2) 若 $\beta \geq 0$，则

$$\lambda_1(\Omega, A) \leq \beta^*(1 - e^{-2\phi^*}). \tag{4.5}$$

3) 若 $\beta \geq 0$ 且 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域，则

$$\lambda_1(\Omega, A) \leq \beta^*(1 - e^{-\frac{\beta^*|\Omega|}{2\pi}}). \tag{4.6}$$

4) 若 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域，且 A 由 (2.4) 给出（因此 $\beta(x) \equiv \beta > 0$），则

$$\lambda_1(\Omega, A) = \lambda_1(\Omega, \beta) \leq \beta(1 - e^{-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}}). \tag{4.7}$$

5) 若 Ω 不是单连通的，则以上所有不等式对 $A = A_{can}$ 均成立。

证明。我们先证明 1)。注意，将 A 替换为 $-A$ 后，问题 (2.1) 的特征函数变为其共轭函数，但谱保持不变。由定理 4.2 可得

$$\lambda_1(\Omega, A) \int_\Omega e^{2\phi} \leq \int_\Omega \beta(e^{2\phi} - 1)$$

同时，将 β 替换为 $-\beta$，并将 ϕ 替换为 $-\phi$:

$$\lambda_1(\Omega, A) \int_\Omega e^{-2\phi} \leq \int_\Omega -\beta(e^{-2\phi} - 1).$$

将两个不等式相加，我们得到

$$\lambda_1(\Omega, A) \int_\Omega \cosh(2\phi) \leq \int_\Omega \beta \sinh(2\phi) \leq \beta^* \int_\Omega |\sinh(2\phi)| = \beta^* \int_\Omega \sinh(|2\phi|) < \beta^* \int_\Omega \cosh(2\phi).$$

这就证明了 (4.4)。

我们转到 2）。不等式 (4.5) 立即由 (4.2) 得出：根据最大值原理，由于 $\beta \geq 0$，我们有 $\phi \geq 0$，从而通过粗略估计得出结论。

我们证明 3）。不等式 (4.6) 是众所周知的等周不等式的推论

$$\max_{\overline{\Omega}} \phi_\Omega \leq \max_{\overline{B_R}} \phi_{B_R},$$

其中，ϕ_Ω，ϕ_{B_R} 分别是在 Ω 上满足 $\beta = 1$ 和 B_R 的方程 (4.1) 的解，见 [30]。这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，而$B_R \subset \mathbb{R}^2$ 是一个以 0 为圆心、半径为 R 的圆盘，且 $|B_R| = |\Omega|$。事实上，$\phi_R(x) = \frac{1}{4}(R^2 - |x|^2)$，因此$\phi^*_{B_R} := \max_{B_R} \phi_{B_R} = \frac{|\Omega|}{4\pi}$。现在，注意到 $\Delta(\beta^*\phi_\Omega)$ 在 Ω 上满足 $= \beta^* \geq \beta$，且在 $\partial\Omega$ 上满足 $\beta^*\phi_\Omega = 0$。因此，由最大值原理可知 $\phi \leq \beta^*\phi_\Omega$ 在 Ω 上成立，进而

$$\phi^* = \max_{\overline{\Omega}} \phi \leq \beta^* \max_{\overline{\Omega}} \phi_\Omega \leq \frac{\beta^*|\Omega|}{4\pi}.$$

接下来考虑 4)：不等式 (4.7) 直接由 (4.6) 得出。

断言5）显而易见。证明至此结束。 □

5. λ_1 的下界

研究 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的下界颇具挑战性。通过在边界附近对区域 Ω 施加局部扰动，也就是在 Ω 上附加一个小的切格哑铃，可以轻易构造出较小的特征值，这与通常的拉普拉斯算子诺伊曼问题类似。另一方面，可以构造直径很大且测度任意的凸区域，使其第一特征值任意小或始终远离零。此外，当厚度趋于零时，也存在第一特征值任意小或一致远离零的薄区域。我们在附录C中汇集了一系列例子。

我们分析学的出发点是 $[11,$ 定理 5.1$]$, ，该定理给出了 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的下界，这些下界以 β, $|\Omega|$, $\lambda_2^N(\Omega)$（Ω 上拉普拉斯算子的第二诺伊曼特征值）以及 Ω 的内半径 ρ_Ω 为依据，定义如下。

$$\rho_\Omega := \sup_{x\in\Omega}\inf_{y\in\partial\Omega}|x-y| \tag{5.1}$$

为方便读者，我们在此重述。

定理 5.1 （[11,定理 5.1]）。 设Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界的单连通区域。那么

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\geq\frac{\pi}{4|\Omega|}\cdot\frac{\beta^2\rho_\Omega^4\lambda_2^N(\Omega)}{\beta^2\rho_\Omega^2+6\lambda_2^N(\Omega)}, \quad \text{if } \beta\leq\rho_\Omega^{-2} \tag{5.2}$$

and

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\geq\frac{\pi}{4|\Omega|}\cdot\frac{\beta\rho_\Omega^2\lambda_2^N(\Omega)}{\beta+24\lambda_2^N(\Omega)}, \quad \text{if } \beta\geq\rho_\Omega^{-2}, \tag{5.3}$$

其中， λ_2^N (Ω) 是区域 Ω 上的诺伊曼拉普拉斯算子的第一个正特征值， ρ_Ω 是区域 Ω的内半径。

注意，对于某些区域，定理 5.1 给出的下界并非最优。下面的例子对此作出说明。

例 5.2。 设 $\Omega\ =]-k,k[\times]-1/2,1/2[,$ 其中 $k\in\mathbb{N}$。则 $\rho_\Omega=1/4$。由于 $k\to+\infty$, $\lambda_2^N(\Omega)\ \to 0$, 因此由 (5.2)-(5.3) 给出的下界也趋于 0 。另一方面，我们有

$$\Omega=\mathrm{Int}\bigcup_{l=-k}^{k}\overline{\Omega_l}$$

其中

$$\Omega_l=]l,(l+1)[\times]-1/2,1/2[.$$

显然，对于 $\lambda_1(5.2)$-(5.3) ，不等式对 $_b,\beta)$ 成立，其中 $\rho_{\Omega_l}=1/4$, $\lambda_2^N(\Omega_l)\ =\pi^2$ ，且 $|\Omega_l|=1$。因此，同一下界也对 Ω 成立（见定理 *5.3*），并且该下界不依赖于 k，因此当 $k\to+\infty$ 时始终与 0 保持正距离。

将定理 5.1 直接应用于前面的例子无法得到良好的下界，因为随着 $k\to+\infty$, $\lambda_2^N(\Omega)$ 和 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的行为会显著背离： $\lambda_2^N(\Omega)$ 消失（面积趋于 $+\infty$），而 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 始终一致地远离零（面积大并不意味着特征值小）。不过，对 Ω 采用合适的覆盖，并将定理 5.1 应用于覆盖中的每个部分，可以改善下界。这正是本节主要结果背后的核心思路。在陈述该结果之前，我们需要一些预备结果。

定理 5.3。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个光滑有界区域，使得

$$\Omega=\mathrm{Int}\bigcup_{i=1}^{N}\overline{\Omega_i},$$

其中 $\Omega_i\subset$ Ω 是一些子区域，且任意一点 $p\in\Omega$ 至多属于 K 个子区域。 n

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\geq\frac{1}{K}\min_{i=1,\dots,N}\lambda_1(\Omega_i,\beta). \tag{5.4}$$

证明。 设 u 是与 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$相关联的特征函数。则其在 Ω_i 上的限制是适用于 $\lambda_1(\Omega_i,\ \beta)$的极小极大原理 (2.3) 的试验函数，这意味着:

$$\lambda_1(\Omega_i,\beta)\int_{\Omega_i}|u|^2\le\int_{\Omega_i}|\nabla^A u|^2.$$

对 $i=1,...,N$ 求和，得到

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_1(\Omega_i,\beta)\int_{\Omega_i}|u|^2\le\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}|\nabla^A u|^2. \tag{5.5}$$

对于 (5.5) 的左侧，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_1(\Omega_i,\beta)\int_{\Omega_i}|u|^2\ge\min_{j=1,...,N}\lambda_1(\Omega_j,\beta)\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}|u|^2\ge\min_{j=1,...,N}\lambda_1(\Omega_j,\beta)\int_{\Omega}|u|^2, \tag{5.6}$$

而对于 (5.5) 的右侧，我们有

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}|\nabla^A u|^2\le K\int_{\Omega}|\nabla^A u|^2. \tag{5.7}$$

由 (5.6)、(5.7) 和 (5.5)，我们得到

$$\min_{j=1,...,N}\lambda_1(\Omega_j,\beta)\int_{\Omega}|u|^2\le K\int_{\Omega}|\nabla^A u|^2.$$

由此可得

$$\frac{\int_\Omega|\nabla^A u|^2}{\int_\Omega|u|^2}\ge\frac{1}{K}\min_{j=1,...,N}\lambda_1(\Omega_j,\beta).$$

□

我们将寻找覆盖 $\Omega\ =\mathrm{Int}\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i$，其中每个 Ω_i 都关于其某个点呈星形。为结合定理 5.1 和定理 5.3，我们需要对 $\lambda_2^N(\Omega_i)$ 有良好的估计。我们可以将其作为 [6] 的一个结果的特例得到:

定理 5.4 ([6, 定理 1]). 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为一个有界区域。假设 Ω 关于某个点 $p\in$Ω是星形的。设 R 为以 p 为中心且包含于 Ω 内的最大球的半径， R_0 为以 p 为中心且包含 Ω的最小球的半径。存在一个普适常数 $C_1>0$ ，使得第一个非零诺伊曼特征值 $\lambda_2^N(\Omega)$ 具有如下下界:

$$\lambda_2^N(\Omega)\ge C_1\frac{R^2}{R_0^4}. \tag{5.8}$$

注5.5。 [6] 的结果是针对具有光滑边界的紧流形给出的。特别地，该结果适用于光滑欧几里得区域。然而，通过用光滑区域进行逼近，该结果对于分片光滑的利普希茨区域同样成立。

结合定理 5.1 和定理 5.4，可以证明星形区域的 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 关于内半径和外半径的一个下界。

命题 5.6。 设 Ω 为一个关于 p 呈星形的区域，其中 p 如定理 *5.4* 所示，并且对某个 $0<R<R_0$，有 $B(p,R)\subset\Omega\subset B(p,R_0)$ 。那么

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\ge c\beta^2\frac{R^8}{R_0^6},\quad \text{if } \beta\le\rho_\Omega^{-2}$$

and

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\ge c\frac{R^6\beta}{R_0^6(R^2\beta+1)},\quad \text{if } \beta\ge\rho_\Omega^{-2},$$

对于某个普适常数 $c>0$。

证明。 根据定理 5.4，我们有

$$\lambda_2^N(\Omega) \geq C_1 \frac{R^2}{R_0^4}.$$

此外

$$\lambda_2^N(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega) \leq \frac{\gamma}{R^2}, \quad \frac{\pi}{4|\Omega|} \geq \frac{1}{4R_0^2}, \quad \rho_\Omega \geq R,$$

其中 $\gamma := \lambda_1^D(B(0,\ 1))$ 表示半径为 1 的圆盘的第一狄利克雷特征值。回想一下， $\lambda_2^N(\Omega)\ \leq \lambda_1^D(\Omega)$ 是 Friedlander 不等式。

我们在 (5.2) 中使用这些不等式，得到

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \geq \frac{C_1\beta^2 R^8}{4R_0^6(\beta^2\rho_\Omega^2 R^2 + 6\gamma)}$$

当 $\beta \leq \rho^{-2}{}_\Omega$ 时。W

^{2}

e 注意到，在这一假设下， $\beta^2\rho_\Omega^2 R^2 \leq \beta^2\rho_\Omega^4 \leq 1$。因此我们推得，对于 $\beta \leq \rho^-{}_\Omega$

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \geq \frac{C_1\beta^2 R^8}{4R_0^6(1+6\gamma)}.$$

同理，考虑（5.3），可得

$$\lambda_1(\Omega,\beta) \geq \frac{C_1\beta R^6}{4R_0^6(R^2\beta + 24\gamma)}$$

当 $\beta \geq \rho^{-2}{}_\Omega$ 时。注意到命题中的一个适当常数 c 可取为$c = \frac{C_1}{96\gamma}$，证明即告完成。□

—

回顾以下定义

定义 5.7. 若对于任意 $x \in \partial\Omega$，都存在一个半径为 δ 的球，在 x 处与 Ω 相切且完全包含于 Ω 中，则称区域 Ω 满足 δ-内球条件。

对于光滑区域，这等价于法向指数映射的单射半径至少为 δ。因此，任何在 $p \in \partial\Omega$ 处与边界正交相交的线段上、距该点不超过 δ 的点，到边界的距离均为最小。

定义 5.8. 设 Ω 是一个具有光滑边界的有界区域，且令 $\varepsilon > 0$。满足以下性质的点 $\mathcal{P}_\varepsilon = \{p_1, ..., p_n\}$ 的一个极大集合

- dist$(p_j, p_k) \geq \varepsilon$ 对所有 $j \neq k$,
- dist$(p_j, \partial\Omega) \geq \varepsilon$ 对所有 j,

称为一个极大 ε-网。

目标是为满足δ-内球条件的区域 Ω 的第一特征值 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 给出一个仅依赖于 δ （以及 β）的一般下界。为此，我们用星形子区域 Ω_i 覆盖 Ω，并利用命题 5.6 控制 $\lambda_1(\Omega_i, \beta)$，再利用定理 5.3 控制 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$。对于满足 δ-内球条件的凸区域， [9, 引理 11]证明了一个合适的覆盖。我们在此去掉凸性假设，将这一结果加以推广。

引理 5.9。 设Ω 是一个具有光滑边界的有界区域，且 $\mathcal{P}_\varepsilon = \{p_1, ..., p_n\}$ 是Ω中的一个极大 ε-网。假设Ω 满足参数为 $\delta \geq \varepsilon$ 的 δ-内球条件。那么Ω 存在一个开覆盖{Ω_1，...，Ω_n}，$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$，并具有以下性质：

- 每个Ω_i 都相对于某个点 $p_i \in\Omega_i$ 呈星形，且具有分片光滑边界。
- 对于每个 $i = 1, ..., n$ 都有 $B(p_i, \varepsilon/2) \subseteq \Omega_i \subseteq B(p_i, 2\varepsilon)$。
- 存在一个普适常数 $M \in \mathbb{N}$ （不依赖于Ω），使得一个点 $x \in \Omega$ 至多可以属于 M 个区域 Ω_i。

证明。 我们指出，用星形区域 Ω_i 覆盖 Ω 的困难在于边界附近的区域。事实上，远离边界的地方很容易找到一个合适的覆盖。我们将分两步进行。族 $\{\Omega_i\}$ 将由两族区域的并组成：一族 $\{\Omega_{i,\ B}\}$ 与边界 $\partial\Omega$ 有非空交集，另一族区域 $\{\Omega_{i,\ I}\}$ 则与边界不相交。我们将证明 $\varepsilon = \delta$ 的情形；对于 $0 < \varepsilon < \delta$，结论显然成立，因为 δ-内球条件蕴含对所有 $0 < \varepsilon \leq \delta$ 均成立的 ε-内球条件。

第一步：构造区域 $\{\Omega_{i,B}\}$。令 $\partial\Omega_\delta$ 为 Ω 的等距集 $\partial\Omega$ ：

$$\partial\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \delta\}.$$

根据定义，若 $x \in \partial\Omega_\delta$，则球 $B(x,\delta) \subset \Omega$ 至少在一点处与 $\partial\Omega$ 相切。

设 $\mathcal{P}_1 = \{x_1, ..., x_n\}$ 是 $\partial\Omega_\delta$ 中的一个极大 $\frac{\delta}{2}$-网，即 $\mathrm{dist}(x_i, x_j) \geq \frac{\delta}{2}$ if $i \neq j$。

于是，我们定义

$$\Omega_{i,B} = \left\{ \bigcup B(x,\delta) : x \in \partial\Omega_\delta \text{ and } \mathrm{dist}(x, x_i) \leq \frac{\delta}{2} \right\}.$$

特别地，对于每个 $x \in \partial\Omega_\delta$，若 $\mathrm{dist}(x, x_i) \leq \frac{\delta}{2}$，则 $x_i \in B(x,\delta)$，从而 $\Omega_{i,B}$ 关于点 x_i 是星形的，并且

$$B(x_i, \delta) \subset \Omega_{i,B} \subset B(x_i, 2\delta).$$

我们有：

$$\left\{ x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{3\delta}{2} \right\} \subset \cup_{i=1}^n \Omega_{i,B}.$$

为说明这一点，取 $y \in \Omega$，使得 $\mathrm{dist}(y, \partial\Omega) \leq \frac{3\delta}{2}$，并取 $y' \in \partial\Omega$，使得 $\mathrm{dist}(y, y') = \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$。由 y' 和 y 确定的线段在点 x 处与 $\partial\Omega_\delta$ 相交。根据网 $\mathcal{P}_1$ 的极大性，存在 $x_i \in \mathcal{P}_1$，使得 $\mathrm{dist}(x, x_i) \leq \frac{\delta}{2}$，且 $B(x,\delta) \subset \Omega_{i,B}$。由于 $\mathrm{dist}(x, y) \leq \delta$，我们有 $y \in \Omega_{i,B}$。

步骤 2：构造区域 $\{\Omega_{i,I}\}$。令 $\mathcal{P}_2 = \{y_1, ..., y_m\}$ 为区域 $\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{3\delta}{2}\}$ 的一个极大 $\frac{\delta}{2}$-网。然后，我们选取区域 $\Omega_{i,I}$ 为球 $B(y_i, \frac{\delta}{2})$。由于它与 $\partial\Omega$ 的交集为空，$\Omega_{i,I}$ 是凸的，并且关于 y_i 是星形的。由极大性可知，区域 $\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{3\delta}{2}\}$ 被 $\cup_{i=1}^m B(y_i, \frac{\delta}{2})$ 覆盖。

由此可知，区域 Ω 被区域 $\{\Omega_{i,B}\}$ 与 $\{\Omega_{i,I}\}$ 的并集覆盖，我们将其记为 $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$。由步骤 1 和步骤 2 可知，对于每个 $i = 1, ..., n$，都存在 $p_i \in \Omega_i$，使得 $B(p_i, \frac{\delta}{2}) \subset \Omega_i \subset B(p_i, 2\delta)$，且对所有 $i \neq j$，$\mathrm{dist}(p_i, p_j) \geq \frac{\delta}{2}$。于是很容易推得，存在一个普适常数 $M \in \mathbb{N}$（与 Ω 无关），使得任意一点至多属于这些区域中的 M 个（例如参见 [9]中定理 1 的证明的步骤 2）。

□

我们引入以下一类区域：

$$\mathcal{A}_\delta = \{\Omega \subset \mathbb{R}^2 : \Omega \text{ is smooth, with } \delta\text{−interior ball condition}\}. \tag{5.9}$$

现在可以陈述本节的主要结果了

定理 5.10. 存在一个普适常数 $C > 0$，使得对于所有 $\Omega \in \mathcal{A}_\delta$

i) $\lambda_1(\Omega, \beta) \geq C\beta^2\delta^2$ 若 $\beta\delta^2 \leq 1$;

ii) $\lambda_1(\Omega, \beta) \geq C\beta$ 若 $\beta\delta^2 \geq 1$。

证明。我们先考虑 $\beta = 1$ 的情形。令 $\Omega \in \mathcal{A}_\delta$，其中 $\delta > 0$。

先假设 $\delta \leq 1$。由引理 5.9 可知，Ω 存在一个开覆盖 $\{\Omega_1, ...\Omega_N\}$，其中每个 Ω_j 都相对于某个 $p_j \in \Omega_j$ 星形，并且 $B(p_j, \delta/2) \subseteq \Omega_j \subseteq B(p_j, 2\delta)$，$j = 1, ... N$。我们对每个 Ω_j 应用命题 5.6，得到

$$\lambda_1(\Omega_j, 1) \geq c_1\delta^2, \quad \text{if } 1 \leq \rho_{\Omega_j}^{-2} \tag{5.10}$$

and

$$\lambda_1(\Omega_j, 1) \geq c_1, \quad \text{if } 1 \geq \rho_{\Omega_j}^{-2}, \tag{5.11}$$

其中，ρ_{Ω_j} 是 Ω 的内半径，$_j$，而 c_1 是由 $2^{-14}c$ 给出的普适常数。由定理 5.3、引理 5.9 以及 $\delta \leq 1$ 这一事实，我们推得

$$\lambda_1(\Omega, 1) \geq \frac{c_1}{M}\delta^2. \tag{5.12}$$

现在令 $\delta > 1$。$\Omega \in \mathcal{A}_\delta$ 这一事实意味着 $\Omega \in \mathcal{A}_1$，并且运用上述相同的论证，我们推得

$$\lambda_1(\Omega, 1) \geq \frac{c_1}{M}. \tag{5.13}$$

总之，由 (5.12) 和 (5.13) 可知，对于所有 $\delta > 0$,

$$\lambda_1(\Omega, 1) \geq \frac{c_1}{M} \min\{\delta^2, 1\}. \tag{5.14}$$

最后，通过应用 式 (5.14) 于区域 $\sqrt{\beta}\Omega$（其滚动半径为 $\sqrt{\beta}\delta$），我们得到，对任意 $\beta > 0$

$$\lambda_1(\Omega, \beta) = \beta\lambda_1(\sqrt{\beta}\Omega, 1) \geq \frac{c_1}{M} \min\{\beta^2\delta^2, \beta\}. \tag{5.15}$$

令 $C := c_1/M$ 后，即可得到最终结果。 □

注记 5.11. 我们来讨论定理 5.10 的界。注意，下界的渐近行为如 $\beta^2\delta^2$ as$\delta \to 0^+$。这与宽度较小的区域的例子一致（对于这些区域， $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 的渐近行为如$\beta^2\delta^2$）；参见定理 C.1，也参见附录 A 和 C。具体而言，对于下界 i)，我们注意到，其关于 δ 和 β 呈二次行为。我们在定理 3.1 中已经看到，当 β 较小时，关于 β 的这种二次行为是正确的；尤其是在 $R_\Omega\sqrt{\beta} \leq 1$ 时，其中 R_Ω 表示 Ω 的外接半径。至于下界 ii) 关于 β 的线性行为，根据 $\lambda_1(\Omega\ \beta)$ 在 $\beta \to +\infty$ 时的渐近行为可知，这一行为是正确的，参见式 (2.13)。无论如何，我们要指出，我们的界中相关的量是乘积 $\sqrt{\beta}\delta$ 的行为（而非单独的 δ 或 β ）。

或许有人会想，关于 δ-内切球条件的假设是否过于严格，以及仅有较大的内半径是否就能推出较大的下界。事实并非如此，以下例子展示了一个内半径较大而第一特征值较小的凸域。

例 *5.12.* 设 T 是一个三角形，底边为 $\{(x_1, 0) : x_1 \in (-1/2, 1/2)\}$ ，高的长度为 L （即线段 $(0, x_2)$，其中 $x_2 \in (0, L)$）。于是，内半径有一个与参数无关的正下界，而第一特征值随着 $L \to +\infty$趋于零。为说明这一点，考虑子集 $T' = \{(x_1, x_2) \in T : x_2 \in (L - 2\sqrt{L}, L)\}$和 $T'' = \{(x_1, x_2) \in T : x_2 \in (L - 2\sqrt{L}, L - \sqrt{L})\}$。我们可以如下构造一个支撑在 T'上的函数 u，使其瑞利商任意小。取 $u(x_1, x_2) = e^{-\frac{i\beta}{2}x_1x_2}\phi(x_2)$，其中 $\phi(x_2)$ 在 $T' \setminus T''$上为 $\equiv 1$，$\phi(L - 2\sqrt{L})$ 为 $= 0$，而 $\phi(x_2)$ 关于 T''是线性的。标准计算（另见例 C.2）可得$\lambda_1(T, \beta) \leq CL^{-1}$。

然而，定理 5.10 不适用于前一个例子中的三角形情形，因为它不是光滑的（其滚动半径为 $\delta = 0$）。对于非光滑区域，我们更愿意使用命题 5.6，该命题为例 5.12 中的区域给出了一个良好的下界。

6. 特征值平均值的半经典估计

本节将按照 Kr¨oger [19] 的思路，证明磁特征值的第一黎兹平均（平均值的上界）的渐近尖锐下界。这将推出单个特征值的上界。我们回顾一下，磁特征值的第一黎兹平均 R_1 定义为 $R_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty}(z - \lambda_j)_+$，其中 $a_+ = \max\{0, a\}$。在本节中，我们将省略 $\lambda_j(\Omega\ \beta)$ 对 β，Ω 的依赖，简单地记作 λ_j。我们还用 $[a]$ 表示 $a \in \mathbb{R}$ 的整数部分，并将涨落函数记作 $\psi(a) := a - [a] - \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}$。

定理 6.1。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域。对于所有 $z \geq 0$ ，有

$$R_1(z) \geq \frac{|\Omega|}{8\pi}z^2 - \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\psi^2\left(\frac{z}{2\beta} + \frac{1}{2}\right). \tag{6.1}$$

等价地，对于所有 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geq 1$ ，有

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \leq \frac{2\pi k}{|\Omega|} + R\left(\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}\right), \tag{6.2}$$

其中

$$R(X) = \frac{\beta}{X}(X - [X])([X] - X + 1) \tag{6.3}$$

特别地，对于所有 $X \geq 0$

$$0 \leq R(X) \leq \frac{\beta}{4X}, \tag{6.4}$$

以及 $R(X) = \beta(1-X)$ 对于 $0 \le X \le 1$。因此，对于 $k \le \frac{\beta|\Omega|}{2\pi}$，我们有

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \le \beta. \tag{6.5}$$

在证明定理之前，我们先陈述一些评述和推论。我们注意到，定理 6.1 蕴含了关于单个特征值的界，如 [19] 所示。

推论 6.2。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\lambda_{k+1} \le \frac{4\pi}{|\Omega|}\left(k + \sqrt{k^2 + \frac{\beta^2|\Omega|^2}{4\pi^2}\psi^2\left(\frac{\lambda_{k+1}}{2\beta}+\frac{1}{2}\right)}\right) \tag{6.6}$$

特别地，由于 $0 \le \psi^2(a) \le \frac{1}{4}$ 对所有 $a \in \mathbb{R}$ 均成立，

$$\lambda_{k+1} \le \frac{8\pi k}{|\Omega|} + \beta. \tag{6.7}$$

证明。对于 $k = 0$，我们已在定理 3.1 中证明了 $\lambda_1 < \beta$。我们取 $z = \lambda_{k+1}$，考察 (6.1)。那么，(6.1) 左侧有

$$R_1(\lambda_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j) = k\lambda_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \le k\lambda_{k+1}.$$

因此我们得到不等式

$$k\lambda_{k+1} \ge \frac{\lambda_{k+1}^2|\Omega|}{8\pi} - \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\psi^2\left(\frac{\lambda_{k+1}}{2\beta}+\frac{1}{2}\right)$$

由此得到 (6.6)。由于 $0 \le \psi^2(a) \le \frac{1}{4}$ 对所有 $a \in \mathbb{R}$ 均成立，并且利用 $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$ 对所有 $a,\ b \ge 0$，我们得到 (6.7)。□

注记 6.3。让我们将定理 6.1 给出的界与文献 [19] 中证明的二维诺伊曼拉普拉斯算子的相应界进行比较：

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^N \le \frac{2\pi k}{|\Omega|}. \tag{6.8}$$

这里，λ_j^N 表示 Ω 上拉普拉斯算子的诺伊曼特征值。显然，在我们的情形下，对于任意 k 以及任意 Ω 的取值 $|\Omega|$，形式为 (6.8) 的界都不可能成立：当 $k = 1$ 且 $|\Omega| \to +\infty$ 时，该不等式显然不成立。因此，自然需要区分 $|\Omega| \ge \frac{2\pi k}{\beta}$ 和 $|\Omega| \le \frac{2\pi k}{\beta}$ 两种情形。定理 6.1 的估计余项中出现振荡，对于这个算子而言似乎也是自然的（见附录 A 和 B）。定理 6.1 的半经典估计应与文献 [13] 中证明的磁性狄利克雷拉普拉斯算子的相应估计进行比较。特别是，对于磁性狄利克雷特征值，特征值平均的下界由 Weyl 项给出，这与拉普拉斯算子的情形相同。

定理 6.1 的另一个推论是磁性热核迹的以下下界，当 $t \to 0^+$ 时渐近锐利。

推论 6.4。对于所有 $t > 0$ 我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \ge \frac{\beta|\Omega|}{4\pi\sinh(\beta t)}$$

证明。该不等式可通过对不等式 (6.1) 作拉普拉斯变换得到。□

定理 6.1 的证明依赖于 Harrell-Stubbe [18], 所提出的所谓 平均变分原理，该原理能够有效地推导出 Kr¨oger 的结果 [19], ，并且可以轻松应用于各种不同情形。为方便读者，我们在此对其进行回顾。

定理 6.5。 设 H 是希尔伯特空间$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot,\rangle_{\mathcal{H}})$ 中的一个自伴算子，其谱为离散谱，由记作以下符号的特征值组成。

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_j \leq \cdots$$

以及相应的标准正交化特征向量 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$。与 H 对应的闭二次型记为 $Q(\varphi,\varphi)$，其中任意 φ 属于二次型定义域 $\mathcal{Q}(H) \subset \mathcal{H}$。设 $f_p \in \mathcal{Q}(H)$ 是一族由变量 p 索引、取值于测度空间 $(\mathfrak{M}, \Sigma, \sigma)$ 的向量。假设 $\mathfrak{M}_0$ 是 $\mathfrak{M}$ 的可测子集。那么对于任意 $z \in \mathbb{R}$，

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}(z-\omega_j)_+ \int_{\mathfrak{M}} |\langle g_j, f_p\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \, d\sigma \geq \int_{\mathfrak{M}_0} \left(z\|f_p\|^2_{\mathcal{H}} - Q(f_p,f_p)\right) d\sigma, \tag{6.9}$$

*prov*前提是积分收敛。这里 a_+ 表示实数 a 的正部。 .

我们陈述以下引理，其中包含了关于 Δ_A 在 $\mathbb{R}^2$ 上的特征函数的一些已知事实。

引理 6.6. 设 $u_{n,l} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在极坐标 (r,t) 中定义为

$$u_{n,l}(r,t) := e^{-\frac{\beta r^2}{4}} r^n L_l^n\left(\frac{r^2\beta}{2}\right) e^{int},$$

其中， $L_l^n(y)$ 表示伴随拉盖尔多项式，即

$$L_l^n(y) = \sum_{i=0}^{l}(-1)^i \binom{l+n}{l-i}\frac{y^i}{i!} = y^{-n}\frac{e^y}{l!}\frac{d^l}{dy^l}(y^{l+n}e^{-y}) \tag{6.10}$$

其中 $l, n \in \mathbb{N}$ （特别是 $L_0^n(y) = 1$）。接着

i) $\Delta_A u_{n,l} = \beta(1+2l)u_{n,l}$ 在 $\mathbb{R}^2$上：函数 $u_{n,l}$ 是 Δ_A 在 $\mathbb{R}^2$ 上的特征函数，其特征值为 $\beta(1+2l)$。每个特征空间都是无限维的。 *ii)* $|\nabla^A u_{n,l}|^2 = \beta(1+2l)|u_{n,l}|^2 - \frac{1}{2}\Delta|u_{n,l}|^2$。 *iii)* $\int_{\mathbb{R}^2} u_{n,l}u_{m,k} = 0$，若 $m \neq n$ 或 $l \neq k$。 *iv)* $\int_{\mathbb{R}^2}|u_{n,l}|^2 = \pi\binom{2}{\beta}^{n+1}(l+n)!\ l! =: c_{n,l}^2$。 *v)* 令 $v_{n,l} := \frac{u_{n,l}}{c_{n,l}}$，则 $\int_{\mathbb{R}^2} v_{n,l}v_{m,k} = \delta_{mn}\delta_{lk}$，因此 $\{v_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$中的标准正交系。

证明可由标准微积分直接得到，使用 Δ^A 在极坐标下的表达式 (3.2)（另见 [2]）。

下一个引理为 $R_1(z)$ 建立了一个基本不等式，而该不等式是定理 6.1 证明的基石。

引理 6.7。 对于所有 $z \geq 0$，我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda_j)_+ \geq \frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}(z-\beta(2l-1))_+. \tag{6.11}$$

证明。 我们将平均变分原理 (6.9)应用于 $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$、 $H = \Delta_A$, $Q(f,f) = \int_\Omega |\nabla^A f|^2$,$\mathcal{Q}(H) = H^1(\Omega)$、 $\omega_j = \lambda_j$, $g_j = u_j$，其中 u_j 是与 Ω 上算子的特征值 λ_j 相关联的 $L^2(\Omega)$-归一化特征函数， Δ_A 采用计数测度 σ，并且对于某个$L \in \mathbb{N}$，有 $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{N}\times\{0,...,L\}$，且 $f_p = v_{n,l_0}$。于是，(6.9)可写为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[(z-\lambda_j)_+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_\Omega v_{n,l}\overline{u_j}\right|^2\right] \geq \sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega \left(z|v_{n,l}|^2 - |\nabla^A v_{n,l}|^2\right). \tag{6.12}$$

现在，由于 $\{v_{n,l}\}_{n,\ l\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的正交归一族，因此我们有

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_\Omega v_{n,l}\overline{u_j}\right|^2 \leq \int_\Omega |u_j|^2 = 1$$

因此，根据引理 6.6，ii)

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda_j)_+ \geq \int_\Omega \left(z\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}|v_{n,l}|^2 - \sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}|\nabla^A v_{n,l}|^2 \right) \tag{6.13}$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}(z-\beta(2l+1))|v_{l,n}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta|v_{n,l}|^2 \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{L}(z-\beta(2l+1))\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega |v_{l,n}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega \Delta|v_{n,l}|^2.$$

我们将在下面的引理 6.8 中证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}|v_{n,l}|^2 = \frac{\beta}{2\pi}\left(1+e^{-\frac{\beta|x|^2}{2}}P_l\left(\frac{\beta|x|^2}{2}\right)\right),$$

其中 $P_l(y)$ 是一个关于变量 y、次数为 $2l-1$ 的多项式。该收敛在任意紧集上一致。特别地，$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta|v_{n,l}|^2 = \frac{\beta}{2\pi}\Delta\left(e^{-\frac{\beta|x|^2}{2}}P_l(\beta|x|^2/2)\right)$。 — ——

然后，由 (6.13) 可得，对所有 $L\in\mathbb{N}$ 和 $z\geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda_j)_+ \geq \int_\Omega \frac{\beta}{2\pi}\sum_{l=0}^{L}\left(1+e^{-\frac{\beta|x|^2}{2}}P_l\left(\frac{\beta|x|^2}{2}\right)\right)(z-\beta(2l+1)) \tag{6.14}$$

$$+\frac{\beta}{4\pi}\sum_{l=0}^{L}\int_\Omega \Delta\left(e^{-\frac{\beta|x|^2}{2}}P_l\left(\frac{\beta|x|^2}{2}\right)\right).$$

不等式 (6.14) 对任意固定的 L 都成立；显然，将 $|x|$ 替换为 $|x+x_0|$, $x_0\in\mathbb{R}^2$ 后仍然成立（这相当于选取 $v_{n,l}(r,\ t)$, 其中 $(r,\ t)$ 是以 x_0 为中心的极坐标）。然后，对任意 $L\in\mathbb{N}$，取$|x_0|\to+\infty$，可推知 (6.14) 的最后一项趋于 0，因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda_j)_+ \geq \frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=0}^{L}(z-\beta(2l+1)) = \frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{L+1}(z-\beta(2l-1)). \tag{6.15}$$

这立即推出（6.11）。 □

现在我们可以证明定理 6.1。

定理 6.1 的证明。 不等式（6.11）是该证明的基石。定理 6.1 的各项结论都是这一不等式的推论。我们先证明（6.1）。考察（6.11）的右端，并将其改写为

$$\frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}(\frac{z}{\beta}-(2l-1))_+ = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}((2w-1)-(2l-1))_+$$

其中 $w=\frac{z}{2\beta}+\frac{1}{2}$。然后，经过一些代数运算可得

$$\frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}((2w-1)-(2l-1))_+ = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\sum_{l=1}^{[w]}((2w-1)-(2l-1)) = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}[w](2w-[w]-1)$$

$$= \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\left(w-\frac{1}{2}-\psi(w)\right)\left(w-\frac{1}{2}+\psi(w)\right) = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\left(w-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\psi^2(w)$$

$$= \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\cdot\frac{z^2}{4\beta^2} - \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}\psi^2\left(\frac{z}{2\beta}+\frac{1}{2}\right).$$

这就证明了 (6.1)。

在证明 (6.2) 之前，我们注意到，取 $z = \lambda_1$ 时，不等式 (6.11) 可写为

$$0 \leq \frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_1 - \beta(2l-1))_+ \leq 0$$

这意味着对所有 $l \geq 1$，$\lambda_1 \leq \beta(2l-1)$，特别是 $\lambda_1 \leq \beta$。这是另一种导出 (2.1) 的方法（不过该不等式不是严格的）。

现在我们证明 (6.2)。考虑以下两个函数

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (z - \lambda_j)_+$$

and

$$g(z) = \frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (z - \beta(2l-1))_+$$

这两个函数是凸的。对任意 $w \geq 0$，定义函数

$$\mathcal{L}[f](w) := \sup_{z \geq 0} (zw - f(z)), \quad \mathcal{L}[g](w) := \sup_{z \geq 0} (zw - g(z)).$$

这两个函数分别是 f 和 g 的勒让德变换。由于 f，g 是凸的，对所有 $w \geq 0$，我们有 $f(z) \geq g(z) \iff \mathcal{L}[f](w) \leq \mathcal{L}[g](w)$。

经标准计算可得

$$\mathcal{L}[f](w) = \lambda_{[w]+1}(w - [w]) + \sum_{j=1}^{[w]} \lambda_j$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](w) = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} \left(2\left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right] + 1\right) \left(\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|} - \left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right]\right) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right]} \frac{\beta^2|\Omega|(2j-1)}{2\pi} \\ = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} \left(2\left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right] + 1\right) \left(\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|} - \left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right]\right) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} \left[\frac{2\pi w}{\beta|\Omega|}\right]^2\end{aligned}$$

现在我们选择 $w = k$，使得不等式 $\mathcal{L}[f](k) \leq L[g](k)$ 可写为

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \leq \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} \left(2\left[\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}\right] + 1\right) \left(\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|} - \left[\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}\right]\right) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} \left[\frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}\right]^2 \tag{6.16}$$

在 (6.16) 中令 $X = \frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \leq \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}(2[X]+1)(X-[X]) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}[X]^2 \\ = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}(2[X]+1)(X-[X]) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}(X^2 + [X]^2 - X^2) \\ = \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}X^2 + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}(2[X]+1)(X-[X]) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}([X]^2 - X^2) \\ = \frac{2\pi k^2}{|\Omega|} + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}(2[X]+1)(X-[X]) + \frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi}([X]^2 - X^2),\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\frac{\beta^2|\Omega|}{2\pi} X^2 = \frac{2\pi k^2}{|\Omega|}$ 这一事实。将两边除以 k，得到

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \leq \frac{2\pi k}{|\Omega|} + \frac{\beta}{X}(X-[X])([X]-X+1) \tag{6.17}$$

其中我们回顾一下，$X = \frac{2\pi k}{\beta|\Omega|}$。这就证明了（6.2）。

我们给出余项函数的一个估计

$$R(X) = \frac{\beta}{X}(X - [X])([X] - X + 1).$$

首先，注意函数

$$G(X) = (X - [X])([X] - X + 1)$$

满足 $G(n) = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $G(x) \geq 0$均成立，并且在每个区间 $(n, n+1)$ 上都有唯一的最大值，该最大值为$\frac{1}{4}$，且在 $X = n + \frac{1}{2}$ 时取到。因此 $0 \leq G(X) \leq \frac{1}{4}$。故

$$0 \leq R(X) \leq \frac{\beta}{4X}.$$

这就是 (6.4)。若 $0 \leq X \leq 1$，则可立即验证 $R(X) = \beta(1 - X)$。若 $k \leq \frac{\beta|\Omega|}{2\pi}$，则 $0 \leq X \leq 1$，由 (6.17) 可立即得到

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \leq \beta.$$

这就是 (6.5)。定理 6.1 的证明至此完成。

□

我们证明以下关于 Δ_A 在 $\mathbb{R}^2$ 上的特征函数和的引理。

引理 6.8。我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,l}|^2 = \frac{\beta}{2\pi}\left(1 + e^{-\frac{\beta|x|^2}{2}} P_l\left(\frac{\beta|x|^2}{2}\right)\right)$$

其中 $P_l(y)$ 是关于变量 y 的 $2l-1$ 次多项式。如果 $l = 0$，那么 $P_0(y) = 0$。

证明。 我们注意到

$$|v_{n,l}|^2 = \frac{\beta}{2\pi} e^{-y} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y)^2$$

其中 $y = \frac{\beta|x|^2}{2}$，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,l}|^2 = \frac{\beta}{2\pi} e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y)^2 \tag{6.18}$$

因此，我们需要研究

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y)^2. \tag{6.19}$$

我们利用（6.10）在（6.19）中展开一个因子 $L_l^n(y)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y) \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{l+n}{l-i} \frac{y^i}{i!}$$

并改变求和次序：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l!}{(l+n)!} y^n L_l^n(y)^2 = \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^i y^i}{(l-i)!i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n L_l^n(y)(l+n)!l!}{(n+i)!(l+n)!}$$

利用式 (6.10) 中的第二个恒等式（罗德里格斯公式），我们得到

$$
\begin{aligned}
(6.20)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{l!}{(l+n)!}y^n L_l^n(y)^2 &= \sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i y^i}{(l-i)!i!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^y}{(n+i)!}\frac{d^l}{dy^l}(y^{l+n}e^{-y})\\
&= e^y\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i y^i}{(l-i)!i!}\frac{d^l}{dy^l}\left(e^{-y}y^{l-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+i}}{(n+i)!}\right)\\
&= e^y\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i y^i}{(l-i)!i!}\frac{d^l}{dy^l}\left(e^{-y}y^{l-i}\left(e^y-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{y^j}{j!}\right)\right)\\
&= e^y\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\frac{(-1)^i y^i}{l!}\frac{d^l}{dy^l}\left(y^{l-i}-y^{l-i}e^{-y}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{y^j}{j!}\right)\\
&= e^y+e^y\sum_{i=1}^{l}\binom{l}{i}\frac{(-1)^i y^i}{l!}\frac{d^l}{dy^l}\left(y^{l-i}-y^{l-i}e^{-y}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{y^j}{j!}\right).
\end{aligned}
$$

现在将 (6.20) 代入 (6.18)，并注意到 (6.20) 最后一行中的第二项恰好是一个次数为 $2l-1$ 的多项式，即可得到证明。□

附录 A. 嵌入曲线与薄管状邻域的特征值

本节讨论嵌入曲线上的磁拉普拉斯算子。在本节中，用 Γ 表示一条简单闭曲线，它是某个单连通区域 Ω 在 $\mathbb{R}^2$ 中的边界（即，$\Gamma=\partial\Omega$）。

作为势一形式，我们考虑标准磁势 $A=\frac{\beta}{2}(-x_2dx_1+x_1dx_2)$ 在 Γ 上的限制 $\hat{}A$，并研究由此得到的一维磁算子。

也就是说，若 $f\colon\Gamma\to\mathbb{R}^2$ 是嵌入，我们取拉回 $\hat{}A=f^*A$。需要注意的是，出于维数上的原因，$\hat{}A$ 是 $\hat{}$ 闭的（即，$dA=0$），因此它在 Γ 上产生的磁场为零。我们将相应的特征值记为 $\hat{}\lambda_j(\Gamma,A)$，这些特征值可以显式计算。

定理 A.1。设 Γ 是一条嵌入曲线，它是单连通区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$的边界，$\hat{}$并考虑与上述势函数 A 相关联的磁拉普拉斯算子。其谱由以下集合给出

$$\frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2}\left(n-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\right)^2,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

特别是

$$(A.1)\qquad \lambda_1(\Gamma,\hat{A})=\frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2}\min_{n\in\mathbb{Z}}\left(n-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\right)^2$$

因此 $\lambda_1(\Gamma,\hat{}A)=0$ 当且仅当 $|\Omega|=\frac{2n\pi}{\beta}$对于某个 $n\in\mathbb{N}$。

证明。注意到，作为一个紧致一维黎曼流形，Γ与具有相同长度的圆等距；根据 [8, 命题 7]，我们知道其谱由下式给出：

$$\lambda_n(\Gamma,\hat{A})=\frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2}(n-\Phi^A)^2,\quad n\in\mathbb{Z}$$

其中，$\Phi^A=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\hat{}A$ 表示沿逆时针方向定向的 Γ 周围的A 的磁通量（然而，谱并不依赖于定向）。我们利用 $\Gamma=\partial\Omega$计算磁通量，并根据斯托克斯公式得到：

$$\Phi^A=\frac{1}{2\pi}\int_\Omega dA=\frac{\beta\,|\Omega|}{2\pi}.$$

结论由此得出。□

作为推论，经典等周不等式蕴含以下结论；姑且宽泛地说，这可以解释为单连通区域边界的第一磁特征值所满足的“反向法贝尔-克拉恩不等式”。

定理 A.2。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界为 Γ 的光滑单连通区域，设Ω^* 是一个圆盘，且满足 $|\Omega| = |\Omega^*|$，边界为 Γ^*。那么

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \leq \lambda_1(\Gamma^*, \hat{A}).$$

如果 $|\Omega| \neq \frac{2n\pi}{\beta}$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，当且仅当 $\Omega = \Omega^*$ 时，等号成立。特别地，我们有 ve

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \leq \frac{\beta}{4} \tag{A.2}$$

当且仅当Ω 是半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ 的圆盘时，等号成立。—

证明。 第一条结论直接由 (A.1) 和等周不等式得出。我们证明第二条结论。首先假设 $\beta|\Omega_{2\pi}| \leq \frac{1}{2}$，因此有 $\min_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \beta|\Omega_{2\pi}|\right)^2 = \left(\beta|\Omega|_{2\pi}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\beta|\Omega_{2\pi}|$，于是

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \leq \frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2} \cdot \frac{1}{2}\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \leq \frac{\beta}{4}$$

由等周不等式 $|\Gamma|^2 \geq 4\pi|\Omega|$。注意，当且仅当 Ω 是面积为$\frac{\pi}{\beta}$的圆盘时，等号成立。接着，我们假设 $\beta|\Omega_{2\pi}| > \frac{1}{2}$，并注意到 $\min_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \beta|\Omega_{2\pi}|\right)^2 \leq \frac{1}{4}$。由此可得

$$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \leq \frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2} \cdot \frac{1}{4} \leq \frac{\pi}{4|\Omega|} < \frac{\beta}{4}.$$

最后，容易验证，对于半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ 的圆盘，(A.2) 中等号成立。证明完毕。

□

注记 A.3. 注意，对于一个半径为 R 的圆 Γ_R，给定 β，我们总能找到一列半径 R_n，使得 $\lambda_1(\Gamma_{R_n}, \hat{A}) = 0$。这相当于 $R_n = \sqrt{\frac{2n}{\beta}}$, $n \in \mathbb{N}$。

另请注意，对于这些 R_n 值， β 是 B_{R_n} 上磁拉普拉斯算子的一个特征值（见附录 B）。

此外， $\lambda_1(\Gamma_R, \hat{A}) \to 0$ 当 $R \to +\infty$ 时，但收敛并非单调的。正如我们所说，存在一个子序列，其值为零。见图2。我们再次注意到，第一特征值随半径变化呈现振荡行为。我们在定理 6.1 中 $R_1(z)$ 下界的余项中观察到了类似现象。此外，数值结果也清楚地显示，圆盘的磁特征值呈现振荡行为（见图3）。

附录 B. 圆盘的特征值

本节考虑圆盘 $B_R := B(0, R)$ 的特征值。我们将它们记为 $\lambda_j(B_R, \beta)$。将 $\Delta_A u = \lambda u$ 用极坐标 (r, t) 表示（见 (3.2)），并采用试探形式 $u = v(r)e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$，可知 v 满足

$$\begin{cases} -v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \left(\frac{\beta r}{2} - \frac{n}{r}\right)^2 v(r) = \lambda v(r) \\ v'(R) = 0. \end{cases} \tag{B.1}$$

(B.1) 中微分方程的有界解为

$$v_n(r) = e^{-\frac{\beta r^2}{4}} r^n L^n_{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\beta}-1\right)}\left(\frac{r^2\beta}{2}\right), \tag{B.2}$$

其中 $L^a_\gamma(x)$ 表示广义拉盖尔函数（精确定义和性质参见例如 [1, §22]）。特征值由施加 $v_n'(R) = 0$ 条件确定。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，我们都有一个序列

$$0 < \lambda_1(n, \beta, R) < \lambda_2(n, \beta, R) \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

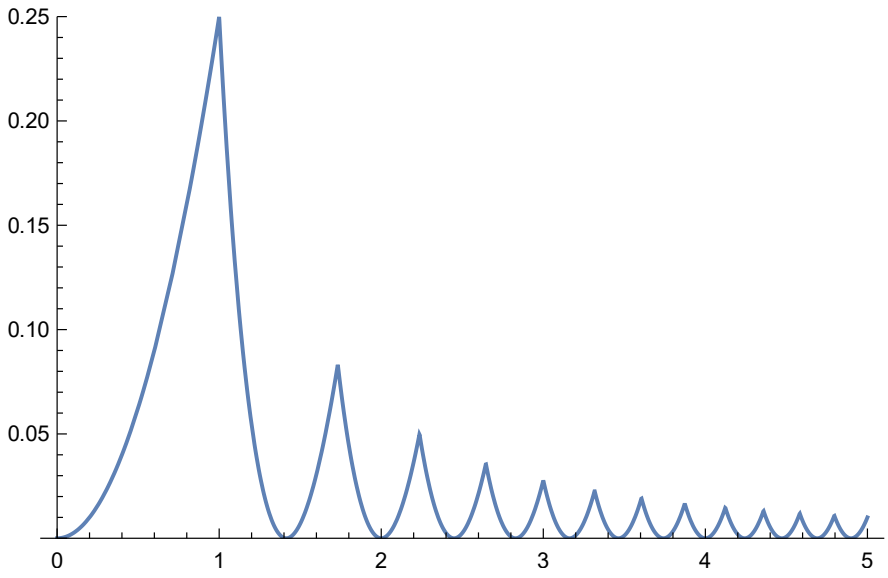

FIGURE 2. 半径为 R 的圆上的第一特征值，作为 R的函数，其中 $\beta = 1$。

显然，

$$\lambda_1(B_R, \beta) = \min_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_1(n, \beta, R).$$

这个最小值取决于 β 和 R，但对于给定的β, R，要确定实现该最小值的 $n \in \mathbb{Z}$ 是哪一个相当复杂。很容易看出，无论如何，该最小值都由某个 $n \in \mathbb{N}$取得。解析分支（即 $\lambda_1(n, \beta, R)$）表现出非常引人入胜的行为。例如， [28]中给出了一项初步的数值研究。由于 $\lambda_1(B_R, \beta)$ 的缩放性质，固定 $\beta = 1$ 并研究第一特征值关于 R的变化并不失一般性。

需要注意的是，对于具有狄利克雷条件的磁拉普拉斯算子，类似的研究要简单得多（尽管计算过程并非易事），而且目前已有完整的研究结果（见 [29]）。特别是，第一特征函数总是径向的，即 $n = 0$。

特征值 $\lambda_1(B_R, \beta)$ 随 R 变化时的特殊行为，在图3中得到了很好的展示。回想一下， B_R 的特征值由 $v_n'(R) = 0$ 隐式刻画，其中 v_n 在 (B.2) 中定义。在图3中，我们绘出了函数的零水平集

$$F(R, \lambda) = v_n'(R) = \frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{\beta r^2}{4}} r^n L^n_{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\beta}-1\right)}\left(\frac{r^2\beta}{2}\right)\right)_{|r=R},$$

取 $\beta = 1$ 时，在区域 $(R, \lambda) \in [0, 6] \times [0, 1]$（$n = 0, \ldots, 10$）内。第一特征值是所有特征值解析分支 $\lambda_1(n, 1, R)$（$n = 0, \ldots, 10$）中的最小值。

我们注意到，第一特征值随 R 变化呈现振荡行为。图3中的黑色虚线对应于 $\Theta_0 \approx 0.590106$。这表明**开放问题 2** 应当有肯定的答案。从图3中可以看出一个明确的次序。事实上，当 $R \in (0, R_1)$ 时，第一特征值由 $\lambda_1(0, 1, R)$ 给出；接着，当 $R \in (R_1, R_2)$ 时，由 $\lambda_1(1, 1, R)$ 给出，依此类推。这一点在 [28] 的数值研究中得到了强调。

尽管我们无法给出圆盘特征值的精确信息，但显式计算能让我们对定理 6.1 有更深入的了解。根据定理 6.1，若 $|\Omega| \geq \frac{2\pi n}{\beta}$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\Omega, \beta) \leq \beta. \tag{B.3}$$

对于圆盘 B_R，条件为 $R \geq \sqrt{\frac{2n}{\beta}}$。现在我们证明，当 $R = \sqrt{\frac{2n}{\beta}}$ 时，前 n 个特征值严格小于 β，这显然蕴含 (B.3)。此外，在这种情况下， β 是一个特征值，特别地，它至少是第 $n + 1$ 个特征值。

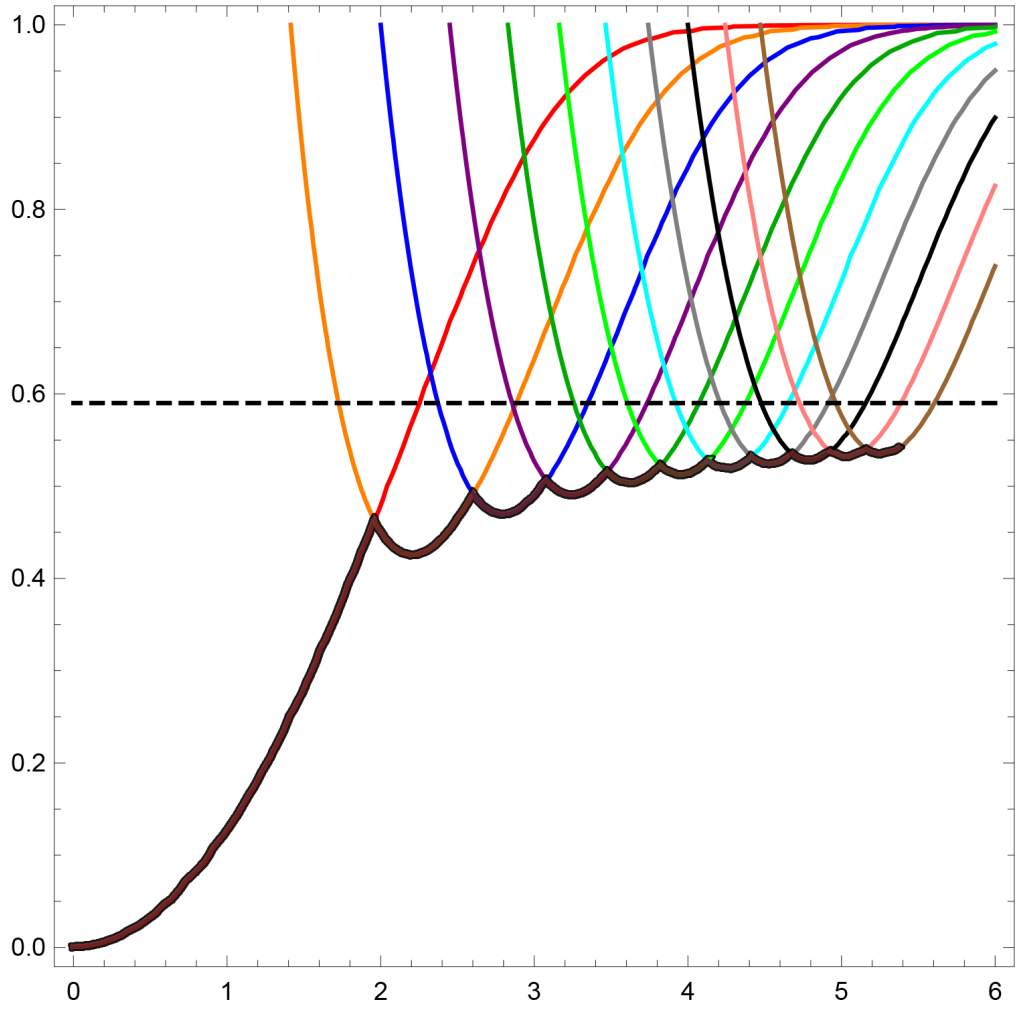

FIGURE 3. 解析分支 $\lambda_1(n,1,R)$，$n=0,...,10$。特别是 $n=0$（红色）、$n=1$（橙色）、$n=2$（蓝色）、$n=3$（紫色）、$n=4$（深绿色）、$n=5$（浅绿色）、$n=6$（青色）、$n=7$（灰色）、$n=8$（黑色）、$n=9$（粉色）、$n=10$（棕色）。这里横坐标轴上的变量是半径 R。第一特征值由所有解析分支中的最小值给出，并以深棕色突出显示。

命题 B.1. 令 $R=\sqrt{\frac{2n}{\beta}}$，其中 $n\in\mathbb{N}$。则 $\lambda_1(B_R,\beta)\le\cdots\le\lambda_n(B_R,\beta)<\beta$ 且 $\beta=\lambda_k(B_R,\beta)$，其中 $k\ge n+1$。

证明。 容易证明，函数（在极坐标 (r,t) 下）

$$f_n(r,t)=e^{-\frac{\beta r^2}{4}}r^n e^{int}$$

是与特征值 β 对应的特征函数（见 (3.2)）。现在考虑函数 $f_m(r,t)=e^{-\frac{\beta r^2}{4}}r^m e^{imt}$，其中 $m\in\mathbb{N}$。我们证明，

$$\frac{\int_{B(0,R)}|\nabla^A f_m|^2}{\int_{B(0,R)}|f_m|^2}<\beta$$

当且仅当 $m<n$。由于 $\{f_m\}_{m=0}^{n-1}$ 是 $L^2(B_R)$ 中的正交族，根据极小极大原理 (2.3)，这意味着至少有 n 个特征值严格小于 β，因此 β 至少是

第 $n+1$ 个特征值。标准计算表明，

$$\frac{\int_{B(0,R)}|\nabla^A f_m|^2}{\int_{B(0,R)}|f_m|^2}=\beta\frac{m!-m^2\Gamma(m,n)+2m\Gamma(m+1,n)-\Gamma(m+2,n)}{m!-\Gamma(m+1,n)}$$

其中 Γ 表示 此处的不完全伽马函数。现在，对于 $m=n$，这恰好给出 β。现在，令 t

$$G(m,n):=\frac{m!-m^2\Gamma(m,n)+2m\Gamma(m+1,n)-\Gamma(m+2,n)}{m!-\Gamma(m+1,n)}.$$

我们有 $G(n,\ n)=1$。此外，

$$\lim_{n\to+\infty}G(m,n)=1.$$

现在，$G(m,\ n)<1$ 当且仅当

$$-m^2\Gamma(m,n)+(2m+1)\Gamma(m+1,n)-\Gamma(m+2,n)<0$$

利用伽马函数的性质，我们可知

$$-m^2\Gamma(m,n)+(2m+1)\Gamma(m+1,n)-\Gamma(m+2,n)=n^me^{-n}(m-n)$$

这意味着 $G(m,\ n)<1$ 对所有 $m<n$均成立。证明结束。 □

从图3来看，显然，当 $R=\sqrt{\frac{2n}{\beta}}$ 时，β 恰好是第$\overline{n+1}$ 个特征值（回顾图3中的$\beta=1$）：对应于 $n\in\mathbb{N}$ 的解析分支与水平线 $\lambda=\beta=1$ 在$R=\sqrt{2n}$处相交。于是我们得到以下

开放问题3 证明：对于 $R\geq\sqrt{\frac{2n}{\beta}}$，$B_R$ 的前 $n+1$ 个特征值均低于 β；证明：对于任意满足 $|\Omega|\geq\frac{2\pi n}{\beta}$ 的区域，其前 $n+1$ 个特征值均低于 β；将定理 6.1 的不等式（6.5）改进如下（如果确实成立）：对于所有 $|\Omega|\geq\frac{2\pi n}{\beta}$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\leq\beta.$$

附录C. 进一步的例子

在本附录中，我们给出更多例子，以凸显寻找$\lambda_1(\Omega,\ \beta)$下界的困难。

我们首先证明，宽度较小的区域具有较小的第一特征值。回顾一下，区域 Ω 的宽度定义为满足以下条件的数的下确界：经过等距变换后，Ω 包含于一个条带 $]-\infty,\ \infty[\times]-h/2,\ h/2[$ 中。

定理 C.1. 设 Ω 是宽度为 ϵ 的有界区域。那么

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\leq\frac{\epsilon^2\beta^2}{4}.$$

证明。设 $\Omega\subset]-\infty,\ \infty[\times]-\epsilon/2,\ \epsilon/2[$。我们考虑 (2.3) 中的试验函数 $u(x_1,\ x_2)=e^{i\frac{\beta}{2}x_1x_2-\overline{\circ}}$ 通过标准计算可得

$$|\nabla^A u|^2=\beta^2x_2^2.$$

由于 $|u|=1$，我们得到

$$\lambda_1(\Omega,\beta)\leq\frac{\int_\Omega|\nabla^A u|^2}{\int_\Omega|u|^2}=\frac{\beta^2\epsilon^2}{4}.$$

□

当然，只有宽度足够小时，这才有意义。

借助定理 C.1，我们证明存在测度任意且第一特征值较小的凸域。

例 C.2. 设 $\Omega_\epsilon=]-L,L[\times]-\epsilon/2,\epsilon/2[,\ L,\epsilon>0$。对于任意 $L>0$，

$$\lambda_1(\Omega_\epsilon,\beta)\leq\frac{\beta^2\epsilon^2}{4}. \tag{C.1}$$

特别地，$\lambda_1(\Omega_\epsilon,\beta)\to0$ 当 $\epsilon\to0^+$ 时。

注意，上界 (C.1) 不依赖于 L，因此 $|\Omega_\epsilon|$ 可以任意大（或任意小）。瑞利商与 $\beta^2\epsilon^2$ 成正比地趋于 0。我们回顾诺伊曼拉普拉斯算子 λ_2^N 的第一个正特征值所满足的 Payne-Weinberger不等式[24]：

$$\lambda_2^N \geq \frac{\pi^2}{d_\Omega^2}, \tag{C.2}$$

对凸区域成立。这里 d_Ω 是 Ω 的直径。例 C.2 表明，(C.2) 不适用于第一磁特征值。

人们可能会据此认为，薄区域或面积较小的区域具有较小的第一特征值。对此，我们指出拓扑起着作用：如果 Ω 是面积较小的单连通区域，那么第一特征值确实较小，见注 2.4。稍令人意外的是，如果该区域不是单连通的，这一结论便不成立。我们将展示一些薄区域的例子，它们的面积可以任意小，而第一特征值却一致地远离零。

例 C.3. 设 Γ 是一条闭简单曲线，它是某个光滑有界区域 Ω 的边界。令$\omega_h := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\Gamma) < h\}$ 为 Γ 的一个小管状邻域。那么 *1)* 若 $\beta|\Omega_{2\pi}| \notin \mathbb{N}$,

$$\lambda_1(\omega_h,\beta) \geq \frac{4\pi^2}{|\Gamma|^2}\min_{n\in\mathbb{Z}}\left(n-\frac{\beta|\Omega|}{2\pi}\right)^2 - \sqrt{\beta}h,$$

对所有 $h \in (0,\epsilon_0)$，存在依赖于 Ω 的某个 $\epsilon_0 > 0$；
2) 若 $\beta|\Omega_{2\pi}| \in \mathbb{N}$，则

$$\lambda_1(\omega_h,\beta) \to 0$$

当 $h \to 0^+$
特别地，$\lambda_1(\omega_h,\beta) \to 0$ 当且仅当 $h \to 0^+$，若 $\beta|\Omega_{2\pi}| \in \mathbb{N}$。

证明。 第 1) 点由定理 C.7 得出，而第 2) 点由命题 C.9 得出。相应的证明将推迟到本节末尾给出。

或者， [27, §9]中证明了

$$\lambda_j(\omega_h,\beta) \to \lambda_j(\Gamma,\hat{A})$$

当 $h \to 0^+$ 时，其中 $\lambda_j(\Gamma, \hat{A})$ 表示赋予标准势 A 限制后的区域上的磁特征值。特别地，当 $h \to 0^+$ 时，$\lambda_1(\omega_h, \beta) \to \lambda_1(\Gamma, \hat{A})$；并且我们已在定理 A.1 中证明，$\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) = 0$ 当且仅当 $\beta|\Omega_{2\pi}| \in \mathbb{N}$。□

注 C.4. 1）若曲线 $\Gamma = \partial\Omega$ 是一般的，即 $\beta|\Omega_{2\pi}| \notin \mathbb{N}$，那么当 h 很小时，区域 ω_h 的面积可以任意小，而第一特征值则有一个正的下界。

2）若 Γ 是任意曲线，那么由 A.2 可知 $\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) \leq \frac{\beta}{4}$；因此，当 h 足够小时，有 $\lambda_1(\omega_h, \beta) < \Theta_0\beta$，并且我们得到另一族满足 $\lambda_1(\Omega\ \beta) < \Theta_0\beta$ 的区域。

总之，我们有许多体积和厚度可以任意小的区域，而第一特征值要么可以任意接近于零，要么始终有正下界；这取决于 Γ 所围成的面积。注意，例 C.3 中的区域很薄，但不是单连通的。如果我们考虑开曲线周围的管状邻域，那么当管状邻域收缩到曲线时，第一特征值总是趋于零。

例 C.5。 设 Γ 是一条开简单曲线，且 $\omega_h := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\Gamma) < h\}$。则

$$\lambda_1(\omega_h,\beta) \to 0$$

当 $h \to 0^+$ 时。

证明。令 $\lambda_j(\Gamma, \hat{A})$ 表示 Γ 上的磁特征值，其中赋予 A 的限制，并在端点处施加磁诺伊曼边界条件。由于 A 在 Γ 上的限制是恰当的，我们得出 $\hat{}\,\hat{}\lambda_j(\Gamma, A)$ 正是 Γ 上的诺伊曼特征值，特别是 $\lambda_1(\Gamma, A) = 0$。令 ω_h 为围绕 Γ、大小为h 的管状邻域。那么，根据 [27, §9]，我们有 $\lambda_1(\omega_h,\beta) \to \lambda_1(\Gamma, \hat{A}) = 0$，当 $h \to 0^+$ 时。注意，极限$\lambda_1(\omega_h,\beta) \to 0$ 也可由以下事实得出： ω_h 是单连通的，且其面积趋于零，参见推论 4.3，点 4)。□

现在我们展示最后一个例子：区域面积很大、厚度很小（即边界上每一点的滚动半径都很小），且第一特征值接近于零。

例 C.6. 令 $A_n := \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{Cn} \le \overline{r} \le \sqrt{Cn + Dn^\alpha}\}$，其中 (r,t) 是 $\mathbb{R}^2$,$C, D > 0$ 和 $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ 中的极坐标。我们有 $|A_n| \to +\infty$ 和 $\lambda_1(A_n, \beta) \to 0$，当 $n \to +\infty$时。

证明。我们有 $|A_n| = \pi D n^\alpha$，而圆环的厚度（两个半径之差）在 $n \to +\infty$ 时表现为 $n^{\alpha-1/2}$。将 $C = \frac{2}{\beta}$ 和 $u(r, t)$ 作为试验函数代入 (2.3)，通过标准计算可得 $\lambda_1(A_n, \beta)$ 在 $n \to +\infty$ 时成立。稍加努力即可将同样的结果推广到任意 $C > 0$。□

这些例子表明，为 $\lambda_1(\Omega, \beta)$ 寻找良好的下界是一项困难的任务。在许多情况下，定理 5.10 中关于滚动半径的条件似乎相当自然。

我们以定理 C.7 和命题 C.9 的证明结束本节；在讨论例 C.3 时，我们用到了这两个结果。

定理 C.7。设 Γ 为一条闭简单曲线，它是光滑有界区域 Ω 的边界，并且满足 $^{\beta}|\Omega_{2\pi}| \notin \mathbb{N}$。设 $\omega_h := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) < h\}$ 为 Γ 的一个小管状邻域。存在一个仅依赖于 Ω 的 $\epsilon_0 > 0$，使得对所有 $h \in (0, \epsilon_0)$，都有：

$$\lambda_1(\omega_h, \beta) \ge \lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} h,$$

证明。设 δ 表示法向指数映射的单射半径；由于 Ω 光滑，该半径为正。对于 $r \le \delta$，令 $\Gamma_r = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) = r\}$ 表示距离边界 r 的等距曲线。我们将在下文的引理 C.8 中证明

$$\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A}) \ge \lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} r, \tag{C.3}$$

对所有 $r \in [0, \epsilon_0)$，其中 $\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A})$ 是曲线 Γ_r 上带有势 $\hat{A}$（标准势在该曲线上的限制）的最低特征值。常数 ϵ_0 将在引理 C.8 的证明中定义。不等式 (C.3) 是定理 C.7 证明的主要要素。

取 ω_h 的第一特征函数 u，满足 $\|u\|_{L^2(\omega_h)} = 1$。由余面积公式

$$\int_{\omega_h} |\nabla^A u|^2 = \int_0^h \int_{\Gamma_r} |\nabla^A u|^2 ds dr.$$

固定一个点 $p \in \Gamma_r$，并在 p 处考虑一个正交标架 (T, N)，其中 T 与 Γ_r 相切，而 N 与其法向。在 p 处，我们有：

$$|\nabla^A u|^2 = |\langle \nabla^A u, T\rangle|^2 + |\langle \nabla^A u, N\rangle|^2 \ge |\langle \nabla^A u, T\rangle|^2 = |\nabla^{\hat{A}} u|^2$$

随后，我们可以将 u 的限制用作与对 $(\Gamma_r, \hat{A})$ 相关联的磁拉普拉斯算子的试验函数。利用 (C.3) 可得

$$\int_{\Gamma_r} |\nabla^{\hat{A}} u|^2 ds \ge \lambda_1(\Gamma_r, \hat{A}) \int_{\Gamma_r} |u|^2 ds \ge (\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} r) \int_{\Gamma_r} |u|^2 ds \ge (\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} h) \int_{\Gamma_r} |u|^2 ds$$

对所有 $r \in [0, h]$。在 $[0, h]$ 上积分，我们得到

$$\int_{\omega_h} |\nabla^A u|^2 \ge (\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} h) \int_{\omega_h} |u|^2 = \lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} h.$$

注意到 $\int_{\omega_h} |\nabla^A u|^2 = \lambda_1(\omega_h, \beta)$，证明即告完成。

□

引理 C.8. 设 Γ 为一条闭简单曲线，是光滑有界区域Ω 的边界，对该区域有$^{\beta}|\Omega_{2\pi}| \notin \mathbb{N}$。令 $\Gamma_r := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) = r\}$ 为距边界距离为 r 的等距曲线。存在一个依赖于Ω 的$\epsilon_0 > 0$，使得对所有 $r \in (0, \epsilon_0)$，均有：

$$\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A}) \ge \lambda_1(\Gamma, \hat{A}) - \sqrt{\beta} r.$$

证明。 令 δ 为法向指数映射的单射半径；因此，对于 $\rho \le \delta$，距离函数 $\rho(x) := \mathrm{dist}(x, \Gamma)$ 是光滑的。

设 $\Omega_r = \{x \in \Omega: \rho(x) > r\}$：对于 $r \in [0, \delta)$，曲线 $\Gamma_r = \partial\Omega_r$ 是光滑的。为简便起见，我们设：

$$A(r) = |\Omega_r|, \quad L(r) = |\Gamma_r|,$$

使得 $A(0) = |\Omega|$，$L(0) = |\Gamma|$。定理 A.1 给出，对所有 $r \in [0, \delta)$：

$$\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A}) = \frac{4\pi^2}{L(r)^2} \min_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{\beta A(r)}{2\pi}\right)^2. \tag{C.4}$$

我们回顾一些众所周知的事实：在区间 $[0, \delta)$ 上，$A(r)$ 光滑且单调递减，$A'(r) = -L(r)$，且 $L'(r) = -2\pi$，因此 $A(r) = A(0) - L(0)r + \pi r^2$（例如参见 [17, §1.2]）。我们将使用以下不等式：

$$A(0) - L(0)r \le A(r) \le A(0) \quad \text{and} \quad L(r) \le L(0). \tag{C.5}$$

由于 $\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \notin \mathbb{N}$，由定理 A.1 可得 $\lambda_1(\Gamma, \hat{A}) > 0$。特别地，存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \in (n - \frac{1}{2}, n) \quad \text{or} \quad \frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \in (n, n + \frac{1}{2}]. \tag{C.6}$$

由于 $|\Omega_r| = A(r)$ 是连续且递减的，因此存在一个正的 $\epsilon_0 \le \delta$，使得不等式

在 (C.6) 中对区域 $\Omega\{\forall r\} \in [0, \epsilon_0)$ 继续成立，即：

$$\frac{\beta A(r)}{2\pi} \in (n - \frac{1}{2}, n) \quad \text{or} \quad \frac{\beta A(r)}{2\pi} \in (n, n + \frac{1}{2}] \tag{C.7}$$

而 (C.4) 给出：

$$\sqrt{\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A})} = \begin{cases} \dfrac{2\pi n - \beta A(r)}{L(r)} & \text{if} \quad \dfrac{\beta A(r)}{2\pi} \in (n - \frac{1}{2}, n), \\ \dfrac{\beta A(r) - 2\pi n}{L(r)} & \text{if} \quad \dfrac{\beta A(r)}{2\pi} \in (n, n + \frac{1}{2}] \end{cases} \tag{C.8}$$

为简便起见，令 $f(r) = \sqrt{\lambda_1(\Gamma_r, \hat{A})}$。利用 (C.5) 可知，在 (C.8) 的第一种情况下，我们立即得到 $f(r) \ge f(0)$；而在第二种情况下，我们得到 $f(r) \ge f(0) - r$。将这个最后的不等式两边平方，得到

$$f(r)^2 > f(0)^2 - 2f(0)r,$$

由定理 A.2 可知 $f(0) = \sqrt{\lambda_1(\Gamma, \hat{A})} \le \frac{\sqrt{\beta}}{2}$，从而 $f(r)^2 > f(0)^2 - \sqrt{\beta}r$，这正是所要证明的断言。

□

命题 C.9。 设 Γ 为一条闭简单曲线，它是光滑有界区域 Ω 的边界，且 $\frac{\beta|\Omega|}{2\pi} \in \mathbb{N}$。令 $\omega_h := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) < h\}$ 为 Γ的一个小管状邻域。则

$$\lim_{h \to 0^+} \lambda_1(\omega_h, \beta) = 0.$$

证明。 设 δ 为法向指数映射的单射半径。从现在起，我们假设 $h \in (0, \delta)$。令 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 为下列方程的解

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, & \text{in } \Omega, \\ \langle \nabla u, N \rangle = -\langle A, N \rangle, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

定义 $A' = A + d\phi$，其中 A 是标准势。注意到，在 $\partial\Omega$ 上，$dA' = dA = \beta$、$\mathrm{div} A' = 0$以及 $\langle A', N \rangle = 0$。势 A' 通常称为库仑规范。在 Ω 上，以及在任意 ω_h 上，A 和A' 相差一个恰当一形式，因此对于所有 $h \in (0, \delta)$，有 $\lambda_1(\omega_h, \beta) = \lambda_1(\omega_h, A')$。现在考虑函数$v : \Gamma \to \mathbb{C}$

$$v(s) := e^{i\int_0^s \hat{A}'},$$

其中，s 是 Γ 上的弧长变量，$\hat{A}'$ 是 A' 在 Γ上的限制。我们在ω_h 上定义试验函数 u，将其沿法向方向向 Γ作常数延拓。具体而言，对于 $x \in \omega_h$，令 $u(x) := v(s(x))$，其中$s(x)$是 x 在 Γ上的（唯一）最近点的弧长坐标。根据构造，u 在 ω_h上光滑，

因为对于某个 $n \in \mathbb{N}$， $v(|\Gamma|) = e^{i\int_0^s \cdot A'} = e^{i\beta|\Omega|} = e^{i2\pi n}$。此外，它与 h无关。令 $p \in \Gamma$，并令(T, N)为一个正交标架，其中 T在 p处与 Γ 相切，而 N在 p处是 Γ 的单位法向量。那么，对于任意 $p \in \Gamma$，我们有 $du(T) = iu\hat{}A'(T)$，因此 $d^{A'}u(T) = 0$。此外， $d^{A'}u(N) = 0$，因为 $A'(N) = 0$。由此可得， $d^{A'}u = 0$ 在 Γ上成立，或者等价地， $\nabla^{A'}u = 0$ 在 Γ上成立。

Thi这意味着，当 $\|\nabla^{A'}u\|_{L^\infty(\omega_h)} \to 0$ 时， $h \to 0^+$。由极小极大原理 (2.3)，我们有 ave

$$\lambda_1(\omega_h, \beta) = \lambda_1(\omega_h, A') \leq \frac{\int_{\omega_h} |\nabla^{A'}u|^2}{\int_{\omega_h} |u|^2} \leq \frac{\|\nabla^{A'}u\|^2_{L^\infty(\omega_h)}|\omega_h|}{|\omega_h|}$$

因为 $\int_{\omega_h} |u|^2 = \int_{\omega_h} 1 = |\omega_h|$。证明至此完成。 □

参考文献

[1] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun。 *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*第 55 卷。由美国政府印刷局政府文件主管代售，华盛顿哥伦比亚特区，1964 年。[2] P. Bauman、D. Phillips 和 Q. Tang。外加磁场下金兹堡–朗道系统的稳定成核。*Arch. Rational Mech. Anal.*，142(1):1–43，1998 年。[3] F. A. Berezin。算子的协变符号与逆变符号。 *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*，36:1134–1167，1972 年。[4] V. Bonnaillie。带角点区域中具有磁场的薛定谔算子的基态能量。*Asymptot. Anal.*，41(3-4):215–258，2005 年。[5] V. Bonnaillie-No¨el。半直线上的诺伊曼条件谐振子。 *Commun. Pure Appl. Anal.*，11(6):2221–2237，2012 年。[6] R. Chen 和 P. Li。关于庞加莱型不等式。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，349(4):1561–1585，1997 年。[7] B. Colbois、A. El Soufi、S. Ilias 和 A. Savo。磁薛定谔算子的特征值上界。 ¨ *Comm.* 。[8] B. *Anal. Geom.* 30 4 779 814, 2022
Colbois 和 A. Savo。磁拉普拉斯算子第一特征值的下界。 *J. Funct. Anal.*，2018 年。[9] B. Colbois 和 A. Savo。平面区域上零磁场拉普拉斯算子基态能量的上界。 *Ann. Global Anal. Geom.*，60(1):1–18，2021 年。[10] M. Egidi、S. Liu、F. M¨unch 和 N. Peyerimhoff。流形上磁拉普拉斯算子的里奇曲率与特征值估计。 *Comm. Anal. Geom.*，29(5):1127–1156，2021 年。[11] T. Ekholm、H. Kova˘r ´ *J. Math. Anal.* ık 和 F. *Appl.* 439 1 330 346, 2016
Portmann。磁拉普拉斯算子最低特征值的估计。[12] 。 ″ *Calc. Var. Partial Differential Equa-* L. Erd[13] *tions* 4 3 283
os。均匀磁场下的瑞利型等周不等式。″，1996 年。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*L. Erd[14] os、M. Loss 和 V. Vougalter。狄利克雷特征值之和的抗磁性。 *Spectral methods in surface superconductivity* 77 *Progress in Nonlinear Differential* , *Equations and their Applications* ¨ 2010
50(3):891–907，2000 年。[15] S. Fournais 和 B. Helffer。 *Lett. Math. Phys.*，[16] 卷。Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州， ¨ *Proc.* 。[17] S. *Amer. Math. Soc.* 136 12 4245 4255, 2008
Fournais 和 B. Helffer。最低磁性诺伊曼特征值的不等式。 *Tubes*，2019 年。 *Progress in Mathematics*R. L. Frank、A. Laptev 和 S. Molchanov。区域中磁薛定谔算子的特征值估计。¨。[18] A. Gray。 *Linear Algebra Appl.*，[19] 第 221 卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，第二版，2004 年。前言由 Vicente Miquel 撰写。 *J. Funct. Anal.*E. M. Harrell 和 J. Stubbe。关于图特征值之和。[20] ，455:168–186，2014 年。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*P. Kr[21] oger。欧几里得空间中有界区域上诺伊曼特征值的上界。 *Ann.* , *Henri Poincaré* 13 4 731 750, 2012

106(2):353–357，1992 年。[22] C. Lange、S. Liu、N. Peyerimhoff 和 O. Post。离散与连续磁拉普拉斯算子的挫折指数与切格尔不等式。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*，54(4):4165–4196，2015 年。[23] R. S. Laugesen、J. Liang 和 A. Roy。旋转对称区域上的磁特征值之和达到最大值。¨。 *Comm. Math. Phys.*R. S. Laugesen 和 B. A. Siudeja。星形平面区域上的磁谱界。[24] ，21(3):670–689，2015 年。 ´P. Li 和 S. T. a. Yau。关于薛定谔方程与特征值问题。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，88(3):309–318，1983 年。[25] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger。凸域上的最优庞加莱不等式。´，1960 年。 *Proc. London Math. Soc. (3)*G. P[26] olya。关于振动膜的特征值。 *Bound states of the magnetic Schrödinger operator*，11:419–433，1961 年。 *EMS Tracts in Mathematics*N. Raymond。¨，[27] 第 27 卷。欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2017 年。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*J. Rubinstein 和 M. Schatzman。多重连通薄带上的变分问题。I. 基本估计与拉普拉斯谱的收敛。[28] ，160(4):271–308，2001 年。 *Physics Letters*D. Saint-James。圆柱几何中临界场 hc3 的研究。，15(1):13–15，1965 年。

[29] S. S. Son. *Spectral problems on triangles and disks: Extremizers and ground states*. ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2014年。博士论文（Ph.D.）–伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校。[30] G. Talenti. 椭圆方程与重排。 *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*，3(4):697–718，1976年。

Bruno Colbois, Université de Neuchâtel, Institute de Mathémathiques, Rue Emile Argand 11, 2000 Neuchâtel, Switzerland*Email address*: bruno.colbois@unine.chCorentin Léna, Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali(DTG), Stradella S. Nicola 3, 36100 Vicenza, Italy *Email address*: corentin.lena@unipd.itLuigi Provenzano, Sapienza Università di Roma, Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria(SBAI), Via Antonio Scarpa 16, 00161 Roma, Italy *Email address*: luigi.provenzano@uniroma1.it

Alessandro Savo, Sapienza Università di Roma, Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria (SBAI), Via Antonio Scarpa 16, 00161 Roma, Italy*Email address*: alessandro.savo@uniroma1.it