arXiv:2305.02688v2 [math.DG] 1 Nov 2023

具有常曲率和挠率的流形的后李代数结构

ERLEND G RONG、HANS Z. MUNTHE-KAAS 和 JONATA N STAVA

Abstract. 对于具有平行挠率和曲率的一般仿射联络，我们证明其向量场空间上存在后李代数结构，从而推广了关于平坦联络的既有结果。然而，对于非平坦联络，仅有向量场还不够，因为曲率的存在还要求我们纳入与整体群的无穷小作用相对应的端omorphism。我们详细讨论这一后李代数的泛李代数，并给出其在流形上求解微分方程方面的应用。

1. Introduction

在流形上求解微分方程的数值解时，对于非平坦空间，最常用的方法是通过嵌入或使用坐标图。几何数值积分（GNI）算法则侧重于采用全局方法，同时保持底层几何结构。此方法可用于求解常微分方程和偏微分方程离散化后的形式。

几何数值积分的一项主要成果是其在李群上的应用，参见例如[9, 10, 11, 12]。李群在局部可视为配备了仿射联络 ∇ 的流形，该联络是平坦的，即曲率为零，但挠率可能是平行的。通过将所有左不变向量场定义为平行向量场，可以在李群上得到这样的联络。反过来，如果 ∇ 是挠率平行的平坦联络，那么所有平行向量场构成一个有限维李代数，并且该李代数可在局部积分为群结构。

流形 M 上带有联络 ∇ 的光滑向量场 $\mathfrak{X}_M$ 空间可视为一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的代数，称为联络代数。当挠率和曲率均为零时，联络代数是一个 pre-Lie 代数。在上述情形中，曲率为零而挠率平行，联络代数是一个后李代数，见定义 2.1。后李代数在几何数值积分中发挥着关键作用，其许多方法都基于这一代数结构。

本文将考虑一种更一般的流形，这类流形具有仿射联络 ∇，该联络不一定平坦，但具有平行曲率和挠率。这些流形可视为齐性空间的局部表示。我们将证明，存在一种潜在的后李代数结构，它支配着

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C05, 41A58, 53C30,17D99.

Key words and phrases. 后李代数、联络、局部齐性空间。第一作者获得特隆德·莫恩基金会 GeoProCo 项目资助——资助编号 TMS2021STG02（GeoProCo）。所有作者均获得挪威研究委员会项目 302831“流形上的计算动力学与随机过程”（CODYSMA）的资助。

这些空间中的向量场；只要我们也纳入与整体群无穷小变换相对应的端omorphism。

pre-Lie 代数是平坦无挠联络的自然代数框架 [3], ，而后李代数则是具有平行挠率的平坦联络的主要框架 [16, 15]。对于具有平行挠率 ∇ 和曲率的联络，标架丛中存在一个子丛，其截面可视为后李代数，并且在群 H的作用下保持不变。该群与 ∇的整体群同构。我们不采用更偏代数的方法（例如 [1], 中概述的方法），而是利用流形与其标架丛之间的关系，以显式形式实现后李代数结构。

我们得到的主要结果如下，将在第 3.2 节中证明。

定理 1.1. 设 (M, ∇) 是任意一个连通仿射流形，其曲率 R 和挠率 T 均为平行。设 Hol^p 为 ∇ 在$p \in M$处的整体群，其李代数为 $\mathfrak{hol}_p$，并考虑由这些李代数构成的端omorphism 子向量丛 $\mathfrak{hol} \subseteq T^*M \otimes TM$。

设 $\mathfrak{X}_M = \Gamma(TM)$ 是 M 上的向量场， $\mathfrak{Hol}_M$ 是其整体丛的截面。在 $\hat{} \ \mathfrak{X}_M$ 上定义二元运算 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\triangleright := \mathfrak{X}_M \oplus \mathfrak{Hol}_M$，使得若 x、$y \in \mathfrak{X}_M$ 且 E、E_1、$E_2 \in \mathfrak{Hol}_M$，则

$$
\begin{aligned}
x \triangleright y &= \nabla_x y, & [x,y] &= -T(x,y) + R(x,y),\\
x \triangleright E &= \nabla_x E, & [E,x] &= -Ex,\\
E \triangleright y &= Ey, & [E_1,E_2] &= -E_1E_2 + E_2E_1.\\
E_1 \triangleright E_2 &= E_1E_2 - E_2E_1,
\end{aligned}
$$

$\hat{}$于是 $(\mathfrak{X}_M, [\cdot,\cdot], \triangleright)$ 是一个后李代数。

注 1.2. 定理中定义的运算采用 $[\cdot,\cdot]$ 这一括号记法，是为了强调该运算是一个李括号，它推广了李群向量场上的后李括号；我们对后者也使用相同的记法，见第 2.1 节。此括号不应与向量场上的雅可比括号混淆，后者记作 $[\cdot,\cdot]_J$。

本文结构如下。第 2 节将讨论后李代数及其与具有平行挠率的平坦联络之间的关系。我们将讨论其万有包络代数，以及后李代数的向量场上存在群作用所产生的影响。第 3 节将讨论如何通过将非平坦仿射流形 (M, ∇) 上的向量场提升到带有平坦联络的标架流形 N 上，从而为这些向量场赋予后李代数结构。最后，第 4 节回顾自由后李代数，并探讨后李代数结构在流形上常微分方程解中的应用。

2. Flat connections, post-Lie algebras and group action

2.1. 后李代数与平坦联络。我们从所研究的代数对象的定义开始。

定义 2.1. 后李代数是一个三元组 $(\mathfrak{A}, [\cdot,\cdot], \triangleright)$，其中 $(\mathfrak{A}, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，且 $\triangleright : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 是一种二元乘积，其结合子为 $a_\triangleright$

$$a_\triangleright(x,y,z) = x \triangleright (y \triangleright z) - (x \triangleright y) \triangleright z,$$

使得对于任意 $x, y, z \in \mathfrak{A}$,

$$x \rhd [y,z] = [x \rhd y, z] + [y, x \rhd z],$$
$$[x,y] \rhd z = a_{\rhd}(x,y,z) - a_{\rhd}(y,x,z).$$

此类结构在数值计算中有许多应用，更多详情请参见 [4] 。特别是，自由 post-Lie 代数具有重要意义，参见第 4.1 节。

后李代数在几何中的出现方式如下。设 (N, ∇) 是一个赋有仿射联络的光滑流形，其中联络 ∇具有曲率 R 和挠率 T。我们考虑 N 上所有向量场 $\mathfrak{X}_N = \Gamma(TN)$ 构成的空间。记 $[x,y]_J = x*y - y*x$为向量场的雅可比括号，其中 $x*y$ 是二阶算子。

$$(x*y)\phi = x(y\phi).$$

我们使用仿射联络 ∇ 在 $\mathfrak{X}_N$ 上定义运算 $x \rhd y = \nabla_x y$。假设曲率 $R = 0$ 消失，且挠率 T 是平行的。我们将括号 $[\cdot,\cdot]$ 定义为

$$T(x,y) = -[x,y] = x \rhd y - y \rhd x - [x,y]_J.$$

三元组 $(\mathfrak{X}_N, [\cdot,\cdot], \rhd)$ 是一个后李代数，参见 [15, 第 2] 节。注意，定理 1.1 中给出的括号是此处定义的括号的一般化。

2.2. 后李代数的万有包络代数。如果我们有一个后李代数，就可以将其结构扩展到它的万有包络代数。令 $U(\mathfrak{X}_N)$ 为李代数 $(\mathfrak{X}_N, [\cdot,\cdot])$ 的万有包络代数，并用 $\cdot$ 表示其群运算，使得 $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$。然后，我们可以根据以下规则将 $\rhd$ 扩展到 $U(\mathfrak{X}_N)$:

$$\begin{cases} \mathbb{I} \rhd x = x, \\ x \rhd (y \cdot z) = (x \rhd y) \cdot z + y \cdot (x \rhd z), \\ (x \cdot y) \rhd z = x \rhd (y \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z, \end{cases} \tag{2.1}$$

从而使 $(U(\mathfrak{X}_N)\ \cdot, \rhd)$ 成为一个 D-代数。我们可以将这个 D-代数与 N 上所有微分算子张量构成的空间等同。令 $\mathfrak{T}_N = \oplus_{j=0}^{\infty} \mathfrak{X}_N^{\otimes j}$ 为 $\mathfrak{X}_N$ 的张量代数，其中张量积 $\otimes$ 是在 $C^\infty(N)$ 上进行的。关于联络 ∇，引入其 Hessian:

$$\nabla^2_{x,y} = \nabla_x \nabla_y - \nabla_{\nabla_x y},$$

我们可以迭代地构造协变导数

$$\nabla^{k+1}_{x_0,x_1,\ldots,x_k} = \nabla_{x_0} \nabla^k_{x_1,\ldots,x_k} - \nabla^k_{\nabla_{x_0} x_1,\ldots,x_k} - \cdots - \nabla^k_{x_1,\ldots,\nabla_{x_0} x_k}.$$

对于每个元素 $\chi \in \mathfrak{T}_N$，我们将 $\chi \mapsto D_\chi$ 定义为满足以下条件的线性映射

$$D_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k} = \nabla^k_{x_1,x_2,\ldots,x_k},$$

并且 $D_{\mathbb{I}} = \mathrm{id}$。我们注意到

$$D_{x \otimes y} - D_{y \otimes x} = -D_{T(x,y)} = D_{[x,y]} =: [D_x, D_y].$$

我们将使用以下记号

$$D_{\chi_1} \rhd D_{\chi_1} = D_{D_{\chi_1} \chi_2}, \quad \text{and} \quad D_{\chi_1} \cdot D_{\chi_2} = D_{\chi_1} D_{\chi_2} - D_{\chi_1} \rhd D_{\chi_2} = D_{\chi_1 \otimes \chi_2}.$$

于是可见， $U(\mathfrak{X}_N)$与 $D_{\mathfrak{T}_N}$之间存在一个代数同构，由 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \mapsto D_{x_1} \cdot D_{x_2} \cdots D_{x_k}$给出。我们注意到，根据这个定义

$$x \cdot y = x * y - x \rhd y.$$

2.3. 后李代数上的群作用。我们继续假设（N, ∇）是一个赋有仿射联络 ∇ 的光滑流形，该联络是平坦的且具有平行挠率。如有必要，在万有覆盖上进行研究后，我们可以假设 N 是单连通的。对于任意 $p \in N$，定义李代数 $\mathfrak{g}_p$ 为向量空间 $\mathfrak{g}_p = T_pN$，其李括号为 $[u, v]_{\mathfrak{g}_p} = -T(u, v)$，$u, v \in \mathfrak{g}_p$。若$\gamma\colon [0,1] \to N$ 是 N 中一条从 $p_0 = \gamma(0)$到 $p_1 = \gamma(1)$的光滑曲线，则从 $\mathfrak{g}_{p_0}$ 到 $\mathfrak{g}_{p_1}$ 的平行移动与路径无关，因为联络是平坦的；同时，由于挠率是平行的，它也是一个李代数同构。

我们选定一个基点 $o \in N$，并记作 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o$。令 Y_A 为满足 $Y_A|_o = A \in \mathfrak{g}$ 的唯一平行向量场。我们注意到以下关系：

$$[Y_A|_p, Y_B|_p]_{\mathfrak{g}_p} = Y_{[A,B]_{\mathfrak{g}}}|_p, \qquad p \in N, \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

如果 $F \in C^\infty(N, \mathfrak{g})$ 是一个取值于李代数 $\mathfrak{g}$ 的函数，我们可以通过下式定义一个向量场 Y_F：

$$p \mapsto Y_{F(p)}|_p.$$

由于 N 上的所有向量场都可以用这种方式描述，因此我们可以将 $\mathfrak{A} = C^\infty(N, \mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{X}_N = \Gamma(TN)$ 视为同一对象。$\mathfrak{A}$ 上诱导的后李结构为：

$$[F_1, F_2] = [F_1, F_2]_{\mathfrak{g}}, \qquad F_1 \triangleright F_2 = Y_{F_1} F_2. \tag{2.2}$$

由向量场 Y_A，我们得到李代数 $\mathfrak{g}$ 在 N 上的一个作用，其定义为 $\mathfrak{g} \times N \to TN$，$(A, p) \mapsto Y_A|_p$。假设对于某个子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$，该作用可以积分为群作用。更确切地说，设 H 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{h}$，并且存在一个李群同态 $\rho\colon H \to \mathrm{Diff}(N)$，使得 $\rho(\exp(tA))$ 是 Y_A 的流，$A \in \mathfrak{h}$。注意，只有当向量场 Y_A、$A \in \mathfrak{h}$ 完备时，这才可能实现。由于稍后将会说明的原因，我们将在右侧写出此作用，即记为

$$\rho(h)(p) = ph^{-1}, \qquad p \in N, \quad h \in H.$$

对于任意 $h \in H$，定义 h 在 $\mathfrak{X}_N$ 上的作用 $\mathrm{Ad}(h)$，

$$(\mathrm{Ad}(h)x)|_p = \rho(h)_* x|_{\rho(h^{-1})p}, \qquad h \in H, \quad p \in N, \quad x \in \mathfrak{X}_N.$$

若将 $\mathfrak{X}_N$ 与 $\mathfrak{A}$ 视为相同，则

$$(\mathrm{Ad}(h)F)(p) = \mathrm{Ad}(h)(F \circ \rho(h^{-1}))(p) = \mathrm{Ad}(h)F(ph), \qquad p \in N,$$

其中右侧的符号 $\mathrm{Ad}(h)$ 表示 H 在 $\mathfrak{g}$ 上的通常伴随作用。若 $\mathrm{Ad}(H)F = F$，则称 F 关于 H 是等变的。注意，等变性在两种 post-Lie 运算下均保持不变，因此我们得到由等变元素构成的子 post-Lie 代数 $\mathfrak{A}^H$。

注 2.2. 更一般地，若 (ψ, V) 是 H 在向量空间 V 上的一个表示，则可在取值于同一向量空间 C^∞ 的光滑函数上定义一个诱导表示 $N(V)$。我们仍用相同符号表示这个新表示，其定义如下：若 $F \in C^\infty(N, V)$ 是一个函数，则 $(\psi(h)F)(p) = \psi(h)F(ph)$。若对于任意 $h \in H$，都有 $\psi(h)F = F$，则称 F 是等变的。

注 2.3. 在下文中，我们将假设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 是一个约化对，即假设我们有一个在 H 的 Ad-伴随表示作用下保持不变的分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$。那么，任意函数 $F \in C^\infty(N, \mathfrak{g})$ 都可以唯一地分解为两个函数之和，其中一个属于 $C^\infty(N, \mathfrak{p})$，另一个属于 $C^\infty(N, \mathfrak{h})$，并且 F 是等变的，当且仅当这两个部分均为等变的。

3. Post-Lie algebra structure and the frame bundle

3.1. 带有左作用的标架丛。我们将简要介绍标架丛中发现的结构。更多详情，参见例如 [8, 7, 6]。设 M为一个维数为 m的连通流形。设 $\mathbb{R}^m$ 为带有标准度量和标准基底 e_1、.....、e_m的欧几里得空间。对于任意 $x \in M$，考虑FM_x作为所有线性同构 $u\colon \mathbb{R}^m \to T_xM$构成的空间。这样的映射可视为对 T_xM的一组基底 u_1、.....、u_m的选取，其中 $u_j = u(e_j)$。我们注意到，GL(m)通过右复合在每个 FM_x 上递作用，从而赋予我们一个主丛结构 GL(m) $\to FM \xrightarrow{\pi} M$。由于稍后将会明白的原因，我们更倾向于使用如下左作用。

$$q \cdot u = u \circ q^{-1}, \qquad q \in \mathrm{GL}(m).$$

与该作用相对应，我们定义向量场，

$$\xi_A|_u = \frac{d}{dt} e^{tA} \cdot u|_{t=0} = \frac{d}{dt} u \circ e^{-tA}|_{t=0}, \qquad A \in \mathfrak{gl}(m). \tag{3.1}$$

于是，对于任意的 A、$B \in \mathfrak{gl}$（m）和 $q \in$ GL（m），我们有以下关系：

$$[\xi_A, \xi_B]_J = -\xi_{[A,B]}, \qquad \mathrm{Ad}(q)\xi_A = \xi_{\mathrm{Ad}(q)A}.$$

这些向量场张成向量丛 $\mathcal{V} = \ker \pi_*$。我们强调，与群作用相关的这些典范向量场是此类向量场通常定义的负值。有关这一选择的解释，请参见注 3.1。

设 τ 为 M 上任意一个 (k, l)-张量。接着定义其标量化 $\overline{\tau}$: $FM \to (\mathbb{R}^m)^{*,\otimes k} \otimes (\mathbb{R}^m)^{\otimes l}$，使得对于任意的 $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^m, b_1^*, \dots, b_l^* \in (\mathbb{R}^m)^*$，我们有

$$\overline{\tau}(u)(a_1, \dots, a_k, b_1^*, \dots, b_l^*) = \tau|_{\pi(u)}(u(a_1), \dots, u(a_k), u^*b_1^*, \dots, u^*b_l^*).$$

考虑 GL(m) 在 $\mathbb{R}^m$ 上的标准作用，它会在其张量积和对偶空间上诱导出作用。根据构造，利用 GL(m) 的这一表示，每个函数 $\overline{\tau}$ 都是符合注 2.2 中定义的等变函数。反过来，每个取值于 $(\mathbb{R}^m)^{*,\otimes k} \otimes (\mathbb{R}^m)^{\otimes l}$ 的等变函数，都对应一个 (k, l)-张量。

设 ∇ 是 TM 上一个选定的仿射联络，其挠率为 T，曲率为 R。对于定义在某个区间（$-\varepsilon, \varepsilon$）上的任意曲线 $t \mapsto \gamma(t)$，存在一个 ∇-平行标架 $u(t) \in FM_{\gamma(t)}$，它由初值 $u(0) = u$唯一确定。记 $\dot{u}(0) = h_u v \in T_uFM$ 为沿满足 $\dot{\gamma}(0) = v$的曲线 $u(t)$ 求得的导数。设 $\mathcal{H}$为所有这类导数构成的集合，即 $\mathcal{H}_u = \{h_u v\colon\ v \in T_{\pi(u)}M\}$。那么

$$TFM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}^m$，我们可以定义 $\mathcal{H}$ 的整体截面 H_a $H_a|_u = \sum_{j=1}^n a_j h_u u_j$。于是，雅可比括号满足以下关系：

$$[\xi_A, H_a]_J = -H_{Aa}, \qquad [H_a, H_b]_J = -H_{\overline{T}(a,b)} + \xi_{\overline{R}(a,b)}. \tag{3.2}$$

从 H_a 的定义可以看出， $q \in$GL(m) 的作用为

$$\mathrm{Ad}(q)H_a = H_{qa}.$$

如果 x 是 M上的向量场，我们可以通过 $hx|_u = h_u x|_{\pi(u)}$定义 x 的水平提升 hx 。由此可得恒等式

$$hx = H_{\overline{x}}.$$

此外，如果 τ 是张量，那么根据定义

$$hx\overline{\tau} = H_{\bar{x}}\overline{\tau} = \overline{\nabla_x \tau}, \qquad \xi_A \overline{\tau} = A \cdot \overline{\tau},$$

其中，$A \cdot \overline{\tau}$表示由 $\mathfrak{gl}(m)$在$(\mathbb{R}^m)^*, \otimes^k \bigotimes (\mathbb{R}^m)^{\otimes l}$ 上的标准表示诱导的李代数表示，其作用于 $\mathbb{R}^m$。

3.2. 标架丛上的后李代数结构及˜定理 1.1 的证明。我们定义一个联络 ∇，使所有向量场 H_a、ξ_A、 $a \in \mathbb{R}^m$、 $A \in \mathfrak{gl}(m)$ 都是平行的。将其挠率记为 T。这个联络˜ ˜显然是平坦的。我们想要考虑 $\nabla T = 0$ 成立的情形。注意，对于任意 a、b、$c \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{H_a}\tilde{T})(H_b, H_c) &= H_{H_a \overline{T}(b,c)} - \xi_{H_a \overline{R}(b,c)} \\ &= H_{\overline{\nabla T}(b,c;a)} - \xi_{\overline{\nabla R}(b,c;a)},\end{aligned}$$

其中我们定义了

$$\nabla T(v_1, v_2; v_3) = (\nabla_{v_3} T)(v_1, v_2),$$

˜ ˜并对 ∇R 使用了类似的定义。由此可知， $\nabla_{\mathcal{H}} T = 0$ 当且仅当 ∇ 具有˜ ˜平行挠率和曲率。然而，我们无法确保 $\nabla_{\mathcal{V}} T$ 在整个标架丛上消失，因此需要考察一个较低维的子空间。

在本文余下部分，我们将假设 $\nabla T = 0$ 且 $\nabla R = 0$。˜ ˜ ˜定义叶状结构 $M = FM = (M_u)_{u \in \tilde{M}}$，其中 M_u 由所有能够沿着与 $\mathcal{H}$相切、位于 FM 中的曲线从 u ˜到达的元素组成。换言之， M_u 由所有可通过平行移动从 u 得到的标架组成。根据我们的假设，我们注意到 $\overline{T}$和 $\overline{R}$ 在叶状结构的每个叶片上均为常数。

˜选取一个基点 $o \in M$ 和初始标架 u^o，并定义 $N := M_{u^o}$。我们注意到，对任意 $u^p \in N_p$， $p \in M$,

$$\mathrm{Hol}_p = \{u \circ (u^p)^{-1} : u \in N_p\},$$

是 ∇ 在 $p \in M$处的整体群。由于 M 是连通的，所有群 Hol_p均彼此同构。此外，若定义 $H = \{u^{-1} \circ u^o : u \in N_o\} \subseteq \mathrm{GL}(m)$，则 H 将在 N的每个纤维上传递作用。由此我们得到一个主丛

$$H \to N \to M.$$

如果 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数，那么

$$TN = \mathrm{span}\{H_a|_u, \xi_A|_u : a \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{h}, u \in N\},$$

根据 Ambrose–Singer 定理， [2],

$$\mathfrak{h} = \{\overline{R}(u)(a, b) : u \in N, a, b \in \mathbb{R}^m\}.$$

由于

$$\frac{d}{dt}\overline{T}(u \cdot e^{At}) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}\overline{R}(u \cdot e^{At}) = 0,$$

对于任意 $A \in \mathfrak{h}$、 $u \in N$，我们有：限制在 N 中的标架上，

$$A\overline{T}(a, b) = \overline{T}(Aa, b) + \overline{T}(a, Ab), \qquad A\overline{R}(a, b) = \overline{R}(Aa, b) + \overline{R}(a, Ab) + \overline{R}(a, b)A,$$

˜ ˜对于任意 a、$b \in \mathbb{R}^m$。由此可知，将 ∇ 限制到 N 后满足 $\nabla T = 0$。我们得到相应的后李代数 $(\mathfrak{x}_N, [\cdot, \cdot], \triangleright)$，其中 $\mathfrak{x}_N = \Gamma(TN)$。

总之，如果流形 M 上的原始联络 ∇ 具有平行曲率 R 和挠率 T，那么标架丛上的诱导联络 ∇ 将

在限制到由平行移动从任意选定的初始标架可达的标架子流形 N 时，变为平坦且具有平行挠率。M 上的函数和张量于是表现为 N上的 H-等变函数。利用这一关系，我们得以完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。设 N 是相对于所选初始标架 $u^o \in FM_o$ 和联络 ∇ 定义的。它有平行向量场 H_a、 ξ_A。我们定义一个李代数

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{H_a|_{u^o}, \xi_A|_{u^o} \,:\, a \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{h}\}$$

˜李括号由 $-T$ 给出。于是我们可以将 $\mathfrak{h}$ 视为 $\mathfrak{g}$的一个子代数，并将向量空间 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$等同起来。

我们考虑 $\mathfrak{X}_N$ 的不变子后李代数 $\mathfrak{X}_N^H$。利用注 2.3，我们知道可以将任意 $w \in \mathfrak{X}_N^H$ 写成 $w = H_{\overline{x}} + \xi_{\overline{E}}$，其中 $x \in \mathfrak{X}_M = \Gamma(TM)$、 $E \in \mathfrak{Hol}_M = \Gamma(\mathfrak{hol})$。更具体地说，令 $q \in H$，并回忆 $\mathrm{Ad}(q)\xi_A = \xi_{\mathrm{Ad}(q)A}$ 且 $\mathrm{Ad}(q)H_a = H_{qa}$。由此可知，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 是一个约化对，因此我们可以使用注 2.3。因此，若我们考虑一个向量场 $\tilde{x} = Y_F$, $F \in C^\infty(N, \mathfrak{g})$, 并将其写为 $F = F_1 \oplus F_2$，其中 $F_1 \in C^\infty(N, \mathbb{R}^m)$ 且 $F_2 \in C^\infty(N, \mathfrak{h})$，那么该向量场是等变的，当且仅当 F_1 和 F_2 都是 $\mathrm{Ad}(H)$ 等变的。接下来，我们定义一个向量场 $x \in \mathfrak{X}_M$，其定义为

$$x_p = u(F_1(u))$$

对于 $p = \pi(u)$。由于 F_1 是 $\mathrm{Ad}(H)$-等变的，我们有

$$uq(F_1(uq)) = uq(\mathrm{Ad}(q^{-1})F_1(u)) = uF_1(u),$$

因此， x_p 是定义良好的。我们还注意到， $F_1(u) = u^{-1}x_p = \bar{x}(u)$。类似地，我们定义 $E \in \mathfrak{Hol}_M$ 为

$$E_p = uF_2(u)u^{-1}, \qquad p = \pi(u),$$

¯从而得到 $F_2 = E$。

接下来，我们使用方程（2.2）和（3.2）得到，对于任意 x、 $y \in \mathfrak{X}_M$ 以及任意 E_1、 $E_2 \in \mathfrak{Hol}_M$,

$$\begin{aligned}
[\bar{x}, \bar{y}] &= -\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{R}(\bar{x}, \bar{y}) = -\overline{T(x,y)} + \overline{R(x,y)}, \\
[\bar{E}_1, \bar{y}] &= \bar{E}\bar{y} = \overline{Ey}, \\
[\bar{E}_1, \bar{E}_2] &= -(\bar{E}_1\bar{E}_2 - \bar{E}_2\bar{E}_1) = -(\overline{E_1E_2} - \overline{E_2E_1}),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\bar{x} \rhd \bar{y} &= H_{\bar{x}}\bar{y} = \overline{\nabla_x y}, & \bar{x} \rhd \bar{E}_1 &= H_{\bar{x}} \rhd \bar{E}_1 = \overline{\nabla_x E_1}, \\
\bar{E}_1 \rhd \bar{x} &= \xi_{\bar{E}_1}\bar{x} = \overline{E_1 x} & \bar{E}_1 \rhd \bar{E}_2 &= \xi_{\bar{E}_1}\bar{E}_2 = \overline{E_1E_2} - \overline{E_2E_1}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{X}_N^H$ 是一个后李代数，由上述方程可知，定理 1.1 中定义的$(\mathfrak{X}_M \oplus \mathfrak{Hol}_M, [\cdot,\cdot], \rhd)$将是一个同构的后李代数。□

ˆ 3.3. 微分算子与万有包络代数。考虑 $\mathfrak{X}_M = \mathfrak{X}_M \oplus \mathfrak{Hol}_M$，其后李代数结构如定理 1.1 所述。令 N 为整体丛，它由从给定标架平行移动所得的所有标架构成。我们想描述其万有包络代数，类似于第 2.2 节中对 $\mathfrak{X}_N = \Gamma(TN)$所做的描述。回顾该节中微分算子 D_w、 $w \in \mathfrak{X}_N$ 的定义。

回顾定理 1.1 的证明，等变子后李代数 $\mathfrak{x}_N^H$ 中的元素是形如 $H_{\bar{x}}$ 和 $\xi_{\bar{E}}$的元素之和，其中 x 和 E 分别是 TM 和 $\mathfrak{hol}$的截面。我们在 M上的张量上定义算子 D_x 和 D_E，使得对于任意张量 τ，有

$$\overline{D_x\tau} = D_{H_{\bar{x}}}\bar{\tau}, \qquad \overline{D_E\tau} = D_{\xi_{\bar{E}}}\bar{\tau}.$$

换言之，D_x 和 D_E 是作用于张量的算子，它们由满足关于张量积的乘法法则这一性质唯一确定；对于分别属于 TM和 T^*M的任意截面 z和 α，

$$D_x z = \nabla_x z, \quad D_x\alpha = \nabla_x\alpha, \quad D_E z = Ez, \quad D_E\alpha = E^*\alpha. \tag{3.3}$$

若 $\hat{}\,\mathfrak{T}_M = (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathfrak{x}_M^{\otimes j}) \otimes (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathfrak{hol}_M^{\otimes j})$，则我们通过将以下定义按线性延拓来定义 $\eta \in \hat{}\,\mathfrak{T}_M$的 D_η

$$D_{x_1\otimes\cdots\otimes x_i\otimes E_1\otimes\cdots\otimes E_j} = D_{E_j}\cdots D_{E_1}\nabla^i_{x_1,\ldots,x_i}$$

我们还引入记号 $\eta_1\cdot\eta_2$，使得

$$D_{\eta_1}\cdot D_{\eta_2} := D_{\eta_1}D_{\eta_2} - D_{D_{\eta_1}\eta_2} = D_{\eta_1\cdot\eta_2}$$

对于 $\eta_1,\eta_2 \in \hat{}\,\mathfrak{T}_M$。将此运算分别展开为 $\chi_1,\chi_2 \in \oplus_{j=0}^{\infty}\mathfrak{x}_M^{\otimes j}$和 $\epsilon_1,\epsilon_2 \in \oplus_{j=0}^{\infty}\mathfrak{hol}_M^{\otimes j}$, $E\in\mathfrak{hol}_M$，可得

$$\begin{aligned} \chi_1\cdot\chi_2 &= \chi_1\otimes\chi_2, & \epsilon_1\cdot\epsilon_2 &= \epsilon_1\otimes\epsilon_2,\\ \chi_1\cdot\epsilon_2 &= \chi_1\otimes\epsilon_2, & E\cdot\chi_2 &= \chi_2\otimes E - D_E\chi_2. \end{aligned}$$

$\hat{}$ 由此可知，我们可以将 $U(\mathfrak{x}_M)$与 $D_{\hat{\mathfrak{T}}_M}$等同。等价地，我们可以将$U(\hat{}\,\mathfrak{x}_M)$与 $(\oplus_{j=0}^{\infty}(\mathfrak{x}_M\oplus\mathfrak{hol}_M)^{\otimes j})/\sim$等同，其中 $\sim$是等价关系

$$\begin{aligned} x\otimes y - y\otimes x &\sim -T(x,y) + R(x,y),\\ E_1\otimes x - x\otimes E_1 &\sim -E_1x,\\ E_1\otimes E_2 - E_2\otimes E_1 &\sim E_2E_1 - E_1E_2. \end{aligned}$$

注 3.1。(3.3) 中的作用是我们在 (3.1) 中定义 ξ_A 时采用该约定的原因。

4. Free post-Lie algebra and numerical solutions

˜4.1. 自由 post-Lie 代数。我们再次考虑带有平坦联络 ∇ 的 N，它可以被视为一个局部李群。按照第 2.1 节中的描述，我们定义相应的后李代数 $(\mathfrak{x}_N,[\cdot,\cdot],\triangleright)$。考虑子集 $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{x}_N$，并令 $\mathfrak{A}(\mathcal{C})\subseteq\mathfrak{x}_N$ 为由该子集生成的后李代数。我们希望描述一个自由对象 PostLie($\mathcal{C}$)，使得无论 (N,∇) 的维数和几何如何，都存在一个后李代数同态 PostLie($\mathcal{C}$) $\to\mathfrak{A}(\mathcal{C})$。

我们按照 [17], [15] 或 [5]给出自由 post-Lie 代数的描述。由集合 $\mathcal{C}$ 生成的自由 post-Lie 代数 PostLie($\mathcal{C}$) 是满足以下泛性质的后李代数：对于任意后李代数 $\mathfrak{A}$ 以及任意映射f： $\mathcal{C}\to\mathfrak{A}$，存在唯一的 post-Lie 代数态射 ϕ: PostLie($\mathcal{C}$) $\to\mathfrak{A}$，使得对于任意 $c\in\mathcal{C}$, $\phi(c) = f(c)$。自由 post-Lie 代数可以用顶点由集合 $\mathcal{C}$ 着色的平面有根树以及左嫁接来描述。

令 Tree($\mathcal{C}$) 表示由 $\mathcal{C}$着色的平面有根树集合。当 $\mathcal{C}=\{\bullet\}$仅由一个元素组成时，按顶点数分次的 Tree($\mathcal{C}$) 的前几项为

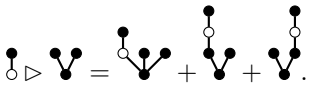
$$\mathrm{Tree}(\{\bullet\})=\Big\{\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \ldots\Big\}.$$

任意一棵树都可写作 $t(c;\ \tau_1,\ldots,\tau_r)$，其中 $c\in\mathcal{C}$ 是根， $\tau_i\in$Tree($\mathcal{C}$) 是按给定顺序与根相连的分支。设 $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ 为由 Tree($\mathcal{C}$) 在 $\mathbb{R}$ 上生成的向量空间。乘积 $\triangleright$: Tree($\mathcal{C}$) $\times$Tree($\mathcal{C}$) $\to\mathcal{T}(\mathcal{C})$ 定义如下:

$$\eta\triangleright c=t(c;\eta),$$

$\eta\triangleright t(c;\ \tau_1,\ldots,\tau_r)\ =t(c;\ \eta,\tau_1,\ldots,\tau_r)\ +t(c;\ \eta\triangleright\tau_1,\ldots,\tau_r)\ +\ldots+t(c;\ \tau_1,\ldots,\ \eta\triangleright\tau_r)$，其中 $c\in\mathcal{C}$ 和 $\eta,\tau_1,\ldots,\tau_r\in$ 属于 Tree($\mathcal{C}$)。例如，我们有

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\triangleright\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}=\bullet\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}+\bullet\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}+\bullet\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}.$$



令 Lie(Tree($\mathcal{C}$)) 表示由 [13] 中引入的、所有以集合 $\mathcal{C}$ 着色的平面有根树生成的自由李代数。特别地

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Tree}(\{\bullet\}))=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Big\{\bullet,\ \bullet\!\!-\!\!\bullet,\ \Big[\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\bullet\Big],\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\!\!-\!\!\bullet,\ \Big[\Big[\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\bullet\Big],\bullet\Big],\ \Big[\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\bullet\Big],\ \Big[\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix}\!\!-\!\!\bullet,\bullet\Big],\ \ldots\Big\}.$$

我们可以通过线性将乘积 $\triangleright$ 扩展到 Lie(Tree($\mathcal{C}$))，并且

$$u\triangleright[v,w]=[u\triangleright v,w]+[v,u\triangleright w],$$
$$[u,v]\triangleright w=u\triangleright(v\triangleright w)-(u\triangleright v)\triangleright w-v\triangleright(u\triangleright w)+(v\triangleright u)\triangleright w.$$

那么 {Lie(Tree($\mathcal{C}$)) $[\cdot,\cdot]$, $\triangleright$} 就是由 $\mathcal{C}$ 生成的自由后李代数。其证明可见于 [17] 或 [15]。

自由后李代数的包络代数由有序树的有序森林 $OF_{\mathcal{C}}$ 的张成空间给出。对于 $\mathcal{C}=\{\bullet\}$ 的情形，有

$$U(\mathrm{PostLie}(\{\bullet\}))=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{OF_{\{\bullet\}}\}:=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{I},\bullet,\bullet\!\!-\!\!\bullet,\bullet\bullet,\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet,\bullet\!\!<\!\!\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\end{smallmatrix},\bullet\bullet\!\!-\!\!\bullet,\bullet\bullet\!\!-\!\!\bullet,\bullet\bullet\bullet,\ldots\}.$$

后李乘积按照公式（2.1）扩展到包络代数。此外，包络代数还配备了一个拼接乘积，以及由下式定义的 Grossman-Larson 乘积

$$A*B=A_{(1)}(A_{(2)}\triangleright B),\qquad A,B\in OF_{\mathcal{C}}$$

其中我们使用 Sweedler记号。

4.2. 在常微分方程解中的应用。 M 上的数值积分的基本问题是近似向量场 $f\in\mathfrak{X}_M$ 的精确流。我们考虑以下初值问题,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t=f(\Phi_t),\qquad \Phi_0=\phi\in C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

即我们正在寻找 $\Phi_t=\phi\circ e^{tf}$。令 π: $N\subseteq FM\to M$为所有可由某个初始标架 u_0 经平行移动获得的标架所构成的流形。流

$\tilde{\Phi}_t = \Phi_t \circ \pi$ 则可以描述为与水平提升 $hf = H_{\bar{f}}$ 相关的常微分方程解，即，

$$\frac{d}{dt}\tilde{\Phi}_t = H_{\bar{f}}(\tilde{\Phi}_t), \qquad \tilde{\Phi}_0 = \phi \circ \pi. \tag{4.1}$$

带有平坦联络的流形 N 局部具有李群的结构，因此可以通过 Runge-Kutta-Munthe-Kaas 方法等对方程 (4.1) 的解进行近似。这些方法取决于李群上向量场的后李结构。定理 1.1 表明，只要修改代数框架，任何依赖后李结构的数值方法也可以直接用于 M。下文将对此作一些说明。我们按照 [5] 的思路介绍李–Butcher级数，并解释其对于计算流形上的流的意义。令 $\mathfrak{g}_{\mathcal{C}} = \mathrm{PostLie}(\mathcal{C})$ 表示由集合 $\mathcal{C}$ 生成的自由 post-Lie 代数。包络代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})$ 是一个向量空间，其分次按节点数确定。令 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})^*$ 为向量空间 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})$ 的分次完备化，它由该空间元素的所有无穷和构成，并赋予逆极限拓扑。我们引入一个配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})^* \times U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}}) \to \mathbb{R}$，

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \neq \omega' \\ 1 & \text{if } \omega = \omega', \end{cases} \qquad \omega, \omega' \in OF_{\mathcal{C}},$$

并通过线性性扩展。该配对使我们能够将 $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})^*$ 与分次对偶等同起来。

通用李–Butcher级数是一个元素 $\alpha \in U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})^*$，我们可以将其写成无穷和

$$\alpha = \sum_{\omega \in OF_{\mathcal{C}}} \langle \alpha, \omega \rangle \omega.$$

包络代数中的两个乘法产生了两个指数

$$\exp^*(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha * \alpha + \frac{1}{3!}\alpha * \alpha * \alpha + \dots,$$
$$\exp^{\cdot}(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha \cdot \alpha + \frac{1}{3!}\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + \dots.$$

注意到

$$\frac{d}{dt}\exp^*(t\alpha) = \exp^*(t\alpha) * \alpha = \exp^{\cdot}(t\alpha) \cdot (\exp^{\cdot}(t\alpha) \rhd \alpha),$$
$$\frac{d}{dt}\exp^{\cdot}(t\alpha) = \exp^{\cdot}(t\alpha) \cdot \alpha.$$

设（M, ∇）是一个连通仿射流形，其曲率和挠率ˆ平行；设（$\mathfrak{X}_M$, $[\cdot,\cdot]$, $\rhd$）是定理 1.1 中给出的相应后李代数。对于任意 $f \in \mathfrak{X}_M$，存在一个后李同态 $F_f \colon U(\mathfrak{g}_{\{\bullet\}}) \to U(\mathfrak{X}_M)$，由 $F_f(\,) = f$唯一确定。任意通用李–Butcher级数 $\alpha \in U(\mathfrak{g}_{\mathcal{C}})^*$ˆ连同一个选定的 $f \in \mathfrak{X}_M$，便可得到一个定义在 $\mathfrak{X}_M$ 上的李–Butcher级数

$$B_f(\alpha) = \sum_{\omega \in OF_{\{\bullet\}}} \langle \alpha, \omega \rangle F_f(\omega).$$

将 $f \rhd \phi = f(\phi)$ 定义为对 f 求导，其中 f 后接任意光滑函数 $\hat{}C^\infty(M, \mathbb{R})$，由此可得后李作用 $\rhd \colon U(\mathfrak{X}_M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$，其定义为

按照 (2.1) 扩展 $\triangleright$。相对于 Grossman-Larson 乘积的指数描述了向量场 $f \in \mathfrak{X}_M$ 的精确流，其意义是，对于任意函数 $\phi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

$$\exp^*(tf) \triangleright \phi = \phi \circ e^{tf}, \tag{4.2}$$

其中 $e^{tf}\colon\ M \to M$是 f的精确流，参见 [5, 命题 3.12]。为了描述 $\exp^{\cdot}(tf)$ 的作用，我们需要以下几点说明。

我们先考察 ∇ 为平坦联络这一特殊情形，正如 [5]中所讨论的。$\hat{}$ 在这种情况下，$\mathfrak{hol}_M = 0$，因此 $\mathfrak{X}_M = \mathfrak{X}_{M^o}$。若 f是一个向量场且 $p \in M$，我们注意到存在唯一的平行向量场 f^p，称为 p 处的冻结向量场，它满足

$$f^p|_p = f|_p.$$

我们注意到，对于冻结向量场 $(f^p)^{*j} = (f^p)^{\cdot j}$，这是由以下事实得出的:

$$f^p \cdot f^p = f^p * f^p - f^p \triangleright f^p = f^p * f^p.$$

因此，对于这些向量场，$\exp^*(f^p) = \exp^{\cdot}(f^p)$。对于一般向量场 f，若我们写作

$$\Phi_t(p_0, p) = (\phi \circ e^{tf^{p_0}})(p), \qquad p_0, p \in M,$$

那么 $(\exp_p^{\cdot}(tf) \triangleright \phi)(u) = \Phi_t(p,p)$。详情请参阅 [5]。

对于非平坦联络，我们无法以相同方式定义全局平行向量场。不过，我们注意到只需满足 $f \triangleright f = \nabla_f f = 0$ for $f^{*j} = f^{\cdot j}$即可。这使我们能够引入以下定义。

令 $\exp^\nabla$ 为 ∇ 的联络指数映射，其中 $\exp_p^\nabla = \exp^\nabla|_{T_pM}$。对于 $U_{\hat{p}}$ 的一个邻域$\hat{}p$，使得 $\exp_{\hat{p}}^\nabla$可逆，且 $\exp^\nabla{}_{,\ -1\ \hat{p}}(U_{\hat{p}})$为凸集，定义$P_{\hat{p},\ p}\colon\ T_{\hat{p}}M \to T_pM$ 为沿着U中从 p 到$\hat{}p$ 的唯一测地线进行平行移动。

定义 4.1. 设 $f \in \mathfrak{X}_M$ 是 M 上的任意向量场。对于 $\hat{}p \in M$，将 f 在 $\hat{}p$ 处的$^{\cdot}$冻结向量场 f^p 定义为 $U_{\hat{p}}$ 上的向量场，使得

$$f^{\hat{p}}|_p = P_{\hat{p},p} f|_{\hat{p}}.$$

于是我们得到以下结果。

命题 4.2. 若 $f \in \mathfrak{X}_M$ 和 $\phi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$，则

$$(\exp^{\cdot}(tf) \triangleright \phi)(p) = \phi\left(\exp_p^\nabla(tf^{\hat{p}}|_p)\right)|_{\hat{p}=p}, \qquad p \in U_{\hat{p}}.$$

证明。设 N 是一个可由平行传$\tilde{}$输从 u^o 到达的标架丛。设 ∇是 N上的平坦联络。记 $\pi\colon\ N \to M$。我们通过$\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$将 ϕ提升到 N。由于

$$\tilde{\nabla}^k_{H_{\bar{f}},\dots,H_{\bar{f}}} \tilde{\phi} = (\nabla^k_{f,\dots,f}\phi) \circ \pi,$$

我们有 $\exp^{\cdot}(tH_{\bar{f}}) \triangleright \tilde{\phi} = (\exp^{\cdot}(tf) \triangleright \phi) \circ \pi$。由于 $\tilde{\nabla}$是平坦的，因此有

$$(\exp^{\cdot}(tH_{\bar{f}}) \triangleright \tilde{\phi})(u) = (\tilde{\phi} \circ e^{tH_{\bar{f}(\hat{u})}})(u)|_{\hat{u}=u}$$

注意，若 $u(t) = e^{tH_{\bar{f}(\hat{u})}}(u)$，则根据定义，$u(t)$ 由沿曲线对 $u \in N_p$ 进行平行移动来定义

$$\gamma(t) = \exp_p^\nabla(tu\bar{f}(\hat{u})) = \exp_p^\nabla(tu\hat{u}^{-1}f|_{\hat{p}}).$$

特别地，这对 $u = P_{\hat{p},\ p}\hat{}u$ 也成立，它也属于 N。将这样的标架代入公式，可得

$$\gamma(t) = \exp_p^{\nabla}(tP_{\hat{p},p}f|_{\hat{p}}) = \exp^{\nabla}(tf^{\hat{p}}|_p).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\phi(\exp^{\nabla}(tf^{\hat{p}}|_p))|_{\hat{p}=p} &= (\tilde{\phi}\circ e^{tH_{\bar{f}(\hat{u})}})(P_{\hat{p},p}\hat{u})|_{\hat{p}=p}\\ &= (\exp^{\cdot}(tH_{\bar{f}})\triangleright\tilde{\phi})(P_{\hat{p},p}\hat{u}) = (\exp^{\cdot}(tf)\triangleright\phi)(p)\end{aligned}$$

该结果随即得到。 □

例 4.3。我们考虑带有子空间度量的球面 $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$。我们将 T_pM 视为与 $p \in S^m$ 正交的 $\mathbb{R}^{m+1}$ 子空间。令 ∇ 为具有平行曲率且挠率为零的 Levi-Civita 联络。指数映射及其逆映射为

$$\exp_{\hat{p}}^{\nabla}(v) = \cos(|v|)\hat{p} + \sin(|v|)\frac{v}{|v|},$$

$$\exp_{\hat{p}}^{\nabla,-1}(p) = \cos^{-1}(\langle\hat{p},p\rangle)\frac{p-\langle\hat{p},p\rangle\hat{p}}{|p-\langle\hat{p},p\rangle\hat{p}|}.$$

我们注意到，沿测地线的平行移动满足 $w \in T_{\hat{p}}S^m$、$|w| = 1$,

$$\begin{aligned}P_{\hat{p},\exp_{\hat{p}}^{\nabla}(tw)}(v) &= v - \langle v,w\rangle w + \langle v,w\rangle p_2(t),\\ p_2(t) &= -\sin(t)\hat{p} + \cos(t)w.\end{aligned}$$

结合对数映射的公式，可得

$$\begin{aligned}P_{\hat{p},p}(v) &= v + \langle v,w\rangle\left(-\sqrt{1-\langle\hat{p},p\rangle^2}\hat{p} + (\langle\hat{p},p\rangle - 1)w\right),\\ w &= \frac{p-\langle\hat{p},p\rangle\hat{p}}{|p-\langle\hat{p},p\rangle\hat{p}|}.\end{aligned}$$

定义在开集 $U_{\hat{p}} = \{p \in S^m \text{ 上: } \langle p,p\rangle > 0\}$。关于球面上的几何积分，更多内容请参见 [14]。

注 4.4. 设 u^o 为选定的标架， N 为通过平行移动该标架得到的所有标架。假设向量场 H_a 和 ξ_A 是完备的，因此我们可以赋予 N 李群结构，其中 u^o 为单位元。若 $\exp_N : T_{u^o}N \to N$ 是相应的群指数映射，则

$$P_{p,\exp_p^{\nabla}w} = e^{H_{u^{-1}w}}(u)u^{-1} = (u\cdot\exp_N(H_{u^{-1}w}|_{u^o}))u^{-1}, \qquad u \in N_p.$$

References

[1] M. J. H. Al-Kaabi、K. Ebrahimi-Fard、D. Manchon 和 H. Munthe-Kaas。联络的代数方面：从挠率、曲率和后李代数到 Gavrilov 双指数与特殊多项式。 *arXiv preprint arXiv:2205.04381*, 2022 年。即将在《非交换几何杂志》上发表。[2] W. Ambrose 和 I. M. Singer。关于整体的一个定理。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，75 443，1953 428：–。[3] D. Calaque、K. Ebrahimi-Fard 和 D. Manchon。两种相互作用的树霍普夫代数：一种用于 B 级数复合与代入的霍普夫代数方法。 *Advances in AppliedMathematics*，47(2):282–308，2011 年。

[4] C. Curry、K. Ebrahimi-Fard 和 H. Munthe-Kaas。什么是后李代数，以及它为何在几何积分中有用。载于 F. A. Radu、K. Kumar、I. Berre、J. M. Nordbotten 和 I. S. Pop（编），
Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2017，第429–437页，尚，2019年。施普林格国际出版公司。[5] K. Ebrahimi-Fard、A. Lundervold 和 H. Z. Munthe-Kaas。关于后李代数的李包络代数。 *J. Lie Theory*，25(4):1139–1165，2015年。[6] E. Grong。次黎曼几何中的曲率与等价问题。
Arch. Math. , ( ): – 。
(Brno) 58 5 295 327, 2022
[7] E. Grong 和 S. Sommer。流形上各向异性布朗运动的最可能路径。
Foundations of Computational Mathematics，第1–33页，2022年。[8] E. P. Hsu。
Stochastic analysis on manifolds， *Graduate Studies in Mathematics*第38卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[9] A. Iserles、H. Z. Munthe-Kaas、S. P. Nørsett 和 A. Zanna。李群方法。 *Acta Numerica 2000* 9 *Acta Numer.* 215 365 载于 ，，第卷，
页码–。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[10] H. Munthe-Kaas。龙格-库塔方法的李–Butcher理论。 *BIT*，35(4):572–587，1995年。[11] H. Munthe-Kaas。李群上的龙格-库塔方法。 *BIT*，38(1):92–111，1998年。
[12] H. Munthe-Kaas，流形上的高阶龙格-库塔方法，载于 *Proceedings of the NSF/CBMS Regional Conference on Numerical Analysis of Hamiltonian Differential Equations (Golden, CO, 1997)* 29, 115 127, 1999 ，卷页码–。
[13] H. Munthe-Kaas 和 S. Krogstad。李-Butcher理论中的枚举问题。 *Future Generation Computer Systems* 19 7 1197 1205, 2003 ，( ): – 。
线性代数与控制中的结构动力系统理论与计算方面精选论文。[14] H. Z. Munthe-Kaas。对称空间上的几何积分。 *To appear*，2023年。[15] H. Z. Munthe-Kaas 和 A. Lundervold。关于后李代数、李–Butcher级数与移动标架。 *Found. Comput. Math.*，13(4):583–613，2013年。[16] H. Z. Munthe-Kaas 和 W. M. Wright。关于李群积分器的霍普夫代数结构。 *Found. Comput. Math.*，8(2):227–257，2008年。[17] B. Vallette。广义分拆偏序集的同调。 *J. Pure Appl. Algebra*，208 725，2007 2 699( ): – 。

University of Bergen, Department of Mathematics, P.O. Box 7803, 5020 Bergen, Norway*Email address*: erlend.grong@uib.no*Email address*: Hans.Munthe-Kaas@uib.no
Email address: Jonatan.Stava@uib.no