arXiv:2305.02689v1 [math.NT] 4 May 2023

具有平移素数分母的单位分数

THOMAS F. BLOOM

Abstract. 我们证明，任意正有理数都可以表示为一组分母属于 $\{p-1:\ p$ 素数$\}$的互异单位分数之和。对于任意 $h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，只要满足必要的同余条件，同样的结论也适用于集合 $\{p-h:\ p$ 素数$\}$。我们还证明，只要满足必要的同余条件，对于任何相对密度为正的素数子集，这一结论也成立。

将有理数分解为互异单位分数之和（通常称为“埃及分数”）是数论中最古老的课题之一（关于埃及分数的更多背景及许多相关问题，参见 [2] ）。显然，这样的分解总是可行的，例如可以使用贪心算法。本文探讨一种自然的变体，即对这类分解中的分母施加限制。

问题 1。对于哪些 $A \subseteq \mathbb{N}$，每个正有理数都可以写成某个有限 $B \subset A$的形式 $\sum_{n\in B}\frac{1}{n}$？

一个显而易见的必要条件是，该集合包含每个素数的倍数；例如，所有奇数构成的集合就不具备这一性质（它无法表示$\frac{1}{2}$）。条件 $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}=\infty$ 显然也是必要的，但并不充分——事实上，很容易看出，当 A 是任意有限素数集时，方程 $1=\sum_{p\in A}\frac{1}{p}$ 无解，尽管 $\sum_{p\leq N}\frac{1}{p}\sim \log\log N$。

对于没有这类显而易见障碍的集合 A，可以合理推测，分母限定在 A 中的埃及分数分解总是存在。Graham [6], 关于这一主题的一篇早期奠基性论文证明了一项一般结果，例如，当 A 是所有素数与平方数组成的集合时，这种分解总是存在。受 Sun [12, 猜想 4.1], 的启发，Eppstein [4] 提出了一种不同的初等方法，由此可知，当 A 是“实用数”（满足以下条件的数 n：所有 $m \leq n$ 都可以写成 n 的不重复因子之和）组成的集合时，这种分解总是存在。

即使存在平凡的障碍，也可以提出问题 1 的一种变体。例如，Graham [6] 已证明，每个有理数 x 都可以写成分母为平方数的互不相同的单位分数之和，但须满足显而易见的必要条件，即 $x \in [0, \frac{\pi^2}{6}-1) \cup [1, \frac{\pi^2}{6})$；并且每个分母为无平方因子的有理数 x 都可以写成分母为无平方因子的互不相同的单位分数之和。

一个在数论上值得关注的自然候选对象是平移素数集合 $\{p-1:\ p$ 素数$\}$。对于这类对象，显然不存在任何会阻碍有理分解的因素，而 [6] 和[4] 的方法也不适用。Sun[12, 猜想 4.1] 猜测，这种受限的埃及分数分解总是存在（另见 [13, 猜想 8.17]以及 [11] 中的一些数值数据）。本文采用 [1] 的方法证明这一猜想：任意正

有理数 $x>0$ 都有方程的解（事实上有无穷多个解）：

$$x=\frac{1}{p_1-1}+\cdots+\frac{1}{p_k-1}$$

其中 $p_1<\cdots<p_k$ 是互不相同的素数。我们还证明了一个类似结果：对于任意（固定的） $h\neq 0$，分母为 p_i-h 时，该结果同样成立；不过对于 $|h|>1$，存在一些显然的同余障碍——例如，由于 $\{p+2:p\text{ prime}\}$ 的任何子集的最小公倍数都不能被 8 整除，因此分数 $1\,8$ 无法表示为形如 $\frac{1}{p+2}$ 的互异单位分数之和。

我们从以下更一般的结果推出这一存在性结果：该结果表明，任意由可被 q 整除的素数组成、且具有“正上相对对数密度”的平移素数集，都包含 $\frac{1}{q}$ 的一种分解。（回想一下，$\sum_{p\leq N}\frac{1}{p}\sim\log\log N$，因此自然可以将 $\sum_{\substack{p\leq N\\ p\in A}}\frac{1}{p}$ 除以 $\log\log N$，作为衡量其大小的指标 A.）

定理1。设 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 和 $q\geq 1$ 满足 $(|h|,q)=1$。若 A 是一个由与 h 模 q 同余的素数组成的集合，且

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\sum_{p\in A\cap[1,N]}\frac{1}{p}}{\log\log N}>0$$

则存在一个有限的 $S\subset A$，使得

$$\frac{1}{q}=\sum_{p\in S}\frac{1}{p-h}.$$

通过简单应用分部求和，可得到如下版本：将（相对）上对数密度替换为（相对）下对数密度。

推论1。设 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 和 $q\geq 1$ 满足 $(|h|,q)=1$。若 A 是一个由与 h 模 q 同余的素数组成的集合，且其相对下密度为正，即

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{|A\cap[1,N]|}{N/\log N}>0,$$

则存在一个有限的 $S\subset A$，使得

$$\frac{1}{q}=\sum_{p\in S}\frac{1}{p-h}.$$

我们指出，（与无约束整数集的情形不同，见 [1,定理 2]）将推论1加强为把 $\liminf_{N\to\infty}$ 替换为 $\limsup_{N\to\infty}$ 的版本并不成立——例如，若 $A[N]$ 是 $[N/2,N]$ 中的素数集合，则 $\sum_{p\in A[N]}\frac{1}{p}\ll {}^{1}_{\text{对数 }N}$；因此，若 $A=\cup_k A[N_k]$，其中 $N_k=2^{k^C}$ 对某个足够大的绝对常数 $C>0$ 成立，则 $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}<1$，所以当然无法找到一个有限的 $S\subset A$ 使得 $\sum_{n\in S}\frac{1}{n}=1$，然而

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{|A\cap[1,N]|}{N/\log N}\geq 1/2.$$

现在我们说明定理1如何推出核心结果：任何正有理数（满足必要的同余条件）都可以写成具有平移素数分母的不同单位分数之和。

推论2。设 $h \in \mathbb{Z}$ 和 $x = r/q \in \mathbb{Q}_{>0}$ 满足 $(|h|, q) = 1$。存在不同的素数 $p_1,...,p_k$，使得

$$x = \frac{1}{p_1 - h} + \cdots + \frac{1}{p_k - h}.$$

证明。根据狄利克雷定理（例如参见 [10, 推论4.12]），若 A 是与 h 模 q同余的素数集合，则

$$\sum_{n \in A \cap [1,N]} \frac{1}{n} \geq (\tfrac{1}{\phi(q)} + o(1)) \log\log N.$$

显然，对于任意有限集合 B， $A \backslash B$也必然成立。特别地，通过 r重复应用定理1（先对 A，再对 $A \backslash S_1$，依此类推），我们可以找到r 两两不相交的有限集合 S_1、.....、 $S_r \subset A$，使得

$$\frac{1}{q} = \sum_{p \in S_i} \frac{1}{p - h}$$

对于 $1 \leq i \leq r$。由此可得

$$x = \frac{r}{q} = \sum_{p \in \bigcup S_i} \frac{1}{p - h}$$

如所要求。 □

我们通过应用作者此前的工作 [1] （而该工作又是对Croot [3]某个论证的加强形式）来证明定理1。粗略地说， [1] 的主要结果表明，只要 A 满足以下条件，我们就能用 $n_i \in A$ 解出 $1 = \sum \frac{1}{n_i}$

(1) $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \to \infty$，(2) 每个 $n \in A$ 都是“易分解的”（或“光滑的”），也就是说，如果素数幂 q 整除 n，那么对于某个 $0 < \delta$， $q \leq n^{1-\delta(n)}$ (n) $= o(1)$，(3) 每个 $n \in A$ 都有“小因子”，并且(4) 每个 $n \in A$ 都有 $\approx \log\log n$ 个不同的素因子。

因此，要证明定理1，只需证明集合 $\{\frac{p-h}{q} : p \in A\}$ 具有这些性质。幸运的是，关于平移素数的算术性质已有大量研究，因此运用解析数论中的经典技巧，我们能够从原集合 A 中找出一个满足全部四项性质的大子集。

对于解析数论专家，我们补充说明，在确立有关平移素数的必要数论事实时，我们采用了最简单的路径，放弃了许多可能的更复杂改进。本文的主要观察是， [1] 方法所需的输入条件足够温和，可以利用现有技术（的一种粗略形式）证明其适用于平移素数。

为尽量减少技术细节，我们只证明了定理1的定性形式。原则上，沿用相同的方法，并按照与 [1, 定理 3], 类似的思路，可以证明一个（非常弱的）定量版本，但这会使论述复杂得多。

最后， [1] 的方法和主要结果现已与 Bhavik Mehta 合作，使用 Lean 证明助手进行了形式化验证。[1] 本工作尚未扩展这项形式化工作，但由于定理1的证明使用了

[1]形式化证明见 `https://github.com/b-mehta/unit-fractions`。

[1] 的主要结果作为核心要素（并结合经典数论），因此可以视为“部分形式化验证”。

在第1节中，我们假设若干数论引理成立，并证明定理1。在第2节中，我们证明这些引理。

致谢。作者获得英国皇家学会大学研究奖学金的资助。我们感谢 Greg Martin 与我们就平移素数的光滑值进行了一次有益的交谈，并对本文早期版本提出了意见。

1. Proof of Theorem 1

我们的主要工具是以下命题的一个轻微变体： [1, Proposition 1] （与下文的命题相同，只是其中 c 的指数被替换为 $1/\log\log N$）。

命题1。设 $c\in(0,1/4)$ 和 N 充分大（仅依赖于 c）。假设 $A\subset[N^{1-c},N]$ 和 $1\leq y\leq z\leq(\log N)^{1/500}$ 满足

(1) $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}\geq 2/y+(\log N)^{-1/200}$，（2）每个 $n\in A$ 都可被某个 d_1 和 d_2 整除，其中 $y\leq d_1$ 和 $4d_1\leq d_2\leq z$，（3）每个整除某个 $n\in A$ 的素数幂 q 都满足 $q\leq N^{1-4c}$，且（4）每个 $n\in A$ 都满足

$$\tfrac{99}{100}\log\log N\leq\omega(n)\leq 2\log\log N.$$

存在某个 $S\subseteq A$，使得对于某个 $d\in[y,z]$，有 $\sum_{n\in S}\frac{1}{n}=1/d$。

证明。该证明与 [1, 命题2 1], 的证明相同，只是在证明的最后部分，我们选择 $M=N^{1-c}$。注意，该证明所用的结果，即 [1, 命题2、命题3和引理 7], ，对任意 $M\in(N^{3/4},N)$ 都成立。剩下只需检验“光滑”假设；为此，我们要求：若 $n\in A$ 且 q 是一个满足 $q\mid n$ 的素数幂，那么对于某个较小的绝对常数 $c>0$,

$$q\leq c\min\left(\frac{M}{z},\frac{M}{(\log N)^{1/100}},\frac{M^3}{N^{2-4/\log\log N}(\log N)^{2+1/50}}\right).$$

当 N 足够大（仅取决于 c）时，右端为 $>N^{1-4c}$，因此假设 (3) 已足够。□

将其改写成稍有不同的形式会更方便。

命题2。设 δ、$\epsilon>0$，并假设 y 足够大，取决于 δ 和 ϵ，且 $y\leq w\leq z$。若 N 足够大（取决于 δ、ϵ、y、w、z），并且 $A\subset[2,N]$ 满足对所有 $n\in A$

(1) 若素数幂 q 可整除 n，则 $q\leq n^{1-\epsilon}$; (2) $|\omega(n)-\log\log n|\leq\log\log n/1000$; (3) n 可被某个 $d_1\in[y,w)$ 整除; (4) n 可被某个 $d_2\in[4w,z)$ 整除; (5) $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}\geq\delta\log\log N$,

则存在 $S\subseteq A$，使得对于某个 $d\leq z$，有 $\sum_{n\in S}\frac{1}{n}=1/d$。

证明。对于 $i\geq 0$ 令 $N_i=N^{(1-\epsilon/4)^i}$，并令 $A_i=A\cap(N_{i+1},N_i]$。注意，对于 $i\geq C\log\log N$，有 $N_i<2$，其中 C 是仅依赖于

ϵ。由于 $\sum_{n\le \log\log N}\frac{1}{n}\ll \log\log\log N$，根据鸽巢原理，必定存在某个 i，使得对于 $A'=A_i$ 和 $N'=N_i\gg \log\log N$，我们有

$$\sum_{n\in A'}\frac{1}{n}\gg_{\delta,\epsilon} 1$$

且 $A'\subset((N')^{1-\epsilon/4},N']$。只需验证 A' 满足命题1的假设，其中 $c=\epsilon/4$。我们已经验证了第一个假设（假设 y 和 N 足够大；注意，由于 $N'\gg\log\log N$，这确保了 N' 也足够大）。条件 (3) 和 (4) 确保了命题1的第二个假设。

对于第三个假设，注意根据条件 (1)，若 $n\in A'$ 可被素数幂 q 整除，则

$$q\le n^{1-\epsilon}\le (N')^{1-\epsilon}$$

这正是所需的。最后，第四个假设由条件 (2) 得出，并注意到对于所有 $n\in[(N')^{1-\epsilon/4},N']$，我们都有

$$\log\log n=\log\log N'+O_\epsilon(1),$$

并且 O_ϵ(1) 项为 $\le \log\log N'/500$，例如，只要我们取足够大的 N 即可。

□

为证明定理1，我们希望将命题2应用于 $B=\{\frac{p-h}{q}:\ p\in A\}$。为验证其假设，我们需要以下数论引理。我们未能在文献中找到完全相同的表述，因此在下一节中附上了证明；不过，这些证明都很初等，所涉及的内容也都是成熟的结果。

引理 1. 对任意 $\epsilon>0$ 和 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$，满足 $n=p-h$ 可被素数幂 $q>n^{1-\epsilon}$ 整除的素数 p 的相对密度为 $O_h(\epsilon)$。

引理2. 对任意 $\delta>0$ 和 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$，满足 $n=p-h$ 具有

$$|\omega(n)-\log\log(n)|\ge\delta\log\log n$$

为 0。

引理3. 对任意 $h\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$，若 $4\le y<z$，满足 $n=p-h$ 不被任何素数 $q\in[y,z]$ 整除的素数 p 的相对密度为 $O_h(\log y/\log z)$。

现在我们将说明，这些引理与命题2结合起来，如何推出定理1。

定理1的证明。根据假设，存在某个 $\delta>0$ 和无穷多个 N，使得

$$\sum_{p\in A\cap[1,N]}\frac{1}{p}\ge 4\delta\log\log N.$$

令 $B=\{\frac{p-h}{q}:\ p\in A\}\subset\mathbb{N}$，因此必定存在无穷多个 N，使得

$$\sum_{n\in B\cap[1,N]}\frac{1}{n}\ge 3\delta\log\log N.$$

令 $\epsilon=c\delta$，其中 $c>0$ 是稍后确定的某个较小的绝对常数。令 y 相对于 δ 足够大（以便命题2可以适用），并令 $w\le z$ 稍后确定；再令 $B'\subseteq B$ 为满足以下条件的那些 $n\in B$ 的集合：

(1) 若素数幂 r 可整除 n，则 $r \leq n^{1-\epsilon}$; (2) $|\omega(n) - \log\log n| \leq \log\log n/1000$; (3) n 可被某个素数 $p_1 \in [y, w)$ 整除；且 (4) n 可被某个素数 $p_2 \in [4w, z)$ 整除。

若 X_1 是由某个素数幂 $r > m^{1-2\epsilon}$ 整除的 $m = p - h$ 的集合，则由引理 1 可得

$$|X_1 \cap [1, N]| \ll \epsilon \frac{N}{\log N},$$

因此，由于对所有充分大的素数 p，都有 $(p-h)^{1-2\epsilon} \leq (\frac{p-h}{q})^{1-\epsilon}$，不满足第一个条件的 $n \in B$ 所成的集合 B_1 满足

$$|B_1 \cap [1, N]| \ll \epsilon \frac{N}{\log N},$$

由此通过分部求和可得

$$\sum_{n \in B_1 \cap [1,N]} \frac{1}{n} \ll \epsilon \log\log N.$$

通过类似的论证（注意到 q 是某个固定常数，因此 $\omega(\frac{p-h}{q}) = \omega(p-h) + O(1)$, 且 $\log\log(\frac{p-h}{q}) = \log\log(p-h) + O(1)$），引理2表明，不满足第二个条件的那些 $n \in B \cap [1, N]$ 的倒数之和为 $o(\log\log N)$。类似地，由引理3可选取 w 和 z（仅取决于 δ），使得对所有充分大的 N，不满足条件 (3) 或 (4) 的那些 $n \in B \cap [1, N]$ 的倒数之和为 $\leq \delta \log\log N$。因此，存在无穷多个N，使得（只要 ϵ 是 δ 的一个足够小的倍数）

$$\sum_{n \in B' \cap [1,N]} \frac{1}{n} \geq 2\delta \log\log N.$$

固定这样的 N，并令 $B'' = B' \cap [1, N]$。现在，命题2的所有条件对 B''均已满足，因此存在某个 $S_1 \subseteq B''$ 和 $d_1 \leq z$，使得$\sum_{n \in S_1} \frac{1}{n} = \frac{1}{d_1}$。

现在我们再次对 $B'' \backslash S_1$应用命题2，并重复这一过程 $k = \lceil z \rceil^2$次，得到一些互不相交的 S_1、……、 S_k 以及与之对应的 d_1、……、 $d_k \leq z$，其中$\sum_{n \in S_i} \frac{1}{n} = \frac{1}{d_i}$ 对 $1 \leq i \leq k$成立。注意，对于每个 $B'' \setminus \cup_{i \leq j} S_i$，命题2的条件对 $j \leq k$仍然成立，因为

$$\sum_{n \in \cup_{i \leq j} S_i} \frac{1}{n} \leq k \ll z^2 < \delta \log\log N,$$

假设 N 足够大，这是因为 z 仅取决于 δ。

根据鸽巢原理，必定存在某个 $d \leq z$ 以及 i_1、……、 i_d，使得$d_{i_j} = d$ 对 $1 \leq j \leq d$ 成立，因此 $S = \cup_{1 \leq j \leq d} S_{i_j}$ 满足

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = d \cdot \frac{1}{d} = 1$$

如所需。 □

2. Number theoretic ingredients

还需证明引理1、2和3，我们将依次进行。

2.1. 平移素数的光滑性。关于仅含较小素因子的平移素数，已有大量研究。研究通常侧重于存在性结果，即寻找尽可能小的 $\delta > 0$，使得存在无穷多个不含素因子 $> p^{\delta}$ 的平移素数 $p-1$。关于这一问题的最新进展以及早期研究的参考文献，请参阅 [9]。我们的研究重点略有不同：我们可以接受一个非常高的光滑性阈值，但需要证明几乎所有平移素数都具有这种光滑性。对于我们感兴趣的光滑性范围，即使是 Erd˝os [5] 最初使用的初等方法也已足够。

引理 1 的证明。这只是对 [5, 引理 4] 的轻微推广。只需证明，对于所有 $\epsilon > 0$ 且足够大的 N，满足 $p-h$ 可被某个素数幂 q 整除且 $q > N^{1-\epsilon}$ 的 $p \le N$ 的数量为

$$\ll_h \epsilon \frac{N}{\log N}.$$

我们首先注意到，显然对于任意 q，满足 $p-h$ 可被 q 整除的 $p \le N$ 的数量必定为 $O_h(N/q)$，因此，可被某个非素数素数幂 $q > N^{1-\epsilon}$ 整除的 $p-h$ 的数量为

$$\ll_h N \sum_{k \ge 2} \sum_{N^{1-\epsilon} \le m^k \le N} \frac{1}{m^k} \ll N^{\epsilon} \ll \epsilon \frac{N}{\log N}$$

对于所有足够大的 N。剩下要估计满足 $p-h$ 可被某个素数 $q > N^{1-\epsilon}$ 整除的 $p \le N$ 的数量。若 N 相对于 h 足够大，则这类 $p-h$ 可唯一地写成 $p-h = qa$，其中 $a \le 2N^{\epsilon}$，且 $q > N^{1-\epsilon}$ 为素数。简单应用塞尔伯格筛（例如 [8, 定理 3.12]）可得，对于任意固定的 $a \ge 1$ 和 $h \ne 0$，满足 $aq+h$ 也是素数的素数 $q \le x$ 的数量为

$$\ll_h \frac{a}{\phi(a)} \frac{x}{(\log x)^2}.$$

由于 $q \le N/a + O_h(1)$，满足 $p-h = qa$ 的 $p \le N$ 的数量为

$$\ll \frac{1}{\phi(a)} \frac{N}{(\log N)^2}.$$

对所有 $a \le 2N^{\epsilon}$ 求和，得到总数

$$\ll_h \frac{N}{(\log N)^2} \sum_{a \le 2N^{\epsilon}} \frac{1}{\phi(a)} \ll \epsilon \frac{N}{\log N}$$

由 $\sum_{a \le M} \frac{1}{\phi(a)} \ll \log M$ 这一事实可知，结论成立。 □

2.2. 移位素数的素因子数。我们需要知道，对于几乎所有 $n \in \{p-h$，都有$\omega(n) \sim \log\log n : p$ 素数$\}$。这实际上是一般整数 n的 $\omega(n)$的典型表现，而我们预期在将 n 限制为具有随机特征的平移素数序列时，也会有相同的表现。事实上，正如 $\omega(n)$本身一样，$\omega(p-h)$也满足 Erd˝os-Kac 定理，即 $\omega(p-h)$服从正态分布，其均值为 $\log\log(p-h)$，标准差为$\sqrt{\log\log(p-h)}$。Halberstam [7, 证明了]这一点，不过在此处的应用中，一个简单的方差界就足够了。

引理2的证明。只需证明：对于所有 $\delta > 0$ 和充分大的 N，若 A 是满足 $|\omega(p-h) - \log\log(p-h)| > \delta \log\log(p-h)$的 $p \leq N$集合，则

$$|A| \ll \frac{N}{(\log N)(\log\log N)}.$$

设 $A_1 = A \cap [1, N^{1/2}]$ 和 $A_2 = A \backslash A_1$。我们可以平凡地估计 $|A_1| \ll N^{1/2}$，而对于 $p \in A_2$，有 $\log\log(p-h) = \log\log N + O(1)$，因此当 N 足够大时，若 $p \in A_2$，则有

$$|\omega(p-h) - \log\log N| > \tfrac{\delta}{2}\log\log N.$$

然而，根据 [7, 定理 3]，，我们有

$$\sum_{p \leq N} |\omega(p-h) - \log\log N|^2 \ll \pi(N)\log\log N,$$

从而

$$|A_2|\,(\log\log N)^2 \ll_\delta \pi(N)\log\log N,$$

因此，利用切比雪夫估计 $\pi(N) \ll N/\log N$，结论即得。 □

2.3. 具有小因子的平移素数。对于引理3，我们需要证明，在去除所有素数 $p \in [y, z]$ 的倍数后，剩余的平移素数很少；这是一个经典的上界筛问题。由于我们所需的信息非常弱，即使是最简单的筛法也足够了：以下结论已作为 [8,定理1.1] 得到证明。

引理4（埃拉托斯特尼－勒让德筛法）。设 A 是一个有限整数集，$\mathcal{P}$是一个有限素数集。设 $z \geq 2$和 $P(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p$。假设 $f(d)$是一个$p<z$乘性函数，且 $X > 1$ 满足：对所有 $d \mid P(z)$，我们有

$$|A_d| = f(d)X + R_d.$$

Then

$$\#\{n \in A : (n, P(z)) = 1\} \ll X \prod_{\substack{p \in P \\ p < z}} (1 - f(p)) + \sum_{d \mid P(z)} |R_d|\,.$$

对于所需的筛法输入，我们将使用以下关于等差数列中素数分布的经典结果（例如，证明见[10, 推论11.21]）。回忆一下，$\pi(N; d, h)$表示满足 $p \equiv h \pmod d$的素数 $p \leq N$的个数。

定理2（西格尔－沃尔菲茨）。存在一个常数 $c > 0$，使得对于所有 $h \in \mathbb{Z}$ 以及 $1 \leq d \leq \log x$，若 $(|h|, d) = 1$，则有

$$\pi(N; d, h) = \frac{\mathrm{li}(N)}{\phi(d)} + O(N\exp(-c\sqrt{\log N})).$$

引理3的证明。固定 $4 \leq y \leq z$，令 $P = \prod_{y \leq q \leq z} q$（其中 q 限定为 $q \nmid h$ 素数）。只需证明，对于所有足够大的 N，

$$\#\{p - h \leq N : (p-h, P) = 1\} \ll_h \frac{\log y}{\log z}\mathrm{li}(N).$$

我们将应用引理 4，其中 $A = \{p - h : p \leq N\}$，

$$\mathcal{P} = \{p \in [y, z] : p \nmid h\},$$

$f(d) = 1/\phi(d)$，以及 $X = \mathrm{li}(N)$，注意到根据定理2，每当 $(d,h) = 1 \text{and} d \le \log N$

$$|A_d| = \pi(N;d,h) = \frac{\mathrm{li}(N)}{\phi(q)} + O(x\exp(-c\sqrt{\log x})).$$

由此可得。

$$\#\{p-h \le N : (p-h,P) = 1\} \ll \mathrm{li}(N) \prod_{\substack{y\le q\le z \\ q\nmid h}} \left(1 - \frac{1}{q-1}\right) + 2^z N\exp(-c\sqrt{\log N}).$$

只要我们选择足够大的 N，使得 $z \ll \sqrt{\log\log N}$，结论便可得出，例如，再利用梅滕斯估计即可。

$$\prod_{p\le w}(1-1/p) \asymp \frac{1}{\log w}.$$

□

References

[1] T. F. Bloom, *On a density conjecture about unit fractions*，已提交。[2] T. F. Bloom 和 C. Elsholtz, *Egyptian fractions* NAW 5/23 第 4 期，2022 年 12 月。[3] E. S. Croot, *On a coloring conjecture about unit fractions*《数学年刊》（第二辑）157（2003），545–556。[4] D. Eppstein, *Egyptian fractions with denominators from sequences closed under doubling*《整数序列杂志》24（2021），第 8 期，文章编号 21.8.8。[5] P. Erd ″ *On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's ϕ-function* os, 《牛津版数学季刊》：–。[6] R. L. Graham, *On finite sums of unit fractions*《伦敦数学会会刊》（第三辑）14（1964），193–207。[7] H. Halberstam, *On the distribution of additive number theoretic functions (III)*, 《伦敦数学会杂志》31（1956），15–27。[8] H. Halberstam 和 H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 纽约（1974）。[9] J. D. Lichtman, *Primes in arithmetic progressions to large moduli and shifted primes without large prime factors* 2211 09641 , arXiv: 。[10] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory* 剑桥大学出版社，剑桥（2007）。[11] Z.-W. Sun, *A conjecture on unit fractions involving primes* http://maths.nju.edu.cn/~zwsun/Unitfraction.pdf [12] *Conjectures on Representations Involving Primes* Z.-W. Sun，载于：Nathanson, M.（编），《组合与加法数论 II》。Springer 数学与统计学会议录，第 220 卷。Springer，Cham。[13] Z.-W. Sun, *New Conjectures in Number Theory and Combinatorics*, 哈尔滨工业大学出版社，哈尔滨，2021 年。

Email address: bloom@maths.ox.ac.ukMathematical Institute , Woodstock Road, Oxford, OX2 6GG, United Kingdom