arXiv:2305.02690v1 [math.CO] 4 May 2023

托普利兹矩阵的行图*

Gi-Sang Cheon[a, b]，Bumtle Kang[b]，Suh-Ryung Kim[b, c]，以及 Ho moon Ryu[b, c]

[a] *Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Rep. of Korea*

[b] *Applied Algebra and Optimization Research Center, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Rep. of Korea*

[c] *Department of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 08826, Rep. of Korea*

gscheon@skku.edu, lokbt1@skku.edu,srkim@snu.ac.kr, and ryuhomun@naver.com

摘要

本文研究托普利兹矩阵的行图。行图这一概念由 Greenberg 等人于 1984年提出，与竞争图这一概念密切相关；Cohen 于 1968年提出竞争图，此后该概念得到了广泛研究。

为了理解看起来相当复杂的托普利兹矩阵的行图结构，我们从行图为无三角形的托普利兹矩阵入手。我们证明了，若托普利兹矩阵的行图 G 为无三角形，则 T T 的最大行和至多为 2。此外，在这种情形下， G 是由路径和圈构成的不交并，且这些路径和圈的长度变化范围不大。接着，我们分别研究行图仅包含路径分量、仅包含圈分量，以及包含一个特定长度的圈分量的 (0, 1)-托普利兹矩阵。特别地，我们完整刻画了行图为圈的 (0, 1)-托普利兹矩阵。

关键词：托普利兹矩阵、行图、竞争图、无三角形图、圈分量

1 引言

矩阵 A 的支撑是一个（0,1）矩阵：如果 A 的 (i, j) 项非零，则该矩阵的 (i, j) 项等于 1；否则等于 0。方阵的有向图是指其邻接矩阵为该矩阵的支撑的有向图。如果方阵 A 是

*本研究部分受韩国政府（未来创造科学部）资助的韩国国家研究基金会科学研究中心计划（NRF-2016R1A5A1008055）支持。G.-S. Cheon 部分受 NRF-2019R1A2C1007518 资助。Bumtle Kang 部分受 NRF-2021R1C1C2014187 资助。S.-R. Kim 部分受韩国政府（未来创造科学部）（NRF-2017R1E1A1A03070489）资助。

若其为对称的，则其有向图的弧集也是对称的，因此我们考虑 A 的图，而不是 A 的有向图；后者是将 A 的有向图中的每个长度为 2 的有向圈替换为一条边得到的。

一个 n 阶托普利茨矩阵是一个 $n \times n$ 矩阵，$T = (t_{ij})$，其中 $t_{ij} = a_{i-j}$ 对所有 i、$j = 1$、.....、n 均成立，即其形式为

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_1 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad b_i = a_{-i}. \tag{1}$$

托普利茨矩阵已被许多作者研究，并广泛应用于纯数学和应用数学的各个领域。例如，这类矩阵常见于离散微分方程或积分方程、物理数据处理、正交多项式、平稳过程和矩问题中，参见 [6, 10, 11] 及其中的参考文献。近年来，(0,1)-托普利茨矩阵的本原性和指数已在 [12] 中得到研究。

本文研究 (0, 1) 布尔矩阵的“行图”，并得到了一些有趣的结果。给定一个 (0, 1) 布尔矩阵 A，若图 G 的顶点是 A 的各行，且当且仅当两个顶点所对应的行在 A 的同一列中均有非零元素时，它们在 G 中相邻，则称图 G 为 A 的行图，记作 RG(A)。这一概念由 Greenberg [7] 研究。事实上，RG(A) 是 A 的有向图的“竞争图”；Cohen [3] 于 1968 年 在研究生态系统时引入了这一概念。给定一个有向图 D，其竞争图以 D 的 $V(D)$ 为顶点集，并且当且仅当存在弧 $u \to w$ 和 $v \to w$ 时，才有一条边 uv，其中 w 是 D 中的某个顶点（示意见图 1）。自 Cohen 引入竞争图这一概念以来，竞争图及其变体已得到广泛研究。

研究竞争图时所涉及的大多数有向图都没有自环和重边。等价地，这些有向图的邻接矩阵是主对角线为零的 (0,1) 矩阵，且 (i, j) 项和 (j, i) 项不能同时为 1。循此思路，我们从严格意义上考虑满足以下条件的 $\mathcal{T}$ (0,1)-托普利茨矩阵 $T = (t_{i,\ j})_n$：

(i) $t_{i,\ i} = 0$ 对所有 $i \in [n]$ 均成立；(ii) 若 $t_{i,\ j} = 1$，则 $t_{j,\ i} = 0$。

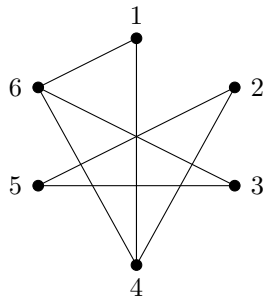
若更精确地描述 (0,1)-托普利茨矩阵 $(t_{i,\ j})_n$ 的行图 G，

$$V(G) = [n]$$

且当且仅当 $t_{i,\ k} = t_{j,\ k} = 1$ 对某个 $k \in [n]$ 成立时，i 与 j 在 G 中相邻。

如果图 G 是某个 T 的行图，其中 $T \in \mathcal{T}$，那么我们称 G 为托普利兹行图。除非另有说明，我们所说的 (0, 1)-托普利兹矩阵，是指属于 $\mathcal{T}$ 的矩阵。

$$T = \begin{pmatrix} & & & & & & 0\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 & & & & & & \end{pmatrix}$$



RG(T) =: G

$$A(G) = \begin{pmatrix} & & & & & & 0\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1\,0\,1\,1\,0\,0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

图 1：托普利兹矩阵 $T = T_6\langle 1、3；2、5\rangle$、 G 的行图（ T），以及 G的邻接矩阵 $A(G)$

给定一个 (0, 1) 布尔矩阵 A，我们用 $\mathcal{C}(A)$ 表示 RG(A) 的邻接矩阵，也就是说， $\mathcal{C}(A)$ 的 (i, j) 项等于

$$\begin{cases} 1 \text{ 如果 } i \neq j \text{ 且 } A \text{ 的第 } i\text{行与第 } j\text{行的内积为 } 1；\text{否则。} \\ 0 \end{cases}$$

我们可以将 $\mathcal{C}$ 视为作用于所有 $n \times n$ 布尔矩阵集合上的算子。

在第 2 节中，我们研究无三角形托普利兹行图。我们首先推导出涉及属于 α 或 β 的整数的等式，将其作为托普利兹矩阵 $T_n\langle\alpha$的行图中两个顶点相邻的条件； $\beta\rangle$ (定理 2.1)。我们证明，如果托普利兹矩阵 T 的行图是无三角形的，那么 T 属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$，其中 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 表示最大行和至多为 2 的托普利兹矩阵集合。顺便说，如果 $T \in \mathcal{T}_{\leq 2}$，那么 RG($T$) 是圈和路径的不交并，因此无三角形托普利兹行图是路径和圈的不交并。基于这些观察，我们提出了以下研究问题：

每个由圈和路径构成的不交并都是无三角形托普利茨行图吗?

答案是否定的。事实上，无三角形托普利茨行图中路径或圈的长度不能相差太大（定理 2.10）。我们给出了矩阵属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 的托普利茨矩阵的一个充要条件（定理 2.7），它在第 2 节中始终发挥着重要作用。我们刻画了行图无三角形的托普利茨矩阵$T_n(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_{\leq 2}$ with $|\alpha| = |\beta| = 2$ （定理 2.8），以及连通无三角形托普利茨行图（定理 2.14）。

第3节分别研究行图仅由路径分量、仅由圈分量以及含有特定长度圈分量的 (0,1)-托普利茨矩阵。首先，我们给出一个充分条件，使 (0, 1)-托普利茨矩阵的行图仅由路径分量构成（命题 3.3）。然后我们证明，给定整数 $4 \leq m \leq n$，除少数情形外，存在一个 n 阶托普利茨矩阵，其行

图含有一个长度为 m 的圈分量（定理 3.5）。我们完整刻画了满足 $|\alpha| = 2$ 和 $|\beta| = 1$ 的托普利茨矩阵 $T_n\langle\alpha;\beta\rangle$，其行图含有一个圈（定理 3.9）。我们给出一个充分条件，使托普利茨矩阵的行图仅由圈分量构成，并确定这些圈的长度（命题 3.12 和定理 3.15）。最后，我们完整刻画了行图为一个圈的托普利茨矩阵（定理 3.14）。

2 无三角形托普利兹行图

由于托普利兹矩阵完全由其第一列和第一行确定，我们先假设 T 的第一列中有 k_1 个 1，第一行中有 k_2 个 1（k_1 或 k_2 可以为 0，但不能同时为 0），并且若 $k_1 \geq 1$，则 $t_{i+1,\ 1} = 1$ 对于 $i = i_1, \ldots, i_{k_1}$；若 $k_2 \geq 1$，则 $t_{1,\ j+1} = 1$ 对于 $j = j_1, \ldots, j_{k_2}$。按递增顺序，将这些行指标和列指标的集合分别记为 $\alpha = \{i_1, \ldots, i_{k_1}\}$（若 $k_1 \geq 1$）和 $\beta = \{j_1, \ldots, j_{k_2}\}$（若 $k_2 \geq 1$）。若 $k_1 = 0$（分别为 $k_2 = 0$），则 $\alpha = \emptyset$（分别为 $\beta = \emptyset$）。根据定义，显然 α 和 β 是 $[n-1]$的不相交子集。回顾一下，L 阶下移矩阵是一个（0,1）矩阵，只有次对角线上为 1，其余位置均为 0。例如，4×4 阶下移矩阵为

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，由 (1) 可知，T 可表示为关于 L 和 $U = L^T$ 的形式如下：

$$T = \sum_{m=1}^{k_1} L^{i_m} + \sum_{m=1}^{k_2} U^{j_m} \tag{2}$$

（如果 $k_1 = 0$ 或 $k_2 = 0$，则相应的求和项视为零矩阵）。为方便起见，我们将 T 记为 $T_n\langle\alpha;$ 当需要明确指定 α、β 的元素时，记为 $\beta\rangle$ 或 $T_n\langle i_1, \ldots\ldots, i_{k_1};\ j_1, \ldots\ldots, j_{k_2}\rangle$。特别地，如果 $\alpha = \beta$，则 $T_n\langle\alpha;\ \beta\rangle$ 是一个对角线元素全为零的 (0,1)-对称托普利兹矩阵，我们将其记为 $ST_n\langle\alpha\rangle$。

注意，对于置换矩阵 $P = [p_{i,j}]$，$T_n\langle\alpha;\ \beta\rangle = PT_n\langle\beta;\ \alpha\rangle P^T$，其中$p_{i,\ j} = 1$ 当且仅当 $i + j = n + 1$。因此，$T_n\langle\alpha;\ \beta\rangle$ 的行图与$T_n\langle\beta;\ \alpha\rangle$ 的行图同构。相应地，不失一般性，我们可以假设 $i_1 < j_1$，其中 (0, 1)-托普利兹矩阵$T_n\langle i_1,\ \ldots,\ i_{k_1};\ j_1,\ \ldots,\ j_{k_2}\rangle$。

定理 2.1. 设 $T = T_n\langle\alpha;\ \beta\rangle$，并取 $[n]$ 中的整数 i 和 j，满足 $i < j$。那么，i 和 j 在 RG(T) 中相邻，当且仅当以下条件之一成立：

$$j - i = \begin{cases} i_t - i_s & \text{for some } i_s \in \alpha \cap [i-1] \text{ and } i_t \in \alpha \cap [j-1] \text{ with } s < t; \quad (3) \\ j_q - j_p & \text{for some } j_q \in \beta \cap [n-i] \text{ and } j_p \in \beta \cap [n-j] \text{ with } p < q; \quad (4) \\ i_t + j_q & \text{for some } i_t \in \alpha \text{ and } j_q \in \beta. \quad (5) \end{cases}$$

证明。令 $T=[t_{i,j}]$ 和 $G=\mathrm{RG}(T)$。假设 i 和 j 在 G 中相邻。那么，根据定义，存在 $k\in[n]$，使得 $t_{i,\ k}=1$ 且 $t_{j,\ k}=1$。我们考虑以下三种情形：(i) $1\le k<i$；(ii) $i<k<j$；(iii) $j<k\le n$。令

$$i-k=i_s,\quad j-k=i_t,\quad k-i=j_q,\quad \text{and}\quad k-j=j_p.$$

在情形（i）中，$i_s\in\alpha\cap[i-1]$、$i_t\in\alpha\cap[j-1]$和 $j-i=i_t-i_s$；在情形（ii）中，$j_q\in\beta$、$i_t\in\alpha$和 $j-i=i_t+j_p$；在情形（iii）中，$j_q\in\beta\cap[n-i]$、$j_p\in\beta\cap[n-j]$和 $j-i=j_p-j_q$。

我们证明逆命题。

情形 1。$j-i=i_t-i_s$ 对某些 $i_s\in\alpha\cap[i-1]$ 和 $i_t\in\alpha\cap[j-1]$成立。于是$t_{i_s+1,\ 1}=t_{i_t+1,\ 1}=1$。由于 $i_s\le i-1$，我们有 $i-i_s\ge 1$ 和$t_{i,\ i-i_s}=1$。类似地，$t_{j,\ j-i_t}=1$。根据情形假设，$i-i_s=j-i_t$，因此 i 和 j 在 G中相邻。

情形 2. $j-i=j_q-j_p$ 对于某个 $j_q\in\beta\cap[n-i]$ 和 $j_p\in\beta\cap[n-j]$。于是$t_{1,\ j_p+1}=t_{1,\ j_q+1}=1$。由于 $j_q\le n-i$，我们有 $i+j_q\le n$ 和 $t_{i,\ i+j_q}=1$。类似地，$t_{j,\ j+j_p}=1$。根据情形假设，$i+j_q=j+j_p$，因此 i 和 j 在 G中相邻。

情形 3. $j-i=i_t+j_q$对于某个 $i_t\in\alpha$和 $j_q\in\beta$。于是 $t_{1,\ j_q+1}=t_{i_t+1,\ 1}=1$。因此 $t_{i,\ i+j_q}=t_{j,\ j-i_s}=1$。根据情形假设，$i+j_q=j-i_s$，因此 i 和 j 在G中相邻。 □

命题 2.2. 对于任意一个 n 阶托普利兹矩阵，任意 $\ell\in[n]$的第 ℓ 行的行和等于第 $(n-\ell+1)$ 列的列和。

证明。设 $T=T_n\langle\alpha;\ \beta\rangle$。取 $\ell\in[n]$ 并令

$$M_1=\{\ell-i_s\in[n]\mid i_s\in\alpha\}\quad\text{and}\quad M_2=\{\ell+j_t\in[n]\mid j_t\in\beta\}.$$

则第 ℓ 行中的非零列是不交并 M_1 和 M_2。现在我们令

$$N_1=\{p\in[n]\mid p-i_s=n-\ell+1, i_s\in\alpha\}\quad\text{and}\quad N_2=\{p\in[n]\mid p+j_t=n-\ell+1, j_t\in\beta\}.$$

Th第 $n-\ell+1$ 列上的非零元素是 N_1 和 N_2 的不交并。

我们声称，对于每个 $i=1$，2 和 $p\in[n]$，$x\in M_i$ 当且仅当 $n-p+1\in N_i$，如下所示:

$p\in M_1$（分别地，$p\in M_2$）$\Leftrightarrow p=\ell-i_s$ 对于某个 $i_s\in\alpha$（分别地，$p=\ell+j_t$ 对于某个 $j_t\in\beta$）$\Leftrightarrow n-p+1=n-\ell+1+i_s$ 对于某个 $i_s\in\alpha$（分别地，$n-p+1=n-\ell+1-j_t$ 对于某个 $j_t\in\beta$）$\Leftrightarrow$（$n-p+1$）$-i_s=n-\ell+1$ 对于某个 $i_s\in\alpha$（分别地，（$n-p+1$）$+j_t=n-\ell+1$ 对于某个 $j_t\in\beta$）$\Leftrightarrow n-p+1\in N_1$（分别地，$n-p+1\in N_2$）。

因此 $|M_1\cup M_2|=|N_1\cup N_2|$，证明至此完成。 □

推论 2.3. 托普利兹矩阵的最大行和与最大列和相同。

推论 2.4. 如果托普利兹矩阵 T 的行图是无三角形的，那么 T 的最大行和至多为二。

证明。假设无三角形图 G 是某个托普利兹矩阵 T的行图。根据行图的定义，最大列和至多为二。因此，根据推论 2.3， T 的最大行和至多为二。

□

文献 [9], 指出，如果 D 的最大入度和最大出度均至多为 2，那么它的竞争图就是若干圈和路径的不交并。换言之，如果托普利兹矩阵 T 属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$，那么 RG(T) 就是若干圈和路径的不交并。

推论 2.5。如果 T 是最大行和至多为 2 的托普利兹矩阵，那么 T 的行图就是若干圈和路径的不交并。

因此，根据推论 2.4 和推论 2.5，我们得到以下推论。

推论 2.6。无三角形托普利兹行图是若干圈和路径的不交并。

令 $\mathcal{G}_{\leq 2}$ 为度至多为 2 的图的集合，也就是说，该集合中的每个图都是若干圈和路径的不交并。于是，推论 2.6 可改述如下:

$$\{G \mid G = \mathrm{RG}(T) \text{ for some } T \in \mathcal{T} \text{ and } G \text{ is triangle-free}\} \subseteq \mathcal{G}_{\leq 2}.$$

本节余下部分将考察作为托普利兹矩阵的行图的圈和路径的不交并。根据推论 2.4 和 2.5，我们只需考察 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 中的托普利兹矩阵。容易验证，若 $T_n\langle\alpha;\beta\rangle \in \mathcal{T}_{\leq 2}$，则 $\alpha \leq 2$ 和$\beta \leq 2$。然而，下面的矩阵表明逆命题并不成立;

$$T_7\langle 1,3;2,5\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

基于这一观察，我们给出托普利兹矩阵 $T = T_n\langle\alpha;\beta\rangle$ 属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 的充要条件，其中 $\alpha \neq \emptyset$ 和 $\beta \neq \emptyset$; 这将在研究无三角形托普利兹行图时发挥关键作用。容易验证，如果 α 和 β 中一个为空集，而另一个集合的阶至多为 2，那么 $T = T_n\langle\alpha;\beta\rangle$ 属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 。

定理 2.7。设 $T = T_n\langle i_1,\ldots,i_{k_1};\ j_1,\ldots,j_{k_2}\rangle$，其中 $k_1,k_2 \geq 1$。那么， T 的最大行和不超过 2，当且仅当满足以下性质:

（$\star$） k_1、 $k_2 \leq 2$，尤其是如果 $k_2 = 2$，那么 $i_1 + j_2 \geq n$; 如果 $k_1 = 2$，那么 $i_2 + j_1 \geq n$。

证明。我们先证明“若”这一部分。为导出矛盾，假设对于某个 $u \in [n]$，第 u 行的行和至少为 3。那么存在 $\{v_1, v_2, v_3\} \subset [n]$，使得 T 中的元素 (u, v_1)、(u, v_2) 和 (u, v_3) 均为 1。根据托普利兹矩阵的定义，对于每个 $i = 1$，2，3，

$$u - v_i \in \alpha \tag{6}$$

or

$$v_i - u \in \beta. \tag{7}$$

由于 $k_1, k_2 \leq 2$，v_1, v_2, v_3 中恰有两个满足 (6)，或者 v_1, v_2, v_3 中恰有两个满足 (7)。不妨假设前者成立，因此 $u - v_1 = i_1$, $u - v_2 = i_2$，且 $v_3 - u \in \beta$。于是 $v_3 - v_2 \geq i_2 + j_1 \geq n$，这不可能，因为 $\{v_2, v_3\} \subseteq [n]$。因此，$T$ 的最大行和至多为 2。

现在我们证明“当且仅当”部分中“仅当”方向的逆否命题。容易看出，n 行和第 1 行的行和分别为 k_1 和 k_2。因此 $k_1, k_2 \leq 2$。若 $k_2 = 2$ 且 $i_1 + j_2 < n$，则元素 $(n - j_2, n - i_1 - j_2)$、$(n - j_2, n + j_1 - j_2)$ 和 $(n - j_2, n)$ 均等于 1，因此第 $n - j_2$ 行的行和至少为 3。对于 $k_1 = 2$ 且 $i_2 + j_1 < n$ 的情形，也可作类似论证。 □

我们刻画了行图无三角形的托普利兹矩阵 $T_n(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_{\leq 2}$ with $|\alpha| = |\beta| = 2$。

定理 2.8. 设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$ with $i_1 + j_2 \geq n$ and $i_2 + j_1 \geq n$。那么，RG(T) 含有三角形，当且仅当以下情形之一成立：

(i) $2i_2 = 3i_1 + j_1$ 和 $n > 2i_1 + j_1$；(ii) $2j_2 = i_1 + 3j_1$ 和 $n > i_1 + 2j_1$；(iii) $i_2 = 3i_1 + 2j_1$；(iv) $j_2 = 2i_1 + 3j_1$；(v) $i_2 + j_2 = 2(i_1 + j_1)$。

证明. 我们先证明“若”部分。可以验证，对于情形 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 和 (v)，$\{1+i_1, 1+i_2, 1+2i_2-i_1\}$, $\{1, 1+j_2-j_1, 1+2j_2-2j_1\}$, $\{1+i_1, 1+2i_1+j_1, 1+3i_1+2j_1\}$,$\{1, 1+i_1+j_1, 1+2i_1+2j_1\}$ 和 $\{1, 1+j_2-j_1, 1+i_2+j_2-(i_1+j_1)\}$ 分别构成 RG(T) 的一个三角形。

现在证明“仅当”部分。假设 RG(T) 中存在一个三角形 uvw，且$u < v < w$。根据假设和定理 2.1，$\{v-u, w-v, w-u\} \subset \{i_1+j_1, j_2-j_1, i_2-i_1\}$。假设 $\{w-v, v-u\}$ 是 $\{i_1+j_1, i_2-i_1\}$ 或 $\{i_1+j_1, j_2-j_1\}$。那么 $w-u = i_2+j_1 \geq n$ 或 $w-u = i_1+j_2 \geq n$，这是不可能的。假设$\{w-v, v-u\} = \{i_2-i_1\}$且$w-u = j_2-j_1$。那么，根据定理 2.1，$u > i_1$ 且 $w+j_1 \leq n$。然而，$w + j_1 = u + j_2 > i_1 + j_2 \geq n$，于是产生矛盾。类似地，我们可以证明情形 $\{w-v, v-u\} = \{j_2-j_1\}$ 且 $w-u = i_2-i_1$ 也不可能发生。

那么，以下就是仅有的可能剩余情形，因为 $w-u = (w-v)+(v-u)$：

(1) $\{w-v, v-u\} = \{i_2 - i_1\}$ 和 $w - u = i_1 + j_1$; (2) $\{w-v, v-u\} = \{j_2 - j_1\}$ 和 $w - u = i_1 + j_1$; (3) $\{w-v, v-u\} = \{i_1 + j_1\}$ 和 $w - u = i_2 - i_1$; (4) $\{w-v, v-u\} = \{i_1 + j_1\}$ 和 $w - u = j_2 - j_1$; (5) $\{w-v, v-u\} = \{i_2 - i_1, j_2 - j_1\}$ 和 $w - u = i_1 + j_1$。

在情形 (1) 中，由于 $u > i_1, n \geq w = u + i_1 + j_1 > 2i_1 + j_1$。此外，由于 $w - u = (w-v) + (v-u)$, $2i_2 = 3i_1 + j_1$。在情形 (2) 中，由于 $w + j_1 \leq n, n \geq w + j_1 = u + i_1 + 2j_1 > i_1 + 2j_1$。另外， $2j_2 = i_1 + 3j_1$。在情形 (3) 中，由于 $u > i_1, n \geq w = u + 2(i_1 + j_1) > 3i_1 + 2j_1$。在情形 (4) 中，由于 $w + j_1 \leq n$, $n \geq w + j_1 \geq u + 2(i_1 + j_1) + j_1 > 2i_1 + 3j_1$。

此外，在情形 (3) 中， $i_2 = 3i_1 + 2j_1$ 和 $n > 3i_1 + 2j_1 = i_2$; 在情形 (4) 中， $j_2 = 2i_1 + 3j_1$ 和 $n > 2i_1 + 3j_1 = j_2$。根据托普利茨图的定义， $n > \max\{i_2, j_2\}$, 因此情形 (3) 和 (4) 中的 n 不受限制。最后，在情形 (5) 中，我们有 $i_2 + j_2 = 2(i_1 + j_1)$。由此得到所需结果。

□

为了求出圈或路径的准确数量，我们需要以下引理。 .

引理 2.9. 取 $T = T_n\langle i_1, \ldots, i_{k_1};\ j_1, \ldots, j_{k_2}\rangle \in \mathcal{T}_{\leq 2}$，其中 $k_1, k_2 \geq 1$，并令 G 为 T 的行图。则以下结论成立:

(a) 如果对于整数 $\ell \geq 2$, $v_1 v_2 \cdots v_\ell$ 是 G 中的一条路径，那么只要对任意 $i \in [\ell]$ 有 $v_i \notin \{1, 1 + i_1\}$, $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 也是 G 中的一条路径。

(b) 如果 $v_1 v_2 \cdots v_\ell$ 是 G 中的一个路径分量，对于整数 $\ell \geq 2$，且对每个 $i \in [\ell]$ 都有 $v_i \notin \{1, 1 + i_1\}$, 并且

$$\{v_1, v_\ell\} \cap \{n - i_2 + i_1 + 1, n - j_2 + 1, n - j_1 + 1, n - (i_1 + j_1) + 1\} = \emptyset, \quad (8)$$

那么，$(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 也是 G 中的路径分量（如果 $|\alpha| = 1$，那么我们忽略 i_2 ; 如果 $|\beta| = 1$，那么我们忽略 j_2）。

(c) 若 $v_1 v_2 \cdots v_\ell v_1$ 是 G 中的一个圈，其中 $\ell \geq 2$ 为整数，那么只要对任意 $i \in [\ell]$ 满足 $v_i \notin \{1, 1 + i_1\}$, $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)(v_1 - 1)$ 也是 G 中的一个圈。

证明。根据定理 2.1 和 2.7，当 $y > x$ 满足以下任一条件时，顶点 x 和 y 相邻:

(i) $y - x = i_2 - i_1$、 $i_1 \leq x - 1$ 和 $i_2 \leq y - 1$; (ii) $y - x = j_2 - j_1$、 $j_2 \leq n - x$ 和 $j_1 \leq n - y$; (iii) $y - x = i_1 + j_1$

（如果 $k_1 = 1$ （分别地， $k_2 = 1$），那么我们忽略项 $i_2 - i_1$ （分别地， $j_2 - j_1$）。）

假设 $v_1 v_2 \cdots v_\ell$ 是 G 中的一条路径。为证明 (a)，假设 $S \cap \{1, 1 + i_1\} = \emptyset$。固定 $k \in [\ell - 1]$，并令 x_k =min$\{v_{k+1}, v_k\}$、 y_k =max$\{v_{k+1}, v_k\}$。根据假设， $x_k \neq 1$，因此 $1 \leq x_k - 1 \leq y_k - 1$。由于 x_k 和 y_k 相邻，(i)、(ii)、(iii) 中必有一种情况适用于 $x = x_k$ 和 $y = y_k$。

在情形（i）中， $i_1 + 1 \leq x_k - 1$，因为 $x_k \neq 1 + i_1$。因此 $i_1 \leq (x_k - 1) - 1$。由于 $i_1 - x_k = i_2 - y_k$， $i_2 \leq (y_k - 1) - 1$。在情形（ii）中， $j_2 < n - (x_k - 1)$ 且 $j_1 < n - (y_k - 1)$。因此， $x_k - 1$ 和 $y_k - 1$ 在 G 中相邻。由于 k 是任意选取的，我们可以得出结论：对所有 $i \in [\ell - 1]$， $v_i - 1$ 和 $v_{i+1} - 1$ 在 G 中相邻。因此，我们证明了 $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 也是 G 中的一条路径。

为证明 (b)，假设对于整数 $\ell \geq 2$， $v_1 v_2 \cdots v_\ell$ 是 G 中的路径分量，其中 $v_i \notin \{1, 1 + i_1\}$ 对任意 $i \in [\ell]$ 都成立，并满足 (8)。那么根据 (a)， $Q := (v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 是一条路径。反设 $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 不是路径分量。那么根据定理 2.7， Q 可延伸为一条更长的路径。我们考虑存在一个顶点 $v \neq v_{\ell-1} - 1$ 在 G 中与 $v_\ell - 1$ 相邻的情形。令

$$x = \min\{v, v_\ell - 1\} \quad \text{and} \quad y = \max\{v, v_\ell - 1\}.$$

由于 x 和 y 相邻，因此 (i)、(ii)、(iii) 中必有一个成立。

假设 $v + 1 > n$。由于 v 是 G 中的一个顶点， $v = n = y$。那么 (i) 或 (iii) 成立。因此，要么 $v_\ell - 1 = n - (i_1 + j_1)$，要么 $v_\ell - 1 = n - i_2 + i_1$，这与 (8) 矛盾。

现在，假设 $v + 1 \leq n$。注意到 $y - x = (y + 1) - (x + 1)$，我们知道在情形（iii）中， $v + 1$和 v_ℓ 相邻。在情形（ii）中， $y - x = i_2 - i_1$、 $i_1 \leq x - 1 < x$和 $i_2 \leq y - 1 < y$。因此， $v + 1$ 和 v_ℓ 在 G 中相邻，于是我们得出矛盾。在情形（i）中， $y - x = j_2 - j_1$、 $j_2 \leq n - x$和 $j_1 \leq n - y$。由（8）可知 $v_\ell - 1 \notin \{n - j_1, n - j_2\}$， $j_2 \leq n - (x + 1)$ 或 $j_1 \leq n - (y + 1)$。由于 $y - x = j_2 - j_1$， $j_2 \leq n - (x + 1)$ 且 $j_1 \leq n - (y + 1)$。因此， $v + 1$ 和 v_ℓ 在 G 中相邻，于是我们得出矛盾。

通过类似的论证，可以证明除了 $v_2 - 1$ 之外，在 G 中没有顶点与 $v_1 - 1$ 相邻。因此， $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 是 G 中的一个路径分量，并且 (b) 成立。

为证明 (c)，假设 $v_1 v_2 \cdots v_\ell v_1$ 是 G 中的一个圈。由 (a) 可知， $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)$ 和 $(v_\ell - 1)(v_1 - 1)$ 是 G 中的路径。因此， $(v_1 - 1)(v_2 - 1) \cdots (v_\ell - 1)(v_1 - 1)$ 也是 G 中的一个圈。

□

定理 2.10. 设 G 是一个无三角形托普利兹行图。则以下结论成立：

(a) G 中不存在三个长度各不相同的圈。(b) G 中不存在七条长度各不相同的路径。

证明。由于 G是无三角形的， G是托普利兹矩阵 $T_n\langle i_1, \ldots\ldots, i_{k_1}$的行图； $j_1, \ldots\ldots, j_{k_2}\rangle$满足 $(\star)$，这是由定理 2.7 得出的。

为用矛盾法证明 (a)，假设 G 中存在长度各不相同的圈 C_1、 C_2、 C_3。那么，根据引理 2.9(c)，在 G 中存在圈 C_1^*、 C_2^*、 C_3^*，使得 C_i^*

对每个 $i=1$、2、3， C_1^*、C_2^*、C_3^* 中的每一个都与 C_i 长度相同，且包含顶点 1 或 $1+j_1$。根据抽屉原理，顶点 1 或 $1+i_1$ 位于其中两个圈上，这就产生了矛盾，因为根据推论 2.6， C_1、 C_2、 C_3 是 G 的分量。因此 (a) 成立。

为通过矛盾证明 (b)，假设 G 中存在长度各不相同的路径分量 $P_1, P_2, \ldots, P_7$。那么， G 中存在路径分量 $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_7^*$，使得对于每个 $i=1,\ldots,7$， P_i^* 的长度都与 P_i 相同，并且 $P_1^*, P_2^* \ldots, P_7^*$ 中的每一个都包含顶点 $1, 1+i_1, n-i_2+i_1+1, n-j_2+1, n-j_1+1, n-i_1-j_1+1$ 中的一个（由引理 2.9(b) 得出；若 $k_1=1$（分别为 $k_2=1$），则忽略 $n-j_2+1$（分别为 $n-i_2+i_1+1$））。根据抽屉原理，顶点 $1, 1+i_1, n-i_2+i_1+1, n-j_2+1, n-j_1+1, n-i_1-j_1+1$ 中至少有一个同时属于两个路径分量，这就产生了矛盾（若 $k_1=1$（分别为 $k_2=1$），则忽略 $n-j_2+1$（分别为 $n-i_2+i_1+1$））。 □

推论 2.11. 任何包含三个长度各不相同的圈或七个长度各不相同的路径分量的图，都不是托普利兹行图。

现在我们刻画不含孤立顶点的无三角形托普利兹行图。

引理 2.12. 阶为 $n \le 4$ 的任何托普利兹行图都有一个孤立顶点。

证明。显然，如果 $n=2$，则托普利兹矩阵的行图是无边图。反之，假设对于某个 $T = T_n\langle \alpha, \beta\rangle$ with$n \in \{3,4\}$， $G :=$ RG(T) 没有孤立顶点。由于顶点 1 和 n 的度至少为一， $t_{1,k} = t_{n,\ell} = 1$ for some$k, \ell \in [n]$，因此 $n-\ell \in \alpha$ 且 $k-1 \in \beta$。于是 $k_1 \ge 1$ 且 $k_2 \ge 1$。令 $\alpha = \{i_1, \ldots, i_{k_1}\}$ 且 $\beta = \{j_1, \ldots, j_{k_2}\}$。那么 $k_1+k_2 \le n-1 \le 3$，所以 $k_1=1$ 或 $k_2=1$。我们先考虑情形 $k_1=1$。那么 $k_2 \le 2$，并且 G 中没有两个相邻顶点满足定理 2.1(3)。由于 G 没有孤立顶点，顶点 n 与某个顶点 u 相邻，其中 $1 \le u < n$。显然， u 和 n 不满足定理 2.1(4)，所以 $n-u = i_1 + j_t$ for some $t \in \{1,2\}$。由于 $u < n \le 4$， $n-u \le 3$，因此 $i_1 + j_t \le 3$。由于我们在本文中始终假设 $i_1 < j_1$，$(i_1, j_1) =$ (1, 2)，并且若存在 j_2，则 $j_2 = 3$。于是 T 的所有元素均为零，除了 $t_{2,1} = \cdots = t_{n,n-1} = 1$, $t_{1,3} = \cdots = t_{n,n-2} = 1$, 以及 $t_{1,4} = \cdots = t_{n,n-3} = 0$ 或 1（取决于 j_2 是否存在）。因此，除 $j=2$ 外，$t_{3,j} = 0$。然而，除 $i=3$ 外，$t_{i,2} = 0$，所以顶点 3 在 G 中是孤立顶点，这就导出了矛盾。因此 $k_1 = 2$ 且 $k_2 = 1$。那么，没有两个相邻顶点满足定理 2.1(4)。由于顶点 1 的度至少为一，对于某个 $2 \le v \le n$，1 与顶点 v 相邻。由于 1 和 v 不满足定理 2.1(3)，对于某个 $s \in \{1,2\}$， $v-1 = i_s + j_1$。由于我们在本文中假设 $i_1 < j_1$， $i_s + j_1 \ge 3$，因此 $n = v = 4$ 且 $i_s + j_1 = 3$。那么 $k_1 = 1$ 且 $(i_1, j_1) =$ (1, 2)，这与上述情形一样导致矛盾。 □

命题 2.13. 阶为 n 的路径或圈是托普利兹行图，当且仅当 $n \ge 5$。

证明. “仅当”部分可直接由引理 2.12 得出。

为证明“若”部分，设 $n \ge 5$。令 $T_1 = T_n\langle 1, 2; n-2\rangle$（示意图见图 2）。那么，对于每个 $i = 2, \ldots, n-1$， $(i, i-1)$ 项和 $(i+1, i-1)$ 项

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 2：托普利兹矩阵 $T_1 = T_6\langle 1,2;\ 4\rangle$ 和 $T_2 = T_6\langle 1,2;\ 4,5\rangle$

T_1 的值均为 1，因此顶点 i 和 $i+1$ 在 RG(T_1) 中相邻。此外，$(1, n-1)$ 项和 $(n, n-1)$ 项的值均为 1，因此顶点 1 和 n 相邻。由此，RG(T_1) 包含一条阶为 n 的路径，因此根据推论 2.6，RG(T_1) 是一条阶为 n 的路径。

为证明长度为 n 的圈是托普利兹行图，考虑 $T_2 = T_n\langle 1, 2;\ n-2, n-1\rangle$（见图 2）。于是，根据上述论证，$2, 3, \ldots, n, 1$ 是 RG(T_2) 中一条路径的顶点序列。由于 $(1, n)$-项和 $(2, n)$-项均为 1，顶点 1 和 2 相邻。因此，RG(T_2) 包含一个长度为 n 的圈，从而根据推论 2.6，RG(T_2) 是一个长度为 n的圈。 □

现在我们准备给出连通无三角形托普利兹行图的刻画。

定理 2.14。阶为 n 的托普利兹行图是连通且无三角形的，当且仅当 $n \geq 5$，并且它是一个阶为 n的路径或圈。

证明。命题 2.13 的「若」部分证明了「若」的方向。引理 2.12 和命题 2.13 的「仅当」部分证明了「仅当」的方向。 □

3 行图含有圈的 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 托普利兹矩阵

在上一节中，我们证明了

$$\{G \mid G = \mathrm{RG}(T) \text{ for some } T \in \mathcal{T} \text{ and } G \text{ is triangle-free}\} \subseteq \mathcal{G}_{\leq 2}.$$

在本节中，我们研究

$$\mathcal{T}^{\star}_{\leq 2} := \{T \in \mathcal{T}_{\leq 2} \mid \mathrm{RG}(T) \text{ contains a cycle}\}.$$

由推论 2.5 可知，托普利兹矩阵 $T \in \mathcal{T}_{\leq 2}$ 的行图是路径和圈的不交并。因此，$T_{\leq 2} \setminus \mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$ 是最大行和不超过 2 且行图为路径分量不交并的托普利兹矩阵集合。

我们首先给出定理 2.1 针对 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 中矩阵的一个特化版本。

引理 3.1. 设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, i_2\rangle$ 是 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 中的托普利兹矩阵。则当且仅当以下条件之一成立时，满足 $u < v$ 的两个顶点 u 和 v 在 T 的行图中相邻:

(i) $1 \leq u \leq n - j_2$ 和 $v = u + j_2 - j_1$; (ii) $i_1 + 1 \leq u \leq n - i_2 + i_1$ 和 $v = u + i_2 - i_1$; (iii) $1 \leq u \leq n - j_1 - i_1$ 和 $v = u + i_1 + j_1$。

证明。假设 u 和 v 相邻。那么，根据定理 2.1，$v - u \in \{j_2 - j_1, i_2 + i_1, i_1 + j_1, i_1 + j_2, i_2 + j_1, i_2 + j_2\}$。若 $v = u + j_2 - j_1$，则根据同一定理的 (4)，$1 \leq u \leq n - j_2$。假设 $v = u + i_2 - i_1$。那么根据 (3)，$i_1 \leq u - 1$，因此 $i_1 + 1 \leq u$。此外，$u + i_2 - i_1 \leq n$，所以 $u \leq n - i_2 + i_1$。若 $v = u + i_1 + j_1$，则 $u + i_1 + j_1 = v \leq n$，因此 $1 \leq u \leq n - j_1 - i_1$。根据定理 2.1，逆命题显然成立。

□

$\mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$中的托普利兹矩阵

我们首先给出一个托普利兹矩阵属于 $T_{\leq 2} \setminus \mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$ 的充分条件。若一个矩阵的有向图不包含有向圈，则称该矩阵为无环矩阵。利用以下引理，我们证明：若 T 是无环的，则 $T \in T_{\leq 2} \setminus \mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$。

引理 3.2（[12]）。设 $T = T_n\langle i_1, \ldots, i_{k_1}; j_1, \ldots, j_{k_2}\rangle$。那么 T 的有向图包含一个长度为 $\frac{i_s + j_t}{\text{最大公因数}(i_s, j_t)}$ 的有向圈 $C_{s,\,t}$，~~对每个~~满足 $i_s + j_t \leq n$ 的 $s \in [k_1]$ 和 $t \in [k_2]$ 均成立。

命题 3.3。设 T 是 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 中的一个无环托普利兹矩阵。那么 T 的行图仅由路径分量组成。

证明。设 $G = \mathrm{RG}(T)$。根据定理 2.7，$T = T_n\langle \alpha; \beta\rangle$，其中 $|\alpha| \leq 2$ 且 $|\beta| \leq 2$。此外，由于 T 是无环的，根据引理 3.2，$i_1 + j_1 > n$，因此引理 3.1(iii) 不可能发生。若 $|\alpha| = |\beta| = 1$，则引理 3.1 的 (i) 和 (ii) 均不可能发生，因此 G 是空图。设 $|\alpha| = 2$ 或 $|\beta| = 2$。那么，由于引理 3.1 的 (iii) 不可能发生，G 的边集在 $|\alpha| = 2$ 且 $|\beta| = 1$ 时等于 E_1；在 $|\alpha| = 1$ 且 $|\beta| = 2$ 时等于 E_2；在 $|\alpha| = |\beta| = 2$ 时等于 $E_1 \cup E_2$，其中

$$E_1 = \{\{i, i - i_1 + i_2\} \mid 1 \leq i \leq n - i_2\} \text{ and } E_2 = \{\{j, j - j_1 + j_2\} \mid 1 + j_1 \leq j \leq n + j_1 - j_2\}.$$

反设，由 E_1 诱导的 G 的子图 $G[E_1]$ 包含一个圈$C := v_0 v_1 \ldots v_{\ell-1} v_0$（我们将 v_ℓ 与 v_0 视为相同），其中 $\ell \geq 3$ 为某个整数。于是，对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$，都有 $|v_{i+1} - v_i| = i_2 - i_1$。由于 C 是闭的，存在 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$ 使得 $v_{i-1} < v_i$ 和 $v_i > v_{i+1}$。于是

$$v_i - v_{i+1} = |v_{i+1} - v_i| = |v_i - v_{i-1}| = v_i - v_{i-1},$$

这意味着 $v_{i-1} = v_{i+1}$。由于 $\ell \geq 3$，我们得出了矛盾。用类似的论证可以证明，$G[E_2]$ 不包含圈。因此，如果 $|\alpha| = 2$ 和 $|\beta| = 1$，或者 $|\alpha| = 1$ 和 $|\beta| = 2$，则该陈述成立。

假设 $|\alpha| = |\beta| = 2$。由于 $i_2 + j_1 > i_1 + j_1 > n$、 E_1 和 E_2 互不相交。此外，E_1 中各边端点的最大 $n - i_1$ 小于 E_2中各边端点的最小 j_1 。因此，如果 G中包含一个圈，那么它必定包含在 $G[E_1]$ 或 $G[E_2]$中。由于我们已经证明 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 是路径的不交并，因此该陈述成立。 □

现在，我们有必要探究 $\mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$ 中哪些矩阵的行图包含一个环分支。首先，我们将证明，对于除少数情形外的任意整数 $4 \leq m \leq n$ ，在 $\mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$ 中都存在一个 n 阶托普利兹矩阵，其行图包含一个长度为 m 的环分支。

引理 3.4. 设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$。如果存在整数 $1 \leq k \leq \frac{n-1-i_1}{i_2-i_1}$和$1 \leq \ell \leq \frac{n-1-j_1}{j_2-j_1}$，使得

$$i_1 + j_1 = k(i_2 - i_1) + \ell(j_2 - j_1),$$

那么， T的行图包含一个长度为 $k + \ell + 1$的圈。

证明。令 $s = i_2 - i_1$ and $t = j_2 - j_1$ ，并假设存在整数 $1 \leq k \leq \frac{n-1-i_1}{s}$and $1 \leq \ell \leq \frac{n-1-j_1}{t}$。那么 $i_1 + ks \leq n - 1$ and $j_1 + \ell t \leq n - 1$。将它们相加，得到 $i_1 + j_1 + ks + \ell t \leq 2(n - 1)$。由此以及等式 $i_1 + j_1 = ks + \ell t$，我们得到不等式

$$i_1 + j_1 = ks + \ell t \leq n - 1, \tag{9}$$

即 $1 + ks \leq n - \ell t$。因此 $\{1 + ks, 2 + ks, \ldots, n - \ell t\} \neq \emptyset$，于是 $\{1 + ks - j_1, 2 + ks - j_1, \ldots, n - \ell t - j_1\} \neq \emptyset$。由于 $i_1 + ks \leq n - 1$,

$$(n - (i_1 + j_1)) - (1 + ks - j_1) = n - 1 - (i_1 + ks) \geq 0$$

于是 $1 + ks - j_1 \leq n - (i_1 + j_1)$。由于 $n - \ell t - j_1 \geq 1$，存在一个整数 $p \in \{1, 2, \ldots, n - (i_1 + j_1)\} \cap \{1 + ks - j_1, 2 + ks - j_1, \ldots, n - \ell t - j_1\}$。然后

$$1 \leq p \leq n - (i_1 + j_1) \tag{10}$$

and

$$1 + ks - j_1 \leq p \leq n - \ell t - j_1 \tag{11}$$

设 $W = \{p, p + t, \ldots, p + \ell t, p + \ell t + s, \ldots, p + \ell t + ks\}$。则由 (9) 和 (10),

$$1 \leq p < p + t < \cdots < p + \ell t + s < \cdots < p + \ell t + ks = p + (i_1 + j_1) < n.$$

因此 $W \subset [n]$。现在，由 (11) 可得,

$$(p + qt) + j_1 \leq p + \ell t + j_1 \leq n$$

对每个 $q \in [\ell]$。因此，根据引理 3.1(i)， $p+(q-1)t$ 和 $p+qt$ 对 $q \in [\ell]$ 相邻。另一方面，由 (11) 可得，

$$(p+\ell t+(q-1)s)-i_1 \geq (1+ks-j_1)+\ell t-i_1 = 1$$

对于每个 $q \in [k]$。因此，根据引理 3.1(ii)，对于每个 $q \in [k]$， $p+\ell t+(q-1)s$ 和 $p+\ell t+qs$ 相邻。最后，$(p+ks+\ell t)-p = i_1+j_1$，因此根据同一引理， p 和 $p+ks+\ell t$ 在 RG(T) 中相邻。因此，RG(T) 中由 W 诱导的子图是一个长度为 $k+\ell+1$ 的圈。

□

定理 3.5. 对于满足 $4 \leq m \leq n$ 且 $(m,n) \notin \{(4,4),(4,5),(6,8)\}$ 的任意整数 m 和 n，存在一个阶为 n、属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ 的托普利兹矩阵，其行图包含一个长度为 m 的环分支。

证明。对于整数 m 和 n，其中 $4 \leq m \leq n$ 且 $(m,n) \notin \{(4,4),(4,5),(6,8)\}$，我们 let

$$T = \begin{cases} T_n\langle n-m+1, n-m+2; m-2, n-1\rangle & \text{if } n < 2m-4; \\ T_n\langle 3,5; 2m-8, 2m-7\rangle & \text{if } n = 2m-4 \text{ and } m \geq 7; \\ T_6\langle 1,4; 3,5\rangle & \text{if } n = 6 \text{ and } m = 5; \\ T_n\langle 2,4; 2m-6, 2m-5\rangle & \text{if } n = 2m-3 \text{ and } m \geq 6; \\ T_7\langle 1,5; 4,6\rangle & \text{if } n = 7 \text{ and } m = 5; \\ T_n\langle m-2, n-1; n-m+1, n-m+2\rangle & \text{if } n > 2m-3. \end{cases}$$

我们首先证明，在每种情形下， T 都有定义。由假设 $4 \leq m \leq n$，可立即得出 $n-m+1$、$n-m+2$、$m-2$ 和 $n-1$ 都是正整数。在 $n = 2m-4$ 和 $n = 2m-3$ 的情形下， $2m-8 > 0$ 和 $2m-6 > 0$，因为 $m \geq 7$ 和 $m \geq 6$，分别如此。

此外，当 $n < 2m-4$ 时， $n-m+1 < n-m+2 < m-2 < n-1$；当 $n > 2m-3$ 时， $m-2 < n-m+1 < n-m+2 < n-1$。容易验证，上述情形 $n = 2m-4$ 和 $n = 2m-3$ 对应的四个参数彼此不同，且其排列满足我们对托普利兹矩阵所施加的条件。此外，利用定理 2.7，我们可以轻易验证每种情形下的 T 都属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$。

现在，若 $n < 2m-3$，则令 $k = m-2$ 和 $\ell = 1$；若 $n = 2m-4$和 $m \geq 7$，则令 $k = m-5$ 和 $\ell = 5$；若 $n = 2m-3$ 和 $m \geq 6$，则令 $k = m-4$ 和 $\ell = 4$；若$n > 2m-3$，则令 $k = 1$ 和 $\ell = m-2$。于是，整数 k 和 ℓ 满足引理 3.4 中给出的不等式和等式。因此，对于除$(m,n) \in \{(4,4)、(4,5)、(5,6)、(5,7)、(6,8)\}$以外的 $4 \leq m \leq n$， T 包含一个长度为 m 的圈。我们可以验证，152631 和 162731 分别是当$(m,n) = (5,6)$和$(m,n) = (5,7)$时 RG(T)中的 5-圈。由于 $T \in \mathcal{T}_{\leq 2}$，根据推论 2.5，一个 m-圈是 RG(T)的一个分量。

□

在 $\mathcal{T}_{\leq 2}$ is of the form $T_n\langle i_1, i_2; j_1\rangle$ or $T_n\langle i_1; j_1, j_2\rangle$ 中的矩阵里，我们可以找出其行图包含一个环分支的矩阵。我们需要以下引理。

引理 3.6. 设 G 是对称托普利兹矩阵 $ST_n\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ 的图，且最大公因数$(u_1,\ldots,u_k)$ $=d\geq 2$。此外，设 G_i 是由顶点集 $\{v\in V(G)\mid v\equiv i \pmod d\}$ 诱导的 G 的子图，其中对每个整数 $1\leq i\leq d$，且 r 是满足$r\equiv n \pmod d$ 和 $1\leq r\leq d$的整数。那么，对每个整数 $1\leq i\leq d$，G_i 与对称托普利兹矩阵 T_i 的图 H_i 同构，其中

$$T_i=\begin{cases} ST_{\lceil n/d\rceil}\langle u_1/d,\ldots,u_k/d\rangle & if\ 1\leq i\leq r;\\ ST_{\lceil n/d\rceil-1}\langle u_1/d,\ldots,u_k/d\rangle & if\ r+1\leq i\leq d.\end{cases}$$

此外，如果 $i\neq j$，则不存在连接 G_i 中一个顶点与 G_j 中一个顶点的边。

证明。取 G 中两个相邻顶点 x 和 y。那么，对称托普利兹矩阵 $ST_n\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ 的 (x,y) 项为 1，因此 $|x-y|\in\{u_1,\ldots,u_k\}$，根据假设，$x\equiv y$（模 d）。因此，根据 G_i 的定义，若 $i\neq j$，则连接 G_i 中某个顶点与 G_j 中某个顶点的边不存在。此外，$G_1,\ldots,G_r$ 各有 $\lceil n/d\rceil$ 个顶点，而 $G_{r+1},\ldots,G_d$ 各有 $\lceil n/d\rceil-1$ 个顶点。取 $i\in[r]$，并定义映射 $\varphi_i\colon V(G_i)\to V(H_i)$，将 $i+d\ell$ 映射到 $i+\ell$（$V(G_i)$ 中的每个元素都可写成 $i+d\ell$ 的形式，其中 ℓ 为整数）。那么显然，φ_i 是一个双射。现在，

x和 y 在 $G_i\Leftrightarrow |x-y|\in\{u_1,\ldots,u_k\}\Leftrightarrow |(x-y)$
$/d|\in\{u_1/d,\ldots,u_k/d\}\Leftrightarrow |\varphi_i(x)-\varphi_(y)|\in\{u_1/d,\ldots,u_k/d\}$
$\Leftrightarrow \varphi_i(x)$ 中相邻，且 $\varphi_i(y)$ 在 $T_{\lceil n/d\rceil}\langle u_1/d,\ldots,u_k/d\rangle$ 中相
邻。

因此 $G_i\cong H_i$。通过类似的论证，我们可以证明，对于 $i\in\{r+1,\ldots,d\}$，$G_i\cong H_i$。 □

引理 3.7. 设 G 是对称托普利兹矩阵 $ST_n\langle u_1$ 的图，$u_2\rangle$，并设 $d=$ 最大公因数(u_1,u_2) ≥ 2。此外，设 G_i 是由顶点集 $\{v\in V(G)\mid v\equiv i$（模 $d)\}$ 所诱导的 G 的子图，其中每个 $i=1,2,\ldots,d$，并设 r 为满足 $r\equiv n$(模 d) 且 $1\leq r\leq d$ 的整数。假设 $n\leq u_1+u_2\leq d\lceil n/d\rceil$。那么，对于每个$i=1,2,\ldots,r$，$G_i$ 都是一个圈。

证明。固定 $i\in[r]$。由引理 3.6，G_i 是 $ST_{\lceil n/d\rceil}\langle u_1/d$、$u_2/d\rangle$的图。根据假设，

$$\frac{n}{d}\leq\frac{u_1+u_2}{d}\leq\left\lceil\frac{n}{d}\right\rceil,$$

因此（u_1+u_2）$/d=\lceil n/d\rceil$。由引理 3.13 可知，G_i中存在一个长度为 $\lceil n/d\rceil$ 的圈 C_i。因此，C_i 是 G_i的一个哈密顿圈。任取 G_i中的一个顶点 v。那么v的每个邻点都属于 $\{v+u_2,v+u_1,v-u_2,v-u_1\}$。由于 $u_2+u_1\geq n$ 且（$v+u_2$）$-$（$v-u_1$）$=$ $u_1+u_2\geq n$，$v+u_2$ 和 $v-u_1$ 至多有一个是 G的顶点。出于同样的原因，$v+u_1$ 和 $v-u_2$ 至多有一个是 G的顶点。因此，v 的度至多为 2。由于 v 是任意选取的，G_i 中的每个顶点的度都至多为 2。因此，C_i本身是 G_i。 □

引理 3.8。设 $ST_n\langle u_1$是对称托普利兹矩阵的图 G， $u_2\rangle$，其中 gcd(u_1, u_2) =1。若 $u_1 + u_2 > n$, 则 G 是无环的。

证明。反设 $u_1+u_2 > n$ 和 G 包含一个圈 $v_1v_2\cdots v_\ell v_1$。固定$i \in [\ell]$。那么 $|v_{i+1}-v_i| = u_1$ 或 u_2（我们分别将 $v_{\ell+1}$ 和 $v_{\ell+2}$ 与 v_1 和 v_2视为相同）。假设 $v_{i+1} - v_i = \pm u_1$。若 $v_{i+2} - v_{i+1} = \mp u_1$, 则 $v_{i+2} - v_i = 0$, 矛盾。若 $v_{i+2} - v_{i+1} = \pm u_2$, 则 $|v_{i+2} - v_i| = u_1 + u_2 > n$, 又产生矛盾。因此，若$v_{i+1} - v_i = \pm u_1$, 则 $v_{i+2} - v_{i+1} = \pm u_1$ 或 $\mp u_2$。用类似的论证可得，若 $v_{i+1} - v_i = \pm u_2$, 则 $v_{i+2} - v_{i+1} = \mp u_1$ 或 $\pm u_2$。因此，对每个 $i \in [\ell]$ 都有 $v_{i+1} - v_i \in \{u_1, -u_2\}$，或者对每个 $i \in [\ell]$都有 $v_{i+1} - v_i \in \{-u_1, u_2\}$。我们假设前一种情况。令 n_1和 n_2 分别表示满足 $v_{i+1} - v_i = u_1$ 和 $v_{i+1} - v_i = -u_2$的 i 的数量。那么$n_1u_1 + n_2(-u_2) = 0$, 所以 $n_1u_1 = n_2u_2$。由于u_1和u_2的最大公因数为 $= 1$, $n_1 \geq u_2$ 和 $n_2 \geq u_1$，因此 $n_1 + n_2 \geq u_1 + u_2 > n$，这就导致矛盾。用类似的论证可知，后一种情况也会导致矛盾。 □

现在我们可以刻画形如 $T_n\langle i_1, i_2; j_1\rangle$ 的矩阵，其行图包含一个圈。

定理 3.9。设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1\rangle$ 是一个托普利兹矩阵，且 $\mathcal{T}_{\leq 2}$, $d =$ gcd$(i_1 + j_1, i_2 - i_1)$，并设 r 为满足 $1 \leq r \leq d$ 和 $n \equiv r$ （模 d）的整数。那么， T 的行图包含一个圈，当且仅当 $i_2 \neq 2i_1 + j_1$, $i_2 + j_1 \leq d\lceil n/d\rceil$ 和 $1 + i_1 \leq r$。特别地，若行图包含一个圈，则其长度为 $\lceil n/d\rceil$。

证明。令 $G =$ RG(T)。由于根据假设， T 属于 $\mathcal{T}_{\leq 2}$，根据定理 2.7， $i_2 + j_1 \geq n$。因此，根据命题 3.11， G 是图 L 的生成子图，其中 $ST_n\langle i_1 + j_1$， $i_2 - i_1\rangle$。令 G_i 表示由顶点集 $\{v \in V(G) \mid v \equiv i$ (模 $d)\}$ 诱导的 L 的子图，对每个 $i = 1$, ..., d。

为证明“仅当”部分，假设 G 包含一个圈 C。那么 L 包含 C。根据引理 3.6， C 包含于某个 $t \in [d]$ 的 G_t 中。根据同一引理， G_t 与 $ST_{\lceil n/d\rceil}\langle(i_1 + j_1)/d$、$(i_2 - i_1)/d\rangle$ 或 $ST_{\lfloor n/d\rfloor}\langle(i_1 + j_1)/d$、$(i_2 - i_1)/d\rangle$ 的图同构。注意，

$$\left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil - 1 < \frac{n}{d} \leq \frac{i_2 + j_1}{d} = \frac{i_1 + j_1}{d} + \frac{i_2 - i_1}{d}.$$

因此，如果 G_t 与 $ST_{\lceil n/d\rceil-1}\langle(i_1 + j_1)/d$的图$(i_2 - i_1)/d\rangle$同构，那么根据引理 3.8， G_t 是无环的，由此便得到矛盾。因此 G_t 与 $ST_{\lceil n/d\rceil}\langle(i_1 + j_1)/d$的图$(i_2 - i_1)/d\rangle$同构。由引理 3.6， $t \in [r]$。

反设 $i_2 + j_1 > d\lceil n/d\rceil$。那么

$$\left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil < \frac{i_2 + j_1}{d} = \frac{i_1 + j_1}{d} + \frac{i_2 - i_1}{d}.$$

因此，由引理 3.8， $ST_{\lceil n/d\rceil}\langle(i_1 + j_1)/d$、$(i_2 - i_1)/d\rangle$ 的图是无环的，于是我们得到矛盾。因此 $i_2 + j_1 \leq d\lceil n/d\rceil$。然后。

$$\frac{n}{d} \leq \frac{i_2 + j_1}{d} \leq \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil,$$

因此 $(i_2+j_1)/d=\lceil n/d\rceil$。由引理 3.7， G_t 是一个圈。因此， $G_t=C$ 且 C 的长度为 $(i_2+j_1)/d$。

由于 G_t 是一个圈， t 与 G_t中的两个顶点相邻。由于 G是 $T_n\langle i_1$的行图， i_2; $j_1\rangle$、 $t+i_2-i_1$、 $t+i_1+j_1$和 $t+i_2+j_1$是 t唯一可能的邻居。由于 $i_2+j_1\geq n$、 $t+i_2-i_1$ 和 $t+i_1+j_1$ 是 t的两个邻居。现在，若 $1+i_1>r$，则 $1\leq i\leq r<1+i_1$，因此根据引理 3.1， i 和 $i+i_2-i_1$ 在 G 中不可能相邻。因此 $1+i_1\leq r$，我们已经证明了“当且仅当”中的“仅当”部分。

为证明“如果”部分，假设 $i_2+j_1\leq d\lceil n/d\rceil$ 和 $1+i_1\leq r$。令 H为 G 中由顶点集 $\{v\in V(G)\mid v\equiv i_1+1 \pmod d\}$诱导的子图。由于 $1+i_1\leq r$、 H 有 $\lceil n/d\rceil$ 个顶点，且 $1+i_1$ 是标号最小的顶点。我们证明 $H=G_{i_1+1}$。根据定义， $V(H)=V(G_{i_1+1})$。由于 G 是 L的子图， H 是 G_{i_1+1}的子图。取 G_{i_1+1}中的两个相邻顶点 x 和 y。那么 $|x-y|=i_2-i_1$ 或 i_1+j_1。若 $|x-y|=i_1+j_1$，则 x 和 y 在 G 中相邻，因此也在 H中相邻。假设 $|x-y|=i_2-i_1$。不失一般性，我们可以假设 $x-y=i_2-i_1$。由于 $y\in V(H)$， $y\geq 1+i_1$。因此，根据引理 3.1， x 和 y 在 G 中相邻，因而也在 H中相邻。因此我们已经证明 $H=G_{i_1+1}$。根据引理 3.7， G_{i_1+1} 是一个圈。因此 H 也是一个圈，这意味着 G 含有一个圈。

□

由于 $T_n\langle\alpha;\beta\rangle$ 和 $T_n\langle\beta;\alpha\rangle$ 的行图同构，我们也可以得到以下结果。

推论 3.10. 设 $T=T_n\langle i_1;\ j_1,j_2\rangle$ 是 $\mathcal{T}_{\leq 2}$, $d=\gcd(i_1+j_1,j_2-j_1)$ 中的一个托普利兹矩阵，且 r 是一个整数，使得 $1\leq r\leq d$ 和 $n\equiv r \pmod d$ 成立。那么， T 的行图包含一个圈，当且仅当 $j_2\neq i_1+2j_1$, $i_1+j_2\leq d\lceil n/d\rceil$ 和 $1+j_1\leq r$。特别地，如果行图包含一个圈，那么其长度为 $\lceil n/d\rceil$。

在下一小节中，我们重点讨论 $\mathcal{T}^{\star}_{\leq 2}$ 中行图仅由圈分量构成的托普利兹矩阵。我们用 $\mathcal{T}^{\circ}_{\leq 2}$ 表示这类矩阵的集合。

3.2 $\mathcal{T}^{\circ}_{\leq 2}$中的托普利兹矩阵

我们首先给出托普利兹矩阵属于 $\mathcal{T}^{\circ}_{\leq 2}$ 的一个充分条件。在此之前，我们需要推导若干结果。

回忆一下， $\mathcal{C}(T)$ 表示托普利兹矩阵 T 对应的 $\mathrm{RG}(T)$ 的邻接矩阵，而 $ST_n\langle\gamma\rangle$ 表示对称托普利兹矩阵 $T_n\langle\gamma,\gamma\rangle$。如果 $\mathcal{C}(T)$ 是一个阶为 n 的托普利兹矩阵 T 的托普利兹矩阵，那么对于某个 $\gamma\subset[n-1]$，有 $\mathcal{C}(T)=ST_n\langle\gamma\rangle$，因为 $\mathcal{C}(T)$ 是对称的。

对于 $\alpha=\{i_1,\ldots,i_{k_1}\}$ 和 $\beta=\{j_1,\ldots,j_{k_2}\}$，其中 k_1、 $k_2\geq 2$，基于引理 3.1 定义以下集合：

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\{i_t-i_s\in[n-1]\mid 1\leq s<t\leq k_1\};\\ \gamma_2&=\{j_t-j_s\in[n-1]\mid 1\leq s<t\leq k_2\};\\ \gamma_3&=\{i_s+j_t\in[n-1]\mid 1\leq s\leq k_1, 1\leq t\leq k_2\}.\end{aligned}\tag{12}$$

wh当 $k_1 \le 1$（分别为 $k_2 \le 1$）且 $\gamma_3 = \emptyset$（若 $\alpha = \emptyset$ 或 $\beta = \emptyset$）时，$\gamma_1 = \emptyset$（分别为 $\gamma_2 = \emptyset$）。

为方便起见，我们令

$$\gamma(\alpha, \beta) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3.$$

我们将 $A \le B$ 记作满足以下条件的 $A = [a_{ij}]$ 阶矩阵 $B = [b_{ij}]$ 和 n。其中，对于所有 i, $j \in [n]$ 均成立。由引理 3.1 可立即得到以下结果。

命题 3.11. 对于 $T = T_n\langle\alpha; \beta\rangle$, T 的行图是 $ST_n\langle\gamma(\alpha, \beta)\rangle$ 的图的生成子图，即 $\mathcal{C}(T)$ $\le ST_n\langle\gamma(\alpha, \beta)\rangle$.

命题 3.12. 设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$ 是一个具有 $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$和 $2(i_1 + j_1) \ne n$的托普利兹矩阵。那么， T的行图是 $ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$ 的图，并且仅由环分支组成。

证明。根据 (12) 和命题 3.11， $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$, $\mathcal{C}(T) \le ST_n\langle i_2 - i_1, j_2 - j_1, i_1 + j_1\rangle$。根据假设， $j_2 - j_1 = i_2 - i_1 = n - (i_1 + j_1)$，因此 $ST_n\langle i_2 - i_1, j_2 - j_1, i_1 + j_1\rangle = ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$。为了证明 $\mathcal{C}(T) = ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$，取 $ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$ 中的一个元素 1。设 (v, w) 为该元素的地址。根据对称性，不妨设 $v < w$。根据托普利兹矩阵的定义， $w - v = i_1 + j_1$ 或 $w - v = n - (i_1 + j_1)$。

如果 $w - v = i_1 + j_1$，那么根据引理 3.1(iii)， $\mathcal{C}(T)$ 的 (v, w)-项为 1。现在假设 $w - v = n - (i_1 + j_1)$。

情形 1. $w \le n - j_1$。那么 $j_1 \le n - w$。此外， $v = w - (n - j_1) + i_1 \le i_1 = n - j_2$，所以 $j_2 \le n - v$。由于 $w - v = n - (i_1 + j_1) = j_2 - j_1$，根据引理 3.1(i)， $\mathcal{C}(T)$ 的 (v, w)-项为 1。

情形 2. $w > n - j_1$。那么 $w > i_2$ 和 $v = w - (n - j_1) + i_1 > i_1$。由于 $w - v = n - (i_1 + j_1) = i_2 - i_1$，根据引理 3.1(ii)， (v, w)-项为 1。

在这两种情形下，我们已经证明了 $\mathcal{C}(T) = ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$。已知对称托普利兹矩阵 $ST_n\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ 中 1 的数量为 $2(kn - \sum_{i=1}^{k} u_i)$。因此 $ST_n\langle i_1 + j_1, n - (i_1 + j_1)\rangle$ 恰好有 $2n$ 个值为 1 的条目，所以 $\mathcal{C}(T)$ 有 $2n$ 个值为 1 的条目，这意味着每个行和恰好为 2。因此， $\mathcal{C}(T)$ 仅由圈分量组成。 □

引理 3.13 ([1])。设 G 是一个对称托普利兹矩阵 $ST_n\langle u_1$ 的图， $u_2\rangle$ 满足 $n \ge u_1 + u_2$。那么 G 包含一个长度为 $(u_1 + u_2)$/最大公因数(u_1, u_2) 的圈。

在上一节中，我们证明了长度至少为 5 的圈是托普利兹行图。现在，我们来确定其行图均为圈的托普利兹矩阵。

定理 3.14. 托普利兹矩阵 T 的行图是一个圈，当且仅当 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$ 满足 $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$ 且 $\gcd(n, i_1 + j_1) = 1$。

证明。为证明“若”这一部分，设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$ 满足 $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$ 且 $\gcd(n, i_1 + j_1) = 1$。我们将 T的行图记为 G。根据命题 3.12， G 由

圈分量构成。由于 gcd$(n, i_1 + j_1) = 1$, $n - (i_1 + j_1) \neq i_1 + j_1$。因此，根据引理 3.13， G 包含一个长度为 n的圈。因此， G 本身是一个长度为 n的圈。

为了证明“仅当”部分，假设托普利兹矩阵 $T\langle\alpha$ 的行图 G 是长度为 n 的圈。由命题 2.13， $n \geq 5$。由推论 2.4， T 的最大行和至多为 2。假设 $|\alpha| = 1$。根据 $i_1 + j_2 = n$ 的假设以及引理 3.1(i) 和 (iii)，顶点 n 仅与 $n - i_1 - j_1$ 相邻。因此， n 在 G 中的度为 on。用类似的论证可以证明，如果 $|\beta| = 1$，则 1 仅与 $1 + i_1 + j_1$ 相邻。在这两种情况下，我们都得出了矛盾。因此， $|\alpha| = |\beta| = 2$。由引理 3.1， G 至多有

$$(n - j_2) + (n - i_2) + (n - j_1 - i_1) = 3n - (i_1 + j_2) - (i_2 + j_1)$$

边。由于 G 是一个长度为 n 的圈，

$$3n - (i_1 + j_2) - (i_2 + j_1) \geq n.$$

另一方面，由于 T 的行和至多为 2， $i_1 + j_2 \geq n$ 和 $i_2 + j_1 \geq n$由定理 2.7 得出。因此 $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$。于是，若 w 和 x 在 G中相邻，则由引理 3.1 可得 $|w - x| \in \{i_2 - i_1, j_2 - j_1, i_1 + j_1\}$。现在令 $d =$为 n、 $i_1 + j_1$的最大公因数。由于 $i_2 - i_1 = j_2 - j_1 = n - (i_1 + j_1)$， d 是 $i_2 - i_1$、 $j_2 - j_1$和 $i_1 + j_1$的公因数。因此，若 w 和 x在 G中相邻，则 $w \equiv x$ (模 d)。若 $d > 1$，则 $1 \neq 2$ (模 d)，且 G 至少有两个分量，这是不可能的。因此 $d =$为 n、 $i_1 + j_1$的最大公因数 $= 1$。 □

根据定理 2.10，任何无三角形托普利茨行图都不可能包含长度各不相同的三个圈。然而，我们尚未找到包含两种不同长度的圈的无三角形托普利茨行图。下面的定理给出了这类托普利茨矩阵中的一些例子，其行图由长度相同的圈构成，从而推广了定理 3.14。

定理 3.15. 设 $T = T_n\langle i_1, i_2; j_1, j_2\rangle$ 是一个满足 $i_1 + j_2 = i_2 + j_1 = n$ 且 $2(i_1 + j_1) \neq n$ 的托普利兹矩阵。那么， T 的行图恰好是 d 个长度为 n/d 的圈的不交并，其中 $d =$ 是 n 和 $i_1 + j_1$ 的最大公因数。

证明。令 G 为 T 的行图。由命题 3.12， G 是 $ST_n\langle i_1 + j_1$、 $n-(i_1+j_1)\rangle$ 的图，且仅由圈分量组成。对每个 $i \in [d]$，令 $V_i = \{i, i+d, \ldots, i+(n/d-1)d\}$。于是，由引理 3.6， G 中由 V_i 诱导的子图 G_i 与 $ST_{n/d}\langle(i_1 + j_1)/d$、$(n - i_1 - j_1)/d\rangle$ 的图同构，并且当 $i \neq j$ 时， G_i 中的顶点与 G_j 中的顶点之间没有边。由定理 3.14， $ST_{n/d}\langle(i_1 + j_1)/d$、$(n - i_1 - j_1)/d\rangle$ 是长度为 n/d 的圈，至此证明完毕。 □

参考文献

[1] G.-S. Cheon, J.-H. Jung, B. Kang, S.-R. Kim, 和 S. A. Mojallal, 《托普利茨图的子图刻画》，审稿中。

[2] J. Choi, K. S. Kim, S.-R. Kim, J. Y. Lee, 和 Y. Sano，《关于 d偏序的竞争图》，《离散应用数学》，204:29–37，2016年。[3] J. E. Cohen，《区间图与食物网：一项发现与一个问题》，RAND 公司文档，17696-PR。兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，1968年。[4] K. A. S. Factor 和 S. K. Merz，《竞赛图的 (1, 2) 步竞争图》，《离散应用数学》，159(2):100–103，2011年。[5] K.F. Fraughnaugh, J.R. Lundgren, J.S. Maybee, S.K. Merz, 和 N.J. Pullman，《强连通有向图和哈密顿有向图的竞争图》，SIAM 离散数学杂志，8:179–185，1995年。[6] I. Gohberg（编），《托普利茨百年纪念》，Birkh¨auser，波士顿，1982年。[7] Harvey J Greenberg, J Richard Lundgren, 和 John S Maybee，《矩形矩阵的逆图》，《离散应用数学》，8(3):255–265，1984年。[8] D. Guichard，《哈密顿有向图的竞争图》，SIAM 离散数学杂志，11:128–134，1998年。[9] K. A. S. Hefner, K. F. Jones, S.-R. Kim, J. R. Lundgren, 和 F. S. Roberts，《(i, j) 竞争图》，《离散应用数学》，32:241–262，1991年。[10] G. Heinig 和 K. Rost，《托普利茨型矩阵与算子的代数方法》，Birkh¨auser，波士顿，1984年。[11] I. S. Iohvidov，《Hankel 矩阵和托普利茨矩阵与形式的代数理论》，Birkh¨auser，波士顿，1982年。[12] J.-H. Jung, S.-R. Kim, B. Kang, 和 G.-S. Cheon，《本原有向托普利茨图的指数》，线性与多重线性代数（即将出版）。[13] S.-R. Kim, J.Y. Lee, B. Park, W.J. Park, 和 Y. Sano，《双偏序的生态位图》，《数值学大会》，195:19–32，2009年。[14] S.-R. Kim, J.Y. Lee, B. Park, 和 Y. Sano，《双偏序的竞争超图》，《离散应用数学》，165:185–191，2014年。[15] S.-R. Kim, J.Y. Lee, B. Park, 和 Y. Sano，《定向完全二部图的竞争图》，《离散应用数学》，201:182–190，2016年。[16] S.-R. Kim 和 F.S. Roberts，《半序的竞争图及条件$\mathcal{C}(p)$和 $c^*(p)$》，《组合艺术》，63:161–173，2002年。[17] J. Kuhl，《完全多部图的横截集与竞争数》，《离散应用数学》，161(3):435–440，2013年。

[18] L. Langley、J.R. Lundgren 和 S.K. Merz，《区间有向图的竞争图》，《数值学大会》，107:37–40，1995年。[19] B.-J. Li 和 G. J. Chang，《完全 r部图的竞争数》，《离散应用数学》，160(15):2271–2276，2012年。[20] J.R. Lundgren，《食物网、竞争图、竞争共同敌人图和生态位图》，载于 f.s. roberts（编），《生物与社会科学中的应用组合图论》，17:221–243，1989年。[21] J.R. Lundgren、J.S. Maybee 和 C.W. Rasmussen，《对称有向图的区间竞争图》，Discrete Math.，119:113–122，1993年。[22] J.R. Lundgren 和 C.W. Rasmussen，《树的二步图》，Discrete Math.，119:123–140，1993年。[23] S. Malik 和 T. Zamfirescu，《有向托普利茨图的哈密顿连通性》，Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum.，53(2):145–156，2010年。[24] B. Park、J.Y. Lee 和 S.-R. Kim，《双偏序的 m步竞争图》，Appl. Math. Lett.，24:811–816，2011年。[25] B. Park 和 Y. Sano，《双偏序的系统发育图》，Discuss. Math. Graph Theory，33:657–664，2013年。[26] A. Raychaudhuri 和 F.S. Roberts，《广义竞争图及其应用》，载于 p. br¨ucker 和 r. pauly（编），《运筹学方法》，49:295–311，1985年。[27] R. C. Brigham 和 R. D. Dutton，《竞争图的刻画》，《离散应用数学》，6:315–317，1983年。[28] F. S. Roberts 和 J. E. Steif，《任意有向图的竞争图的刻画》，《离散应用数学》，6:323–326，1983年。[29] X. Zhang 和 R. Li，《非可循环分解纯局部竞赛图的 (1, 2) 步竞争图》，《离散应用数学》，205:180–190，2016年。