arXiv:2305.02692v1 [math.RT] 4 May 2023

不可约 表示的扭曲 Heisenberg-Virasoro Hom型代数 [1]

范秋丽、程永胜河南大学数学学院，河南开封 475004，中国

摘要：Hom-Lie 代数是通过线性映射扭曲雅可比恒等式而推广李代数得到的非结合代数。本文主要研究 Hom 型扭曲海森堡–维拉索罗代数的不可约表示，这些表示可以由其诱导李代数的不可约表示诱导得到。特别地，我们构造了 Hom 型扭曲海森堡–维拉索罗代数的若干类不可约表示。

关键词：Hom-Lie 代数、Hom 型扭曲海森堡-维拉索罗代数、不可约表示

MR（2020）学科分类 17A30、17B61、17B68。

§1. 引言

零级扭曲海森堡–维拉索罗李代数最初由 [2], 引入，它是圆上阶数至多为一的微分算子李代数的泛中心扩张。该李代数包含一个无限维海森堡子代数和一个维拉索罗子代数。然而，这些子代数并不构成半直积；相反，维拉索罗子代数对海森堡子代数的自然作用带有一个扭曲的 2-余循环。

研究 Hom-Lie 结构的动机与物理学以及李代数变形有关，尤其是向量场李代数的变形。作为李代数的推广，Hom-Lie 代数由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov 在 [9] 中引入，作为研究 Witt 代数和维拉索罗代数变形的一部分。Hom-Lie 代数是一个三元组 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$，其括号满足反对称性，并沿线性映射 φ 满足扭曲的雅可比恒等式，称为 Hom-Jacobi 恒等式。这些代数的主要特点是，定义其结构的恒等式经由同态进行了扭曲。典型的例子包括 q-变形的 Witt 代数和维拉索罗代数、海森堡-维拉索罗代数，以及在开创性研究 [6, 8, 10, 16] 中构造的其他代数结构。

Hom-Lie 代数表示论由 Sheng 在 [15], 中引入，其中研究了 Hom-Lie 代数的 Hom-余链复形、导子、中心扩张、导子扩张、平凡表示和伴随表示。此外， [4, 5, 7, 12] 研究了（双） Hom- 代数的（上）同调和变形理论。

[1]S获国家自然科学基金（项目编号：11047030 和 11771122）资助 .

扭曲 g 的扭曲映射的多样性使这一主题既有趣又复杂。 .

如今，数学领域最普遍的趋势之一与表示论有关。这一主题是数学和物理学大多数分支中的重要工具。盛云鹤在 [15] 中引入了乘法型 Hom-Lie 代数的表示。[1, 11] 中介绍了 Hom-Lie 代数的表示与其诱导李代数之间的关系。根据 [1], ，当 $\phi \in End(V)$ 可逆时，可以通过半单李代数的不可约表示得到 Hom 型李代数的不可约表示。基于这一理论，Hom 型 $sl(2)$ 模分为四类，包括

（1）有限维不可约模；（2）不可约无限维低权 Hom-sl(2) 模；（3）不可约无限维高权 Hom-sl(2) 模；（4）不可约无限维 Hom-sl(2) 模（中间系列的 Hom 模）。基于此，本文旨在对 Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的不可约表示进行分类。

Hom-Lie 代数是非结合代数，它通过用线性映射扭曲雅可比恒等式来推广李代数。在 [14], 中，作者确定了扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的若干类非平凡乘法 Hom-Lie 结构。本文主要研究 Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的不可约表示，这些表示可由其诱导李代数的不可约表示给出。特别地，我们构造了 Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的若干类不可约表示。本文旨在研究 Bihom-Lie 代数的表示。本文组织如下。第二节给出扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数及其若干 Harish-Chandra 模的基本定义。随后，我们回顾表示的定义，并介绍 Hom-Lie 代数的表示与其诱导李代数的表示之间的关系。第三节中，对于该系列的 Harish-Chandra 模，我们得到 Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的不可约表示。需要指出的是，这些不可约表示并不总是权模。

§2. 记号与预备知识

In t本节将介绍一些记号、定义和预备结果 .

定义 2.1 扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 定义为具有一组基的李代数

$$\{L_n, I_n, C_L, C_L I, C_I | n \in \mathbb{Z}\}$$

满足以下对易关系

$$
\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m}\tfrac{n^3-n}{12}C_L, \\
[L_n, I_m] &= -mI_{n+m} + \delta_{n,-m}(n^2+n)C_{LI}, \\
[I_n, I_m] &= n\delta_{n,-m}C_I, \\
[\mathcal{L}, C_L] &= [\mathcal{L}, C_{LI}] = [\mathcal{L}, C_I] = 0.
\end{aligned}
$$

以下定理来自 [14]。

定理 2.2 扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数 φ 的任意非零自同态均具有如下形式:

$$\varphi(L_n) = \frac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn} + \delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C_L + \delta_{n,0}(ck+d)C_{LI} + \delta_{n,0}\frac{k}{2}(c^2-d^2)C_I, \tag{2.1}$$

$$\varphi(I_n) = a^n bI_{kn} + \delta_{n,0}b((1-k)C_{LI} - (kc+kd)C_I), \tag{2.2}$$

$$\varphi(C_L) = kC_L - 24kcC_{LI} - 12kc^2C_I, \tag{2.3}$$

$$\varphi(C_{LI}) = kbC_{LI} + kbcC_I, \tag{2.4}$$

$$\varphi(C_I) = kb^2C_I, \tag{2.5}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ 和 $a \neq 0$。

Liu 和 Jiang 于 2008年 在 [13] 中给出了扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的中间系列模的分类。扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上有七个中间系列不可分解模族，也就是说，这些是权重数至多为一的非平凡不可分解权模。它们是没有中心荷的维拉索罗模。

定理2.3 在海森堡-维拉索罗代数上，任何中间系列的 Harish-Chandra 模（若不可约）都同构于以下模之一

或它们的非平凡简单子商。

$$A(\alpha,\beta,F): L_n(v_t)=(\alpha+t+\beta n)v_{n+t}, I_n(v_t)=Fv_{n+t}; \tag{2.6}$$

$$A(\alpha,F): \ L_n(v_t)=(t+n)v_{n+t}, \ \ t\neq 0, \ \ L_n(v_0)=n(n+\alpha)v_n,$$

$$I_n(v_t)=0, t\neq 0, I_n(v_0)=nFv_n; \tag{2.7}$$

$$B(\alpha,F): \ L_n(v_t)=tv_{n+t}, \ \ t\neq -n, \ \ L_n(v_{-n})=-n(n+\alpha)v_0,$$

$$I_n(v_t)=0, t\neq -n, I_n(v_{-n})=nFv_0; \tag{2.8}$$

$$U_F: L_n(v_t)=tv_{n+t}, I_n(v_t)=0, t\neq -n, I_n(v_{-n})=nFv_0; \tag{2.9}$$

$$V_F: L_n(v_t)=(t+n)v_{n+t}, I_n(v_t)=0, t\neq 0, I_n(v_0)=nFv_n; \tag{2.10}$$

$$\widetilde{U}_F: L_n(v_t)=tv_{n+t}, t\neq -n, L_n(v_{-n})=0, I_n(v_t)=0, t\neq -n, I_n(v_{-n})=nFv_0; \tag{2.11}$$

$$\widetilde{V}_F: \ L_n(v_t)=tv_{n+t}, \ \ t\neq -n, \ \ L_n(v_{-n})=0,$$

$$I_n(v_t)=0, t\neq 0 \ or \ n=t=0, I_n(v_0)=Fv_n, \tag{2.12}$$

其中 α、β、γ、$F\in\mathbb{C}$、n、$t\in\mathbb{Z}$ 以及 C_L、C_I、C_{LI} 作平凡作用。

容易看出，上述模彼此不同构。设 v_n、$n\in\mathbb{Z}$ 是中间系列 Harish-Chandra 模的一个基。

定义 2.4 Hom 李代数是三元组（$\mathcal{L}$，$[\cdot,\cdot]_\varphi$，φ），由一个向量空间 $\mathcal{L}$、一个双线性映射 $[\cdot,\cdot]_\varphi$：$\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 以及一个线性映射 φ：$\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 组成，并且对任意x、y、$z\in\mathcal{L}$ 满足

$$[x,y]_\varphi=-[y,x]_\varphi,$$
$$[\varphi(x),[y,z]_\varphi]_\varphi+[\varphi(y),[z,x]_\varphi]_\varphi+[\varphi(z),[x,y]_\varphi]_\varphi=0.$$

Hom 李代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot]_\varphi,\varphi)$ 被称为乘法 Hom-Lie 代数，如果

$$\varphi([x,y]_\varphi)=[\varphi(x),\varphi(y)]_\varphi).$$

若 α 可逆，则称乘法 Hom-Lie 代数为正则的。

接下来的命题源自 [1]，它告诉我们，利用李代数及其同态，可以得到相应的乘法 Hom-Lie 代数。

命题 2.5 设 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，且 φ 是一个李代数同态。则 $(\mathcal{L}_\varphi,[\cdot,\cdot]_\varphi:=\varphi\circ[\cdot,\cdot],\varphi)$ 是一个乘法 Hom-Lie 代数。

我们称 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ 为乘法 Hom-Lie 代数 $(\mathcal{L}_\varphi, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 的诱导李代数。由命题 2.5 可知，我们可以轻易得到下一个命题。

命题 2.6 设 $(\mathcal{L}_\varphi, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 是一个正则 Hom-Lie 代数，则 $(\mathcal{L}, \varphi^{-1}\circ[\cdot,\cdot])$ 是 $(\mathcal{L}_\varphi, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 的诱导李代数。

定义 2.7 Hom 李代数 $\mathcal{L}$ 在向量空间 V 上关于 $\phi \in End(V)$ 的一个表示是线性映射 $\rho_\phi : \mathcal{L} \to End(V)$，满足：对于任意 $x, y \in \mathcal{L}, v \in V$，均有：

$$\rho_\phi([x,y]_\varphi)\circ\phi(v) = \rho_\phi(\varphi(x))\rho_\phi(y)(v) - \rho_\phi(\varphi(y))\rho_\phi(x)(v). \tag{2.13}$$

我们称 (V, ρ_ϕ, ϕ) 为一个 $\mathcal{L}$-模。

对于乘法 Hom-Lie 代数 $\mathcal{L}$，若 (V, ρ_ϕ, ϕ) 满足 (2.13) 且

$$\rho_\phi(\varphi(x))\circ\phi(v) = \phi\circ\rho_\phi(x)(v), \tag{2.14}$$

th则称 (V, ρ_ϕ, ϕ) 为乘法 Hom-Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的一个表示 .

定义 2.8 设 (V, ρ_ϕ, ϕ) 是 Hom-Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的一个表示。若对于任意 $x \in \mathcal{L}$，W 是 V 在 $\rho_\phi(x)$ 下的不变子空间，则称 $(W, \rho_\phi, \phi|_W)$ 为 $\mathcal{L}$ 的一个子表示。

表示 (V, ρ_ϕ, ϕ) of $\mathcal{L}$ 被称为不可约的，如果它具有非平凡的 $\mathcal{L}$-子表示。

在 [11], 中，作者介绍了乘法 Hom-Lie 代数的表示与其诱导李代数的表示之间的关系。

定理 2.9 设 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 是一个乘法 Hom-Lie 代数，其诱导李代数为 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$。

(1) 如果 (V, ρ_ϕ, ϕ) 是 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 的一个表示，其中 ϕ 是可逆的，则 (V, ρ) $=(V, \phi^{-1}\circ\rho_\phi)$ 是 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示。(2) 假设 (V, ρ) 是 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ 的一个表示。如果存在 $\phi \in End(V)$ 使得 (2.14) 成立，则 (V, ρ_ϕ, ϕ) 是 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 的一个表示。

由定理 2.9 可知，乘法 Hom-Lie 代数的表示与其诱导李代数的表示之间存在关联。与之类似，[1], 下面的定理给出了李代数的不可约表示与相应乘法 Hom-Lie 代数的不可约表示之间的密切关系。

定理 2.10 设 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 是一个乘法 Hom-Lie 代数，(V, ρ_ϕ, ϕ) 是一个表示，且 ϕ 可逆。若 (V, ρ) 是诱导李代数的一个不可约表示，则 $(V, \rho_\phi := \phi \circ \rho, \phi)$ 是该乘法 Hom-Lie 代数的一个不可约表示。

证明. 假设 (V, ρ_ϕ, ϕ) 可约。那么，存在 $W \neq 0$，它是 V 的一个子空间，使得 $(V, \rho_\phi, \phi|W)$ 是 $(\mathcal{L}, \rho_\phi, \phi)$ 的子模。也就是说，$\phi(W) \subset W$ 且 $\rho_\phi(x)W \subset W, \forall x \in \mathcal{L}$。因此，$\phi \circ \rho(x)W \subset W, \forall x \in \mathcal{L}$，进而 $\rho(x)W \subset \phi^{-1}(W) \subset W, \forall x \in \mathcal{L}$。所以 W 是 (V, ρ) 的子模。这与假设矛盾。□

根据定义 2.1 和命题 2.5，我们得到 Hom型扭曲海森堡–维拉索罗代数，它是一个乘法 Hom-Lie 代数。在 [14], 中，作者证明了扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-Lie 代数结构。

引理 2.11 对于扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$，其非平凡 Hom-Lie 代数结构 $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot]_\varphi, \varphi)$ 如下所示:

$$\varphi(L_n) = L_n + dI_n + \delta_{n,0} dC_{LI} - \delta_{n,0} \frac{d^2}{2} C_I, \tag{2.15}$$

$$\varphi(I_n) = I_n - \delta_{n,0} dC_I, \tag{2.16}$$

$$\varphi(C_L) = C_L, \tag{2.17}$$

$$\varphi(C_{LI}) = C_{LI}, \tag{2.18}$$

$$\varphi(C_I) = C_I, \tag{2.19}$$

其中 $\varphi:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}, d \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$。

§3. Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的不可约表示

根据定理 2.3，我们知道，扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的中间系列 Harish-Chandra 模有七类：$A(\alpha, \beta, F)$、$A(\alpha, F)$、$B(\alpha, F)$、$\sim$ $\sim U_F$、V_F、U_F、V_F。本节中，我们假设扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的这七类中间系列 Harish-Chandra 模均为不可约。因此，利用定理 2.9、2.10 和引理 2.11，我们可以用扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的不可约表示构造 Hom 型扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的不可约表示。

我们可以设这些 Hom 型模分别为 $A'(\alpha, \beta, F)$、$A'(\alpha, F)$、$B'(\alpha, F)$、U'_F、V'_F、$\sim$ $\sim U'_F$、V'_F。需要注意的是，如果线性映射 $\phi \in End(V)$ 可逆，那么这些 Hom 型表示也是不可约表示，而这些 Hom 型模并不总是权模。

接下来，我们分别由定理 2.10 给出扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的 Hom 型不可约表示。根据引理 2.11，我们知道扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-Lie 代数结构。于是，扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的 Hom 型不可约表示 $\mathcal{L}_\varphi$ 可以由其诱导李代数的不可约表示 $\mathcal{L}$诱导得到。

引理 3.1 由 (2.6) 定义的 $A(\alpha,\beta,F)$ 是 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。由 $A(\alpha,\beta,F)$ 诱导得到的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 $A'(\alpha,\beta,F)$ 可定义如下。

$$L_n(v_t)=(\alpha+t+\beta n)a^{n+t}mv_{k(n+t)+q}, I_n(v_t)=Fa^{n+t}mv_{k(n+t)+q},$$

其中 $m=a_{0,q}$, $q=k\alpha-\alpha-kFd\in\mathbb{Z}$。

证明. (1) $A(\alpha,\beta,F)$:
由 $\rho((\varphi(x))\circ\phi=\phi\circ\rho(x)$，当 $x=L_n$ 时，我们可以得到,

$$\phi\circ\rho(L_n)=\rho((\varphi(L_n))\circ\phi, n\in\mathbb{Z},$$

then

$$\phi\circ\rho(L_n)(v_t)=\rho((\varphi(L_n))\circ\phi(v_t), n,t\in\mathbb{Z}.$$

设 $\phi(v_t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{t,j}v_j$，由 (2.1) 可得,

$$\phi((L_n)v_{n+t})=(\tfrac{1}{k}a^nL_{kn}+a^n(cn+d)I_{kn})(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{t,j}v_j), n,t\in\mathbb{Z},$$

由于 $L_n(v_t)=(\alpha+t+\beta n)v_{n+t}$，$I_n(v_t)=Fv_{n+t}$，因此

$$(\alpha+t+\beta n)\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{n+t,n+j}v_{n+j}=$$
$$\tfrac{1}{k}a^n\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{t,j}(a+j+\beta kn)v_{kn+j}+Fa^n(cn+d)\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{t,j}v_{kn+j}, n,t\in\mathbb{Z}.$$

通过比较系数，我们得到

$$(\alpha+t+\beta n)a_{n+t,n+j}=(\frac{1}{k}a^n(\alpha+(-((k-1)n-j))+\beta kn)+Fa^n(cn+d))a_{t,(-((k-1)n-j)}, \tag{3.1}$$

其中 $n,t,j\in\mathbb{Z}$。
当 $x=I_n$ 时,

$$\phi\circ\rho(I_n)(v_t)=\rho((\varphi(I_n))\circ\phi(v_t), n,t\in\mathbb{Z},$$

同样地，我们有

$$\phi(Fv_{n+t}) = a^n bI_{kn}(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}v_j), n, t \in \mathbb{Z},$$

then

$$F\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n+t,n+j}v_{n+j} = Fa^n b\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}v_{kn+j}, n, t \in \mathbb{Z},$$

and

$$Fa_{n+t,n+j} = Fa^n ba_{t,(-((k-1)n-j))}, n, t, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

接下来，我们考虑四种情况：
(i)$n = 0, t = 0$；**(ii)**$n = 0, t \neq 0$；**(iii)**$n \neq 0, t = 0$；**(iv)**$n \neq 0, t \neq 0$。
情况 **(i)** $n = 0, t = 0$:
由 **(3.1)** 和 **(3.2)**（以下每种情况均使用这两个公式），可得

$$\alpha a_{0,j} = (\frac{1}{k}(\alpha + j) + Fd)a_{0,j}, j \in \mathbb{Z},$$
$$Fa_{0,j} = Fba_{0,j}, j \in \mathbb{Z}.$$

Thus

$$a_{0,j} = 0, \text{ when } j \neq k\alpha - \alpha - kFd \in \mathbb{Z},$$
$$a_{0,j} \neq 0, \text{ when } b = 1, j \in \mathbb{Z}.$$

情况 **(ii)** $n = 0, t \neq 0$:

$$(\alpha + t)a_{t,j} = (\frac{1}{k}(\alpha + j) + Fd)a_{t,j}, t, j \in \mathbb{Z},$$
$$Fa_{t,j} = Fba_{t,j}, t, j \in \mathbb{Z}.$$

Thus

$$a_{t,j} = 0, \text{ when } j \neq k\alpha - \alpha - kFd + kt \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z},$$
$$a_{t,j} \neq 0, \text{ when } b = 1, j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}.$$

情形 **(iii)** $n \neq 0, t = 0$:

$$(\alpha + \beta n)a_{n,n+j} = (\frac{1}{k}a^n(\alpha + (-((k-1)n - j)) + \beta kn) + Fa^n(cn + d))a_{0,-((k-1)n-j)}, n, j \in \mathbb{Z},$$
$$a_{n,n+j} = a^n a_{0,-((k-1)n-j)}, n \in \mathbb{Z}.$$

由这两个方程可得。
$(\alpha+\beta n)a^n a_{0,-((k-1)n-j)} = (\frac{1}{k}a^n(\alpha+(-((k-1)n-j))+\beta kn)+Fa^n(cn+d))a_{0,-((k-1)n-j)}, n, j \in \mathbb{Z}$。
然后

$$((\frac{1}{k}-1)\alpha+(\frac{1}{k}-1+Fc)+\frac{1}{k}j+Fcn+Fd)a_{0,-((k-1)n-j)}=0, n, j\in\mathbb{Z}.$$

由于 $\frac{1}{k}\neq 0$，我们有 $a_{0,\ -((k-1)n-j)}=0$。特别地，当 $-((k-1)n-j)=k\alpha-\alpha-kFd$ 时，我们有

$$(\alpha+\beta n)a_{0,k\alpha-\alpha-kFd}=(\alpha+\beta n+Fcn)a_{0,k\alpha-\alpha-kFd}, n\in\mathbb{Z},$$

如果 $a_{0,\ k\alpha-\alpha-kFd}\neq 0$，那么 $c=0$。

情形（iv） $n\neq 0, t\neq 0$ （与情形（iii）类似）：

$$(\alpha+t+\beta n)a_{n+t,n+j}=(\frac{1}{k}a^n(\alpha+(-((k-1)n-j))+\beta kn)+Fa^n(cn+d))a_{t,(-((k-1)n-j)}, n, t, j\in\mathbb{Z},$$

$$Fa_{n+t,n+j}=Fa^n a_{t,(-((k-1)n-j)}, n, t, j\in\mathbb{Z}.$$

同样地，由于 $\frac{1}{k}\neq 0$，当 $c=0$ 时，我们有 $a_{t,\ -((k-1)n-j)}=0$，以及 $a_{t,\ k\alpha-\alpha-kFd}\neq 0$。

综上，当扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的非零自同态参数 φ 满足

$$\begin{cases} b=1, \\ c=0, \\ k\alpha-\alpha-kFd\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

我们有

$$a_{t,k\alpha-\alpha-kFd+kn}=a^t a_{0,k\alpha-\alpha-kFd}, n, t\in\mathbb{Z}.$$

因此，$\phi(v_t)=a_{t,\ tk+q}v_{tk+q}=a^t m v_{tk+q}$，其中 $m=a_{0,\ q}$, $q=k\alpha-\alpha-kFd$。

因此 $A'(\alpha,\beta,F)$: $L_n(v_t)=(\alpha+t+\beta n)a^{n+t}mv_{k(n+t)+q}.I_n(v_t)=Fa^{n+t}mv_{k(n+t)+q}$，其中$m=a_{0,\ q}$, $q=k\alpha-\alpha-kFd$。

引理 3.2 设 $A(\alpha,F)$ 是由 (2.7) 定义的 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。那么，由 $A(\alpha,F)$ 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 $A'(\alpha,F)$ 可定义如下。 $L_n(v_t)=(t+n)ka^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$, $t\neq 0, L_n(v_0)=n(n+\alpha)a^n m_1 v_{kn}.I_n(v_t)=0, t\neq 0, I_n(v_0)=nFa^n m_1 v_{kn}$，其中 $m_1=a_{0,0}$。

证明。

(2) $A(\alpha, F)$:

当 $x = L_n$ 时,

$$\phi \circ \rho(L_n)(v_t) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_t), n, t \in \mathbb{Z},$$

由于 $L_n(v_t) = (t+n)v_{n+t}, t \neq 0$。于是

$$\phi((t+n)v_{n+t}) = (\tfrac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn})(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}v_j), n, t \in \mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_t) = 0, t \neq 0, I_n(v_0) = nFv_n$, 于是

$$(t+n)\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n+t,n+j}v_{n+j} = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq 0, j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}(kn+j)v_{kn+j} + \frac{1}{k}a^n a_{t,0}kn(kn+\alpha)v_{kn}$$
$$+ knFa^n(cn+d)a_{t,0}v_{kn}, n, t \in \mathbb{Z}.$$

由于 e 系数 v_{n+j} 和 v_{kn} 在两边分别相等，因此我们有 ve

$$(t+n)a_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(n+j)a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

$$(t+n)a_{n+t,kn} = (\frac{1}{k}a^n kn(kn+\alpha) + knFa^n(cn+d))a_{t,0}, n, t, \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

当 $t = 0$ 时,

$$\phi \circ \rho(L_n)(v_0) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_0), n \in \mathbb{Z},$$

由于 $L_n(v_0) = n(n+\alpha)v_n$, 因此

$$\phi(n(n+\alpha)v_n) = (\tfrac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn})(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}v_j), n \in \mathbb{Z},$$

and

$$(n+\alpha)\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n,j}v_j = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq 0, j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}(kn+j)v_{kn+j} + \frac{1}{k}a^n a_{0,0}kn(kn+\alpha)v_{kn}$$
$$+ knFa^n(cn+d)a_{0,0}v_{kn}, n \in \mathbb{Z}.$$

由于 v_j 和 v_{kn} 的系数在等式两边分别相等，我们有

$$n(n+\alpha)a_{n,j} = \frac{1}{k}a^n j a_{0,-kn+j}, n, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

$$n(n+\alpha)a_{n,kn} = (\frac{1}{k}a^n kn(kn+\alpha) + knFa^n(cn+d))a_{0,0}, n \in \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$

当 $x = I_n$,

$$\phi\circ\rho(I_n)(v_t)=\rho((\varphi(I_n))\circ\phi(v_t),n,t\in\mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_t)=0,t\neq 0$, 那么

$$a^nbI_{kn}(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{t,j}v_j)=0,n,t\in\mathbb{Z}.$$

then

$$knFa^nba_{t,0}=0,n,t\in\mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

当 $t=0$,

$$\phi\circ\rho(I_n)(v_0)=\rho((\varphi(I_n))\circ\phi(v_0),n\in\mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_0)=nFv_n$, 因此

$$nF\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_{n,j}v_j=knFa^nba_{0,0}v_{kn},n\in\mathbb{Z}.$$

比较 $v_j(j\neq kn\in\mathbb{Z})$ 和 v_{kn} 的系数, 可得

$$a_{n,j}=0,\ \text{when } j\neq kn\in\mathbb{Z},n\neq 0\in\mathbb{Z}, \tag{3.8}$$

$$a_{n,kn}=ka^nba_{0,0},\ \text{when } n\neq 0\in\mathbb{Z},b\neq 0. \tag{3.9}$$

情形 (i) $n=0,t=0$:

将情形 (i) 代入 (3.5) 和 (3.6),

$$\tfrac{1}{k}ja_{0,j}=0,j\in\mathbb{Z}.$$

因此 $a_{0,\ j}=0$, 当 $j\neq 0\in\mathbb{Z}$ 时。

情形 (ii) $n=0,t\neq 0$:

由 (3.3)、(3.4) 和 (3.7), 可得

$$ta_{t,j}=\frac{1}{k}ja_{t,j},t,j\in\mathbb{Z},$$

$$ta_{t,0}=0,t\in\mathbb{Z}.$$

因此 $a_{t,j}=0$, 当 $j\neq tk\in\mathbb{Z}$ 时。

情形 (iii) $n\neq 0,t=0$:

由 (3.5)、(3.6)、(3.8) 和 (3.9), 可得

$$n(n+\alpha)a_{n,kn}=(\frac{1}{k}a^nkn(kn+\alpha)+knFa^n(cn+d))a_{0,0},n\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n,j}=0,\ \text{when } j\neq kn\in\mathbb{Z},n\neq 0\in\mathbb{Z},$$

$$a_{0,j}=0,\ \text{when } j\neq 0\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n,kn}=ka^nba_{0,0},\ \text{when } n\neq 0\in\mathbb{Z},b\neq 0.$$

因此 $\alpha \notin \mathbb{Z}/\{0\}$。情形（iv）
$n \neq 0, t \neq 0, t = -n$：由 (3.3)、
(3.4) 和 (3.7)，可得

$$a_{t,0} = 0, t \in \mathbb{Z}.$$

情形 (v) $n \neq 0, t \neq 0, t \neq -n$:
由 (3.3)、(3.4) 和 (3.7)，可得

$$(t+n)a_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(n+j)a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z},$$
$$a_{n+t,kn} = 0, n, t \in \mathbb{Z},$$
$$a_{t,0} = 0, t \in \mathbb{Z}.$$

特别地,

$$a_{n+t,k(n+t)} = a^n a_{t,tk}, n, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

由 (3.6)、(3.9) 和 (3.10)，可得

$$n(n+\alpha)a_{n,kn} = (\frac{1}{k}a^n kn(kn+\alpha) + knFa^n(cn+d))a_{0,0}, n \in \mathbb{Z},$$
$$a_{n+t,k(n+t)} = a^n a_{t,tk}, n, t \in \mathbb{Z},$$
$$a_{n,kn} = ka^n b a_{0,0}, n \in \mathbb{Z}.$$

因此 $(1-k-kFc)n + (-kFd)a_{0,\ 0} = 0$，若 $a_{0,\ 0} \neq 0$，则必须令 $kb = 1, 1-k-kFc = 0, d = 0$。

综上，当扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的非零自同态参数 φ 满足

$$\begin{cases} \alpha \notin \mathbb{Z}/\{0\}, \\ kb = 1, \\ 1-k-kFc = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

我们得到

$$a_{t,kt} = a^t a_{0,0}, t \in \mathbb{Z}.$$

因此 $\phi(v_t) = a_{t,\ tk}v_{tk} = a^t m_1 v_{tk}$，其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

因此 $A'(\alpha, F)$: $L_n(v_t) = (t+n)ka^{n+t}m_1 v_{k(n+t)}, t \neq 0, L_n(v_0) = n(n+\alpha)a^n m_1 v_{kn}. I_n(v_t) = 0, t \neq 0, I_n(v_0) = nFa^n m_1 v_{kn}$，其中 $m_1 = a_{0,0}$。

引理 3.3 设 $B(\alpha, F)$ 是由 $\mathcal{L}$ 通过 (2.8) 定义的不可约 Harish-Chandra 模。则由 $A(\alpha, F)$ 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 $A'(\alpha, F)$ 可定义如下。 $L_n(v_t) = (t+n)ka^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t \neq 0, L_n(v_0) = n(n+\alpha)a^nm_1v_{kn}.I_n(v_t) = 0, t \neq 0, I_n(v_0) = nFa^nm_1v_{kn}$, 其中 $m_1 = a_{0,0}$。

证明。

(3) $B(\alpha, F)$:

当 $x = L_n$,

$$\phi \circ \rho(L_n)(v_t) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_t), n, t \in \mathbb{Z},$$

由于 $L_n(v_t) = tv_{n+t}, t \neq -n$, 因此

$$\phi(tv_{n+t}) = (\tfrac{1}{k}a^nL_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn})(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}v_j), n, t \in \mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_t) = 0, t \neq -n, I_n(v_{-n}) = nFv_0$, 因此

$$t\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n+t,n+j}v_{n+j} = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq -kn, j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}jv_{kn+j} + \frac{1}{k}a^na_{t,-kn}(-kn)(kn+\alpha)v_0$$
$$+ knFa^n(cn+d)a_{t,-kn}v_0, n, t \in \mathbb{Z}.$$

由于 v_{n+j} 和 v_0 的系数在等式两边分别相等, 因此我们有

$$ta_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z},$$

$$ta_{n+t,0} = (\frac{1}{k}a^n(-kn)(kn+\alpha) + knFa^n(cn+d))a_{t,-kn}, n, t \in \mathbb{Z},$$

当 $t = -n$ 时,

$$\phi \circ \rho(L_n)(v_{-n}) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_{-n}), n \in \mathbb{Z},$$

由于 $L_n(v_{-n}) = -n(n+\alpha)v_0$, 因此

$$\phi(-n(n+\alpha)v_0) = (\tfrac{1}{k}a^nL_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn})(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{-n,j}v_j), n \in \mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_t) = 0$, $t \neq -n, I_n(v_{-n}) = nFv_0$, 因此

$$-n(n+\alpha)\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}v_{n+j} = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq -kn, j\in\mathbb{Z}} a_{-n,j}jv_{kn+j} + \frac{1}{k}a^na_{-n,-kn}(-kn)(kn+\alpha)v_0$$
$$+ knFa^n(cn+d)a_{-n,-kn}v_0, n \in \mathbb{Z}.$$

由于 t 在等式两边， v_{n+j} 和 v_0 的系数分别相等，因此有

$$-n(n+\alpha)a_{0,j} = \frac{1}{k}a^n(-(kn-j))a_{-n,-(kn-j)}, n, j \in \mathbb{Z},$$

$$-n(n+\alpha)a_{0,0} = (\frac{1}{k}a^n(-kn)(kn+\alpha) + knFa^n(cn+d))a_{-n,-kn}, n \in \mathbb{Z}.$$

当 $x = I_n$ 时，

$$\phi \circ \rho(I_n)(v_t) = \rho((\varphi(I_n)) \circ \phi(v_t), n, t \in \mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_t) = 0, t \neq -n$，于是

$$a^n b I_{kn}(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}v_j) = 0, n, t \in \mathbb{Z}.$$

then

$$knFa^n b a_{t,-kn} = 0, n, t \in \mathbb{Z},$$

当 $t = -n$ 时，

$$\phi \circ \rho(I_n)(v_{-n}) = \rho((\varphi(I_n)) \circ \phi(v_{-n}), n \in \mathbb{Z},$$

由于 $I_n(v_{-n}) = nFv_0$，于是

$$nF\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}v_j = knFa^n b a_{-n,-kn}v_0, n \in \mathbb{Z}.$$

比较 $v_j(j \neq 0)$ 和 v_0 的系数，得到

$$a_{0,j} = 0, \text{ when } j \neq 0 \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \in \mathbb{Z},$$

$$a_{0,0} = ka^n b a_{-n,-kn}, \text{ when } n \neq 0 \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

接下来，我们仍然考虑五种情形：(i) $n = 0, t = 0$，(ii) $n = 0, t \neq 0$，(iii) $n \neq 0, t = 0$，(iv)$n \neq 0, t \neq= 0, t \neq -n$，(v) $n \neq 0, t \neq= 0, t = -n$。

Sim类似地，总而言之，当非零自同态 φ 的参数满足 y

$$\begin{cases} \alpha \notin \mathbb{Z}/\{0\}, \\ k^{-1}b^{-1} = 1, \\ 1 - k + kFc = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

我们有

$$a_{t,kt} = a^t a_{0,0}, t \in \mathbb{Z}.$$

因此 $\phi(v_t) = a_{t,\ tk}v_{tk} = a^t m_1 v_{tk}$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

因此 $B'(\alpha, F)$: $L_n(v_t) = ta^{n+t}m_1 v_{k(n+t)}, t \neq -n, L_n(v_{-n}) = -n(n+\alpha)a^n m_1 v_0. I_n(v_t) = 0, t \neq -n, I_n(v_{-n}) = nFm_1 v_0$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

引理 3.4 设 U_F 为由 (2.9) 定义的 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。那么由 U_F 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 U'_F 可定义如下。$L_n(v_t) = ta^{n+t}m_1 v_{k(n+t)}, t \neq -n. I_n(v_t) = 0, t \neq -n, I_n(v_{-n}) = nFm_1 v_0$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

证明. (4) U_F（类似于 $B(\alpha, F)$）：
当 $x = L_n$时，同样，由于 v_{n+j} 和 v_0 的系数在两边分别相等，我们有

$$ta_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z},$$

$$ta_{n+t,0} = (\frac{1}{k}a^n(-kn) + knFa^n(cn+d))a_{t,-kn}, n, t \in \mathbb{Z}.$$

当 $x = I_n$ 时，同理,
$t \neq -n$:

$$knFa^n b a_{t,-kn} = 0, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$t = -n$:

$$a_{0,j} = 0, \text{ when } j \neq 0 \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \in \mathbb{Z},$$

$$a_{0,0} = ka^n b a_{-n,-kn}, \text{ when } n \neq 0 \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

同理，我们考虑 n 和 t 的取值，当

$$\begin{cases} k^{-1}b^{-1} = 1, \\ c = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

我们有

$$a_{t,kt} = a^t a_{0,0}, t \in \mathbb{Z}.$$

因此 $\phi(v_t) = a_{t,\ tk}v_{tk} = a^t m_1 v_{tk}$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

因此 U'_F: $L_n(v_t) = ta^{n+t}m_1 v_{k(n+t)}$, $t \neq -n. I_n(v_t) = 0$, $t \neq -n$, $I_n(v_{-n}) = nFm_1 v_0$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

引理 3.5 设 V_F 是由 (2.10) 定义在 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。则由 U_F 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 V_F' 可定义如下：$L_n(v_t) = (t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$, $t \neq -n.I_n(v_t) = 0$, $t \neq 0$, $I_n(v_0) = nFa^nm_1v_kn$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

(5) V_F（类似于 $A(\alpha,\ F)$）：

当 $x = L_n$ 时，类似地，由于 v_{n+j} 和 v_{kn} 的系数在等式两边分别相等，我们有

$$(t+n)a_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(n+j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z},$$

$$(t+n)a_{n+t,kn} = (\frac{1}{k}a^n(kn) + knFa^n(cn+d))a_{t,0}, n, t \in \mathbb{Z}.$$

当 $x = I_n$ 时，类似地,

$t \neq 0$:

$$knFa^nba_{t,0} = 0, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$t = 0$:

$$a_{n,j} = 0, \text{ when } j \neq kn \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \in \mathbb{Z},$$

$$a_{n,kn} = ka^nba_{0,0}, \text{ when } n \neq 0 \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

类似地，当

$$\begin{cases} kb = 1, \\ c = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

我们有

$$a_{t,kt} = a^ta_{0,0}, t \in \mathbb{Z}.$$

因此 $\phi(v_t) = a_{t,\ tk}v_{tk} = a^tm_1v_{tk}$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

因此 V_F': $L_n(v_t) = (t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t \neq -n.I_n(v_t) = 0, t \neq 0, I_n(v_0) = nFa^nm_1v_kn$, 其中 $m_1 = a_{0,0}$。

~引理 3.6 设 U_F 为由 (2.11) 定义的 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。~则由 U_F 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 U_F 可定义如下：$L_n(v_t) = (t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t \neq -n$, $L_n(v_{-n}) = 0.I_n(v_t) = 0, t \neq -n, I_n(v_{-n}) = nFm_1v_0$, 其中 $m_1 = a_{0,\ 0}$。

~(6) U_F:

当 $x = L_n$ 时，由于 $\phi \circ \rho(L_n)(v_t) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_t)\ n, t \in \mathbb{Z},$

$t \neq -n$:

类似地，我们可以得到

$$t\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n+t,n+j}v_{n+j} = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq -kn, j\in\mathbb{Z}} a_{t,j}jv_{kn+j} + knFa^n(cn+d)a_{t,-kn}v_0, n, t \in \mathbb{Z}$$

由于 v_{n+j} 和 v_0 的系数在等式两边分别相等，我们有

$$ta_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

$$ta_{n+t,0} = knFa^n(cn+d))a_{t,-kn}, n, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

$t = -n$:

由于 $L_n(v_{-n}) = 0$，于是

$$\cdots + \frac{1}{k}a^n a_{-n,-1}(-1)v_{kn-1} + \cdots + \frac{1}{k}a^n a_{-n,j}(j)v_{kn+j} + \cdots + knFa^n(cn+d)a_{-n,-kn}v_0 = 0, n, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.13}$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$。

当 $x = I_n$（与之前相同）时，由于 $\phi \circ \rho(I_n)(v_t) = \rho((\varphi(I_n)) \circ \phi(v_t)\ n, t \in \mathbb{Z},$

$t \neq -n$:

$$knFa^n b a_{t,-kn} = 0, n, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.14}$$

$t = -n$:

$$a_{0,j} = 0,\ j \neq 0 \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \in \mathbb{Z}, \tag{3.15}$$

$$a_{0,0} = ka^n b a_{-n,-kn},\ \text{when } n \neq 0 \in \mathbb{Z}, b \neq 0. \tag{3.16}$$

情形 (i) $n = 0, t = 0$:

由 (3.13)，我们有

$$\cdots, a_{0,-1}, a_{0,1}, \cdots, a_{0,j} = 0, \cdots, j \in \mathbb{Z}.$$

情形 (ii) $n = 0, t \neq 0$:

由 (3.11)、(3.12) 和 (3.14)，我们得到

$$ta_{t,j} = \frac{1}{k}ja_{t,j}, t, j \in \mathbb{Z},$$

$$ta_{t,0} = 0, t \in \mathbb{Z}.$$

因此 $a_{t,j}=0$，当 $j\neq tk\in\mathbb{Z}$ 时。

情形（iii） $n\neq 0,t=0$:

由 (3.11)、(3.12) 和 (3.14)，可得

$$\frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{0,-((k-1)n-j)}=0,n,j\in\mathbb{Z},$$

$$a_{0,-kn}=0,n\in\mathbb{Z}.$$

情形（iv） $n\neq 0,t\neq 0,t=-n$:

由 (3.13)，可得 $\cdots,a_{-n,\ -1},a_{-n,\ 1},\cdots,a_{-n,\ j}=0,\cdots$，以及 $knFa^n(cn+d)a_{-n,\ -kn}=0$，若$a_{-n,\ -kn}\neq 0$，则 $c=0,d=0$。

情形（v） $n\neq 0,t\neq 0,t\neq -n$:

由 (3.11)、(3.12) 和 (3.14)，可得

$$ta_{n+t,n+j}=\frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)},n,t,j\in\mathbb{Z},$$

$$ta_{n+t,0}=0,n,t\in\mathbb{Z},$$

$$a_{t,-kn}=0,n,t\in\mathbb{Z}.$$

特别地,

$$a_{n+t,k(n+t)}=a^na_{t,tk},n,t\in\mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

由 (3.16) 和 (3.17)，可得

$$a_{-n,-kn}=k^{-1}a^{-n}b^{-1}a_{0,0},n\in\mathbb{Z},$$

$$a_{t,tk}=a^{-n}a_{n+t,k(n+t)},n,t\in\mathbb{Z}.$$

因此 $k^{-1}b^{-1}=1$。综上，当

$$\begin{cases}k^{-1}b^{-1}=1,\\ c=0,\\ d=0,\end{cases}$$

我们有

$$a_{t,kt}=a^ta_{0,0},t\in\mathbb{Z}.$$

所以 $\phi(v_t)=a_{t,\ tk}v_{tk}=a^tm_1v_{tk}$，其中 $m_1=a_{0,\ 0}$。

~因此 U_F': $L_n(v_t)=(t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)},t\neq -n,L_n(v_{-n})=0.I_n(v_t)=0,t\neq -n,I_n(v_{-n})=nFm_1v_0$，其中 $m_1=a_{0,0}$.

~引理 3.7 令 V_F 为由 (2.12) 定义的 $\mathcal{L}$ 上的不可约 Harish-Chandra 模。~则由 V_F 诱导的 $\mathcal{L}_\varphi$ 的不可约表示 V_F 可定义如下：$L_n(v_t) = ta^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t \neq -n, L_n(v_{-n}) = 0. I_n(v_t) = 0, t \neq 0, I_n(v_0) = Fa^n m_1 v_{kn}$，其中$m_1 = a_{0,0}$.

~ ~(7) V_F（类似于 U_F）：

当 $x = L_n$ 时，由于 $\phi \circ \rho(L_n)(v_t) = \rho((\varphi(L_n)) \circ \phi(v_t)$,
$t \neq -n$:
类似地，我们可以得到 $t\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n+t,\ n+j}v_{n+j} = \frac{1}{k}a^n \sum_{j\neq -kn,\ j\in\mathbb{Z}} a_{t,\ j}jv_{kn+j} + Fa^n(cn+d)a_{t,\ 0}v_{kn}$、$n$、$t \in \mathbb{Z}$。由于 v_{n+j}、v_0 和 v_{kn} 的系数在等式两边分别相等，因此我们有

$$ta_{n+t,n+j} = \frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

$$ta_{n+t,0} = 0, n, t \in \mathbb{Z}, \tag{3.19}$$

$$ta_{n+t,kn} = Fa^n(cn+d))a_{t,0}, n, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.20}$$

$t = -n$:

由于 $L_n(v_{-n}) = 0$，于是

$$\cdots + \frac{1}{k}a^n a_{-n,-1}(-1)v_{kn-1} + (\frac{1}{k}a^n(0) + Fa^n(cn+d))a_{-n,0}v_{kn} + \cdots + \frac{1}{k}a^n a_{-n,j}(j)v_{kn+j} + \cdots = 0, n, j \in \mathbb{Z}$$

then

$$\cdots, a_{-n,-1}, a_{-n,1}, \cdots, a_{-n,j} = 0, \cdots, n, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

当 $x = I_n$ 时，同理,
$t \neq 0$:

$$Fa^n b a_{t,0} = 0, n, t \in \mathbb{Z}. \tag{3.22}$$

$t = 0$:

$$a_{n,j} = 0, \text{ when } j \neq kn \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \in \mathbb{Z}, \tag{3.23}$$

$$a_{n,kn} = a^n b a_{0,0}, \text{ when } n \neq 0 \in \mathbb{Z}, b \neq 0. \tag{3.24}$$

情形 (i) $n = 0, t = 0$:
由 (3.21)，我们有 $\cdots, a_{0,-1}, a_{0,1}, \cdots, a_{0,j} = 0, \cdots$，且 $Fda_{0,0} = 0, a_{0,0} = ba_{0,0}$。若 $a_{0,0} \neq 0$，则 $d = 0, b = 1$。

情形 (ii) $n=0, t\neq 0$:

由 (3.18)、(3.19)、(3.20) 和 (3.22)，可得

$$ta_{t,j}=\frac{1}{k}ja_{t,j}, t, j\in\mathbb{Z},$$

$$ta_{t,0}=0, t\in\mathbb{Z}.$$

因此 $a_{t,j}=0$，当 $j\neq tk\in\mathbb{Z}$ 时。

情形（iii） $n\neq 0, t=0$:

由 (3.18)、(3.19)、(3.20)、(3.23) 和 (3.24)，可得

$$\alpha_{0,-((k-1)n-j)}=0, n, j\in\mathbb{Z},$$

$$Fa^n(cn+d))a_{0,0}=0, n\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n,j}=0, \text{ when } j\neq kn\in\mathbb{Z}, n\neq 0\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n,kn}=a^nba_{0,0}, \text{ when } n\neq 0\in\mathbb{Z}, b\neq 0.$$

于是 $c=0$。

情形（iv） $n\neq 0, t\neq 0, t=-n$:

由 (3.21) 和 (3.22)，可得

$$\cdots, a_{-n,-1}, a_{-n,0}, a_{-n,1}, \cdots, a_{-n,j}=0, \cdots, n, j\in\mathbb{Z}.$$

情形 (v) $n\neq 0, t\neq 0, t\neq -n$:

由 (3.18)、(3.19)、(3.20) 和 (3.22)，可得

$$ta_{n+t,n+j}=\frac{1}{k}a^n(-((k-1)n-j))a_{t,-((k-1)n-j)}, n, t, j\in\mathbb{Z},$$

$$a_{t,0}=0, t\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n+t,kn}=0, n, t\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n+t,0}=0, n, t\in\mathbb{Z}.$$

特别地,

$$a_{n+t,k(n+t)}=a^na_{t,tk}, n, t\in\mathbb{Z}. \tag{3.25}$$

通过 (3.24) 和 (3.25)，我们可以得到

$$a_{n,kn}=a^na_{0,0}, n\in\mathbb{Z},$$

$$a_{n+t,k(n+t)}=a^na_{n,kn}, n, t\in\mathbb{Z}.$$

综上所述，当

$$\begin{cases} b=1, \\ c=0, \\ d=0, \end{cases}$$

我们有

$$a_{t,kt}=a^t a_{0,0}, t\in\mathbb{Z}.$$

因此 $\phi(v_t)=a_{t,\ tk}v_{tk}=a^t m_1 v_{tk}$，其中 $m_1=a_{0,\ 0}$。

~因此 V_F': $L_n(v_t)=ta^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t\neq -n, L_n(v_{-n})=0. I_n(v_t)=0, t\neq 0, I_n(v_0)=Fa^n m_1 v_{kn}$，其中$m_1=a_{0,\ 0}$。

定理 3.8 配备基的向量空间 V 上，带有 $C_L=C_{LI}=C_I=0$ 的 Hom 型扭曲海森堡–维拉索罗代数的不可约表示

$$\{\cdots, v_{-n}, \cdots, v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots\}$$

如下所示:

$A'(\alpha,\beta,F)$: $L_n(v_t)=(\alpha+t+\beta n)a^{n+t}mv_{k(n+t)+q}. I_n(v_t)=Fa^{n+t}mv_{k(n+t)+q}$，其中 $m=a_{0,\ q}, q=k\alpha-\alpha-kFd$。

$A'(\alpha,F)$: $L_n(v_t)=(t+n)ka^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t\neq 0, L_n(v_0)=n(n+\alpha)a^n m_1 v_{kn}. I_n(v_t)=0, t\neq 0, I_n(v_0)=nFa^n m_1 v_{kn}$，其中 $m_1=a_{0,0}$。

$B'(\alpha,F)$: $L_n(v_t)=ta^{n+t}m_1v_{k(n+t)}, t\neq -n, L_n(v_{-n})=-n(n+\alpha)a^n m_1 v_0. I_n(v_t)=0, t\neq -n, I_n(v_{-n})=nFm_1v_0$，其中 $m_1=a_{0,0}$。

U_F': $L_n(v_t)=ta^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$，$t\neq -n. I_n(v_t)=0$，$t\neq -n$，$I_n(v_{-n})=nFm_1v_0$，其中 $m_1=a_{0,\ 0}$。

V_F': $L_n(v_t)=(t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$，$t\neq -n. I_n(v_t)=0$，$t\neq 0$，$I_n(v_0)=nFa^n m_1 v_k n$，其中$m_1=a_{0,\ 0}$。

~U_F': $L_n(v_t)=(t+n)a^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$，$t\neq -n$，$L_n(v_{-n})=0. I_n(v_t)=0$，$t\neq -n$，$I_n(v_{-n})=nFm_1v_0$，其中 $m_1=a_{0,\ 0}$。

~V_F': $L_n(v_t)=ta^{n+t}m_1v_{k(n+t)}$，$t\neq -n$，$L_n(v_{-n})=0. I_n(v_t)=0$，$t\neq 0$，$I_n(v_0)=Fa^n m_1 v_{kn}$，其中 $m_1=a_{0,\ 0}$。

特别地，对于 $A'(\alpha,\beta,F)$，当 $t=kt+q$，即 $k=1, q=0$ 时，向量空间 V是一个~ ~权模。对于 $A'(\alpha,F)$，$B'(\alpha,F)$，U_F', V_F', U_F', V_F'，当 $t=kt$，即 $k=1$, V是一个权模。

参考文献

[1] B. Agrebaoui、K. Benali、A. Makhlouf, 《简单 Hom 李代数的表示》, J. Lie Theory, 29 (4) (2019), 1119-1135。[2] E. Arbarello、C. Concini、V. G. Kac、C. Procesi, 《曲线模空间与表示论》, Comm. Math. Phys., 117 (1) (1988), 1-36。[3] Y. Billing, 《零级扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的表示》, Canad. Math. Bull., 46(4), (2003), 529-537。[4] Y. Cheng、H. Qi, 《Bihom-Lie 代数的表示》, Algebra Colloq., 29 (1) (2022), 125-142。[5] Y. Cheng、Y. Su, 《Hom-Leibniz 代数的（上）同调与泛中心扩张》, Acta Math. Sinica, Ser. B, 27(5) (2011) 813-830。[6] Y. Cheng、Y. Su, 《海森堡-维拉索罗代数的量子变形》, Algebra Colloq., 20(2) (2013) 299-308。[7]Y. Cheng、H. Yang, 《Hom 型 q-变形 Heisenberg-Virasoro 代数的低维上同调》, Front. Math. China, 5(4) (2010) 607-622。[8] R. Garcia-Delgado、G. Salgado、O. Sanchez-Valenzuela, 《关于三维复 Hom-Lie 代数》, J. Algebra, 555 (2020), 262-385。[9] J. Hartwig、D. Larsson、S. Silvestrov, 《利用 σ-导子对李代数进行变形》, J. Algebra, 295 (2006), 314-361。[10] Q. Jin、X. Li, 《半单李代数上的 Hom 结构》, Journal of Algebra, 319 (2008), 1398-1408。[11] X. Li, 《三维简单乘法型 Hom-Lie 代数的表示》, Adv. Math. Phys., 2013, 938901, DOI: 10.1155/2013/938901。[12] J. Li、L. Chen、Y. Cheng, 《Bihom-Lie 超代数的表示》, Linear & Multilinear Algebra, 67(2) (2019), 299-326。[13] D. Liu、C. Jiang, 《扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数上的 Harish-Chandra 模》, J. Math. Phys., 49(1) (2008), 012901, 13pp。

[14] L. Le、W. Tong、D. Liu，《扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数的 Hom 李代数结构》，《中国数学年刊》A 辑，41(3)（2020），299-308。[15] Y. Sheng，《Hom-Lie 代数的表示》，《代数与表示论》15（2012），1081-1098。[16] W. Xie、Q. Jin、W. Liu，《半单李代数上的 Hom 结构》，《开放数学》13(1)（2015），617-630。