arXiv:2305.02696v1 [math.OC] 4 May 2023

分裂平衡问题的适定性

Soumitra Dey*、V. VETRIVEL 和 Hong-Kun Xu*

Abstract. 我们将适定性的概念扩展到分裂平衡问题，并建立了适定性的 Furi–Vignoli 型刻画。在对所涉及的双函数作出某些假设的条件下，我们证明分裂平衡问题的适定性等价于其解的存在性与唯一性。我们还通过 Kuratowski 非紧性测度刻画了分裂平衡问题的广义适定性。最后，我们通过若干例子说明了理论结果。

1. 引言 Introduction

适定性概念是非线性分析中最重要且最有趣的研究主题之一，可用于研究许多优化问题，例如变分不等式（VI）、分裂变分不等式、均衡问题和反问题。极小化问题的适定性概念最早由 Tykhonov 提出并得到广泛研究 [1] 。在度量空间中，如果一个极小化问题具有唯一的最优解，且每个极小化序列都收敛到该唯一解（例如，参见 [2]），则称该问题是适定的（或正确适定的）。由于在某些最优控制或数学规划问题的应用中，对解的唯一性要求可能过于严格，Furi 和 Vignoli 放宽了上述无约束极小化问题的适定性定义 [2]。Lucchetti 和 Patrone 在 [3, 4]中将适定性概念扩展到了变分不等式。值得指出的是，他们提出了变分不等式的首个适定性概念。此后，许多作者进一步扩展了适定性概念（参见 [5–15]）。

设 C 是实希尔伯特空间 H 的非空闭凸子集，且 $g : H \to H$ 是一个映射。那么，变分不等式是要找一个点 $x^* \in C$，使其满足以下性质：

$$\langle g(x^*), p - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall p \in C. \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：49K40、49J40、47H09；次要分类号：47H10、47J20。*Key words and phrases.* 逼近序列，变分不等式，分裂变分不等式，平衡问题，分裂平衡问题，适定性。

*通讯作者。

变分不等式是解决许多问题的有用工具，例如线性与非线性方程组、互补问题和鞍点问题（有关更多应用，参见 [16]）。Stampacchia 首先在有限维欧几里得空间中提出并研究了变分不等式 [17] 。2003 年，Noor [18] 针对一类新的变分不等式提出了适定性概念，并在相关映射满足伪单调性假设的条件下建立了一些结果。此后，许多研究者通过从不同方向进行推广，对变分不等式（1.1）展开了研究（例如参见 [16, 19]），涵盖有限维和无限维情形。

VI 的一个最重要的推广是分裂变分不等式（SVI）。设 H_1 和 H_2 是两个实希尔伯特空间， C 和 Q 分别是 H_1 和 H_2 中非空的闭凸子集。分裂变分不等式是要寻找一个具有以下性质的点 $x^* \in C$

$$\langle f(x^*), p - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall p \in C \tag{1.2}$$

and

$$y^* = Ax^* \in Q \quad \text{solves} \quad \langle g(y^*), q - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall q \in Q,$$

其中， $f: H_1 \to H_1$ 和 $g: H_2 \to H_2$ 是两个映射，而 $A: H_1 \to H_2$是一个有界线性算子。关于分裂变分不等式的更多细节，可参阅[20, 21] 及其中的参考文献。最近，Hu 等人 [22] 引入并研究了自反巴拿赫空间中分裂变分不等式（1.2）的适定性。

VI 的另一个重要推广形式称为平衡问题（EP）。设 C 是实希尔伯特空间 H 中的一个非空闭凸子集。设 $f: C \times C \to \mathbb{R}$ 是一个双函数。那么，EP 包含寻找一个 $x^* \in C$ ，使得

$$f(x^*, p) \geq 0, \quad \forall p \in C. \tag{1.3}$$

近年来，平衡问题（EPs）受到许多研究者的关注，这是因为它们涵盖了优化问题 [7], 鞍点问题 [23], 变分不等式（VIs） [17, 24] 以及纳什平衡问题（Nash EPs） [16], 极小极大问题等重要特例。这些问题是博弈论、物理学、经济学等领域中许多实际问题的有用模型。平衡问题的另一个重要特点是，它们以统一的形式涵盖了所有这些特例。平衡问题的许多扩展可见 [25–27] 及其中的参考文献。

受上述变分不等式及其他相关问题适定性的启发，Bianchi 等人 [23] 在完备度量空间或巴拿赫空间中为标量平衡问题提出了一些适定性概念。

类似地，EP（1.3）的另一个重要推广称为分裂平衡问题（SEP）。设 H_1 和 H_2 是两个实希尔伯特空间，且设 C 和 Q 分别是 H_1 和 H_2的两个非空闭凸子集。SEP 是求一个 $x^* \in C$ 使得

$$f(x^*, p) \geq 0, \quad \forall p \in C \tag{1.4}$$

and

$$y^* = Ax^* \in Q \quad \text{solves} \quad g(y^*, q) \geq 0, \quad \forall q \in Q,$$

其中 $f: C \times C \to \mathbb{R}$ 和 $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ 是两个双函数，且$A: H_1 \to H_2$ 是一个有界线性算子。容易证明，在某些约束资格条件下，SEP 可约化为分裂变分不等式。

受近年来变分问题适定性概念的启发，本文将引入 SEP 的适定性概念（1.4）。

本文结构安排如下。第2 节汇总了一些基本定义和结果。第3 节介绍 SEP（1.4）的逼近序列概念，并介绍 SEP（1.4）的各种适定性。此外，我们还建立了 SEP（1.4）适定性和广义适定性的度量刻画。本节还给出了一些非平凡例子，以说明我们的理论分析。第4 节证明，SEP 的适定性等价于其解的存在性与唯一性。第5节总结本文工作。

2. Preliminaries

本节汇集了我们在分析中将要用到的一些基本定义和结果。更多细节请参阅 [24, 28–31] 。

设 A 和 B 是实希尔伯特空间 H 中的两个非空子集。A 与 B 之间的豪斯多夫度量 $H(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$H(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\},$$

其中 $D(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B)$，且 $d(a, B) = \inf_{b\in B} \|a - b\|$。设 $\{A_n\}$ 是 $H.$ 的子集序列。我们称 A_n 收敛到 A，当且仅当 $H(A_n, A) \to 0.$。容易看出，$D(A_n, A) \to 0$ 当且仅当对所有选择 $a_n \in A_n$，$d(a_n, A) \to 0$ 一致成立。

集合 B 的直径记为 diam(B)，定义为

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in B\}.$$

定义 2.1. 设 C 是实希尔伯特空间 H 的非空子集。若函数 $f : C \to \mathbb{R}$ 在点 x 处下半连续（l.s.c），则对每个满足 $x_n \to x$ 的序列 $\{x_n\}$（其中 C），都有

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

定义 2.2. 设 C 是实希尔伯特空间 H 的非空子集。若对于 C 中满足 $x_n \to x$ 的每个序列 $\{x_n\}$，都有 $f: C \to \mathbb{R}$ 在点 x 处上半连续（u.s.c），则称函数 $f: C \to \mathbb{R}$ 在点 x 处上半连续（u.s.c），且有如下结论。

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x).$$

定义 2.3. 设 G 是实希尔伯特空间 H 的非空子集。集合 G 的Kuratowski 非紧性测度定义为

$$\alpha(G) = \inf\{\epsilon > 0 : G \subset \cup_{i=1}^{n} G_i, \operatorname{diam}(G_i) < \epsilon,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

引理 2.4. 设 P 和 Q 是实希尔伯特空间 H 的两个非空子集。那么

$$\alpha(P) \leq 2H(P, Q) + \alpha(Q),$$

其中 α 是 Kuratowski 非紧性测度。

定义 2.5. 设 K 是实希尔伯特空间 H 的非空子集。若双函数 $f\colon K \times K \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K.$$

定义 2.6. 设 K 是实希尔伯特空间 H 的非空凸子集。若双函数 $f\colon K \times K \to \mathbb{R}$ 满足

$$\limsup_{t \to 0^+} f(x + t(y - x), y) \leq f(x, y), \quad \forall x, y \in K.$$

定理 2.7. 设 K 是凸的，且 $h\colon K \times K \to \mathbb{R}$ 是单调且半连续的双函数。假设

(i) $h(x, x) \geq 0$ 对所有 $x \in K$成立。(ii) 对每个 $x \in K$，$h(x, \cdot)$ 都是凸的。因此，对于给定的 $x^* \in K$,

$$h(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in K$$

当且仅当

$$h(y, x^*) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

3. Approximate Sequences、 Metric Characterizations and Well-Posedness

本节中，我们为 SEP 引入一个近似序列，并将适定性的概念推广到 SEP。我们还推导出适定性的度量刻画。我们始终假设 C 和 Q 分别是实希尔伯特空间 H_1 和 H_2 中两个非空的闭凸子集，并且 $A\colon H_1 \to H_2$ 是一个有界线性算子。

定义 3.1。 序列 $\{(x_n, y_n)\} \in H_1 \times H_2$ 称为 SEP (1.4) 的 逼近序列 ，如果存在 $0 < \epsilon_n \to 0$ 使得

$$\begin{cases} x_n \in C, \quad y_n \in Q, \\ \|y_n - Ax_n\| \leq \epsilon_n, \\ f(x_n, p) \geq -\epsilon_n, \quad \forall p \in C, \\ g(y_n, q) \geq -\epsilon_n, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{3.1}$$

定义 3.2。令 S 表示 SEP (1.4) 的解集。那么，如果 S 是单元素集，并且 SEP (1.4) 的每个逼近序列都收敛到唯一解，我们就称 SEP (1.4) 是适定的。如果 $S \neq \emptyset$ ，并且 SEP (1.4) 的每个逼近序列都有一个子序列收敛到 S 中某个元素，则称 SEP (1.4) 是广义适定的。

给定 $\epsilon \geq 0$，定义如下集合:

$$S(\epsilon) = \{(x, y) \in C \times Q : \|y - Ax\| \leq \epsilon; \\ f(x, p) \geq -\epsilon, \quad \forall p \in C;\ g(y, q) \geq -\epsilon, \quad \forall q \in Q\}.$$

注意， S（ϵ）称为 SEP（1.4）的近似解集。另请注意，当 S（ϵ） $\subset S$（ϵ'）时， $0 \leq \epsilon < \epsilon'$。

定理 3.3。 SEP（*1.4*）是适定的，当且仅当其解集 S非空且 diam（S（ϵ））$\to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时。

证明。假设 SEP（1.4）是适定的；因此，根据定义，解集 $S \neq \emptyset$ 。我们通过反证法证明 diam($S(\epsilon)$) $\to 0$ （当 $\epsilon \to 0$）成立。假设 diam($S(\epsilon)$) 9 0（当 $\epsilon \to 0$）。那么存在 $\delta > 0$、 $0 < \epsilon_n \to 0$、（x_n， y_n） $\in S$（ϵ_n）以及（x'_n， y'_n） $\in S$（ϵ_n），使得

$$\|(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n)\| > \delta \tag{3.2}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。由于 SEP（1.4）是适定的，x_n， y_n）和（x'_n， y'_n）都收敛于同一个唯一解。因此我们有

$$\|(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

这与（3.2）矛盾。

反过来，假设 SEP（1.4）的解集 S 非空，且 diam($S(\epsilon)$) $\to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时趋于 $\emptyset \neq S \subset S(\epsilon)$ 对所有 $\epsilon > 0$ 成立，且 diam($S(\epsilon)$) $\to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时趋于 S 必为单元素集。

令 $\{(x_n, y_n)\}$ 为一个逼近序列。则存在 $0 < \epsilon_n \to 0$ 使得（3.4）成立。因此，对所有 x_n， y_n） $\in S(\epsilon_n$。令（ $n \in \mathbb{N}$， x^*）为 SEP 的唯一解；因此， y^*， x^*） $y^* \in S(\epsilon_n$。结果可得

$$\|(x_n, y_n) - (x^*, y^*)\| \leq \operatorname{diam}(S(\epsilon_n)) \to 0.$$

这证明 SEP（1.4）是适定的，证明完毕。 □

注 3.4. 上述定理 3.3 给出了 SEP（1.4）的适定性与其解集和近似解集性质之间的等价关系。

我们来考虑以下例子。

例 3.5. 设 $H_1 = H_2 = \mathbb{R}$、 $A = I$ 和 $C = Q = \mathbb{R}$。定义 f： $C \times C \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f(x, p) = p^2 - x^2$$

以及 $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ by

$$g(y,q) = -y^2 e^{-q^2}.$$

显然， $S = \{(0,0)\} \subset C \times Q$ 是唯一解。
现在，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} S(\epsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-x| \le \epsilon; p^2 - x^2 \ge -\epsilon, \forall p \in \mathbb{R}; -y^2 e^{-q^2} \ge -\epsilon, \forall q \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-x| \le \epsilon; |x| \le \sqrt{\epsilon}; |y| \le \sqrt{\epsilon}\} \\ &\subset [-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}] \times [-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}]. \end{aligned}$$

这意味着 $\text{diam}(S(\epsilon)) \le 2\sqrt{2\epsilon} \to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时。根据定理 3.3，SEP（1.4）是适定的。

定理 3.6. 设 $f: C \times C \to \mathbb{R}$ 和 $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ 是两个关于第一变量上半连续的双函数。则 SEP (1.4)适定，当且仅当

$$S(\epsilon) \neq \emptyset \ (\forall \epsilon > 0) \quad and \quad \lim_{\epsilon \to 0} diam(S(\epsilon)) = 0. \tag{3.3}$$

证明。 由定理 3.3可知，我们只需证明充分性部分。假设条件（3.3）成立。由于 $S \subset S(\epsilon)$ 对每个$\epsilon > 0$ 均成立，因此，SEP（1.4）至多存在一个解。

设 (x_n, y_n) 是 SEP (1.4) 的一个近似序列。那么存在一个正数列 $\{\epsilon_n\}$ 使得 $\epsilon_n \to 0$ 并且

$$\begin{cases} x_n \in C, \quad y_n \in Q, \\ \|y_n - Ax_n\| \le \epsilon_n, \\ f(x_n, p) \ge -\epsilon_n, \quad \forall p \in C, \\ g(y_n, q) \ge -\epsilon_n, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{3.4}$$

显然，$(x_n, y_n) \in S(\epsilon_n)$。现在，条件 $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(S(\epsilon_n)) = 0$ 确保 $\{(x_n, y_n)\}$ 是柯西列。令 $(x_n, y_n) \to (x^*, y^*)$。由于 f 和 g 关于第一变量上半连续，在 (3.4) 中令 $n \to \infty$ 取极限，立即得到

$$\begin{cases} x^* \in C, \quad y^* \in Q, \\ y^* = Ax^*, \\ f(x^*, p) \ge 0, \quad \forall p \in C, \\ g(y^*, q) \ge 0, \quad \forall q \in Q. \end{cases}$$

因此，(x^*, y^*) 是 SEP (1.4) 的唯一解。证明至此完成。

□

注 3.7。 上述定理 3.6 不仅给出了 SEP（1.4）的适定性，而且还给出了其与其解的存在性与唯一性之间的等价性。

下面通过豪斯多夫度量给出的广义适定性刻画，建立了 SEP 的近似解集与解集之间的联系。广义适定性的概念使我们能够去除 SEP 解中不必要的唯一性要求。

定理 3.8. 分裂均衡问题 (1.4) 具有广义适定性，当且仅当解集 S 非空且紧，

$$H(S(\epsilon), S) \to 0 \ as \ \epsilon \to 0. \tag{3.5}$$

证明。假设 SEP (1.4) 具有广义适定性。显然，对所有 $\epsilon > 0$, $\emptyset \neq S \subset S(\epsilon)$。那么， S 中的每个序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 显然都是 SEP (1.4) 的逼近序列。因此，广义适定性直接意味着 $\{(x_n, y_n)\}$的某个子序列收敛到 S 中的一点。这验证了解集 S的紧性。现在我们来证明 (3.5)。由于 $S(\epsilon) \supset S$, 我们有

$$H(S(\epsilon), S) = \sup\{d(z, S) : z \in S(\epsilon)\}$$

关于 $\epsilon \geq 0$递减。令 $h := \lim_{\epsilon \to 0} H(S(\epsilon) \ S)$。假设 $h > 0$。那么，当 $0 < \epsilon_n$ 递减至零时，我们可以找到 $(x_n, y_n) \in S(\epsilon_n)$，使得

$$d((x_n, y_n), S) > \frac{1}{2}h, \quad n \geq 1. \tag{3.6}$$

然而，广义适定性保证存在一个子序列 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$，它来自 $\{(x_n, y_n)\}$, 并收敛到某个点 $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$；由（3.6）可得 $0 \geq h$。这与假设 $h > 0$矛盾。因此，必有 $h = 0$。

反过来，假设（3.5）成立，且 S 非空且紧。为证明 SEP（1.4）的广义适定性，令 $\{(x_n, y_n)\}$ 为 SEP（1.4）的一个逼近序列。则存在 $0 < \epsilon_n \to 0$使得 $(x_n, y_n) \in S(\epsilon_n)$。

$$d((x_n, y_n), S) \leq D(S(\epsilon_n), S) \leq H(S(\epsilon_n), S) \to 0.$$

由于 S 是紧的， $\{(x_n, y_n)\}$ 有一个子序列收敛到 S中的某个元素。因此，SEP（1.4）的广义适定性得证。□

例 3.9. 设 $H_1 = H_2 = \mathbb{R}$、 $A = I$ 和 $C = Q = [0, 1]$。定义 f： $C \times C \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x, p) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{x^2}{2}, & [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

以及 g: $Q \times Q \to \mathbb{R}$ by

$$g(y, q) = \begin{cases} 0, & y = \frac{1}{2} \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易验证 $S = \{(x^*, y^*) \in [0, 1] \times [0, 1] : \ y^* = x^*\}$ 非空且紧。此外，可以验证 $H(S(\epsilon) \ S) \to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时。因此，根据定理3.8，SEP（1.4）是广义适定的（但并非适定）。

我们在假设f和g上半连续的基础上，通过 Kuratowski 非紧性测度放宽对解集S的条件，从而证明以下定理。

定理 3.10。设 $f: C \times C \to \mathbb{R}$ 和 $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ 是关于第一变量上半连续的两个双函数。那么，SEP (1.4)是广义适定的，当且仅当

$$S(\epsilon) \neq \emptyset \quad (\forall \epsilon > 0) \quad and \quad \alpha(S(\epsilon)) \to 0 \quad as \quad \epsilon \to 0, \tag{3.7}$$

其中 α 是库拉托夫斯基非紧性测度。

证明。假设 SEP（1.4）是广义适定的。因此 $S(\epsilon) \supset S \neq \emptyset$ 对所有 $\epsilon > 0$。由定理3.8，我们知道 S 是紧的（因此$\alpha(S) = 0$），并且

$$H(S(\epsilon), S) \to 0 \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{3.8}$$

由此可得

$$\alpha(S(\epsilon)) \leq 2H(S(\epsilon), S) + \alpha(S) = 2H(S(\epsilon), S).$$

这与（3.8）意味着 α（S（ϵ）） $\to 0$ 当 $\epsilon \to 0$.

反过来，假设（3.7）成立，并证明 SEP（1.4）是广义适定的。由于 f 和 g 关于第一变量均为上半连续，因此，对于所有 S（ϵ），集合 $\epsilon > 0$. 是闭集。这很容易验证：

$$S = \cap_{\epsilon > 0} S(\epsilon).$$

由于 $\alpha(S(\epsilon)) \to 0$，根据定理 1 [32]（或者，参见 [28, 第 412] 页），S 非空且紧，并且

$$H(S(\epsilon), S) \to 0 \text{ as } \epsilon \to 0.$$

因此，由定理 3.8，SEP（1.4）是广义适定的。 □

注 3.11. 上述定理 3.10 表明，问题（1.4）的广义适定性与近似解集的紧性有关。

4. Well-Posedness and Uniqueness of Solution

变分问题适定性理论中最有趣的问题，是建立解的适定性与唯一性之间的等价关系。在本节中，我们将证明，在温和条件下，SEP(1.4) 的适定性等价于其解的存在性与唯一性。

定理 4.1. 设 C 和 Q 分别是有限维实希尔伯特空间 H_1 和 H_2 中非空的闭凸子集。设 $f: C \times C \to \mathbb{R}$ 和 $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的半连续双函数：

(i) f 和 g 均为单调函数。(ii) f 和 g 均关于第二个变量为凸函数。

(iii) f 和 g 均关于第二个变量下半连续。(iv) 对每个 $(p,q) \in C \times Q$.,
$f(p,p)$ 和 $g(q,q)$ 均为非负。
当且仅当 SEP (1.4) 具有唯一解时，SEP (1.4)是适定的。

证明。 由于上述定理的必要部分是显然的，我们仅证明其充分部分。假设 (x^*, y^*) 是 SEP（1.4）的唯一解。那么我们有以下

$$\begin{cases} x^* \in C, \quad y^* = Ax^* \in Q, \\ f(x^*, p) \geq 0, \quad \forall p \in C, \\ g(y^*, q) \geq 0, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{4.1}$$

由于 f 和 g 均为单调的，由（4.1）可得

$$\begin{cases} f(p, x^*) \leq -f(x^*, p) \leq 0, \quad \forall p \in C, \\ g(q, y^*) \leq -g(y^*, q) \leq 0, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{4.2}$$

令 $\{(x_n, y_n)\}$ 为 SEP (1.4) 的一个逼近序列。则存在 $0 < \epsilon_n \to 0$ 使得

$$\begin{cases} x_n \in C, \quad y_n \in Q, \\ \|y_n - Ax_n\| \leq \epsilon_n, \\ f(x_n, p) \geq -\epsilon_n, \quad \forall p \in C, \\ g(y_n, q) \geq -\epsilon_n, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{4.3}$$

因此，利用 f 和 g 在 (4.3) 中的单调性，我们得到如下结果

$$\begin{cases} x_n \in C, \quad y_n \in Q, \\ \|y_n - Ax_n\| \leq \epsilon_n, \\ f(p, x_n) \leq -f(x_n, p) \leq \epsilon_n, \quad \forall p \in C, \\ g(q, y_n) \leq -g(y_n, q) \leq \epsilon_n, \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{4.4}$$

现在我们必须证明 $\{(x_n, y_n)\}$ 有界。假设 $\{(x_n, y_n)\}$无界。不失一般性，我们可以假设 $\|(x_n, y_n)\| \to \infty$. 令 $u^* = (x^*, y^*)$, $u_n = (x_n, y_n)$ 并

$$t_n = \frac{1}{\|(x_n, y_n) - (x^*, y^*)\|} = \frac{1}{\|u_n - u^*\|},$$
$$v_n = (z_n, w_n) = u^* + t_n(u_n - u^*) = ((1 - t_n)x^* + t_n x_n, (1 - t_n)y^* + t_n y_n).$$

我们可以假设 $t_n \in (0, 1]$ 和 $v_n \to \bar{v} = (\bar{z}, \bar{w}) \neq u^*$ ，因为 H_1和 H_2 是有限维的。

由于 f 关于第二个变量是凸且下半连续的，我们得到

$$\begin{aligned} f(p,\bar{z}) &\leq \liminf_{n\to\infty} f(p,z_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} f(p,(1-t_n)x^*+t_nx_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}[(1-t_n)f(p,x^*)+t_nf(p,x_n)] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\ t_n\epsilon_n = 0, \quad \forall p\in C. \end{aligned} \tag{4.5}$$

类似地，由于 g 关于第二个变量是凸且下半连续的，我们有

$$\begin{aligned} g(q,\bar{w}) &\leq \liminf_{n\to\infty} g(q,w_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} g(q,(1-t_n)y^*+t_ny_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}[(1-t_n)g(q,y^*)+t_ng(q,y_n)] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\ t_n\epsilon_n = 0, \quad \forall q\in Q. \end{aligned} \tag{4.6}$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned} \|A(z_n)-w_n\| &= \|A((1-t_n)x^*+t_nx_n)-(1-t_n)y^*-t_ny_n\| \\ &= t_n\|Ax_n-y_n\| \leq t_n\epsilon_n \to 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

由于 $z_n\to\bar{z}$ 且 $w_n\to\bar{w}$，$A(\bar{z})=\bar{w}$。利用定理 2.7 以及 SEP 解的唯一性，很容易证明 $(\bar{z},\ \bar{w})=(x^*,\ y^*)=u^*$，这与假设矛盾。因此 $\{u_n\}$ 有界。

令 $\{u_{n_k}\}$ 为 $\{u_n\}$ 的任意子序列。由于 $\{u_n\}$ 有界，$\{u_{n_k}\}$ 存在一个收敛子序列 $\left\{u_{n_{k_l}}\right\}$，其极限为 $\bar{u}=(\bar{x},\bar{y})$。根据我们的假设，很容易证明 $\bar{u}=(\bar{x},\bar{y})$ 是 SEP (1.4) 的一个解。由于 $(x^*,y^*)=u^*$ 是 SEP (1.4) 的唯一解，因此得到 $\bar{u}=u^*$，从而逼近序列 $\{(x_n,y_n)\}$ 收敛到 SEP (1.4) 的唯一解。因此，SEP (1.4) 是适定的。□

下面的例子说明了我们的定理 4.1。

例 4.2. 设 $H_1=H_2=\mathbb{R}$、$A=I$、$C=Q=[0,+\infty)$、$f(x、\ p)=p^2-x^2$ 和 $g(y、\ q)=q-y$。容易验证，双函数 f 和 g满足定理 4.1 的所有条件。此外，可以证明点 (0, 0) 是 SEP (1.4) 的唯一解。因此，根据定理 4.1，SEP (1.4) 是适定的。

5. Conclusion

本文将适定性的概念引入无限维实希尔伯特空间中的分裂均衡问题，并建立了适定性的 Furi-Vignoli 型刻画。我们还证明，SEP（1.4）的适定性等价于其解在有限维实希尔伯特空间中的存在性与唯一性

中。此外，我们给出了一些非平凡的例子来说明我们的理论结果。一个有趣的问题是：定理4.1 在无限维希尔伯特空间中是否成立？这个问题仍未解决。

6. Acknowledgments

作者感谢编辑和两位匿名审稿人提出的宝贵意见和有益建议。

7. Declarations

7.1. 利益冲突。不存在利益冲突。

7.2. 数据可用性声明。作者承认，本研究中展示的数据必须在发表前存入符合要求的存储库并向公众开放。

References

[1] Tykhonov, A.N.：关于泛函优化问题的稳定性。《苏联计算数学与数学物理杂志》6, 631-634（1966） [2] Furi, M., Vignoli, A.：关于度量空间中泛函的适定优化问题。《优化理论与应用杂志》5(3)，225-229（1970） [3] Lucchetti, R., Patrone, F.：极小值问题的Tyhonov适定性刻画及其在变分不等式中的应用。《数值泛函分析与优化》3(4), 461-476（1981） [4] Lucchetti, R., Patrone, F.：由线性算子控制的适定变分不等式的一些性质。《数值泛函分析与优化》5(3)，349-361（1982/83） [5] Lignola, M.B., Morgan, J.：带约束优化问题的适定性，其中约束由具有唯一解的变分不等式定义。《全球优化杂志》16(1)，57-67（2000） [6] Zolezzi, T.：优化中的适定性判据及其在变分法中的应用。《非线性分析》TMA 25，437-453（1995） [7] Zolezzi, T.：优化问题的扩展适定性。《优化理论与应用杂志》91，257-266（1996） [8] Lignola, M.B.：拟变分不等式的适定性与L-适定性。《优化理论与应用杂志》128(1)，119-138（2006） [9] Fang, Y.P., Huang, N.J., Yao, J.C.：混合变分不等式、包含问题和不动点问题的适定性。《全球优化杂志》41，117-133（2008） [10] Fang, Y.P., Huang, N.J., Yao, J.C.：巴拿赫空间中混合变分不等式的扰动适定性。《欧洲运筹学杂志》201(3)，682-692（2010） [11] Huang, X.X., Yang, X.Q., Zhu, D.L.：带泛函约束的变分不等式问题的Levitin-Polyak适定性。《全球优化杂志》44(2), 159-174（2009） [12] Lalitha, C.S., Bhatia, G.：Minty型参数拟变分不等式问题的Levitin-Polyak适定性。《Positivity》16(3)，527-541（2012） [13] Li, X.B., Xia, F.Q.：巴拿赫空间中一般混合变分不等式的Hadamard适定性。《全球优化杂志》64(6), 1617-1629（2013） [14] Wong, M.M.：一般混合隐式拟变分不等式、包含问题和不动点问题的适定性。《非线性凸应用杂志》14(2)，389-414（2013） [15] Xiao, Y.B., Huang, N.J.：一类带扰动的变分-半变分不等式的适定性。《优化理论与应用杂志》151(1)，33-51（2011）

[16] Facchinei, F., Pang, J.S.：《有限维变分不等式与互补问题》。第I卷，Springer，纽约（2003）[17] Stampacchia, G.：凸集上的强制双线性型。《法国科学院周报》258，4413-4416（1964）´[18] Noor, M.D.：适定变分不等式。《应用数学与计算》11(1-2)，165-172（2003）[19] Dong, Q.L., Lu, Y.Y., Yang, J., He, S.：使用投影压缩算法近似求解多值变分不等式。《数值算法》76(3)，799-812（2017）[20] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S.：分裂变分不等式问题的算法。《数值算法》59(2)，301-323（2012）[21] Ansari, Q.H., Nimana, N., Petrot, N.：分裂层次变分不等式问题及相关问题。《不动点理论及其应用》2014:208（2014）[22] Hu, R., Fang, Y.P.：通过扰动刻画分裂变分不等式问题的Levitin-Polyak适定性。《优化》65(9)，1717-1732（2016）[23] Bianchia, M., Kassay, G., Pini, R.：适定均衡问题。《非线性分析》72，460-468（2010）[24] Blum, E., Oettli, W.：从优化和变分不等式到均衡问题。《数学学生》63，123-145（1994）[25] Eslamizadeh, L., Naraghirad, E.：拓扑向量空间中集值均衡问题解的存在性及其应用。《优化通讯》14，65-83（2020）[26] Alleche, B., Radulescu, V.D.：伪单调情形下集值均衡问题的进一步研究及其在Browder变分包含中的应用。《优化通讯》12，1789-1810（2018）[27] Bianchi, M., Kassay, G., Pini, R.：向量均衡问题的Ekland原理。《非线性分析》66，1454-1464（2007）[28] Kuratowski, K.：《拓扑学》。第I、II卷，Academic Press，纽约（1968）[29] Klein, E., Thompson, A.C.：《对应理论》。Wiley，纽约（1984）[30] Bauschke, H.H., Combettes, P.L.：《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》。Springer，纽约（2011）[31] Rakocevik, V.：非紧性测度及其若干应用。《FILOMAT》12(2)，87-120（1998）[32] Horvath, C.：完备度量拓扑向量空间中的非紧性测度与多值映射。《数学分析及其应用杂志》108，403-408（1985）

(S. Dey)
Department of Mathematics, India Institute of Technology Madras,Chennai, India*Email address*: deysoumitra2012@gmail.com (S. Dey)
Department of Mathematics, The Technion–Israel Institute of Tech-nology, Haifa, 3200003, Israel(V. Vetrivel) Department of Mathematics, India Institute of TechnologyMadras, Chennai, India*Email address*: vetri@iitm.ac.in (H. K. Xu) Department of Mathematics, School of Science, Hangzhou DianziUniversity, Hangzhou, 310018, China*Email address*: xuhk@hdu.edu.cn (H. K. Xu) College of Mathematics and Information Science, Henan NormalUniversity, Xinxiang, 453007, China